

TD 1 : Transformations préservant la mesure

Exercice 1 Soit X un espace topologique métrisable compact et non vide. Soient $\varphi_1, \varphi_2 : X \rightarrow X$ deux applications continues qui commutent. Montrer qu'il existe une mesure de probabilité borélienne sur X invariante par φ_1 et φ_2 .

Exercice 2 Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini de cardinal au moins deux, et μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{A}$. Pour a dans le support de μ , calculer les lois des temps de premiers retour sur le cylindre initial $[a]$ des décalages de Bernoulli bilatère et unilatère pour les mesures $\mu^{\mathbb{Z}}$ et $\mu^{\mathbb{N}}$ respectivement. Vérifier le théorème de Kac.

Exercice 3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ irrationnel et T la translation du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ définie par $T(x) = x + \alpha$. Soit $\beta \in]0, 1[$ et $I = [0, \beta]$ un intervalle fermé (de $\mathbb{R}$, identifié à son image dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$).

- (1) Soient $0 \leq a \leq b < 1$. Montrer que si $x \in [a, b] \subset I$ et n sont tels que $T^n x \in I$ alors $T^n a \in I$ ou $T^n b \in I$.
- (2) Montrer que le temps de premier retour sur I prend au plus 3 valeurs distinctes.

Exercice 4 (TRANSFORMATION INDUITE) Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, \varphi)$ un système dynamique probabilisé à temps discret. Soit A une partie mesurable, de mesure non nulle, et soit $\tau_A : X \rightarrow (\mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{\infty\})$ son premier temps de retour. On note μ_A la mesure induite sur A : on rappelle qu'elle est définie par $\mu_A(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(A)}$ pour tout B dans la σ -algèbre induite $\mathcal{B}_A = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$. La transformation induite de φ dans A est l'application

$$\varphi_A : x \mapsto \begin{cases} \varphi^{\tau_A(x)}(x) & \text{si } \tau_A(x) \neq \infty \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

- (1) Montrer que φ_A est $\mathcal{B}_A$ -mesurable et préserve la mesure induite μ_A .
- (2) Montrer que si $(X, \mathcal{B}, \mu, \varphi)$ est ergodique alors $(A, \mathcal{B}_A, \mu_A, \varphi_A)$ est ergodique.
- (3) On suppose que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi^{-n}(A)$. Montrer que si $(A, \mathcal{B}_A, \mu_A, \varphi_A)$ est ergodique alors $(X, \mathcal{B}, \mu, \varphi)$ est ergodique.

Exercice 5 (TRANSFORMATION DE KAKUTANI) Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, \varphi)$ un système dynamique probabilisé à temps discret inversible. Soit $\tau : X \rightarrow (\mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{\infty\})$ une application mesurable telle que $\int_X \tau d\mu < \infty$ (on l'appellera *fonction de hauteur*). Soit

$$X_\tau = \{(x, n) \in X \times \mathbb{N} \mid n < \tau(x)\}$$

munie de la σ -algèbre $\mathcal{B}_\tau$ induite de la σ -algèbre produit sur $X \times \mathbb{N}$. Soit $\varphi_\tau : X_\tau \rightarrow X_\tau$ définie par

$$(x, n) \mapsto \begin{cases} (x, n+1) & \text{si } n+1 < \tau(x) \\ (\varphi(x), 0) & \text{sinon} \end{cases}$$

(appelée la *transformation de Kakutani* sur X de hauteur τ).

- (1) Montrer que la transformation de Kakutani φ_τ est mesurable pour $\mathcal{B}_\tau$.
- (2) Montrer qu'il existe sur l'espace mesurable X_τ une unique mesure de probabilité μ_τ , invariante par φ_τ , telle que la mesure induite de μ_τ sur $X \times \{0\}$ est la mesure μ .

L'espace X_τ s'appelle la *tour de Kakutani* sur X de hauteur τ . Le système dynamique $(X_\tau, \mathcal{B}_\tau, \mu_\tau, \varphi_\tau)$ s'appelle la *suspension* de X de hauteur τ .

- (3) Faire un dessin.
- (4) Montrer que si $(X, \mathcal{B}, \mu, \varphi)$ est ergodique alors $(X_\tau, \mathcal{B}_\tau, \mu_\tau, \varphi_\tau)$ l'est aussi.
- (5) Soit $(Y, \mathcal{C}, \nu, \psi)$ un système dynamique probabilisé à temps discret inversible avec ν ergodique, et A une partie mesurable de mesure non nulle de Y . Montrer que le système dynamique mesuré $(Y, \mathcal{C}, \nu, \psi)$ est conjugué au système obtenu comme suspension du système dynamique mesuré induit $(A, \mathcal{C}_A, \nu_A, \psi_A)$ pour la fonction de hauteur égale au premier temps de retour τ_A .