

Condition d'entropie multidimensionnelle

Nous présentons une approche générale pour exprimer la condition d'entropie dans le cas de l'approximation de systèmes hyperboliques de lois de conservation par un schéma continu en temps et discret en espace avec la méthode des volumes finis mutidimensionnels. Nous établissons le lien avec le schéma de Godunov dans le cas de la dynamique des gaz.

1) Introduction.

- Nous étudions un système hyperbolique de lois de conservation

$$(1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} f(W) = 0$$

muni d'une entropie de Lax η , de sorte que nous cherchons les solutions entropiques du système (1) qui vérifient de plus au sens des distributions

$$(2) \quad \frac{\partial \eta(W)}{\partial t} + \operatorname{div} \xi(W) \leq 0$$

où $\xi(W)$ est le flux d'entropie associé à l'entropie η et au flux f du système (1).

- Nous étudions une semi-discrétisation en espace du système (1) par la méthode des volumes finis ; les inconnues sont les valeurs moyennes des variables conservées W :

$$(3) \quad W_K = \frac{1}{|K|} \int_K W(x) dx$$

et l'intégration en espace de la loi de conservation (1) fait apparaître un flux $\Phi(n)$ à l'interface de normale n entre deux volumes de contrôle :

$$(4) \quad |K| \frac{dW_K}{dt} + \int_{\partial K} \Phi(n) d\gamma = 0.$$

Le choix du flux numérique $\Phi(n)$ définit complètement le schéma en espace. Il importe de le choisir de façon à satisfaire un analogue discret de l'inégalité d'entropie (2) du type

$$(5) \quad |K| \frac{d}{dt} \eta(W_K) + \int_{\partial K} \xi(n) d\gamma \leq 0,$$

où $\xi(n)$ est un flux numérique d'entropie à déterminer.

- Nous proposons dans cette note une méthode pour déterminer le flux d'entropie dans un cadre très général qui, moyennant une condition sur le flux numérique $\Phi(n)$, assure que l'inégalité d'entropie (5) est satisfaite. Il s'agit d'une généralisation de travaux menés à une dimension d'espace par Osher [Os84], Tadmor [Ta87] et Khalfallah-Lerat [KL89].

- Nous introduisons les variables entropiques φ définies par :

$$(6) \quad \varphi = \eta'(W)$$

et le changement de fonction réciproque $\varphi \longmapsto W$ est bien défini compte tenu de la stricte convexité de η . Nous introduisons également une transformée $\psi(\bullet)$ du flux d'entropie :

$$(7) \quad \psi \equiv \varphi f(W) - \xi(W)$$

et, pour un couple (φ, W) vérifiant la relation (6), il est clair que ψ ne dépend que de la variable entropique φ et vérifie :

$$(8) \quad d\psi = d\varphi \bullet f(W(\varphi)).$$

2) Flux d'entropie.

- Pour une interface F de normale $n(F)$ supposée intérieure au domaine de calcul Ω , nous disposons d'un volume K_g à sa gauche et d'un volume de contrôle K_d à sa droite (figure 1).

- Nous calculons d'abord le flux d'entropie de part et d'autre de l'interface F à partir de la valeur au centre des deux mailles voisines et d'extrapolations d'ordre un. Rappelons d'abord que nous avons la relation suivante, qui caractérise un flux d'entropie :

$$(9) \quad d\xi(W) = \eta'(W) df(W) = \varphi(W) df(W).$$

Il est donc naturel d'extrapoler le flux $\xi \bullet n$ à gauche de l'interface par la relation

$$(10) \quad (\xi \bullet n)(F, g) = \xi_g \bullet n + \varphi_g (\Phi(n) - f_g \bullet n)$$

où l'indice g dans le second membre de la relation (10) signifie qu'on prend le flux d'entropie $\xi \bullet n$, la variable entropique φ et le flux f relativement à l'état à gauche de l'interface F . Nous avons une relation analogue pour l'autre côté de l'interface :

$$(11) \quad (\xi \bullet n)(F, d) = \xi_d \bullet n + \varphi_d (\Phi(n) - f_d \bullet n)$$

et nous calculons le flux d'entropie numérique $\xi(n)$ en pondérant les relations (10) et (11) très simplement :

$$(12) \quad \xi(n) = \frac{1}{2} \left(\xi_g \bullet n + \varphi_g (\Phi(n) - f_g \bullet n) + \xi_d \bullet n + \varphi_d (\Phi(n) - f_d \bullet n) \right).$$

