Corrigé devoir numéro 1.

Exercice 1 : Intégrale double.
(a) (b) On considère le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2+y^2 \geq 1\}$.
On peut exprimer I à l'aide de deux intégrales sur des domaines

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

et

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x, 0 \leq y, x^2+y^2 \geq 1\},$$

donc

$$I = \int_{D_1} \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy - \int_{D_2} \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy$$

Calcul de I_1 :

$$I_1 = \int_0^1 (\int_0^1 \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx) dy$$

Changement de variable $t = x^2$ alors $dt = 2xdx$

$$I_1 = \int_0^1 (\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y}{1+t+y^2} dt) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (y[\ln(1+y^2+t)]_0^1) dy,$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 y(\ln(2+y^2) - \ln(1+y^2)) dy.$$

Changement de variable $t = y^2$ alors $dt = 2ydy$

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_0^1 (\ln(2+t) - \ln(1+t)) dt.$$

Intégration de $ln(y)$:

$$(y \ln(y))' = \ln(y) + 1$$

alors

$$\int \ln(y) dy = y \ln(y) - y + C.$$

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_0^1 (\ln(2+t) - \ln(1+t)) dt = \frac{1}{4} [(2+t)\ln(2+t) - (2+t) - (1+t)\ln(1+t) + (1+t)]_0^1 = \frac{3}{4} \ln 3 - \ln 2.$$

Calcul de I_2 : Coordonnées polaires

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$dxdy = rdrd\theta$$

$$I_2 = \int_{D_2} \frac{r^2 \cos\theta \sin\theta}{1+r^2} rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^1 \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{1+r^2} rdr) d\theta,$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^1 \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{1+r^2} rdr) d\theta.$$

Changement de variable $t = r^2$ alors $dt = 2rdr$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^1 \frac{t\cos\theta\sin\theta}{1+t}dt)d\theta,$$

$$I_2 = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta(\int_0^1(1-\frac{1}{1+t}dt))d\theta,$$

$$I_2 = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta[t-\ln(1+t)]_0^1 d\theta,$$

$$I_2 = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta(1-\ln 2)d\theta,$$

$$I_2 = -\frac{1}{8}(1-\ln 2)[\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}(1-\ln 2),$$

$$I = I_1 - I_2 = \frac{3}{4}\ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{4}(1-\ln 2) = \frac{3}{4}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{4}.$$

(c) Notons que la fonction $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$ est invariante par échange de x et y. Donc

$$\int_T \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy = \frac{1}{2}\int_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy,$$

et on en déduit que

$$\int_T \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy = \frac{3}{8}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{8}$$

Exercice 2 : On passe en coordonnées cylindriques en posant

$$x = r\cos\theta,$$

$$y = r\sin\theta,$$

$$dxdydz = rdrd\theta dz.$$

Dans ces coordonnées le domaine D correspond au domaine :

$$S = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}, r \geq 0, r^2+z^2 \leq 4a^2, r \leq 2a\sin\theta, 0 \leq \theta \leq \pi\},$$

alors

$$\text{volume}(D) = \int_D 1dxdydz = \int_S rdrd\theta dz = \int_0^\pi(\int_0^{2a\sin\theta}(\int_{-\sqrt{4a^2-r^2}}^{\sqrt{4a^2-r^2}}1dz)rdr)d\theta$$

$$= \int_0^\pi(\int_0^{2a\sin\theta}2\sqrt{4a^2-r^2}rdr)d\theta.$$

Changement de variable $t = r^2$, $dt = 2rdr$

$$\text{volume}(D) = \int_0^\pi(\int_0^{4a^2\sin^2\theta}\sqrt{4a^2-t}dt)d\theta = -\frac{2}{3}\int_0^\pi([(4a^2-t)^{3/2}]_0^{4a^2\sin^2\theta})d\theta$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^\pi(8a^3(1-\sin^2\theta)^{3/2}-8a^3)d\theta = \frac{16a^3}{3}\int_0^\pi(1-|\cos\theta|^3)d\theta = \frac{32a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)d\theta.$$

