

# Eléments finis naturels pour l'axisymétrie

François Dubois\* et Stefan Duprey†

31 mai 2006

## Résumé.

Nous étudions l'approximation d'un problème à trois dimensions axisymétrique en coordonnées cylindriques. Nous proposons un élément fini axisymétrique conforme dans l'espace de Sobolev où le problème est mathématiquement bien posé. Nous comparons nos résultats avec le schéma proposé par B. Mercier et G. Raugel utilisant des éléments finis standards avec une condition de Dirichlet discrète sur l'axe. Les défauts d'axe disparaissent avec notre schéma et nous observons expérimentalement le même ordre de convergence asymptotique pour les deux méthodes.

## Natural finite elements for axisymmetric problems

### Abstract.

We study the approximation of a three-dimensional problem with cylindrical symmetry in polar coordinates. We propose a new kind of axisymmetric finite element which is conforming in the Sobolev space where the problem is mathematically well-posed. We compare our results with the previous scheme proposed by B. Mercier and G. Raugel using standard finite elements with a discrete Dirichlet condition on the axis. The axis defaults vanish with our scheme and we experimentally observe the same asymptotic order of convergence for both methods.

---

\*Conservatoire National des Arts et Métiers Paris et Université Paris 11 Orsay.

†Université Henri Poincaré Nancy et EADS Suresnes.

## 1 Problème continu

• Nous considérons le problème modèle de Dirichlet-Neumann pour le Laplacien en domaine axisymétrique, défini dans un ouvert  $\Omega \subset ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  (constitué des points  $(r, z)$  tel que  $r > 0, z \in \mathbb{R}$ ), connexe, borné et de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^1$  par morceaux, se décomposant en trois parties  $\Gamma_0, \Gamma_N$  et  $\Gamma_D$ , d'intérieurs disjoints :  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D$ , où  $\Gamma_0 = \partial\Omega \cap \{r = 0\}$  :

$$(1) \quad \begin{cases} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{u(r, z)}{r^2} = f(r, z), & \forall (r, z) \in \Omega \\ u = 0, & \forall (r, z) \in \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \forall (r, z) \in \Gamma_N \end{cases}$$

Dans la suite, on note  $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} |u|^2 dx}$  la norme  $L^2$  d'une fonction  $u$  de carré intégrable. Pour toute fonction mesurable, définie sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  par  $u : (r, z) \mapsto u(r, z)$ , on note  $u_{\sqrt{\cdot}}$  la fonction  $u_{\sqrt{\cdot}}(r, z) \equiv \frac{u(r, z)}{\sqrt{r}}$  et  $u^{\sqrt{\cdot}}$  la fonction  $u^{\sqrt{\cdot}}(r, z) \equiv \sqrt{r}u(r, z)$ . On considère les espaces de Sobolev à poids suivants :

$$(2) \quad L_a^2(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tel que } u^{\sqrt{\cdot}} \in L^2(\Omega)\}.$$

$$(3) \quad H_a^1(\Omega) = \{u \in L_a^2(\Omega), \text{ tel que } u_{\sqrt{\cdot}} \in L^2(\Omega), \nabla u \in L_a^2(\Omega)\}.$$

On pose  $\|u\|_{L_a^2(\Omega)} = \|u^{\sqrt{\cdot}}\|_{L^2(\Omega)}$ ,

$$\|u\|_{H_a^1(\Omega)} = \sqrt{\|u\|_{L_a^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L_a^2(\Omega)}^2 + \|u_{\sqrt{\cdot}}\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

comme normes respectives. Avec les notations précédentes, pour  $\Gamma \subset \partial\Omega$ , on note  $L_a^2(\Gamma, \partial\Omega)$  l'ensemble des fonctions  $u : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mesurables, nulles hors de  $\Gamma$  et telles que  $u^{\sqrt{\cdot}} \in L^2(\Gamma)$ .

