

Electromagnétisme numérique [□]

François Dubois ^{*}

MINIMISATION DE L'ÉCHO RADAR

L'électromagnétisme numérique est probablement né lorsque des ingénieurs ont eu à résoudre le problème de la discrétion au rayonnement radar. En effet, dans un jeu d'attaque-défense classique, la défense cherche à identifier le plus vite possible la menace, par exemple en éclairant un objet agressif avec le rayonnement électromagnétique d'un radar, alors que l'agresseur se doit de rester discret le plus longtemps possible en minimisant l'écho réfléchi qui porte sa signature. La conception d'objets discrets aux échos radar conduit au besoin de simuler cet écho avant toute expérimentation physique, donc à une modélisation et une analyse mathématique précise du problème posé avant de concevoir un logiciel de résolution.

Rappelons quel est le problème posé : une onde monochromatique éclaire un objet métallique (pour fixer les idées) et induit de ce fait un courant électrique à sa surface. Ces charges en mouvement émettent à leur tour une onde diffractée dans toutes les directions de l'espace. On cherche à minimiser l'écho renvoyé dans la direction éclairante, qui correspond à ce que le radar va observer en retour.

Une comparaison des ordres de grandeur de la dimension de l'objet et de la longueur d'onde s'impose pour déterminer les différents régimes de cette interaction. Dans le cas où la dimension est beaucoup plus petite que la longueur d'onde, l'objet n'est pratiquement pas "vu" par l'onde, ce qui correspond à un régime peu intéressant dans le cadre proposé mais qui a son intérêt propre dans l'étude des courants de Foucault. Le cas contraire où l'objet est

[□] Note pour "Les Entretiens de la Mission Scientifique et Technique", Ministère de l'Education Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, Département des Mathématiques et leurs Applications (DSPT1), 12 février 1997. Edition du 10 décembre 2006.

^{*} Chargé de mission.

très grand devant la longueur de l'onde définit la théorie géométrique de la diffraction.

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DE LA DIFFRACTION

Dans le cas contraire où l'objet est très grand devant la longueur de l'onde, l'onde est de haute fréquence et le rayonnement électromagnétique s'apparente à de la lumière à l'échelle métrique qui suit donc les lois traditionnelles de l'**optique**. L'optique géométrique peut être étendue en une théorie géométrique de la diffraction (GTD en anglais) qui propose de recalculer tout le champ électromagnétique à partir de la donnée des rayons lumineux. Cette technique est d'un emploi difficile puisqu'elle fait apparaître des grandeurs infinies, ce qui montre que le cadre mathématique adéquat reste encore à construire. Des mathématiciens comme le russe Maslov ou les français Bardos et Lebeau ont proposé des théories "uniformes" pour éliminer dans un certain nombre de cas ces grandeurs infinies. Toutefois, on peut noter que les "problèmes ouverts", c'est à dire les questions non encore résolues, se placent dans une grande tradition géométrique puisque les idées d'Airy (dont la fonction décrit le passage de l'ombre à la lumière) peuvent encore être utilisées dans l'analyse.

EQUATIONS DE MAXWELL

Dans le cas où les deux longueurs sont du même ordre de grandeur, il n'y a plus d'approximation possible dans le choix du modèle physique et il faut revenir aux équations de base adaptées à la physique sous-jacente, c'est à dire aux équations de Maxwell (1860).

Les équations de Maxwell peuvent s'écrire sous une forme très simple comme "dynamique = sources". La fonction inconnue est constituée du champ électrique et du champ magnétique qui sont des vecteurs qui dépendent de l'espace et du temps. Cette dynamique est soumise à des contraintes "solénoïdales" qui introduit des difficultés spécifiques de couplage entre les équations.

La lumière elle-même doit être comprise comme une onde hertziennne (1890) et l'incompatibilité du groupe d'invariance des équations de Maxwell avec la mécanique classique provoque une rupture (1905) qui a demandé de relire les lois de la mécanique. La seconde guerre mondiale a vu se développer diverses applications technologiques (radar, guide d'onde) et les besoins évoqués plus haut conduisent aux premières résolutions numériques (circuits filaires en 1960). La technologie des fibres optiques (1970) a fourni de nouveaux problèmes technologiques et l'arrivée d'ordinateurs suffisamment puissants (Cray 1980) a permis un large développement de l'emploi des ordinateurs

pour la simulation directe des équations de Maxwell, c'est à dire de l'électromagnétisme numérique.