Pour faire apparaître le flux d'entropie de la relation (12), nous multiplions la relation (4) par $\eta'(W_K) = \varphi_K$, remarquons que l'on a identiquement

$$(13) \quad \int_{\partial K} f(W_K) \bullet n \, d\gamma = 0$$

donc nous avons

$$(14) \quad |K| \frac{d}{dt} \eta(W_K) + \sum_{F \in \partial K} \int_F \varphi_K (\Phi(n) - f_K \bullet n) \, d\gamma = 0.$$

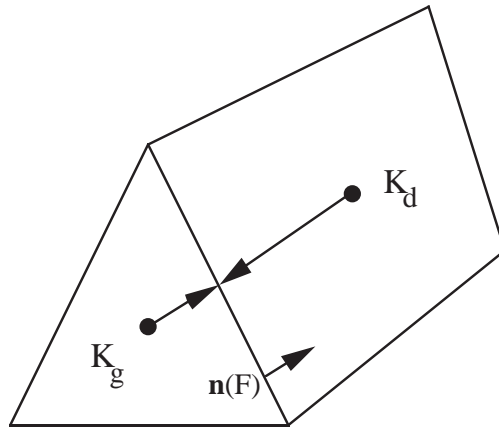


Figure 1 Notations.

• Nous avons identité complète entre l'élément K et l'élément à gauche K_g des diverses interfaces F puisque nous supposons la normale n orientée vers l'extérieur de l'élément. Donc nous avons le calcul élémentaire suivant :

$$(15) \quad \varphi_K (\Phi(n) - f_K \cdot n) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\xi_g \cdot n + \varphi_g (\Phi(n) - f_g \cdot n)) - \xi_g \cdot n \\ + \frac{1}{2} (\xi_d \cdot n + \varphi_d (\Phi(n) - f_d \cdot n)) \\ + \frac{1}{2} \left[\xi_g \cdot n + \varphi_g (\Phi(n) - f_g \cdot n) \right. \\ \left. - (\xi_d \cdot n + \varphi_d (\Phi(n) - f_d \cdot n)) \right] \end{cases}$$

$$(16) \quad \varphi_K (\Phi(n) - f_K \cdot n) = \xi(n) - \frac{1}{2} ((\varphi_d - \varphi_g) \Phi(n) + \psi_g \cdot n - \psi_d \cdot n) - \xi_g \cdot n$$

qui nous conduit à poser

$$(17) \quad \mathcal{D}(F) = (\varphi_d - \varphi_g) \Phi(n) + \psi_g \cdot n - \psi_d \cdot n.$$

Nous pouvons réécrire la relation (16) sous la forme

$$(18) \quad \varphi_K (\Phi(n) - f_K \cdot n) = \xi(n) - \frac{1}{2} \mathcal{D}(F) - \xi_K \cdot n.$$

Nous intégrons la relation (18) sur le bord ∂K de l'élément K , remarquons que nous avons identiquement

$$(19) \quad \int_{\partial K} \xi_K \cdot n \, d\gamma = 0$$

et, compte tenu de la relation (14), nous en déduisons la relation fondamentale suivante

$$(20) \quad |K| \frac{d}{dt} \eta(W_K) + \int_{\partial K} \xi(n) \, d\gamma = \frac{1}{2} \int_{\partial K} \mathcal{D}(F) \, d\gamma.$$

Lorsque l'élément K est au bord du domaine d'étude Ω , un état W_0 permet de prendre en compte les conditions aux limites relatives au problème (1) (voir les détails par exemple dans [DLf88] et [DLf89]) et il est naturel de définir le flux d'entropie à la frontière par la relation

$$(21) \quad \xi(n) = \frac{1}{2} \left(\varphi_K (\Phi(n) - f_K \cdot n) + \xi_0 \cdot n + \varphi_0 (\Phi(n) - f_0 \cdot n) \right).$$

3) Inégalité d'entropie.

