Devoir noté de Systèmes Dynamiques - à rendre le 2 décembre

La qualité de la rédaction sera partie intégrante de la notation.

Exercice 1 Soient X un espace compact, et $\phi : X \to X$ continue. Un *facteur topologique* du système dynamique topologique (X, ϕ) est un système dynamique topologique (Y, ψ) muni d'une semi-conjugaison (surjective, continue) $h : (X, \phi) \to (Y, \psi)$. Il est dit *trivial* si h est un homéomorphisme ou si Y est réduit à un point.

(1) Donner un exemple de système dynamique minimal qui a un facteur topologique non trivial.

(2) On dit que (X, ϕ) est *2-minimal* si pour tout $x \neq y \in X$, l'orbite de (x, y) dans X^2 pour $\phi \times \phi$ est dense dans X^2.

Démontrer que si (X, ϕ) est 2-minimal alors tout facteur topologique séparé de (X, ϕ) est trivial.

Exercice 2 Soit G un groupe agissant par homéomorphismes préservant l'orientation sur le cercle $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On note $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^1$ la surjection canonique, et on pourra noter $\dot{x} = \pi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

L'objectif de cet exercice est de comprendre sous quelle condition il existe une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{T}^1$ invariante par G.

(1) Dans cette question, on prend $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, que l'on fait agir sur la compactification d'Alexandrov $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de $\mathbb{R}$ par la formule habituelle

$$\rho_0(g)(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$. On fixe un homéomorphisme $h : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \mathbb{T}^1$ et on fait agir G sur $\mathbb{T}^1$ via l'action $\rho = h\rho_0 h^{-1}$.

(a) Si $g \in G$, quels sont les ensemble α-limites et ω-limite d'un point $x \in \mathbb{T}^1$ par $\rho(g)$? Quand $\rho(g)$ a-t-il une dynamique nord-sud sur $\mathbb{T}^1$? [1]

(b) Que vaut, en fonction de $\mathrm{Tr}(g) = a + d$, le nombre de rotation $\tau(\rho(g))$?

(c) Supposons qu'un homéomorphisme g de $\mathbb{T}^1$ a une dynamique nord-sud sur $\mathbb{T}^1$. Quelles peuvent être les mesures invariantes par g ?

(d) Démontrer qu'il n'y a pas de mesure invariante par tous les éléments de $\rho(G)$ sur $\mathbb{T}^1$.

(2) On suppose dorénavant G quelconque, on fixe une action $\rho : G \to \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{T}^1)$ et on suppose que $\rho(G)$ préserve $\mu \in \mathrm{Prob}(\mathbb{T}^1)$. Si μ a au moins un atome, montrer que G a une orbite finie sur $\mathbb{T}^1$.

(3) On suppose que G préserve une mesure μ qui n'a pas d'atome et dont le support est égal à $\mathbb{T}^1$.

1. On rappelle qu'une matrice $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est de l'un des trois types suivants :
— *elliptique* si elle est conjugée à une matrice de rotation,
— *parabolique* si elle est conjuguée à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour un $x \in \mathbb{R}^*$,
— *hyperbolique* si elle est conjuguée à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}^*$

(a) On munit $\mathbb{T}^1$ de la distance usuelle d_0, définie par $d_0(\dot{x}, \dot{y}) = \min_{k\in\mathbb{Z}} |x - y + k|$ pour $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\phi \in \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{T}^1)$ est une isométrie alors ϕ est une rotation.

(b) On définit $d(x, y) = \mu([x, y])$ pour $x, y \in \mathbb{T}^1$, où $[x, y]$ est une composante connexe de $\mathbb{T}^1 \setminus \{x, y\}$ qui minimise $\mu([x, y])$. Montrer que d est une distance, et que $(\mathbb{T}^1, d)$ est isométrique à $(\mathbb{T}^1, d_0)$.

(c) Montrer que l'action de $\rho(G)$ sur $\mathbb{T}^1$ est conjuguée à une action par rotations.

(4) On suppose que G présserve une mesure $\mu \in \mathrm{Prob}(\mathbb{T}^1)$ qui n'a pas d'atome. Pour $t \in [0, 1[$ Notons $f(\dot{t}) = \mu(\pi([0, t]))$. Montrer que f est une application continue surjective $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$, et que l'on peut définir une action $\rho' : G \to \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{T}^1)$ telle que $f \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ f$ pour tout $g \in G$.

(5) Montrer que si tout morphisme de groupe de G vers un groupe abélien est d'image fini, et si G préserve une mesure $\mu \in \mathrm{Prob}(\mathbb{T}^1)$, alors G admet une orbite finie sur $\mathbb{T}^1$.