• On note  $C_a^\infty(\overline{\Omega})$  l'ensemble des restrictions à  $\Omega$  des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ . Suivant B. Mercier et G. Raugel [3], cet ensemble est dense dans  $H_a^1(\Omega)$ . De plus, l'application trace notée  $\gamma_0$ , qui à  $v \in C_a^\infty(\overline{\Omega})$  associe ses valeurs au bord  $\gamma_0 v : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de  $H_a^1(\Omega)$  dans  $L_a^2(\partial\Omega, \partial\Omega)$ . Toute fonction  $u \in H_a^1(\Omega)$  vérifie  $\gamma_0 u = 0$  sur l'axe. On note  $H_{0,a}^1(\Omega)$  l'espace de Hilbert tel que  $\gamma_0 u = 0$  sur  $\Gamma_D$ . Grâce à la compacité de  $H_a^1(\Omega)$  dans  $L_a^2(\Omega)$ , il est facile de montrer que la semi-norme  $|\cdot|_{H_a^1(\Omega)}$  définie par :

$$(4) \quad |u|_{H_a^1(\Omega)} = \sqrt{\|\nabla u\|_{L_a^2(\Omega)}^2 + \|u_{\sqrt{\cdot}}\|_{L^2(\Omega)}^2}, \quad u \in H_{0,a}^1(\Omega).$$

est une norme sur  $H_{0,a}^1(\Omega)$ , si la mesure de  $\Gamma_0$  est non nulle. On se donne  $f \in L_a^2(\Omega)$  et  $g \in L_a^2(\Gamma_N, \partial\Omega)$ . On introduit la forme bilinéaire  $a(u, v)$ , définie sur  $H_{0,a}^1(\Omega)$  par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, r \, dr \, dz + \int_{\Omega} uv \frac{dr \, dz}{r}$$

et la forme linéaire  $\ell(v) = \int_{\Omega} f v \, r \, dr \, dz + \int_{\Gamma_N} g v \, r \, d\gamma$ . Le problème (1) se formule variationnellement :

$$(5) \quad \text{trouver } u \in H_{0,a}^1(\Omega) \text{ tel que : } a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_{0,a}^1(\Omega).$$

La forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est coercive et le problème (5) admet une unique solution dans  $H_{0,a}^1(\Omega)$ .

## 2 Discrétisation conforme

- Soit  $\mathcal{T}$  une triangulation régulière de  $\Omega$  avec les conditions classiques de compatibilité d'intersection exposées par exemple dans Ciarlet [1]. On note  $\mathcal{T}^0$  (resp.  $\mathcal{T}^1$ ,  $\mathcal{T}^2$ ) l'ensemble des sommets de cette triangulation (resp. arêtes, triangles). On désigne par  $P^1$  l'espace des polynômes de degré total inférieur ou égal à un. Dans l'article de B. Mercier et G. Raugel, la solution  $u$  est approchée dans un espace  $X_{\mathcal{T}}$  d'éléments finis classiques  $P^1$  continus avec une condition de Dirichlet nulle sur l'axe et sur  $\Gamma_D$  :

$$X_{\mathcal{T}} = \left\{ u \in C^0(\overline{\Omega}), u|_K \in P^1, \forall K \in \mathcal{T}^2, u|_{\Gamma_0} = 0, u|_{\Gamma_D} = 0 \right\}.$$

La conformité  $X_{\mathcal{T}} \subset H_{0,a}^1(\Omega)$  impose une condition de Dirichlet discrète sur l'axe. L'espace continu  $H_{0,a}^1(\Omega)$  est alors remplacé par l'espace discret  $X_{\mathcal{T}}$  dans la formulation (5) et nous cherchons  $u_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$  tel que :

$$(6) \quad u_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}, \quad a(u_{\mathcal{T}}, v) = \ell(v), \quad \forall v \in X_{\mathcal{T}}.$$

Dans le même travail, ces auteurs montrent que  $\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H_a^1(\Omega)}$  tend vers zéro à l'ordre un relativement à la mesure  $h_{\mathcal{T}}$  de la plus grande arête du maillage.

- Nous proposons ici un espace "naturel" de discrétisation, en référence à l'espace fonctionnel  $H_a^1(\Omega)$  où le problème (5) est bien posé. Nous considérons l'espace discret suivant :

$$H_{\mathcal{T}} = \left\{ u \in C^0(\overline{\Omega}), u|_K \in P^1, \forall K \in \mathcal{T}^2, u|_{\Gamma_D} = 0 \right\}.$$