• La relation (20) qui permet de préciser l'évolution de l'entropie dans la maille K est très générale. L'inégalité d'entropie (5) est donc satisfaite sous la condition suffisante

$$(22) \quad \mathcal{D}(F) \leq 0$$

et le schéma associé au flux numérique $\Phi(n)$ est alors dit “à solutions stationnaires entropiques”.

- Nous remarquons que dans le changement de la direction de la normale, c'est à dire de n en $-n$, la conservativité du schéma impose

$$(23) \quad \Phi(-n) = -\Phi(n)$$

et que nous avons également, compte tenu de la relation (12) :

$$(24) \quad \xi(-n) = -\xi(n)$$

alors que la dépendance par rapport à la direction normale n'est pas explicitée dans la définition (17) de la dissipation d'entropie. En effet, si on change n en $-n$, il convient aussi d'échanger gauche et droite qui ne sont définis que relativement au choix d'une direction normale, ce qui laisse inchangée l'expression de $\mathcal{D}(F)$, compte tenu des relations (23) et (24).

4) Equations d'Euler de la dynamique des gaz.

- Nous considérons maintenant le cas des équations d'Euler de la dynamique des gaz, à deux dimensions d'espace pour fixer les idées. Les variables conservées de masse, impulsion et énergie se définissent par

$$(25) \quad W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^t$$

et les variables entropiques prennent une forme simple en fonction de la thermodynamique (voir Godunov et al [GZIKP79]) :

$$(26) \quad \varphi = \left(\frac{1}{T} \left(\mu - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right), \frac{u}{T}, \frac{v}{T}, -\frac{1}{T} \right),$$

où ρ , u , v , E , T et μ désignent respectivement la densité, les composantes selon x et y de la vitesse, l'énergie totale spécifique, la température et le potentiel chimique. Les flux f_x et f_y ont la forme bien classique

$$(27) \quad f_x = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u v, \rho u E + p u)^t$$

$$(28) \quad f_y = (\rho v, \rho u v, \rho v^2 + p, \rho v E + p v)^t.$$

Nous pouvons expliciter la forme de la condition d'entropie (22) lorsque l'interface F est une paroi solide. Dans ce cas, la condition limite continue s'écrit physiquement

$$(29) \quad u \bullet n = 0$$

ce qui impose un flux limite faisant apparaître une pression :

$$(30) \quad \Phi(n) = (0, p^* n_x, p^* n_y, 0)^t.$$

L'état W_0 de la relation (21) est alors le "miroir" de l'état W_K dans la maille contenant l'interface F , c'est à dire, en notant τ le vecteur unitaire déduit de la direction normale n par rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$:

$$(31) \quad W_0 = \left(\rho, \rho((-u \cdot n)n + (u \cdot \tau)\tau), \rho E \right)^t.$$

L'état W_0 a même vitesse tangentielle et même thermodynamique que l'état W_K , mais une vitesse normale opposée. On a par ailleurs

$$(32) \quad \xi_K \cdot n = \frac{p_K}{T_K} u \cdot n$$

ce qui conduit à l'expression suivante pour la dissipation de l'entropie :

$$(33) \quad \mathcal{D}(F) = \frac{2}{T_K} (u \cdot n) (p_K - p^*).$$

- Nous terminons ce paragraphe par le théorème suivant, énoncé dans un cadre monodimensionnel, mais dont la généralisation à deux ou trois dimensions d'espace est immédiate.

Théorème 1.

Le schéma de Godunov est entropique au sens de l'inégalité (22) pour les équations d'Euler de la dynamique des gaz.

