

# CALCUL SCIENTIFIQUE POUR L'AERODYNAMIQUE TRANSSONIQUE.

F. DUBOIS\* - Sept. 1986

## RESUME.

L'interaction entre mécanicien des fluides et mathématicien appliqué est depuis longtemps fructueuse. Les phénomènes physiques complexes comme les écoulements transsoniques posent des problèmes mathématiques difficiles ; ainsi les résultats théoriques actuels ne concernent que des exemples où la physique est modélisée de façon très simplifiée. Mais les méthodes numériques développées à partir de ces analyses mathématiques sont de plus en plus performantes et fournissent à l'ingénieur de nouveaux outils (éléments finis par exemple) d'aide à la conception (soufflerie numérique). Notons que ces progrès sont intimement liés à l'emploi de calculateurs de plus en plus puissants comme les machines vectorielles Cray.

## INTRODUCTION.

Un avion qui atteint des vitesses proches de la vitesse du son (vol transsonique) est soumis à des vibrations importantes. Ces vibrations sont dues à la présence d'ondes de choc accrochées à la voilure, c'est-à-dire des zones où l'air subit de très fortes compressions [ Figure 1 ].

Ces ondes de choc sont la manifestation de régions de l'écoulement où l'effet physique dominant est la compressibilité de l'air. D'autres effets tels que la viscosité peuvent être négligés, dès que l'on s'éloigne de la couche limite entre l'air et la paroi de l'aile. Une onde de choc devient alors mathématiquement une discontinuité des grandeurs physiques qui caractérisent l'écoulement : vitesse, densité, pression, énergie. L'exploration mathématique des équations aux dérivées partielles ainsi obtenues est encore à faire. On se contente donc de l'étude détaillée d'équations modèles où deux difficultés majeures surgissent : non linéarité et non unicité des solutions. Une bonne compréhension mathématique de ces problèmes passe par la notion d' "entropie mathématique" et de "solution entropique". La recherche de ces solutions guide l'intuition du mathématicien appliqué chargé de simuler des situations concrètes (aile d'avion, tuyère). Une approche efficace consiste à chercher des solutions approchées grâce à la méthode des éléments finis. Il est alors nécessaire de résoudre une succession de problèmes linéaires ; les calculateurs vectoriels d'aujourd'hui constituent un outil bien adapté à une mise en oeuvre informatique qui est très lourde dans le cas d'une géométrie réaliste.

---

(\*) Centre de Mathématiques Appliquées.

Ecole Polytechnique 91128 Palaiseau Cedex.

## UN PEU DE MECANIQUE DES FLUIDES.

Les lois de conservation fondamentales de la physique prennent la forme d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Les inconnues, respectivement les trois composantes  $u_i$  de la vitesse, la masse volumique  $\rho$ , la pression  $p$ , l'énergie totale par unité de masse  $E$  sont des fonctions de l'espace  $x$  et du temps  $t$  (formalisme d'Euler de la mécanique). Conserver la masse, l'impulsion, l'énergie revient à écrire :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j E + p u_j) = 0 \end{array} \right.$$

A ce système de cinq équations à six inconnues, il convient d'ajouter une loi de comportement qui prend en compte la thermodynamique sous-jacente : par exemple celle du gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes de rapport  $\gamma$  :

$$(2) \quad E - \frac{1}{2} \sum_j u_j^2 = \frac{p}{(\gamma - 1) \rho}$$

Le problème de Cauchy consiste à se donner des conditions initiales  $(u_i^0, \rho^0, p^0, E^0)$  et des conditions aux limites du domaine d'étude puis à chercher  $(u_i, \rho, p, E)$  solutions de (1)(2).

Ce problème est non linéaire et par conséquent le mathématicien a peu d'outils pour l'aborder. L'approche théorique concerne l'étude d'équations simplifiées, tandis que l'approche purement numérique introduit une nouvelle modélisation qui aboutit à "l'équation du potentiel".

## LES ETUDES THEORIQUES.

Le premier type de simplification consiste à réduire la dimension de l'espace (physique) d'étude, c'est-à-dire à supposer que  $x$  est un nombre réel. On obtient ainsi une classe de problèmes que les mathématiciens nomment "hyperboliques non linéaires" ; leur compréhension fait actuellement l'objet de nombreux travaux fondamentaux qui mériteraient à eux seuls un prochain article des "images des mathématiques". Dans plusieurs cas particuliers on dispose de solutions quasi-explicites qui décrivent des exemples physiques simples (tube à choc, tuyères) mais mathématiquement très intéressants. Ces cas tests permettent ensuite de vérifier la pertinence des solutions approchées que proposent les différents schémas numériques.

