

TD 3 : Mélange

Exercice 1 Soient $(X, \mathcal{B}, \mu, \phi)$ et $(X', \mathcal{B}', \mu', \phi')$ deux systèmes dynamiques mesurés à temps discret, avec μ et μ' des mesures de probabilité. Soit $h : X \rightarrow X'$ une semi-conjugaison entre (X, ϕ) et (X', ϕ') . Parmi les propriétés suivantes, quelles sont celles qui sont vérifiées par (X', ϕ') si elles le sont par (X, ϕ) , éventuellement quitte à rajouter des hypothèses sur h ?

- être ergodique,
- être mélangeant,
- être mélangeant d'ordre k pour un $k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ donné (cf. exercice ci-dessous pour la définition),
- être ψ -mélangeant sur un sous-espace vectoriel dense.

Exercice 2 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, \phi)$ un système dynamique mesuré à temps discret, avec μ une mesure de probabilité. Pour k dans $\mathbb{N} - \{0, 1\}$, nous dirons que $(X, \mathcal{A}, \mu, \phi)$ est *mélangeant d'ordre k* si pour toutes les parties mesurables $A_1, \dots, A_k$ de X , et toutes les applications $\tau_1, \dots, \tau_k$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{i+1}(n) - \tau_i(n) = +\infty$ pour $i = 1, \dots, k-1$, nous avons

$$\mu \left(\bigcap_{i=1}^k \phi^{-\tau_i(n)}(A_i) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^k \mu(A_i) .$$

Nous dirons que $(X, \mathcal{A}, \mu, \phi)$ vérifie la propriété de *mélange multiple* s'il est mélangeant d'ordre k pour tout k dans $\mathbb{N} - \{0, 1\}$.

- (1) Montrer que $(X, \mathcal{A}, \mu, \phi)$ est mélangeant d'ordre k si et seulement si pour tous les $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{L}^k(X, \mu)$ et toutes les applications $\tau_1, \dots, \tau_k$ comme ci-dessus, nous avons

$$\int_X \left(\prod_{i=1}^k f_i \circ \phi^{\tau_i(t)} \right) d\mu \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^k \int_X f_i d\mu .$$

- (2) Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini de cardinal au moins 2, muni d'une mesure probabilité μ . Montrer que le système de Bernoulli sur $\mathcal{A}$, muni de la mesure produit $\mu^{\mathbb{N}}$ dans le cas unilatère et de la mesure produit $\mu^{\mathbb{Z}}$ dans le cas bilatère, vérifie la propriété de mélange multiple.
- (3) Soit p dans $\mathbb{N} - \{0, 1\}$. Montrer que l'application $\phi_p : x \mapsto p \cdot x$ du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans lui-même vérifie la propriété de mélange multiple pour la mesure de Lebesgue du cercle.
- (4) Soient N dans $\mathbb{N} - \{0\}$ et M une matrice inversible $N \times N$ à coefficients entiers, dont toutes les valeurs propres ont un module > 1 . Montrer que l'application $\phi_M : x \bmod \mathbb{Z}^N \mapsto Mx \bmod \mathbb{Z}^N$ du tore $\mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$ dans lui-même vérifie la propriété de mélange multiple pour la mesure de Haar du tore.

Exercice 3 Soient $N \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{Z})$ une matrice entière $N \times N$ qui n'admette pas de valeur propre complexe de module inférieur ou égal à 1. Notons $\pi : y \mapsto \dot{y}$ la projection canonique de $\mathbb{R}^N$ sur le tore $\mathbb{T}^N$. Notons $\phi_M : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$ l'application lisse $\theta = (\theta_i)_{1 \leq i \leq N} \mapsto (\sum_{1 \leq j \leq N} m_{ij} \theta_j)_{1 \leq i \leq N}$, définie par passage au quotient modulo $\mathbb{Z}^N$ de l'application linéaire $M : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Notons $C^0(\mathbb{T}^N)$ l'espace de Banach des applications continues réelles sur $\mathbb{T}^N$, muni de la norme uniforme $\| \cdot \|_{\infty}$. Notons $L_M : C^0(\mathbb{T}^N) \rightarrow C^0(\mathbb{T}^N)$ l'application linéaire continue (de norme au plus 1), appelée *opérateur de transfert*, définie, pour tous les $f \in C^0(\mathbb{T}^N)$ et $x \in \mathbb{T}^N$,

par

$$L_M f : x \mapsto \frac{1}{\text{card}(\phi_M^{-1}(x))} \sum_{z \in \phi_M^{-1}(x)} f(z) .$$

- (1) Montrer que $M\mathbb{Z}^N$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^N$ d'indice $|\det(M)|$. Quel est le cardinal de $\phi_M^{-1}(x)$?
- (2) Pour tous les $f \in C^0(\mathbb{T}^N)$ et $y \in \mathbb{T}^N$, montrer que

$$L f(y) = \frac{1}{|\det M|} \sum_{[i] \in \mathbb{Z}^N / M\mathbb{Z}^N} f \circ \pi(M^{-1}(y + i)) .$$

- (3) Montrer qu'en notant $\lambda = d\theta$ la mesure de Haar de $\mathbb{T}^N$, nous avons, pour tous les $f, g \in C^0(\mathbb{T}^N)$,

$$\int_{\mathbb{T}^N} (f \circ \phi_M) g \, d\lambda = \int_{\mathbb{T}^N} f (L_M g) \, d\lambda .$$

- (4) Nous munissons $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ de la norme d'opérateur usuelle. Montrer qu'il existe $c > 0$ et $\lambda > 1$ tel que pour tous les $f \in C^1(\mathbb{T}^N)$ et $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\left| L_M^n f(x) - \int_{\mathbb{T}^N} f \, d\lambda \right| \leq \frac{c}{\lambda^n} \sup_{x \in \mathbb{T}^N} \|d_x f\|$$

- (5) En déduire une nouvelle démonstration de la propriété du mélange de ϕ_M pour la mesure de Haar du tore.
- (6) En déduire que la transformation ϕ_M est exponentiellement mélangeante pour la mesure de Haar du tore, sur l'espace vectoriel $C^1(\mathbb{T}^N)$ muni la norme de Sobolev $W^{1,\infty}$, définie par $\|f\|_{1,\infty} = \max\{\|f\|_\infty, \|df\|_\infty\}$, où $\|df\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{T}^N} \|d_x f\|$.

Exercice 4 Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini, de cardinal au moins 2, muni d'une mesure de probabilité ν , et $(X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \mu = \nu^{\mathbb{Z}}, \phi)$ le décalage de Bernoulli (bilatère) associé.

- (1) Pour $a \in \mathcal{A}$ on note $[a]$ le cylindre des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telles que $x_0 = a$. Soit $f = \mathbb{1}_{[a]} - \mu([a])$ (de sorte que $f \in \mathbb{L}_0^2(\mu)$). Démontrer que la mesure spectrale de la fonction f est un multiple de la mesure de Haar du cercle.
- (2) Pour $b \neq a \in \mathcal{A}$, soit $C = [a, b]$ le cylindre des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telles que $x_0 = a$ et $x_1 = b$. Soit $f = \mathbb{1}_C - \mu(C)$. Démontrer qu'il existe des réels α, β tels que la mesure spectrale de la fonction f est de la forme $(\alpha \cos(2\pi\theta) + \beta)d\theta$. Les déterminer.