Preuve du théorème 1.

- Il faut montrer que, pour W_g et W_d états donnés et $\Phi(n)$ flux de la solution en $x = 0$ du problème de Riemann posé entre W_g et W_d , la dissipation d'entropie $\mathcal{D}(F)$ est négative. Rappelons que la solution du problème de Riemann comporte une 1-onde (de choc ou de détente) suivie d'un premier état intermédiaire W_1 , d'une 2-discontinuité de contact, d'un second état intermédiaire W_2 et d'une 3-onde de choc ou de détente (figure 2). Nous appelons "état de Godunov" l'état $W(x = 0)$ qui permet de calculer le flux numérique.

- Nous rappelons qu'à travers une 1-onde de choc de célérité σ_1 , le saut d'entropie est donné par la relation

$$(34) \quad \xi_1 - \xi_g - \sigma_1 (\eta_1 - \eta_g) = -m_1 (s_1 - s_g)$$

où s désigne l'entropie spécifique et $m_1 \equiv \rho_1 (u_1 - \sigma_1) = \rho_g (u_g - \sigma_1)$ le flux de masse (positif) qui traverse le 1-choc. De même, à travers un 3-choc de célérité σ_3 , nous avons

$$(35) \quad \xi_d - \xi_2 - \sigma_3 (\eta_d - \eta_2) = -m_3 (s_d - s_2)$$

où le flux de masse $m_3 \equiv \rho_2 (u_2 - \sigma_3) = \rho_d (u_d - \sigma_3)$ est maintenant négatif. Les seconds membres de (34) et (35) sont négatifs puisque la solution recherchée est entropique au sens de Lax et ainsi nous avons

$$(36) \quad s_1 \geq s_g$$

$$(37) \quad s_2 \geq s_d$$

et l'entropie spécifique croît toujours à la traversée d'une onde de choc.

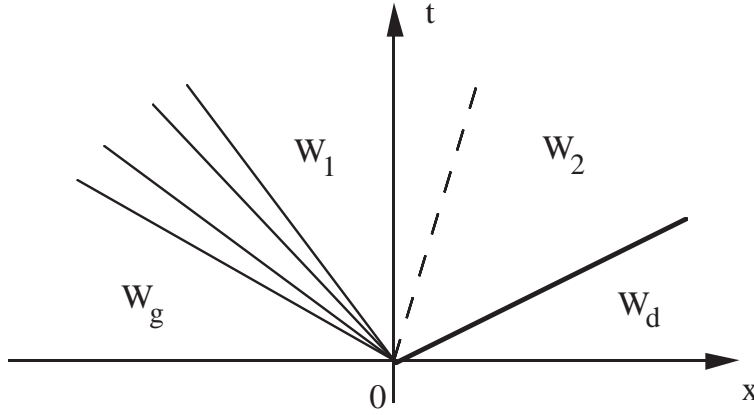


Figure 2 Problème de Riemann.

- Nous décomposons la dissipation (17) de façon à mettre en évidence ce qui vient de la gauche et ce qui vient de la droite. Nous avons, en notant sans le moindre indice l'état de Godunov,

$$(38) \quad \mathcal{D}(F) = (\xi - \xi_g - \varphi_g (\Phi - f_g)) + (\xi_d - \xi + \varphi_d (\Phi - f_d)).$$

Nous montrons ici, en suivant en fait une démarche initiée par l'équipe de Mazet [BDM89], qu'on a en fait simultanément

$$(39) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g (\Phi - f_g) \leq 0$$

$$(40) \quad \xi_d - \xi + \varphi_d (\Phi - f_d) \leq 0.$$

La première inégalité (39) peut s'interpréter comme une inégalité d'entropie à la limite. Nous l'avons proposée avec P. Le Floch [DLf88] et elle a été établie théoriquement par Benabdallah-Serre [BS87]. Nous la détaillons avec des arguments élémentaires dans le paragraphe qui suit.

- Preuve de l'inégalité (39).