DISCRÉTISATION PAR DIFFÉRENCES FINIES

Une première méthode dite “exacte” de résolution consiste à vouloir simuler avec un ordinateur l'évolution dynamique des équations de Maxwell, initialement écrites dans un continuum d'espace-temps. Mais pour faire un calcul approché avec un ordinateur, il faut un nombre fini d'inconnues ! La résolution approchée des équations de Maxwell commence par l'écriture de ce passage d'un espace temps continu à un espace temps discret, étape que les mathématiciens appellent simplement “discrétisation”.

L'évolution en temps des champs inconnus est une fonction simple des variations de ces mêmes champs en espace. On transforme donc l'espace continu en un espace discret où le “pas d'espace” fixe une plus petite échelle de longueur pour la résolution approchée du problème. De façon analogue au cas spatial, on dispose de temps discrets numérotés par des nombres entiers. Les points de grille sont porteurs des nouvelles variables inconnues et à partir de la formule de Taylor qui relie une variation finie aux variations infinitésimales, il est très (trop !) facile de proposer un schéma numérique aux différences finies qui permet d'écrire une évolution dynamique discrète des champs électrique et magnétique en fonction de leurs variations spatiales discrètes. Les travaux de l'américain Yee (1965) et les grilles entrelacées des champs électrique et magnétique restent une référence pour l'approche par différences finies des équations de Maxwell.

STABILITÉ ET NORME DES OPÉRATEURS

La facilité de la démarche précédente cache des difficultés d'ordre mathématique dont nous allons maintenant essayer de donner une idée. Lors du passage du temps discret, l'erreur ne doit pas s'amplifier. Si tel n'est pas le cas, le fait d'itérer un grand nombre de fois le passage d'un temps discret amplifie à chaque itération l'erreur par un facteur multiplicatif supérieur à un et provoque très rapidement la manipulation de très grands nombres en machine. Cette tentative d'écrire en mémoire des nombres trop grands compte tenu des conventions de stockage provoque finalement un arrêt explosif du programme avec son trait caractéristique tel que “overflow”.

Le contrôle *a priori* par la méthode numérique des erreurs d'arrondis des ordinateurs constitue la propriété de stabilité numérique du schéma. Dans le cas des équations de propagation d'ondes, elle a été découverte par Courant,

Friedrichs et Lewy (1927) comme une condition de limitation du pas de temps Δt en fonction du pas d'espace Δx : le **schéma** est **stable** si au cours d'un intervalle de temps discret, une onde lumineuse ne traverse pas plus d'une maille en espace. Mathématiquement, elle exprime que l'opérateur discret qui décrit l'évolution du modèle au cours du temps est de norme inférieure ou égale à un afin que les erreurs inhérentes aux calculatrices électroniques ne s'amplifient pas.

L'analyse de stabilité est plus simple lorsqu'on dispose d'un nombre infini de variables discrètes sur un réseau périodique car l'analyse de Fourier permet de calculer les conditions d'admissibilité d'un schéma dans la vaste classe des problèmes linéaires (Von Neumann, 1950). Mais dans la réalité, on ne dispose que d'un nombre fini de variables et l'analyse de stabilité globale incluant les points du bord du domaine de calcul est plus délicate ; elle a été menée dans les années 1970 par l'équipe suédoise de Kreiss. Les résultats de cette recherche sont encore à l'heure actuelle d'un abord difficile et peu de schémas réellement employés dans les logiciels d'approximation des équations comme les équations de Maxwell ou d'autres modèles physiques ont effectivement été analysés mathématiquement.

CONDITIONS AUX LIMITES ARTIFICIELLES

Un point délicat dans l'emploi de méthodes discrètes concerne l'écriture des conditions aux limites au bord du domaine de calcul lorsque le problème physique est non borné. Pour le problème de l'écho radar par exemple, les ondes électromagnétiques peuvent se déplacer librement dans tout l'espace et ceci est fondamental pour déterminer l'écho dans la direction du radar. Si on enferme l'ensemble du modèle dans une grande boîte (le radar ainsi que l'objet agresseur dans le cas précédent), des réflexions d'onde au bord du domaine d'étude vont finir par perturber le champ électromagnétique entre la source radar et le corps réfléchissant de façon tout à fait non physique. Encore une fois, l'emploi de méthodes approchées impose d'utiliser un nombre fini de variables, ce qui perturbe la physique même que le mathématicien cherche à calculer.