La simplification ultime consiste à ne prendre qu'une seule fonction inconnue  $u(x, t)$ , et l'exemple fondamental est dû à Burgers (1940) :

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad .$$

Cette équation permet (grâce à des calculs explicites) d'élargir la notion de solution. Il faut d'une part autoriser  $u$  à ne pas être régulière, ses discontinuités s'interprétant comme des ondes de choc. On retrouve pour ces solutions faibles les relations classiques de Rankine et Hugoniot (1869, 1887). D'autre part, une difficulté majeure concerne l'unicité des solutions faibles, qui est fautive en général [ encadré ] .

Afin d'éliminer les solutions non physiques, on introduit la "condition d'entropie" : on rajoute à l'équation (3) une inéquation de la forme :

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \eta(u(x, t)) + \frac{\partial}{\partial x} q(u(x, t)) \leq 0$$

L'inéquation (4) traduit qu'une solution physiquement acceptable est dissipative :  $\eta$  est une fonction convexe, l'entropie mathématique, et  $q$  le flux d'entropie associé. Une solution de (3) - (4) est appelée solution entropique de l'équation de Burgers.

Ces définitions étant établies, on dispose d'un théorème d'existence et d'unicité de solutions entropiques pour le problème de Cauchy (Oleinik 1957, Kručkov 1970).

L'équation de Burgers, cas particulier d'équation hyperbolique non linéaire, est bien connue mathématiquement, et ses solutions ont une dynamique très riche : c'est donc un outil essentiel pour tester les schémas numériques.

L'analyse développée pour l'étude d'une équation se généralise aux systèmes analogues à ceux de la mécanique des fluides compressibles. L'entropie mathématique est alors reliée simplement à l'entropie habituelle en thermodynamique, et une solution entropique satisfait au second principe de la thermodynamique. Si Glimm a démontré en 1965 un théorème d'existence de telles solutions pour le problème de Cauchy, c'est une question encore ouverte et en grand développement actuellement (voir les travaux de R. Di Perna, F. Murat, M. Rascle, D. Serre, L. Tartar par exemple).

## LA MODELISATION D'UN ECOULEMENT TRANSSONIQUE PAR L'EQUATION DU POTENTIEL.

La deuxième simplification pour l'étude d'un fluide compressible consiste à n'envisager que des problèmes stationnaires (ie. supprimer la variable temps) en faisant des hypothèses a priori sur l'écoulement. Par exemple, supposer le gaz irrotationnel : le champ des vitesses  $\vec{u} = \vec{u}(x)$  s'écrit comme le gradient d'une fonction scalaire (le potentiel des vitesses)  $\varphi = \varphi(x)$

$$(5) \quad \vec{u} = \vec{\nabla} \varphi$$

De plus, la densité  $\rho$  est fonction uniquement du module de la vitesse, grâce au théorème de Bernoulli.

$$(6) \quad \rho = F(|\vec{u}|)$$

la loi de conservation de la masse permet d'écrire

$$(7) \quad \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0$$

Le système (5) (6) (7) se ramène à une seule équation, d'inconnue  $\varphi$  : l'équation du potentiel transsonique :

$$(8) \quad \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \{ F(|\vec{\nabla}\varphi|) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \} = 0$$

Dans le cas bidimensionnel, on peut l'écrire :

$$(9) \quad (c^2 - u_1^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - 2u_1 u_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + (c^2 - u_2^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0$$

où  $c = c(|\vec{\nabla}\varphi|)$  est la vitesse (locale) du son. L'équation (9) est du second ordre par rapport à l'inconnue  $\varphi$  et non linéaire, puisque  $u_1$ ,  $u_2$  et  $c$  sont fonctions de  $\vec{\nabla}\varphi$ . Mais surtout, elle change de type : elliptique pour  $|\vec{\nabla}\varphi| < c$ , hyperbolique pour  $|\vec{\nabla}\varphi| > c$ . De plus, le lieu des points où l'équation change de type (ligne sonique ou onde de choc) fait partie du problème !