Nous distinguons divers cas, selon que dans le quadrant $\zeta \equiv \frac{x}{t} \leq 0$ (*c.f.* figure 2), nous disposons de zéro, une, deux ou trois ondes autosemblables. S'il n'y a pas d'onde dans le quadrant $\frac{x}{t} \leq 0$, nous avons alors simplement

$$(41) \quad \Phi = f_g, \quad \xi = \xi_g$$

et l'inégalité (39) est dans ce cas une égalité.

- Si l'état de Godunov est sonique dans la 1-onde, nous disposons d'une 1-détente entre $\zeta = \zeta_g$ et $\zeta = 0$, qui vérifie donc

$$(42) \quad \frac{df}{d\zeta} = \zeta \frac{dW}{d\zeta}$$

$$(43) \quad \frac{d\xi}{d\zeta} = \zeta \frac{d\eta(W)}{d\zeta}.$$

On tire de ces égalités

$$(44) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) = \int_{\zeta_g}^0 \zeta \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_g \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta.$$

La fonction $\zeta \mapsto \zeta$ est croissante négative donc d'après la seconde formule de la moyenne, il existe $\zeta^* \leq 0$ de sorte que

$$\int_{\zeta_g}^0 \zeta \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_g \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta = \zeta_g \int_{\zeta_g}^{\zeta^*} \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_g \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta$$

$$(45) \quad \int_{\zeta_g}^0 \zeta \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_g \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta = \zeta_g \left(\eta(W(\zeta^*)) - \eta_g - \varphi_g (W(\zeta^*) - W_g) \right)$$

et l'inégalité (39) est une conséquence de la convexité de la fonction $W \mapsto \eta(W)$ et de l'hypothèse $\zeta_g \leq 0$.

- Si l'état de Godunov est le premier état intermédiaire W_1 et si la 1-onde est une onde de détente, le raisonnement précédent s'applique sans modification. Si c'est une 1-onde de choc, la relation de Rankine et Hugoniot

$$(46) \quad f_1 - f_g = \sigma_1 (W_1 - W_g)$$

jointe à l'inégalité d'entropie issue de (34) montre que nous avons

$$(47) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) \leq \sigma_1 (\eta_1 - \eta_g - \varphi_g (W_1 - W_g))$$

et la conclusion est conséquence de la convexité de $\eta(\bullet)$ et de l'hypothèse $\sigma_1 \leq 0$.

- Si l'état de Godunov est le second état intermédiaire W_2 , nous disposons d'une 1-onde de choc ou de détente suivie par une discontinuité de contact de célérité $\sigma_2 \leq 0$ entre les états W_1 et W_2 :

$$(48) \quad f_2 - f_1 = \sigma_2 (W_2 - W_1)$$

$$(49) \quad \xi_2 - \xi_1 = \sigma_2 (\eta_2 - \eta_1).$$

Nous avons

$$(50) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) = \sigma_2 (\eta_2 - \eta_1 - \varphi_g (W_2 - W_1)) + (\xi_1 - \xi_g - \varphi_g (f_1 - f_g)).$$

Si la 1-onde est un choc de célérité $\sigma_1 \leq \sigma_2$, nous déduisons de (50) et (47) l'inégalité suivante

$$(51) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) \leq \begin{cases} \sigma_2 (\eta_2 - \eta_g - \varphi_g(W_2 - W_g)) \\ + (\sigma_1 - \sigma_2) (\eta_1 - \eta_g - \varphi_g(W_1 - W_g)) \end{cases}$$

qui montre la propriété, au vu de la convexité de l'entropie mathématique et des hypothèses sur les célérités. Si la 1-onde est une détente, compte tenu de (50) et (45), nous avons, en notant ζ_1 la valeur de $u - c$ pour le premier état intermédiaire,

$$(52) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) = \begin{cases} \sigma_2 (\eta_2 - \eta_g - \varphi_g(W_2 - W_g)) \\ + \int_{\zeta_g}^{\zeta_1} (\zeta - \sigma_2) \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_g \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta \end{cases}$$

et la conclusion tombe comme dans les cas précédents.