Une fonction  $\tilde{u}_{\mathcal{T}} \in H_{\mathcal{T}}$  est de la forme :

$$\tilde{u}_{\mathcal{T}}(r, z) = \tilde{\alpha}\sqrt{r} + \tilde{\beta}r\sqrt{r} + \tilde{\gamma}\sqrt{r}z, \quad \forall K \in \mathcal{T}^2,$$

où  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) \in \mathbb{R}^3$ , alors qu'une fonction  $u_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$  est de la forme  $u_{\mathcal{T}}(r, z) = \alpha + \beta r + \gamma z$ . Cet espace discret  $H_{\mathcal{T}}$  est naturellement inclus dans l'espace fonctionnel de référence :  $H_{\mathcal{T}} \subset H_{0,a}^1(\Omega)$ . Pour la formulation discrète de (5), l'espace continu  $H_{0,a}^1(\Omega)$  est remplacé par l'espace discret  $H_{\mathcal{T}}$  et nous cherchons  $\tilde{u}_{\mathcal{T}} \in H_{\mathcal{T}}$  tel que :

$$(7) \quad \tilde{u}_{\mathcal{T}} \in H_{\mathcal{T}}, \quad a(\tilde{u}_{\mathcal{T}}, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_{\mathcal{T}}.$$

- Par rapport au choix antérieur de Mercier-Raugel, nous disposons donc de **plus** de degrés de liberté : pour chaque sommet  $S$  de l'axe  $\mathcal{T}^0 \cap \Gamma_0$ , la fonction de base correspondante  $\phi_S \in H_{\mathcal{T}}$  induit un degré de liberté sur l'axe (c'est le coefficient  $\tilde{\alpha}$  de  $\sqrt{r}$  dans (7)), même si la valeur correspondante de la fonction est nulle. Citons ici le travail de N. Gmati [5], qui introduit une fonction auxiliaire non singulière sur l'axe, reformule le laplacien axisymétrique en prenant cette fonction comme inconnue et résout le problème discret ainsi obtenu avec des éléments finis classiques. Depuis, l'analyse numérique dans l'espace de Sobolev à poids  $H_a^1$  d'une approche spectrale fondée sur une approximation polynomiale de haut degré a été développée par C. Bernardi, M. Dauge et Y. Maday [4].

### 3 Cas-test analytique

- On suppose dans cette partie que  $\Omega = ]0, 1[^2$  et  $\Gamma_D = \emptyset$ . On introduit deux paramètres réels  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , un second membre  $f$  donné par  $f(r, z) \equiv r^\alpha \left[ (\alpha^2 - 1) \frac{z^\beta}{r^2} + \beta(\beta - 1)z^{\beta-2} \right]$  et une donnée de Neumann  $g$  telle que  $g(r, z) = \alpha$  si  $r = 1$ ,  $-\beta r^\alpha z^{\beta-1}$  si  $z = 0$ ,  $\beta r^\alpha$  si  $z = 1$ . La solution du problème (5) s'exprime simplement :  $u(r, z) \equiv r^\alpha z^\beta$ .

- Nous présentons à la figure 1 les courbes d'isovaleurs (et leur zoom au niveau de l'axe) des solutions approchées du problème (5) pour  $u(r, z) \equiv r^{1/4} z^\beta$  par la méthode de Mercier-Raugel et l'approche proposée dans cette Note pour trois valeurs entières :  $\beta = 0$ ,  $\beta = 1$  et  $\beta = 2$  et pour un maillage triangulaire régulier à  $31 \times 31$  degrés de liberté. Les numéros sur les axes présentent les indices discrets de maille. La colonne de droite est un agrandissement de la partie encadrée et permet une visualisation plus précise des isovaleurs au

niveau de l'axe. La condition de Dirichlet imposée pour le schéma Mercier-Raugel introduit des effets d'axe bien connus des praticiens. En revanche, notre approche est déjà précise avec ce maillage assez grossier : les degrés de liberté naturels sur l'axe suppriment les effets d'axe et l'erreur est suffisamment petite pour que notre solution approchée soit graphiquement confondue avec la solution analytique.