Dans certains cas particuliers, par un changement de variables et de fonction inconnue compliqué (transformation de l'hodographe : les variables deviennent les coordonnées polaires  $(\sigma, \theta)$  du plan des vitesses et l'inconnue la fonction courant  $\psi$ ) ce problème peut se réécrire sous la forme d'une équation *linéaire*. Le modèle le plus simple conduit à l'équation de Frankl-Tricomi (1923) :

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} + \sigma \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

de type elliptique lorsque  $\sigma > 0$  et hyperbolique lorsque  $\sigma < 0$ . Le caractère linéaire de l'équation de Frankl-Tricomi permet d'une part l'étude mathématique très poussée et d'autre part le développement de nombreuses applications : le dessin des profils d'ailes d'avions permettant des écoulements sans onde de choc s'est longtemps appuyé sur l'étude des solutions approchées d'équations de ce type. Mais les difficultés de l'équation du potentiel (condition d'entropie, conditions aux limites) sont reportées dans le changement de variables  $(x_1, x_2) \longleftrightarrow (\sigma, \theta)$  et de fonction inconnue  $\varphi \longleftrightarrow \psi$ .

La modélisation potentielle des écoulements transsoniques est donc, nous venons de le voir, riche sur le plan purement mathématique, mais aussi et surtout sur le plan numérique puisque c'est le modèle le plus simple pour représenter des situations physiques réalistes comme l'écoulement dans un réacteur, autour d'une aile, ou même d'un avion complet.

Aussi les méthodes numériques de résolution approchée de l'équation (8) sont depuis une quinzaine d'années en constant développement partout dans le monde, tant à l'université que dans l'industrie, afin de définir des formes aérodynamiques de plus en plus optimisées. En France, Glowinski et Pironneau ont proposé en 1976 un algorithme original et performant inspiré des techniques du contrôle optimal. Il est aujourd'hui exploité à l'échelle industrielle.

La méthode utilisée par J.M. Dupuy au Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique repose sur un algorithme de point fixe : étant donné  $\varphi^n$ , résultat de l'étape numéro  $n$  du calcul, on construit  $\varphi^{n+1}$  grâce à la remarque suivante : si dans l'équation (8), on se donne  $F(|\vec{\nabla}\varphi|)$ , on obtient alors un problème linéaire classique sur  $\varphi$  :

$$(11) \quad \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ a(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\} = 0$$

où  $a(x) = F(|\vec{\nabla}\varphi(x)|)$  est connu. La méthode numérique consiste à approcher  $\varphi$  par éléments finis [ cf. encadré ]. De plus, il est indispensable de prendre en compte dans l'écriture du schéma numérique le fait que la solution recherchée est entropique par un procédé heuristique de décentrage qui revient à ajouter à  $a(x)$  une viscosité numérique  $V(\varphi^n)$  :

$$(12) \quad a(x) = F(|\vec{\nabla}\varphi|^n) + V(\varphi^n)$$

De plus la viscosité  $V(\varphi^n)$  tend vers 0 lorsque le maillage est de plus en plus fin.

L'équation (11) après discrétisation permet le calcul de  $\varphi^{n+1}$  au prix de la résolution d'un système linéaire dont la matrice  $A$  est de grandes dimensions. Le calcul de  $F(|\vec{\nabla}\varphi^{n+1}|)$  et de  $V(\varphi^{n+1})$  est alors explicite.

La programmation sur ordinateur de l'ensemble du problème discrétisé est la partie la plus importante du temps de travail de l'ingénieur mathématicien. Elle exige un savoir faire dans des domaines informatiques et numériques très variés.

## MISE EN OEUVRE INFORMATIQUE.

L'implémentation numérique de la méthode des éléments finis se déroule en trois étapes principales : maillage, assemblage de la matrice, résolution d'un système linéaire.

L'étape de maillage permet de réaliser le découpage explicite du domaine d'étude  $\Omega$  en éléments finis [ figure 4 ] . Il nécessite l'emploi d'un logiciel spécialement adapté ("mailleur") et un contrôle par une visualisation graphique . Au centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique, nous disposons de "Mefisto", développé à l'université de Paris 6 en liaison avec le club "Modulef" qui regroupe des universitaires et des industriels. Un tel outil permet de n'introduire qu'un minimum de données sur la géométrie étudiée, et de récupérer en sortie un fichier contenant la position des noeuds et leur agencement. Un bon maillage doit réaliser un compromis entre un souhait de haute précision (d'où un grand nombre  $N$  de degrés de liberté) et les difficultés de programmation (gestion d'un grand nombre de variables, entrées-sorties entre la mémoire centrale de l'ordinateur et les disques, etc...). Typiquement, pour un problème à trois dimensions d'espace (ie.  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ), ce compromis se situe pour  $N$  de l'ordre de  $10^4$  à  $10^5$  .