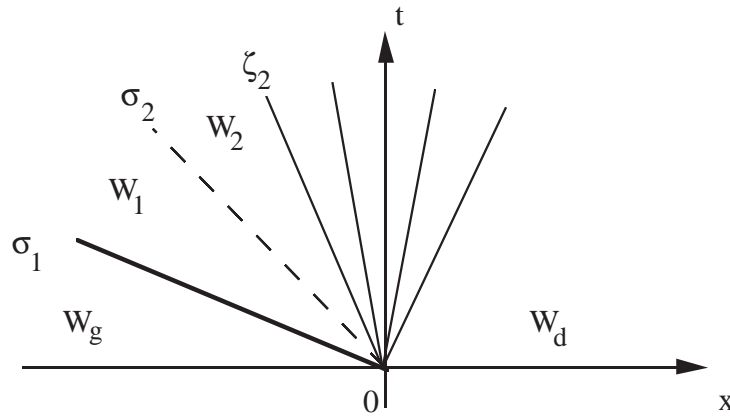


Figure 3 Etat de Godunov sonique dans la 3-détente.

- Si l'état de Godunov est l'état sonique dans la 3-détente et ce cas est illustré à la figure 3, nous avons la décomposition

$$\xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) = \begin{cases} (\xi - \xi_2 - \varphi_g(\Phi - f_2)) \\ + \sigma_2 (\eta_2 - \eta_1 - \varphi_g(W_2 - W_1)) \\ + (\xi_1 - \xi_g - \varphi_g(f_1 - f_2)) \end{cases}$$

qui, compte tenu de calculs analogues à ceux de la relation (45), permet d'écrire, en notant ζ_2 la célérité au début de la 3-détente,

$$(53) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) = \begin{cases} \zeta_2 (\eta^* - \eta_2 - \varphi_g(W^* - W_2)) \\ + \sigma_2 (\eta_2 - \eta_1 - \varphi_g(W_2 - W_1)) \\ + (\xi_1 - \xi_g - \varphi_g(f_1 - f_g)). \end{cases}$$

Si la 1-onde est un choc, comme pour l'inégalité (45), nous avons :

$$(54) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) \leq \begin{cases} \zeta_2 (\eta^* - \eta_g - \varphi_g(W^* - W_g)) \\ + (\sigma_2 - \zeta_2) (\eta_2 - \eta_g - \varphi_g(W_2 - W_g)) \\ + (\sigma_1 - \sigma_2) (\eta_1 - \eta_g - \varphi_g(W_1 - W_g)) \end{cases}$$

et le résultat est une conséquence des inégalités sur les vitesses d'ondes (voir la figure 3) et de la convexité de l'entropie $\eta(\bullet)$. Dans le cas où la 1-onde est une détente, on adapte la relation (52) en tenant compte de la relation (53) et il vient

$$(55) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) = \begin{cases} \zeta_2 (\eta^* - \eta_g - \varphi_g(W^* - W_g)) \\ + (\sigma_2 - \zeta_2) (\eta_2 - \eta_g - \varphi_g(W_2 - W_g)) \\ + \int_{\zeta_g}^{\zeta_1} (\zeta - \sigma_2) \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_g \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta \end{cases}$$

et la propriété en résulte.

- Si l'état de Godunov est l'état de droite et si la 3-onde est une détente, la démonstration précédente est inchangée. S'il s'agit d'une onde de choc, compte tenu de l'inégalité d'entropie issue de la relation (35), nous avons

$$(56) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) \leq \begin{cases} \sigma_3 (\eta_d - \eta_2 - \varphi_g(W_d - W_2)) \\ + \sigma_2 (\eta_2 - \eta_1 - \varphi_g(W_2 - W_1)) \\ + (\xi_1 - \xi_g - \varphi_g(f_1 - f_g)) \end{cases}$$

et la preuve s'achève comme dans les autres cas. Ceci termine la démonstration de l'inégalité (39).

