TD 2 : Flot géodésique, flot horocyclique

Exercice 1 Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

(1) Montrer la proprieté de commutation suivante des flots géodésique et horocyclique sur $\Gamma\backslash T^1\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$: pour tous les $t, s \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\mathfrak{g}^t \circ \mathfrak{h}^s \circ \mathfrak{g}^{-t} = \mathfrak{h}^{s\,e^{-t}} \ . \tag{1}$$

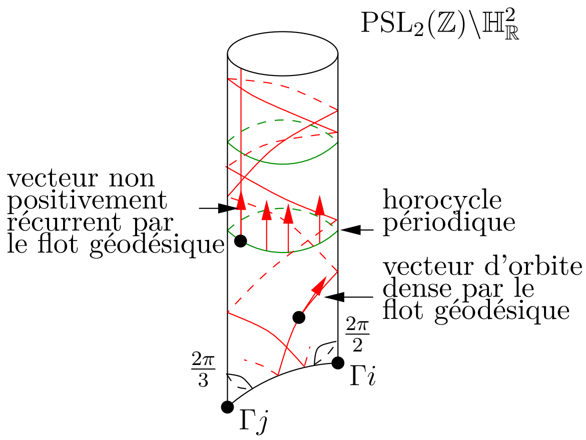
(2) Montrer que la famille $(\overline{\mathfrak{h}}^{\,s})_{s\in\mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre de C^∞-difféomorphismes de $T^1\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$, appelé le flot horocyclique instable sur le plan hyperbolique réel $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$, qui commute avec l'action de G sur $T^1\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$, qui préserve la mesure de Liouville sur $T^1\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$, et vérifie, pour tous les $g \in G$ et $s, t \in \mathbb{R}$,

$$\mathfrak{g}^t \circ \overline{\mathfrak{h}}^{\,s} \circ \mathfrak{g}^{-t} = \overline{\mathfrak{h}}^{\,s\,e^t} \quad \text{et} \quad \overline{\mathfrak{h}}^{\,s}(\Phi(g)) = \Phi(g\,u^-_s)$$

où $u^-_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}$.

(3) Soit Γ un réseau de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. On va montrer que le flot géodésique sur $Y = \Gamma\backslash T^1\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ est ergodique pour m_{Liou}. Pour cela, on pourra considérer une fonction $f \in \mathbb{L}^2(Y, m_{\mathrm{Liou}})$ invariante par le flot géodésique (c'est-à-dire telle que $f \circ \mathfrak{g}^t = f$ dans $\mathbb{L}^2(Y, m_{\mathrm{Liou}})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$), montrer que $\|f \circ \mathfrak{h}^s - f\|_{\mathbb{L}^2} = 0$ et $\|f \circ \overline{\mathfrak{h}}^{\,s} - f\|_{\mathbb{L}^2} = 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ en utilisant la formule (1), et en en déduire que f est invariante par l'action par translations à droite de G sur Y identifié à $\Gamma\backslash G$ par Φ^{-1}.

Exercice 2 Notons $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ le groupe modulaire, $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ la *courbe modulaire* et $T^1M = \Gamma\backslash T^1\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. Notons $\mathscr{F} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \geq 1, \ |\mathrm{Re}\ z| \leq \frac{1}{2}\}$ le domaine (faiblement) fondamental usuel du groupe modulaire Γ sur $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. Notons $S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.



(1) Montrer que si deux points distincts z et z' dans $\mathscr{F}$ sont dans la même orbite par Γ, alors ou bien $\mathrm{Re}\ z = \pm\frac{1}{2}$ et $z = z' \pm 1$, ou bien $|z| = 1$ et $z' = -\frac{1}{z}$. Montrer que le stabilisateur $\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma \ : \ \gamma \cdot z = z\}$ d'un point $z \in \mathscr{F}$ dans Γ est trivial (réduit à $\{\mathrm{id}\}$) sauf dans les trois cas suivants :

- $z = i$, auquel cas $\Gamma_z = \{\mathrm{id}, S\}$,
- $z = \omega = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, auquel cas $\Gamma_z = \{\mathrm{id}, ST, (ST)^2\}$,
- $z = -\overline{\omega} = e^{\frac{i\pi}{3}} = \omega + 1$, auquel cas $\Gamma_z = \{\mathrm{id}, TS, (TS)^2\}$.

(2) On s'intéresse maintenant aux orbites périodiques du flot géodésique sur T^1M.

(a) Expliquer pourquoi une telle orbite périodique est déterminée par un vecteur $v \in T^1\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ tel qu'il existe $t \in \mathbb{R}, \gamma \in \Gamma$ tels que $\mathfrak{g}_t v = \gamma v$. On fixe un tel v et on note ℓ la géodésique de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ associée à v, et $z_1, z_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ les points à l'infini de ℓ.

(b) Expliquer pourquoi on ne peut pas avoir $z_1 = \infty$ ou $z_1 \in \mathbb{Q}$. Vérifier que z_1 et z_2 sont quadratiques conjugués (ce sont les deux solutions d'un même polynôme de degré 2 à coefficient entiers).

(c) Réciproquement, on suppose z_1 et z_2 quadratiques conjugués, et soit ℓ la géodésique de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ entre z_1 et z_2. En utilisant le développement en fraction continue de z_1, démontrer que l'image de ℓ est une géodésique périodique de M. *On rappelle que le développement en fraction continue d'un irrationnel quadratique est périodique à partir d'un certain rang.*

(3) Déterminer les orbites périodiques du flot horocyclique sur T^1M.

(4) Montrer que la réunion des orbites périodiques du flot géodésique est dense dans T^1M. *On rappelle que si* $\alpha = [\,\overline{a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m}\,]$ *est un irrationnel quadratique dans* $\mathbb{R}$ *dont le développement en fraction continue est purement périodique de période* $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m$ *(donc de premier coefficient* $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor \geq 1$*), si* α^σ *est le conjugué de Galois de* α *(l'autre racine d'un polynôme quadratique à coefficients entiers dont* α *est une racine), alors le développement en fraction continue de* $-\frac{1}{\alpha^\sigma}$ *est* $[\,\overline{a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0}\,]$*, périodique de période l'image miroir* $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0$ *de la période de* α.

(5) Montrer que pour tout $v \in T^1\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$, l'ensemble limite $\omega(\Gamma v)$ de $\Gamma v \in T^1M$ par le flot géodésique est non vide si et seulement si le point à l'infini du rayon géodésique de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ défini par v n'appartient pas à $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.