L'étape d'assemblage consiste à passer en revue tous les éléments finis  $K$  de  $\Omega$ , et pour chacun d'eux, calculer les données essentielles pour déterminer la matrice  $A$  et le second membre  $B$ . La matrice obtenue est "creuse".

L'étape de résolution d'un système linéaire impose l'emploi d'un "solveur" bien adapté au problème. Pour les problèmes où le nombre de degrés de liberté reste modéré (quelques milliers), on peut utiliser une méthode directe de résolution (pivot de Gauss, factorisation de Cholesky) mais très vite, le stockage de la matrice devient en soi un nouveau problème et une méthode itérative est plus adaptée. La méthode la plus utilisée actuellement est celle du gradient conjugué (Hestenes-Stiefel, 1952 ; Davidon, 1959), qui consiste à minimiser directement la fonctionnelle

$$J(x) = \frac{1}{2} (x, Ax) - (B, x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^N$$

où  $(, )$  est le produit scalaire euclidien de  $\mathbb{R}^N$  et  $A$  la matrice, symétrique définie positive. Dans la pratique, on commence par calculer un inverse approché par une méthode directe (étape de préconditionnement) avant de lancer les itérations de gradient conjugué. L'algorithme, fondé sur la structure euclidienne  $(\mathbb{R}^N, ((, )))$  où  $((x, y)) = (x, Ay)$  demande un grand nombre de calculs de produits scalaires  $((x, y))$ . Ce type de calculs est particulièrement bien adapté aux architectures actuelles d'ordinateurs vectoriels [ encadré ] .

Tous les sujets abordés dans cet article sont en évolution très rapide. Pour les méthodes numériques, les efforts portent sur deux points essentiels : aborder le système complet des équations stationnaires de fluide parfait ou visqueux (et non plus seulement l'approximation potentielle) et utiliser de nouveaux éléments finis adaptés aux lois de conservation. Enfin, les nouvelles générations d'ordinateurs disposant d'une mémoire centrale très importante (Cray 2) et de processeurs beaucoup plus rapides (le futur Cray 3) constituent l'outil indispensable pour l'étude de phénomènes dynamiques complexes.



[ encadré ] 1

## FORMATION D'UN CHOC POUR UNE EQUATION HYPERBOLIQUE NON LINEAIRE.

L'équation de Burgers

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0$$

où  $u = u(t, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$

avec la condition initiale

$$(2) \quad u(0, x) = u_0(x)$$

met en lumière les problèmes

mathématiques rencontrés dans l'étude des équations des fluides parfaits compressibles. En effet, si  $u_0$  n'est pas monotone croissante, alors le problème (1) (2) n'a pas de solution  $u$  sur  $[0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  : Il existe un temps  $T^*$  au-delà duquel il est impossible de définir une solution régulière [ figure 2 ]. On introduit alors la notion de solution faible qui permet dans le cas précédent d'obtenir une solution  $u$  pour  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ . La fonction  $x \rightarrow u(t, x)$  est discontinue pour  $t > T^*$  : dans un langage plus "physique", une onde de choc se forme, puis se propage dans le milieu.

Il se pose alors un nouveau problème : les solutions faibles n'ont aucune raison d'être uniques. Une donnée initiale discontinue peut donner naissance à deux solutions faibles :  $u_1$  discontinue, qui s'interprète comme un choc non physique, et  $u_2$ , continue, qui représente une détente [ figure 3 ]. Pour déterminer les solutions physiquement admissibles, on adjoint à (1) une condition d'entropie.

[ encodé ] 2

**METHODE DES ELEMENTS FINIS.**

La méthode des éléments finis a été découverte plusieurs fois : par les mathématiciens (Courant, 1943), les ingénieurs (Argyris, 1954) puis développée par les mécaniciens pour le calcul des structures (Zienkiewicz, 1971) avant son étude par les mathématiciens appliqués (Strang, Zlamal, 1970 ; Ciarlet-Raviart, 1972). L'exemple fondamental d'application est le problème de Dirichlet (1) :

on se donne  $\Omega$ , domaine de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$(1) \text{ trouver } u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \text{frontière de } \Omega \end{cases}$$

où  $-\Delta$  est l'opérateur de Laplace :

$$\Delta u(x) = \sum_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

Il est possible de reformuler (1) en un problème de minimisation :

$$(2) \begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ qui réalise le minimum de la fonctionnelle} \\ v \rightarrow J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_j \left( \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 dx - \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \end{cases}$$

où  $V$  est un espace de fonctions réelles définies sur  $\Omega$ . (2) a une solution unique  $\bar{x}$ .