On linéarise $\cos^3\theta$, en utilisant la formule de trigonométrie $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. On a $\cos^3\theta = (\cos^2\theta)\cos\theta = \frac{\cos 2\theta+1}{2}\cos\theta$ et $\cos 2\theta\cos\theta = \frac{1}{2}[\cos(2\theta+\theta)+\cos(2\theta-\theta)]$. Donc $\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$. Alors :

$$\text{volume}(D) = \frac{32a^3}{3}[\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta)d\theta] = \frac{32a^3}{3}(\frac{\pi}{2} - [\frac{1}{12}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}) = \frac{32a^3}{3}(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}).$$

Exercice 3 : Comparaison d'intégrales.

(a) L'intégrale est croissante. Donc pour majorer $I(R)$ il suffit d'intégrer l'inégalité $f(x,y) \leq a\exp(-b|x|)$ sur le domaine rectangulaire $[-R,R]\times[-1,1]$:

$$I(R) = \int_{[-R,R]\times[-1,1]} f(x,y)dxdy \leq \int_{[-R,R]\times[-1,1]} a\exp(-b|x|)dxdy.$$

Calculons l'intégrale de droite :

$$\int_{[-R,R]\times[-1,1]} a\exp(-b|x|)dxdy = 2\int_0^R(\int_{-1}^1 a\exp(-b|x|)dy)dx$$
$$= [-\frac{4a}{b}\exp(-b|x|)]_0^R = \frac{4a}{b}(1-\exp(-b|R|)).$$

Nous obtenons donc finalement :

$$I(R) \leq \frac{4a}{b}(1-\exp(-b|R|)).$$

(b) Soit $R_2 > R_1 > 0$ des constantes réelles. Alors $[-R_2,R_2]\times[-1,1]$ se découpe en trois rectangles dont l'un est $[-R_1,R_1]\times[-1,1]$ et donc :

$$I(R_2) = \int_{[-R_2,-R_1]\times[-1,1]} f(x,y)dxdy + I(R_1) + \int_{[R_1,R_2]\times[-1,1]} f(x,y)dxdy$$

Donc

$$I(R_2) - I(R_1) = \int_{[-R_2,-R_1]\times[-1,1]} f(x,y)dxdy + \int_{[R_1,R_2]\times[-1,1]} f(x,y)dxdy$$

Comme f est positive sur $\mathbb{R}^2$ les deux intégrales précédentes sont positives donc $I(R_2)-I(R_1)$ est positive. Nous avons donc montré que $R \mapsto I(R)$ est croissante.

D'après (a) on a aussi $I(R) \leq \frac{4a}{b}(1-\exp(-b|R|))$ et comme une exponentielle est toujours ≥ 0 on en déduit $I(R) \leq \frac{4a}{b}$. Ainsi la fonction $R \mapsto I(R)$ est majorée sur $\mathbb{R}^+$.

Croissante et majorée sur $\mathbb{R}^+$ la fonction $R \mapsto I(R)$ admet donc une limite en $+\infty$.

($*$) Reprenons l'expression de $I(R_2)-I(R_1)$:

$$I(R_2) - I(R_1) = \int_{[-R_2,-R_1]\times[-1,1]} f(x,y)dxdy + \int_{[R_1,R_2]\times[-1,1]} f(x,y)dxdy$$

En utilisant la majoration $f(x,y) \leq a\exp(-b|x|)$, on peut, comme au (a), majorer ces deux intégrales, ce qui donne :

$$(0 \leq) I(R_2) - I(R_1) \leq \int_{[-R_2,-R_1]\times[-1,1]} a\exp(-b|x|)dxdy + \int_{[R_1,R_2]\times[-1,1]} a\exp(-b|x|)$$
$$= [-\frac{4a}{b}\exp(-b|x|)]_{R_1}^{R_2} = \frac{4a}{b}(\exp(-bR_1)-\exp(-bR_2)) \to 0 \text{ quand } R_2, R_1 \to R.$$

Donc $R \mapsto I(R)$ est continue en tout nombre réel R.