Il est donc nécessaire de développer des conditions aux limites le long des frontières artificielles, pour pouvoir limiter en espace le modèle discret à un nombre fini de variables. Ces conditions aux limites "artificielles" ne traduisent pas la donnée d'une information entrante à la frontière du domaine d'étude mais expriment simplement qu'une onde "sort librement" du domaine de calcul. Une telle condition dite parfaitement non réfléchissante s'exprime

en général de façon non locale et pour garder une complexité raisonnable de la méthode d'approximation et par la suite du logiciel, les mathématiciens ont développé des conditions approchées. Les premiers travaux en ce sens sont dus au suédois Engquist et à l'américain Majda dans le cas de l'équation des ondes sonores (1977). Pour les équations de Maxwell, une étape importante a été franchie en 1989 par les Français Joly et Mercier ; on remarquera que ce travail résulte d'une collaboration entre un institut de recherche (l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique) et un industriel (Aérospatiale).

PERFORMANCES INFORMATIQUES

La simulation directe des équations de Maxwell par des schémas aux différences finies a longtemps été limitée par la puissance des ordinateurs. En effet, pour les problèmes à haute fréquence, il faut être capable de simuler des volumes qui contiennent beaucoup de longueurs d'onde ; un volume typique contient trente longueurs d'onde dans une direction et dix dans les deux autres. Comme on doit mettre typiquement dix points par longueur d'onde, on a besoin de trois millions de mailles pour une simulation réaliste, ce qui signifie que le modèle dynamique comporte dix huit millions (!) d'équations. Une telle résolution est possible en moins d'une heure de temps calcul depuis les années 1990 et les ordinateurs vectoriels (Cray).

A cette difficulté fondamentale liée à la puissance des calculatrices électroniques s'ajoutent les problèmes de manipulation d'immenses bases de données lors de la visualisation des résultats et la modélisation géométrique de la surface l'objet d'étude par des facettes carrées. En effet, la méthode exposée au dessus impose de discrétiser l'espace par des petits cubes et le lien général et rigoureux avec les bases de données surfaciques classiques en conception assistée par ordinateur n'est pas encore réalisé.

La recherche d'autres approximations pour les équations de Maxwell instationnaires avec des approches mathématiques plus élaborées que les différences finies conduit à s'intéresser aux formulations variationnelles des équations. En effet, on peut utiliser alors toute la souplesse offerte par un maillage de la géométrie des surfaces par des triangles et l'espace tridimensionnel par des tétraèdres. Par contre les coûts de calcul restent encore prohibitifs ainsi que le stockage en mémoire. Les ordinateurs parallèles apportent une amélioration à cette limitation de puissance des machines.

Une autre méthode enfin permet de ne mailler que la surface de l'objet qui subit une excitation électromagnétique. En effet, la méthode des équations intégrales ramène tout le problème des équations de Maxwell harmoniques (avec une donnée extérieure de pulsation ω fixée) à la recherche des courants de surface. Cette méthode est très précise mais elle est intrinsèquement chère car elle demande la résolution d'un système linéaire de grande taille qui ne comporte pas de coefficients nuls (le record était en 1996 d'une matrice complexe cent mille par cent mille). Nous l'exposons rapidement dans le paragraphe suivant.

EQUATIONS INTÉGRALES ET ÉLÉMENTS FINIS

Pour résoudre le problème de l'écho radar posé au début de cette note, on dispose de la pulsation excitatrice ω et de la connaissance détaillée de l'objet éclairé. A l'extérieur de cet objet il n'y a pas de source du rayonnement électromagnétique donc dans tout le volume extérieur à l'objet, on doit résoudre les équations de Maxwell dans le vide. De plus, la simplicité mathématique des équations de Maxwell permet d'en donner une solution générale dans le vide ou dans un milieu linéaire homogène en fonction des charges et des courants à la surface de l'objet diffractant. Une formule de représentation du champ électromagnétique diffracté, compliquée algébriquement mais dont l'existence même est une conséquence de la remarque précédente, introduit les charges et courants sur la surface comme inconnues du problème.

Quand on écrit qu'à la surface de l'objet diffractant les charges et les courants totaux sont nuls, on formule le problème par équations intégrales avec des éléments de frontière. Si l'on n'y prend pas garde, des grandeurs infinies sont introduites par la manipulation d'intégrales divergentes et leur élimination ne peut se faire qu'avec une connaissance très intime des phénomènes physiques sous-jacents.