L'idée est alors d'utiliser une méthode de Galerkin (1915) et d'approcher l'espace  $V$  (de dimension infinie) par un espace vectoriel  $V_h$  de dimension finie : on découpe  $\Omega$  en triangles  $K$  (ce sont les éléments finis) et la restriction à  $K$  d'un élément  $u$  de  $V_h$  est un polynôme de degré au plus 1, donc parfaitement défini par les trois valeurs  $u(a_i)$  aux sommets du triangle  $K$ . On recolle ensuite ces diverses restrictions, et on dispose ainsi de  $N_h = \dim V_h$  degrés de liberté.

On définit alors une fonctionnelle approchée  $J_h$

$$J_h(x) = Q_h(x) - L_h(x) \quad , \quad x \in V_h$$

Sa minimisation équivaut à la résolution d'un système linéaire

$$(3) \quad A_h x = B_h$$

où  $A_h$  est une matrice symétrique définie positive d'ordre  $N_h \times N_h$ . La solution  $x_h$

de (3) fournit une approximation numérique du problème initial.

Si les éléments finis restent réguliers tout en étant de plus en plus petits ( $h$  converge vers 0) alors  $x_h$  converge vers  $\bar{x}$ , et on peut contrôler l'erreur commise (voir le livre de Ciarlet, 1978).

[ encadré ] 3

## L'ORDINATEUR CRAY 2 DU CCVR.

Le CNRS (associé à d'autres partenaires : Education Nationale, Météorologie Nationale, Office National d'Etude et de Recherches Aérospatiales, etc...) dispose au sein du Centre de Calcul Vectoriel pour la Recherche (CCVR, installé depuis 1984 à l'Ecole Polytechnique) d'un ordinateur parallèle Cray 2 (le premier a été livré aux USA en 1985).

Un temps d'horloge de base très bref (4 milliardièmes de seconde), une grande miniaturisation (volume total inférieur à  $1 \text{ m}^3$ ) et un agencement spatial très astucieux, quatre processeurs autorisant un calcul en parallèle de tâches différentes, une architecture conçue pour le chaînage des opérations élémentaires (calcul vectoriel) et une capacité mémoire très grande (256 millions de mots) permettent au Cray 2 de fournir au numéricien une puissance de calcul de plusieurs centaines de mégaflops (millions d'opérations flottantes par seconde). Le gain de temps sur l'ensemble d'un programme par rapport à une machine traditionnelle scalaire est d'environ 10 à 100 .

**POUR EN SAVOIR PLUS :**

**P. G. CIARLET** - The finite Element Method for elliptic problems  
North Holland, Amsterdam, 1978 .

**R. DAUTRAY, J.L. LIONS** - Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques.  
Masson, Paris, 1985 .

**R. GLOWINSKI** - Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems.  
Springer Verlag, New-York, 1984 .

**R. LEGENDRE** - Les mathématiques appliquées à la simulation numérique.  
in Images des Mathématiques, CNRS, Paris, 1985 .

**A. PERRONNET** - Mefisto maillage. Manuel d'utilisation.  
Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris 6, 1983.