- Preuve de l'inégalité (40).

Nous la menons en suivant un plan analogue à celui proposé pour l'inégalité d'entropie (39). S'il n'y a pas d'onde dans le quadrant $\zeta \geq 0$, on a alors

$$(57) \quad \Phi = f_d, \quad \xi = \xi_d$$

et l'inégalité (40) est triviale. Si l'état de Godunov est sonique dans la 3-détente, on a, d'après (42) et (43) :

$$(58) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) = \int_0^{\zeta_d} \zeta \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_d \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta$$

$$(58) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) = \zeta_d \int_{\zeta^*}^{\zeta_d} \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_d \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta$$

compte tenu de la seconde formule de la moyenne, pour une célérité ζ^* positive. Nous pouvons calculer exactement l'intégrale du second membre de la relation (58), et nous avons

$$(59) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) = (-\zeta_d) \left(\eta(W(\zeta^*)) - \eta_d - \varphi_d(W(\zeta^*) - W_d) \right)$$

ce qui montre l'inégalité (40) dans ce cas particulier.

- Si l'état de Godunov est le second état intermédiaire et si la 3-onde est une détente, les relations (58) et (59) s'appliquent sans modification, ce qui montre la propriété dans ce cas. Si la 3-onde est une onde de choc, la relation de Rankine et Hugoniot s'écrit ici

$$(60) \quad f_d - f_2 = \sigma_3 (W_d - W_2)$$

et l'égalité (35) fournit, compte tenu du second principe de la thermodynamique, une inégalité analogue pour le flux d'entropie. Nous en déduisons

$$(61) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) \leq \sigma_3 (\eta_d - \eta_2 - \varphi_d(W_d - W_2))$$

et l'inégalité (40) est conséquence de la convexité de $\eta(\bullet)$ (la valeur de l'entropie en W_2 est "au dessus" du plan tangent au point W_d) et de l'hypothèse $\sigma_3 \geq 0$.

- Si l'état de Godunov est le premier état intermédiaire W_1 , nous devons prendre en compte les relations (48) et (49). Nous avons alors :

$$(62) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) = \xi_d - \xi_2 - \varphi_d(f_d - f_2) + \sigma_2 (\eta_2 - \eta_1 - \varphi_d(W_2 - W_1)).$$

Si la 3-onde est un choc, nous déduisons de (61) et (62) :

$$(63) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) \leq \begin{cases} (\sigma_3 - \sigma_2) (\eta_d - \eta_2 - \varphi_d(W_d - W_2)) \\ + \sigma_2 (\eta_d - \eta_1 - \varphi_d(W_d - W_1)) \end{cases}$$

et la relation (40) est alors conséquence de la convexité de la fonction $\eta(\bullet)$ et des relations $\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq 0$. Si la 3-onde est une détente, nous avons, compte tenu de la relation (58)

$$(64) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) = \begin{cases} \int_{\zeta_3}^{\zeta_d} (\zeta - \sigma_2) \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_d \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta \\ + \sigma_2 (\eta_d - \eta_1 - \varphi_d(W_d - W_1)) \end{cases}$$

et la seconde formule de la moyenne jointe au fait que la fonction $\zeta \mapsto (\zeta - \sigma_2)$ est croissante positive, nous avons

$$(65) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) = \begin{cases} (\zeta_d - \sigma_2) \int_{\zeta^*}^{\zeta_d} \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_d \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta \\ + \sigma_2 (\eta_d - \eta_1 - \varphi_d(W_d - W_1)) \end{cases}$$

et la propriété cherchée résulte des mêmes arguments que précédemment.

