TD 2 : Ergodicité, théorème de Birkhoff, théorèmes de Kingman et Oseledets

Exercice 1 Soit $(X, \mathscr{B}, \mu, \varphi)$ un système dynamique probabilisé.
Montrer que φ est ergodique si et seulement si pour tous $A, B \in \mathscr{B}$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(\varphi^{-k}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

Exercice 2 Soit $x \in \{1, \ldots, 9\}$. Quelle est la fréquence de x comme premier chiffre dans l'écriture décimale de 2^n ?

Exercice 3 Soit $(X, \mathscr{B}, \varphi)$ un système dynamique mesurable, et μ et ν deux mesures de probabilités invariantes.

(1) Montrer que si ν est ergodique et μ est absolument continue par rapport à ν alors $\nu = \mu$.

(2) Montrer que si μ et ν sont ergodiques alors elles sont égales ou étrangères.

Exercice 4 Un système dynamique probabilisé à temps discret $(X, \mathscr{B}, \mu, \varphi)$ est dit *totalement ergodique* si pour tout $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ le système dynamique $(X, \mathscr{B}, \mu, \varphi^n)$ est ergodique.

(1) Donner un exemple de système dynamique probabilisé à temps discret qui soit ergodique mais pas totalement ergodique.

(2) Montrer que le système dynamique $(X, \mathscr{B}, \mu, \varphi)$ est totalement ergodique si et seulement s'il n'admet pas de facteur fini non trivial (c'est-à-dire dont le support de la mesure n'est pas un singleton).

Exercice 5 (Produits croisés) Soit $(X, \mathscr{B}, \mu, \varphi)$ un système dynamique mesuré à temps discret. Soit G un groupe topologique localement compact abélien (dont on note la loi additivement), $\mathscr{B}_G$ sa σ-algèbre borélienne et μ_G une mesure de Haar de G, et $f : X \to G$ une application mesurable. Considérons l'application $\varphi_f : X \times G \to X \times G$ définie par

$$\varphi_f : (x, g) \mapsto (\varphi(x), g + f(x))$$

(1) Montrer que φ_f est mesurable pour la σ-algèbre produit $\mathscr{B} \times \mathscr{B}_G$ et préserve la mesure produit $\mu \otimes \mu_G$. Le quadruplet $(X \times G, \mathscr{B} \times \mathscr{B}_G, \mu \otimes \mu_G, \varphi_f)$ est le *système dynamique produit croisé* de $(X, \mathscr{B}, \mu, \varphi)$ par f.

(2) (**Théorème d'Anzai**) Si φ est ergodique et si G est le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, montrer, par exemple en utilisant le développement de Fourier par rapport à la seconde variable, que le système dynamique produit croisé n'est pas ergodique si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que la fonction $pf : X \to G$ soit un *cobord*, c'est-à-dire qu'il existe une application mesurable $\theta : X \to G$ telle que presque partout

$$pf = \theta \circ \varphi - \theta.$$

Exercice 6 (Minoration d'exposants de Lyapunov) Soit $X = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ muni de la mesure de Lebesgue (normalisée), et $\varphi : X \to X$ définie par $\varphi(x) = x + 2\pi\alpha$ avec $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Pour $x \in X$ on note $R_x = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$ la rotation d'angle x.

Soit $c > 1$, on note $H = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$ et on définit $M : X \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ par $M(x) = HR_x$. Soit

$$M_n(x) = M(\varphi^{n-1}(x))M(\varphi^{n-2}(x)) \dots M(\varphi(x))M(x)$$

le cocycle associé ; on note $\lambda_{\max}$ son plus grand exposant de Lyapunov. L'objectif de cet exercice est de démontrer que

$$\lambda_{\max} \geq \ln\left(\frac{c + c^{-1}}{2}\right)$$

(1) Expliquer pourquoi on a

$$\lambda_{\max} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \ln \|HR_{x+2\pi(n-1)\alpha} \cdots HR_x\|_\infty dx$$

(où $\|A\|_\infty$ désigne le maximum des modules des coefficients de la matrice A)

(2) Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\widetilde{R}(z) = \begin{pmatrix} (z^2+1)/2 & (-z^2+1)/2i \\ (z^2-1)/2i & (z^2+1)/2 \end{pmatrix}$$

Exprimer R_x en fonction de $\widetilde{R}(e^{ix})$. En déduire que

$$\lambda_{\max} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} f_n(e^{ix}) dx,$$

où les $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions sous-harmoniques que l'on explicitera. [1]

(3) En déduire que $\lambda_{\max} \geq \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln \|(H\widetilde{R}(0))^n\|_\infty$ et conclure.

1. Rappelons qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est *sous-harmonique* si elle est semi-continue supérieurement et si l'image de tout point z_0 est inférieure à la moyenne de f sur les cercles autour de z_0 : autrement dit, $f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{ix})dx$ pour tout r.

On pourra utiliser les deux résultats suivants :

— Si $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe et ne s'annule pas, alors $z \mapsto \ln|u(z)|$ est sous-harmonique,

— Un maximum de fonctions sous-harmoniques est sous-harmonique.