**B. SCHEURER** - Problèmes mixtes et équation de Tricomi.  
in Dautray-Lions, Ch. 10 .

**J. SMOLLER** - Shock waves and Reaction Diffusion Equations.  
Springer Verlag, New-York, 1983 .

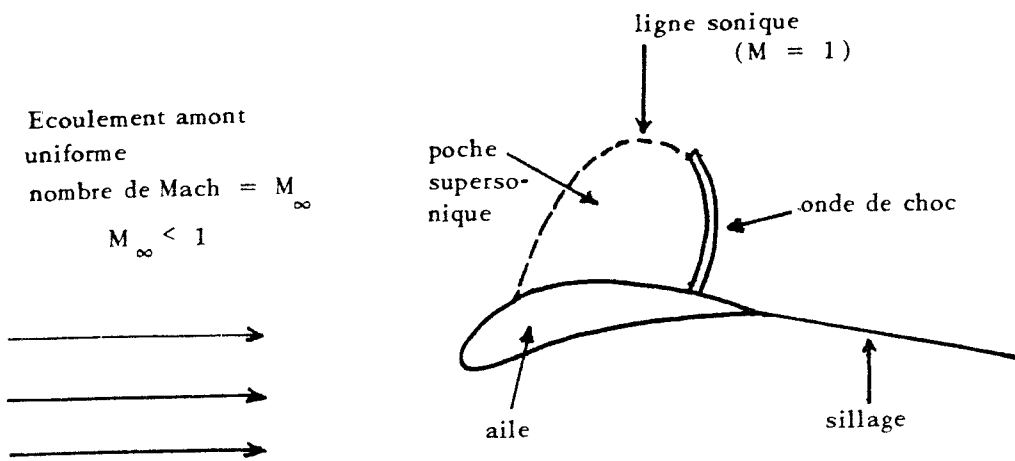
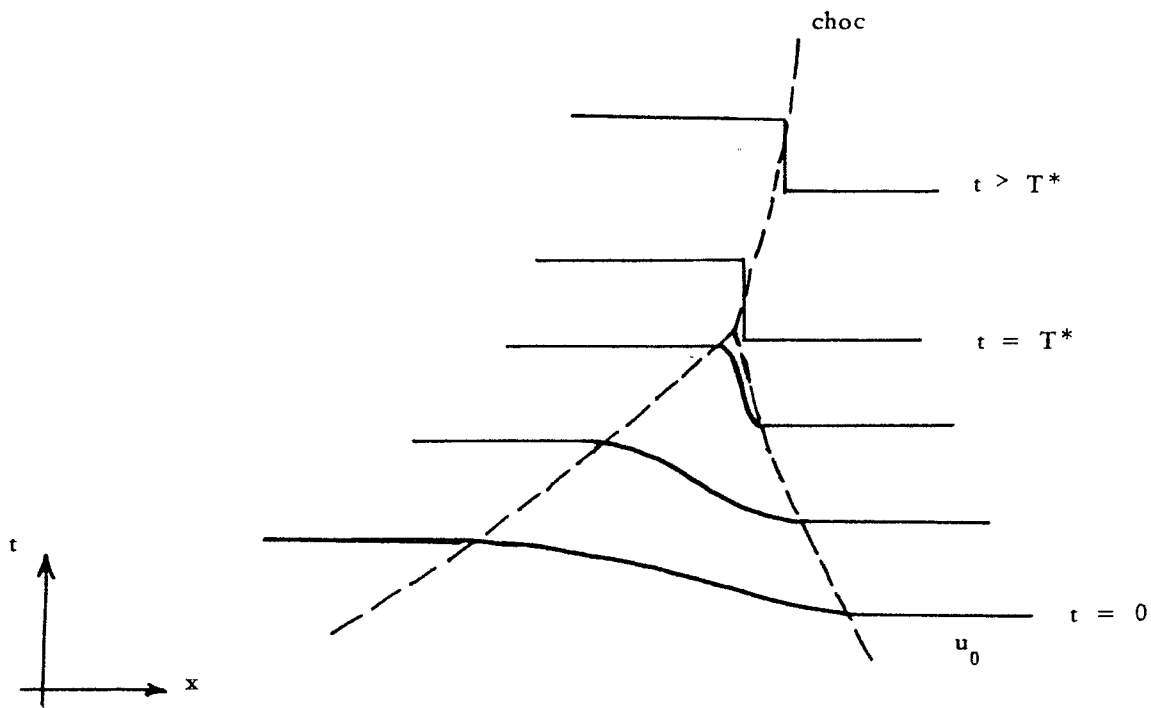
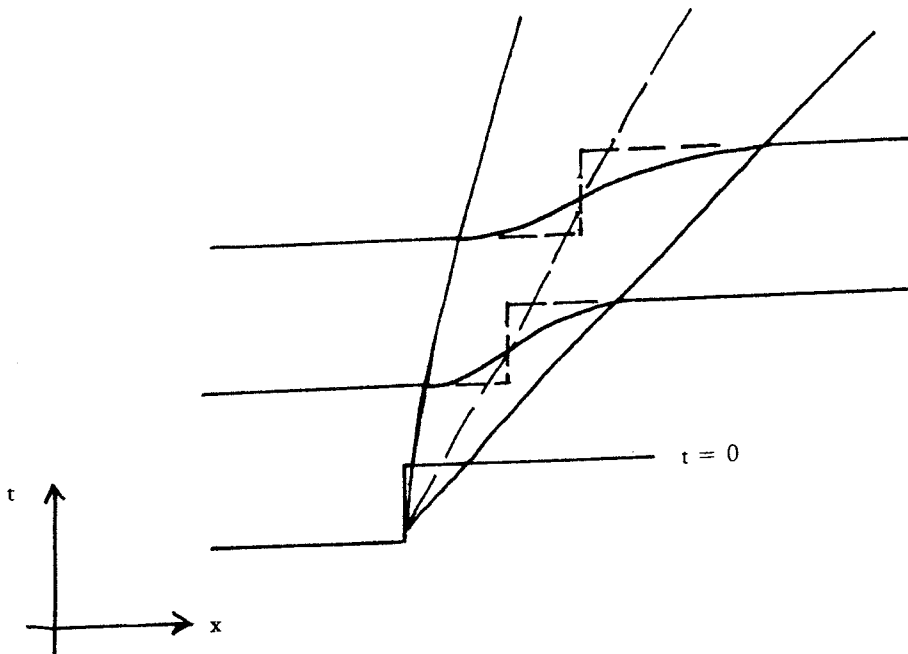


