TD 3 : Dynamique hyperbolique

Exercice 1 Lemme de pistage linéaire

Soit T un automorphisme linéaire hyperbolique de $\mathbb{R}^N$, $\|\,.\,\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$ adaptée à T, et $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{R}^N$ telle que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \ \|y_{n+1} - T(y_n)\| \ \leq \varepsilon,$$

il existe un unique point y de $\mathbb{R}^N$ tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \ \|y_n - T^n(y)\| \ \leq \ \frac{\varepsilon}{1 - \mathrm{ch}(T)} \ .$$

Autrement dit, toute ε-pseudo-orbite de T est ε'-pistée par une unique (vraie) orbite avec $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1-\mathrm{ch}(T)}$.

On pourra se ramener au cas $\|T\| < 1$ *et considérer* $y = \lim\limits_{n\to+\infty} T^n(y_{-n})$.

Exercice 2 Montrer qu'il existe pour $N = 4$ un automorphisme linéaire du tore $\mathbb{T}^N$, mélangeant pour la mesure de Haar du tore $\mathbb{T}^N$, qui n'est pas structurellement stable.

On rappelle que ϕ_M *est mélangeant dès que* $M \in M_N(\mathbb{Z})$ *n'a aucune valeur propre racine de l'unité*

TD 3 : Hyperbolic dynamics

Exercice 1 Linear Tracking Lemma

Let T be a hyperbolic linear automorphism of $\mathbb{R}^N$, $\|\,.\,\|$ a norm on $\mathbb{R}^N$ adapted to T, and $\varepsilon > 0$. Show that, for any sequence $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in $\mathbb{R}^N$ such that

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \ \|y_{n+1} - T(y_n)\| \ \leq \varepsilon,$$

there exists a unique point y in $\mathbb{R}^N$ such that

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \ \|y_n - T^n(y)\| \ \leq \ \frac{\varepsilon}{1-\mathrm{ch}(T)} \ .$$

In other words, any ε-pseudo-orbit of T is ε'-tracked by a unique (true) orbit with $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1-\mathrm{ch}(T)}$.

Hint : You can reduce to the case where $\|T\| < 1$ *and consider* $y = \lim\limits_{n\to+\infty} T^n(y_{-n})$.

Exercice 2 Show that there exists, for $N = 4$, a linear automorphism of the torus $\mathbb{T}^N$ that is mixing for the Haar measure on the torus $\mathbb{T}^N$ but is not structurally stable.

Recall that ϕ_M *is mixing as soon as* $M \in M_N(\mathbb{Z})$ *has no eigenvalues that are roots of unity.*