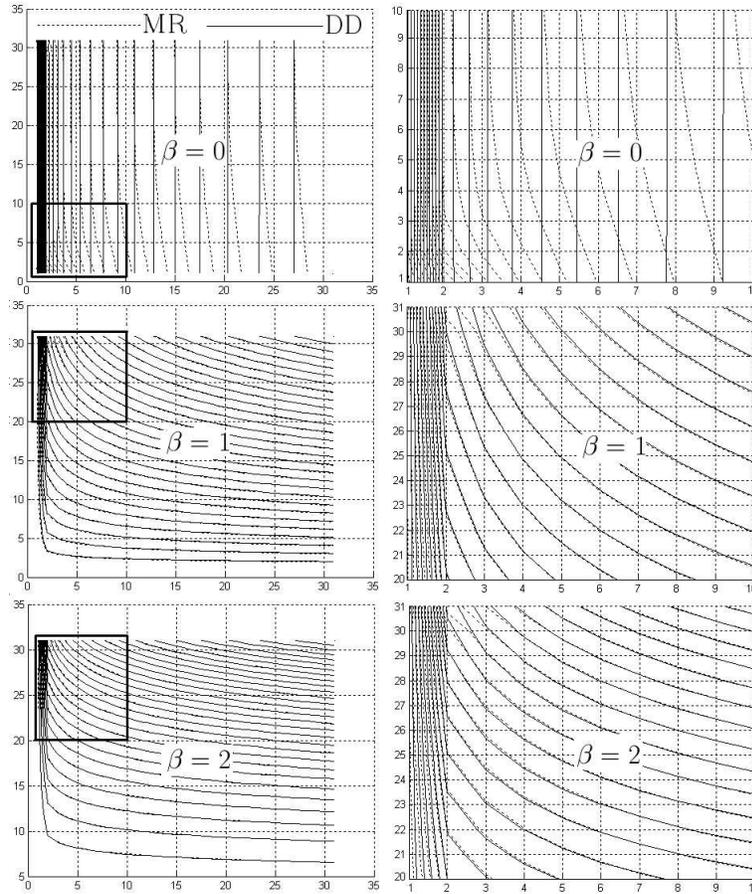


Fig. 1. Isovaleurs et zoom au niveau de l'axe  $u(r, z) \equiv r^{\frac{1}{4}}z^\beta$ ; nous comparons les résultats de Mercier-Raugel ( $MR$ ) et notre approche ( $DD$ ).

- Nous présentons à la figure 2 les isovaleurs des solutions approchées du problème (5) pour  $u(r, z) \equiv r^{1/4}$  par notre méthode et celle de Mercier-Raugel pour deux maillages triangulaires réguliers à  $31 \times 31$  et  $71 \times 71$  sommets. La figure de gauche correspond au maillage triangulaire  $31 \times 31$  et celle de droite au maillage  $71 \times 71$ . Les défauts d'axe s'ammenuisent par raffinement du maillage. Nous observons que notre approche est déjà très

précise avec le maillage le plus grossier et l'erreur est suffisamment petite pour que notre solution approchée soit graphiquement confondue avec la solution analytique.

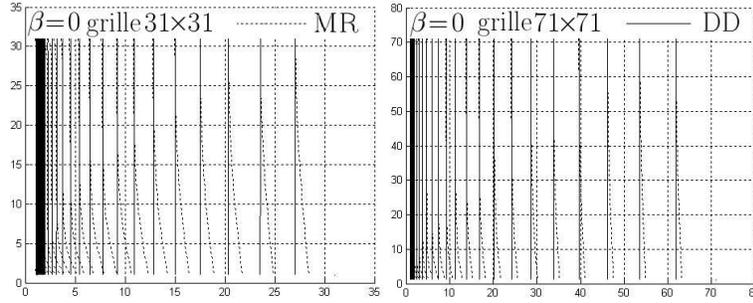


Fig. 2. Convergence en maillage des isovaleurs  $u(r, z) \equiv r^{1/4}$ ; nous comparons les résultats de Mercier-Raugel ( $MR$ ) et notre approche ( $DD$ ).