Figure 1 - Ecoulement transsonique stationnaire autour d'une aile d'avion.

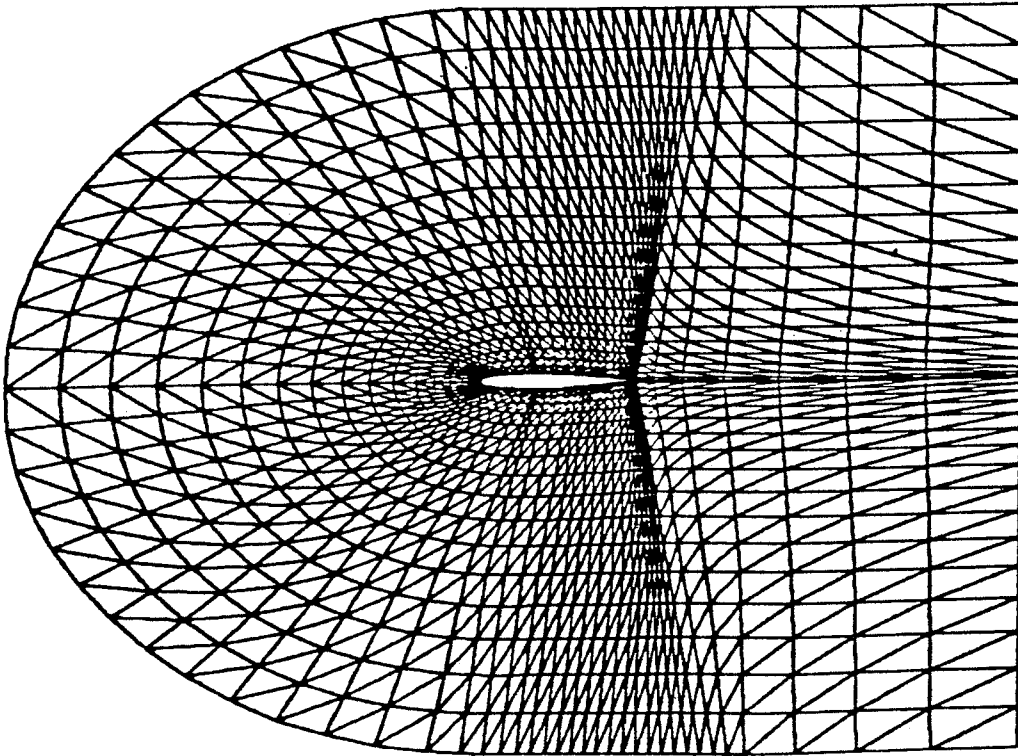


**Figure 2** - Formation d'une onde de choc pour l'équation de Burgers : La donnée initiale décroissante  $u_0$  a une pente de plus en plus raide ( $t < T^*$ ) avant d'être discontinue ( $t \geq T^*$ ).

