TD 1 : Systèmes dynamiques topologiques, homéomorphismes du cercle

Exercice 1 Soient (X, ϕ) et (X', ϕ') deux systèmes dynamiques topologiques, et soit $h : X \to X'$ une semi-conjugaison entre (X, ϕ) et (X', ϕ'). Parmi les propriétés suivantes, quelles sont celles qui sont vérifiées par (X', ϕ') si elles le sont par (X, ϕ) ? Donner des contre-exemples lorsque ce n'est pas le cas.

- avoir ses points périodiques dense,
- avoir un point positivement récurrent,
- ne pas avoir de point errant,
- être positivement transitif (et transitif dans le cas inversible),
- être topologiquement mélangeant,
- être positivement minimal (et minimal dans le cas inversible).

Exercice 2 Soit X un espace topologique à base dénombrable d'ouverts, $\mu \in \mathrm{Prob}(X)$ de support égal à X, et $\phi : X \to X$ une application continue qui préserve μ. Montrer que si ϕ est μ-ergodique alors μ-presque toute orbite positive est dense dans X, c'est-à-dire que

$$\overline{\{\phi^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}} = X$$

pour μ-presque tout x.

Exercice 3 Soient $p \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}$, $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\phi_p : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ l'application continue définie par $x \mapsto p\,x$.

(1) Montrer que le système dynamique topologique à temps discret $(\mathbb{T}^1, \phi_p)$ est non inversible, qu'il est conjugué au système dynamique topologique $(\mathbb{S}_1, z \mapsto z^p)$, que l'ensemble $\mathrm{per}(\phi_p)$ des points périodiques de ϕ_p est dense dans le cercle $\mathbb{T}^1$, que le système dynamique topologique $(\mathbb{T}^1, \phi_p)$ est non errant, qu'il est positivement transitif, et qu'il est topologiquement mélangeant.

(2) Supposons $p \geq 2$. Soit $\Theta : \{0, \dots, p-1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{T}^1$ l'application définie par

$$(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{x_i}{p^{i+1}} \mod \mathbb{Z} \,.$$

Montrer que Θ est une semi-conjugaison entre le système de Bernoulli unilatère d'alphabet $\{0, \dots, p-1\}$ et le système dynamique topologique $(\mathbb{T}^1, \phi_p)$, que l'on appelle un codage de $(\mathbb{T}^1, \phi_p)$. Retrouver les propriétés précédentes.

Exercice 4 Soit (X, d) un espace métrique. Une application continue $f : X \to X$ est dite *strictement dilatante de rapport* $\lambda > 1$ s'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tous les $x, y \in X$, si $d(x, y) \leq \epsilon$ alors

$$d(f(x), f(y)) \geq \lambda\, d(x, y) \,.$$

Une application continue $f : X \to X$ est dite *strictement dilatante* s'il existe $\lambda > 1$ tel que f soit strictement dilatante de rapport λ.

Le but de l'exercice est de donner une classification à conjugaison près des applications strictement dilatantes du cercle dans lui-même. Nous considérons le cercle comme l'espace métrique $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, pour la distance d induite[1] de celle de $\mathbb{R}$.

1. En notant $\dot{x} \in \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ l'image de $x \in \mathbb{R}$ par la projection canonique, la distance induite est définie par $d(\dot{x}, \dot{y}) = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - y + k|$ pour tous les $x, y \in \mathbb{R}$. Remarquons que si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient $|x - y| < \frac{1}{2}$, alors $d(\dot{x}, \dot{y}) = |x - y|$.

(1) Soit $p \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}$. Montrer que l'application $\phi_p : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ définie par $x \mapsto p\,x$ est strictement dilatante.

(2) Montrer que le degré p d'une application strictement dilatante $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ est différent de $-1, 0, 1$.

À partir de maintenant, nous fixons une application strictement dilatante $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ de degré $p \geq 2$, et nous voulons montrer que f est topologiquement conjuguée à ϕ_p.

(3) Montrer que f a un point fixe. Montrer que l'on peut supposer que f admet un relevé $\widetilde{f}$ (que nous fixons dans la suite) tel que $\widetilde{f}(0) = 0$. Montrer qu'il existe une suite finie strictement croissante de points $a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_{p-1} < a_p = 1$ tels que $\widetilde{f}(a_i) = i$ pour $i = 0, \ldots, p$.

(4) Notons E l'ensemble des applications continues croissantes $h : [0, 1] \to [0, 1]$ telles que $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$, muni de la distance induite par la norme uniforme

$$d(h_1, h_2) = \max_{t \in [0,1]} |h_1(t) - h_2(t)| \,.$$

Montrer que E est complet. Soit $L : E \to E$ l'application $h \mapsto Lh$ définie en posant, pour tous les $h \in E$ et $t \in [0, 1]$,

$$Lh : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{p}\, h(\widetilde{f}(t) - i) + \frac{i}{p} \mod 1 & \text{si } a_i \leq t < a_{i+1} \text{ et } i = 0, \ldots, p-1 \\ 1 & \text{si } t = 1\,. \end{cases}$$

Montrer que L est une application $\frac{1}{p}$-contractante [2] de E dans E.

(5) Conclure.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ un homéomorphisme préservant l'orientation, de nombre de rotation α rationnel.

(1) Montrer que toutes les orbites périodiques ont la même période.

(2) Montrer que toutes les orbites périodiques ont le même ordre cyclique sur le cercle que toute orbite de la rotation R_α.

(3) Si le nombre de rotation de f est p/q avec p, q deux entiers premiers entre eux, montrer que f est topologiquement conjugué à la rotation $R_{p/q}$ si et seulement s'il existe un relevé $\widetilde{f}$ de f tel que $\widetilde{f}^{\,q}$ est l'application $t \mapsto t + p$.

2. Soit $c \in [0, 1[$. Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques est *c-contractante* si pour tous les $x, y \in X$, nous avons $d(f(x), f(y)) \leq c\, d(x, y)$.