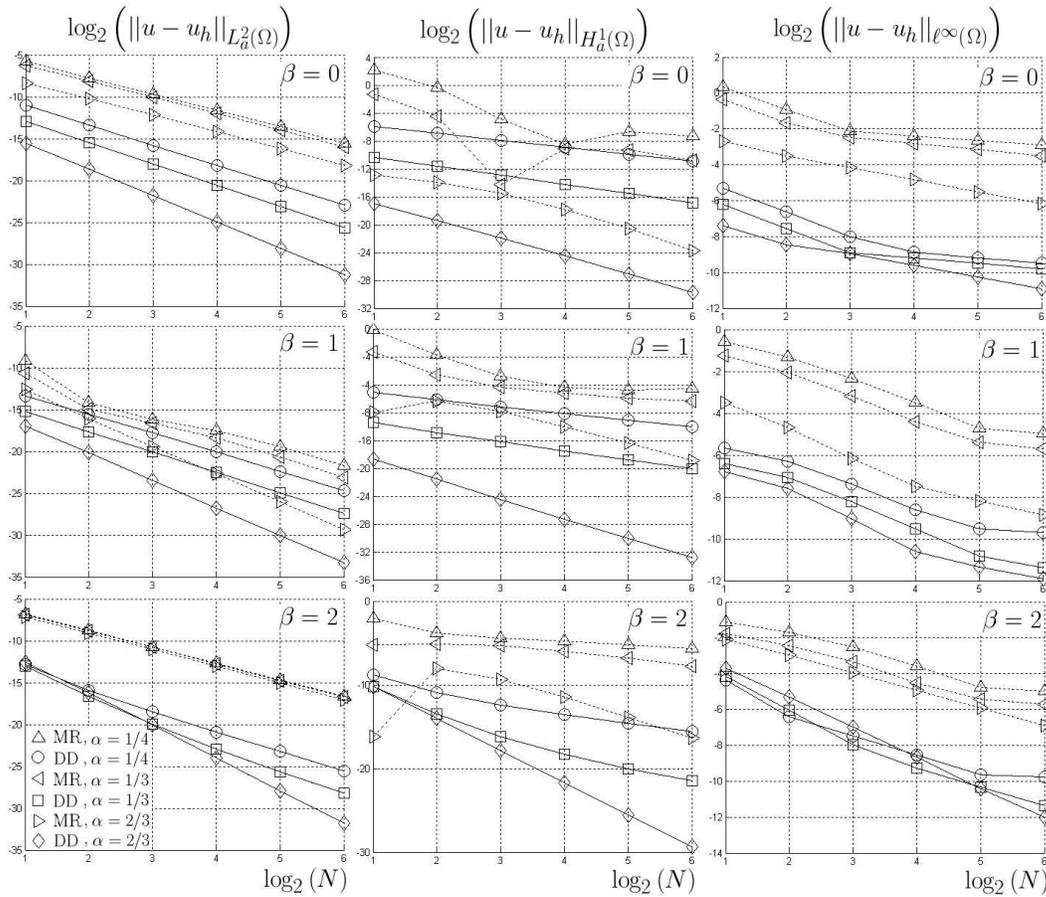


Fig. 3. Courbes de convergence pour diverses normes  $u(r, z) \equiv r^\alpha z^\beta$ ; nous comparons les résultats de Mercier-Raugel ( $MR$ ) et notre approche ( $DD$ ).

• Nous présentons à la figure 3 les courbes de convergence de l'erreur pour diverses normes en fonction du pas de maillage pour  $\alpha = 1/4$ ,  $\alpha = 1/3$ ,  $\alpha = 2/3$  et  $\beta = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\beta = 2$ . Les figures de gauche (resp. du milieu, de droite) correspondent à la norme  $L^2$  (resp. semi-norme  $H^1$  donnée par (4), norme  $\ell^\infty$ ). La présentation des résultats par une échelle logarithmique permet la lecture des ordres de convergence *via* la pente des droites. Par exemple, notre schéma pour  $\beta = 0$  et  $\alpha = 2/3$  converge en norme  $L^2$  (première figure) avec un ordre proche de 3. On constate expérimentalement que, de façon générale, la méthode que nous proposons ici a le même ordre de convergence que la méthode de Mercier-Raugel. Par contre à maillage donné, l'erreur avec notre méthode est beaucoup plus petite que celle obtenue avec le savoir-faire antérieur.

## 4 Conclusion

Nous avons proposé pour le laplacien axisymétrique d'utiliser des éléments finis adaptés à l'espace fonctionnel où le problème est mathématiquement bien posé. Les résultats obtenus montrent une réelle amélioration par rapport à une approche classique. Les ordres de convergence observés sont ceux attendus par l'analyse de l'erreur d'interpolation et l'analyse numérique sous-jacente est proposée dans [2].

## Références

- [1] P.G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [2] F. Dubois, S. Duprey. "Convergence of an axisymmetric finite element", to appear, 2006.
- [3] B. Mercier, G. Raugel. "Résolution d'un problème aux limites dans un ouvert axisymétrique par éléments finis en  $(r, z)$  et séries de Fourier en  $\theta$ ", *R.A.I.R.O Analyse numérique*, vol. 16, n°4, p. 405-461, 1982.
- [4] C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday, M. Azaiez. *Spectral Methods for Axisymmetric Domains*, "Series in Applied Mathematics", vol. 3, Elsevier Science, 1999
- [5] N. Gmati. *Guidage et diffraction d'ondes en milieu non borné*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1992.