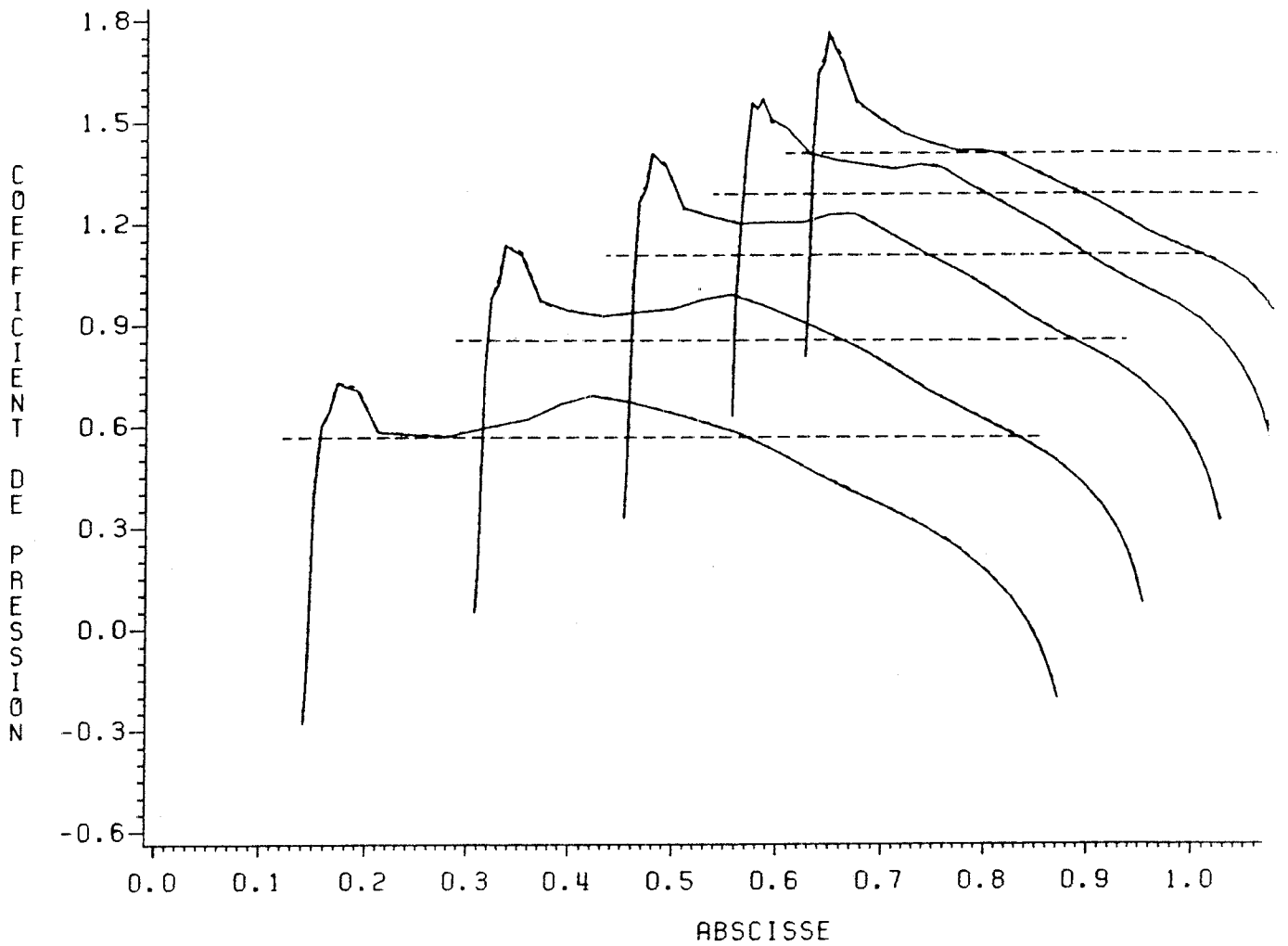


**Figure 3** - Non unicité des solutions pour l'équation de Burgers. La donnée initiale discontinue ( $t = 0$ ) modélise un tube où deux régions de gaz ont tendance à s'éloigner l'une de l'autre. Deux solutions sont possibles : une fonction  $u_1$  (choc non physique, en pointillés) discontinue, et une fonction  $u_2$  continue (détente, en trait fort).





**Figure 4** - Maillage triangulaire autour d'une aile d'avion. Les zones où la solution doit présenter de grandes variations ont été maillées plus finement.



**Figure 5** - Courbes des coefficients de pression d'un écoulement autour d'une aile tridimensionnelle. Elles mettent en évidence un choc dans la zone d'attaque (à gauche). Les lignes pointillées indiquent un passage par la vitesse du son.