D'après le théorème de Fubini, la fonction $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_{-1}^{1} f(x,y)dy$, est continue sur $\mathbb{R}$, et de plus :

$$I(R) = \int_{-R}^{+R} F(x)dx = \int_0^R F(x)dx + \int_0^R G(x)dx$$

où on a posé $G(x) = F(-x)$. Alors d'après le théorème fondamental de l'analyse $I(R)$ est dérivable en tout $R \geq 0$ et de plus

$$\frac{dI}{dR}(R_0) = F(R_0) + G(R_0) = \int_{-1}^{1} f(R_0,y)dy + \int_{-1}^{1} f(-R_0,y)dy$$

Exercice 4 : Equations différentielles.

(a)

Le polynôme caractéristique est $t^2 + 2at + (a^2 + b^2) = (t+a)^2 - (ib)^2 = (t+a+ib)(t+a-ib)$. Alors la solution générale de (1) est de la forme :

$$y : x \mapsto \exp(-ax)(\lambda \cos(bx) + \mu \sin(bx))$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ quelconques.

(b) L'équation homogène associée à (2) est de la forme (1) avec $a = 0$ et de plus $b \neq 2$ puisque $b(b^2-4) \neq 0$. Notons que $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$, donc on peut chercher une solution particulière de (2) sous la forme $y_0 = \alpha\cos(2x) + \beta$. On a :

$$y_0''(x) + b^2 y_0(x) = -4\alpha\cos(2x) + b^2\alpha\cos(2x) + b^2\beta$$

donc on doit ajuster α et β pour que :

$$-4\alpha\cos(2x) + b^2\alpha\cos(2x) + b^2\beta = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)),$$

Il suffit de prendre

$$\alpha = \frac{1}{2(4-b^2)} \text{ et } \beta = \frac{1}{b^2}$$

(possible vu les hypothèses sur b). Finalement une solution particulière est $y_0(x) = \frac{\cos(2x)}{2(4-b^2)} + \frac{1}{2b^2}$.

(c) On en déduit que la solution générale de (2) sur $\mathbb{R}$ est de la forme

$$y(x) = \frac{\cos(2x)}{2(4-b^2)} + \frac{1}{b^2} + \lambda\cos(bx) + \mu\sin(bx)$$

(λ, μ réels quelconques.) On cherche la solution qui vérifie les contraintes $y(0) = y'(0) = 0$

$$y'(0) = \frac{-\sin(2x)}{(4-b^2)} - \lambda b\sin(bx) + \mu b\cos(bx),$$

donc on veut résoudre

$$y(0) = \frac{1}{2(4-b^2)} + \frac{1}{2b^2} + \lambda = 0, \quad y'(0) = \mu b = 0.$$

Ce qui donne

$$\lambda = -\frac{1}{2(4-b^2)} - \frac{1}{2b^2}, \quad \mu = 0.$$

On a obtenu que $y(x,b) = \frac{\cos(2x)}{2(4-b^2)} + \frac{1}{2b^2} - (\frac{1}{2(4-b^2)} + \frac{1}{2b^2})\cos(bx)$

(d) Pour tout x fixé on pose

$$y_1(x) = \lim_{b\to 0} y(x,b) = \frac{\cos(2x)-1}{8} + \lim_{b\to 0}(\frac{1-\cos(bx)}{2b^2})$$

on utilise le règle de L'Hôpital pour obtenir

$$\lim_{b\to 0}(\frac{1-\cos(bx)}{2b^2}) = \lim_{b\to 0}(\frac{x\sin(bx)}{4b}) = \frac{x^2}{4}.$$

$$y_1(x) = \frac{\cos(2x)-1}{8} + \frac{x^2}{4}.$$

(e) Pour tout x fixé on pose

$$y_2(x) = \lim_{b\to 2} y(x,b) = \lim_{b\to 0} \frac{\cos(2x)-\cos(bx)}{2(4-b^2)} + \frac{1-\cos(2x)}{8}.$$

On utilise le règle de L'Hôpital

$$y_2(x) = -\lim_{b\to 0} \frac{x\sin(bx)}{4b} + \frac{1-\cos(2x)}{8} = \frac{1-\cos(2x)-x\sin(2x)}{8}.$$