L'école française d'analyse numérique a réalisé une percée importante depuis vingt ans en réussissant à donner au problème précédent une formulation variationnelle des équations intégrales qui conduit à un problème mathématiquement bien posé (solution unique qui dépend de façon continue des données) et permet en conséquence leur discrétisation par éléments finis de frontière assortie d'une analyse numérique de l'erreur effectuée. Le cas plus simple des ondes acoustiques a d'abord été traité par Nédélec et Planchard (1973) et il s'agit là encore d'une collaboration entre le monde académique (l'Ecole Polytechnique) et un industriel (Electricité De France). Les travaux

de Bendali (1984) ont ensuite permis d'introduire les éléments finis découverts peu de temps avant par Raviart et Thomas (1977) pour proposer une méthode numérique originale qui s'appuie sur une analyse mathématique entièrement rigoureuse des approximations effectuées. Il faut noter que ces travaux ont été directement utilisés et enrichis dans l'industrie (Thomson).

MODÉLISATIONS

L'électromagnétisme numérique met en scène différents niveaux de modélisation que nous voulons préciser ici. Il y a tout d'abord le **modèle physique** de lois de conservation de base, constitué dans cette note par les équations de Maxwell. La fermeture des équations à résoudre demande ensuite une analyse phénoménologique ; les **lois de comportement** incorporent une globalisation de la réalité à petite échelle qui n'est pas détaillée dans le modèle final comme par exemple la structure des matériaux diélectriques absorbants. Ensuite le **schéma numérique** choisit un modèle mathématique discret (à nombre fini de paramètres, différences finies ou éléments finis dans les exemples cités plus haut) qui peut "entrer" dans un ordinateur sous la forme d'un **logiciel** dont les composantes peuvent également avoir une interprétation physique simple (fils électriques, cellules élémentaires, etc.). Enfin, les calculateurs massivement parallèles demandent de choisir un **modèle de programmation** pour stocker les données en mémoire et surtout gérer les communications entre processeurs de calcul.

Cette diversité des modélisations n'est que la succession des méthodes d'analyse pour conduire une démarche rigoureuse qui part des équations de la physique et aboutit à un logiciel de simulation aux qualités les plus universelles possibles. De cette façon, des sciences de l'ingénieur qui n'ont pas de communication traditionnelle entre elles car leur domaine d'application est relativement éloigné peuvent utiliser le même outil de simulation. En électromagnétisme, des applications très diverses comme l'étude des courants de Foucault, la minimisation des signatures des échos radars et la compatibilité électromagnétique peuvent utiliser le même logiciel de simulation ; seuls changent la gamme de fréquences, les conditions extérieures, la forme particulière des résultats demandés. La compatibilité électromagnétique par exemple étudie la tenue des équipements électriques et électroniques lors d'une agression par un rayonnement extérieur au système (foudre, onde intense) et a donc besoin du calcul du champ électromagnétique proche, alors que les calculs d'un écho radar n'utilisent que le champ lointain à l'infini de l'objet diffractant.

La synergie mathématique s'étend au delà de l'électromagnétisme et couvre l'ensemble du domaine des ondes : électromagnétisme, acoustique, élastodynamique, etc. Des "détails" de l'équation changent, mais on peut transposer les méthodes acquises dans le cas le plus simple (acoustique, où le champ est scalaire) vers l'électromagnétisme et les équations de Maxwell (champ vectoriel sous contraintes) et l'élastodynamique (champ de déformation tensoriel).

CONCLUSION

L'électromagnétisme numérique est une discipline nouvelle qui a pu naître grâce au passage de la gamme de puissance "10 mégaflops" par les ordinateurs des années 1980. Elle s'insère actuellement dans la démarche générale du calcul scientifique au service de l'industrie et elle est promise à un bel avenir. En effet, l'importance croissante des systèmes électroniques dans les installations domestiques demande de respecter de nouvelles normes de sécurité ; la simulation numérique est de plus en plus l'étape clef qui permet de gagner du temps au cours de la boucle de conception.

Les études mathématiques soulevées par l'électromagnétisme numérique sont très actives, tant en ce qui concerne les méthodes asymptotiques pour la théorie géométrique de la diffraction, la recherche de schémas numériques (toujours stables) précis pour la prise en compte naturelle des géométries complexes ou le transfert de nouveaux résultats entre modèles d'équations d'ondes de plus en plus élaborés.

Les travaux passés rapportés dans cette note montrent d'une part que les mathématiciens appliqués français maîtrisent l'ensemble de la résolution numérique des problèmes d'électromagnétisme correctement définis et d'autre part qu'une bonne **synergie** entre les mathématiques appliquées menées dans divers organismes de **recherche** français et les **entreprises** industrielles (Thomson, Aérospatiale, Motesim, Electricité de France, Peugeot SA, etc.). Curieusement, les liens avec le monde traditionnel de la recherche universitaire sont probablement à renforcer.