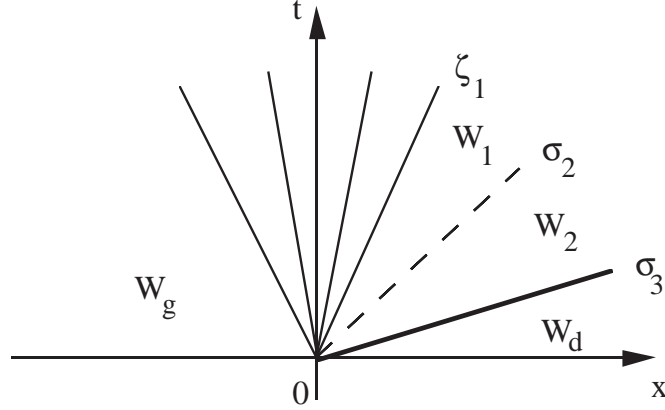


Figure 4 Etat de Godunov sonique dans la 1-détente.

- Si l'état de Godunov est sonique dans la 1-détente, les notations sont celles de la figure 4. Comme pour établir la relation (53), nous avons

$$(66) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) \leq \begin{cases} \zeta_1 (\eta_d - \eta^* - \varphi_d(W_d - W^*)) \\ \quad + \sigma_2 (\eta_2 - \eta_1 - \varphi_d(W_2 - W_1)) \\ \quad + (\xi_d - \xi_2 - \varphi_d(f_d - f_2)) \end{cases}$$

où ζ_1 désigne la valeur de la 1-célérité pour l'état W_1 . Si la 3-onde est un choc, on regroupe les deux derniers termes du membre de droite de (66) comme à la relation (63), ce qui entraîne :

$$(67) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) \leq \begin{cases} \zeta_1 (\eta_d - \eta^* - \varphi_d(W_d - W^*)) \\ \quad + (\sigma_2 - \zeta_1) (\eta_d - \eta_1 - \varphi_d(W_d - W_1)) \\ \quad + (\sigma_3 - \sigma_2) (\eta_d - \eta_2 - \varphi_d(W_d - W_2)) \end{cases}$$

et l'inégalité (40) en résulte. Si la 3-onde est une détente, nous avons, en notant ζ_3 la valeur de $u + c$ relative au second état intermédiaire :

$$(68) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) \leq \begin{cases} \zeta_1 (\eta_d - \eta^* - \varphi_d(W_d - W^*)) \\ \quad + (\sigma_2 - \zeta_1) (\eta_d - \eta_1 - \varphi_d(W_d - W_1)) \\ \quad + \int_{\zeta_3}^{\zeta_d} (\zeta - \sigma_2) \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_d \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta \end{cases}$$

et la relation (40) s'en déduit facilement dans ce cas. Si l'état de Godunov est l'état de gauche et dans le cas d'une 1-onde de détente, le paragraphe qui précède s'applique sans modification pour établir la relation recherchée. Si on est en présence d'un 1-choc, nous décomposons la production d'entropie sous la forme :

$$(69) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) \leq \begin{cases} \zeta_1 (\eta_d - \eta^* - \varphi_d(W_d - W^*)) \\ + \sigma_2 (\eta_2 - \eta_1 - \varphi_d(W_2 - W_1)) \\ + (\xi_d - \xi_2 - \varphi_d(f_d - f_2)) \end{cases}$$

et la preuve s'achève en réappliquant exactement la même série d'arguments que pour le paragraphe précédent. Ceci termine la démonstration du théorème. \square

- Remarquons en guise de conclusion que le résultat qui précède s'étend sans difficulté au cas multidimensionnel puisque à chaque interface, on résout un problème de Riemann purement monodimensionnel.
- Nous avons établi dans cette note une généralisation d'une inégalité d'entropie classique pour les schémas continus en temps et dans le cas d'une seule dimension d'espace à un maillage arbitraire de type volumes finis dans un cadre multidimensionnel. Celle-ci est vérifiée pour le schéma de Godunov et nous en avons donné une preuve détaillée. Nous renvoyons aux travaux de Vila et son équipe [Vi91] pour l'établissement d'une inégalité d'entropie complètement discrétisée relative au schéma de Godunov à plusieurs dimensions d'espace.

