DM 1 - à rendre le 14 octobre

Soit $(X, \mathscr{B}, \mu, \phi)$ un système dynamique mesuré à temps discret conservatif et ergodique. On suppose que la mesure μ est σ-finie. On fixe $A \in \mathscr{B}$ de mesure non nulle et finie. On note $\tau_A : X \to \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ le temps de premier retour, et τ_k le temps de k-ième retour dans A, c'est-à-dire que l'on définit par récurrence

$$\tau_1(x) = \tau_A(x) = \min\{n \geq 1 \mid \phi^n(x) \in A\}$$

et pour $k \geq 1$,

$$\tau_{k+1}(x) = \min\{n > \tau_k(x) \mid \phi^n(x) \in A\}.$$

Enfin, on note $\phi_A : A \to A$ l'application induite, c'est-à-dire que $\phi_A(x) = \phi^{\tau_A(x)}(x)$ si $x \in A$ est tel que $\tau_A(x) < +\infty$ (et $\phi_A(x) = x$ sinon). On note μ_A la mesure μ restreinte à A (c'est-à-dire que si $B \subset A$ est mesurable alors $\mu_A(B) = \mu(B)$), et on admettra que ϕ_A préserve la mesure μ_A et que le système dynamique induit $(A, \mathscr{B}_A, \mu_A, \phi_A)$ est ergodique (cf TD1).

Partie I — Le but de cette partie est de vérifier que le mélange ne se comporte pas bien par rapport à l'application induite. Pour cela, on considère un système dynamique probabilisé inversible et mélangeant $(Y, \mathscr{B}_Y, \mu_Y, \psi)$, et pour $n \geq 2$ fixé on pose $X = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times Y$ muni de la mesure produit de la mesure uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et de μ_Y. On définit $\phi : X \to X$ par $(k, y) \mapsto (k+1, y)$. Soit $A = \{(0, y) \mid y \in Y\}$.

(1) Vérifier que ϕ préserve la mesure, est ergodique, et que l'application induite ϕ_A est bien définie et mélangeante relativement à la mesure de probabilité $\mu_A/\mu(A)$.

(2) Démontrer que ϕ n'est pas mélangeante.

Partie II — L'objectif de cette partie est de démontrer que pour toutes les fonctions $f, g \in \mathbb{L}^1(X, \mu)$, avec $\int_X g d\mu \neq 0$, on a pour μ-presque tout x

$$\text{(H)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\Sigma_n f(x)}{\Sigma_n g(x)} = \frac{\int_X f d\mu}{\int_X g d\mu}$$

(où on a noté $\Sigma_n f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \phi^k(x)$.)

(1) Montrer l'équation (H) lorsque μ est finie.

(2) On se place à nouveau dans le cas général. Expliquer pourquoi il existe un ensemble $X' \subset X$ avec $\mu(X \setminus X') = 0$ et tel que pour tout $x \in X'$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\tau_k(x) < +\infty$.

(3) (a) Soit $x \in A$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $B \subset A$ mesurable et pour tout $n \in]\tau_k(x), \tau_{k+1}(x)]$ on a

$$\Sigma_n(\mathbb{1}_B)(x) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{1}_B(\phi_A^j(x))$$

Préciser la valeur de cette somme lorsque $A = B$.

(b) En déduire que (H) est vérifiée lorsque $f = \mathbb{1}_B$ et $g = \mathbb{1}_A$.

(4) On fixe maintenant $f \in \mathbb{L}^1(X, \mu)$, et on suppose $f \geq 0$. On définit pour $x \in X$

$$f^A(x) = \sum_{k=0}^{\tau_A(x)-1} f(\phi^k(x)).$$

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in A$ et tout $n \in]\tau_k(x), \tau_{k+1}(x)]$ alors

$$\frac{\sum_{j=0}^{k-1} f^A(\phi_A^j(x))}{k+1} \leq \frac{\Sigma_n f(x)}{\Sigma_n(\mathbb{1}_A)(x)} \leq \frac{\sum_{j=0}^{k} f^A(\phi_A^j x)}{k+1}$$

(b) On veut démontrer que

(*)
$$\int_A f^A(x)d\mu_A(x) = \int_X f(x)d\mu(x)$$

(i) Montrer qu'il suffit de démontrer l'équation (*) pour $f = \mathbb{1}_B$ avec $B \in \mathscr{B}$ de mesure finie, puis qu'on peut supposer B disjoint de A..

(ii) Si B est disjoint de A, on considère le système dynamique $(A \cup B, \phi_{A\cup B})$ muni de la mesure induite. En utilisant le théorème de Kac au temps de retour sur A dans ce système, démontrer l'équation (*).

(c) Déduire de ce qui précède que pour μ_A-presque tout x on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n f(x)}{\Sigma_n(\mathbb{1}_A)(x)} = \frac{\int_X f d\mu}{\mu(A)}$$

(d) Conclure.