TD4 : Dynamique hyperbolique (2)

Exercice 1 Soient k, N des entiers naturels non nuls et M une variété différentielle compacte de dimension N. Rappelons qu'un point fixe x_0 d'un C^1-difféomorphisme ϕ de M est hyperbolique si son application tangente $T_{x_0}\phi \in \mathscr{L}(T_{x_0}M)$ n'a pas de valeur propre (complexe) de module 1. Notons $\mathrm{Diff}^k(M)$ l'espace de Baire [1] des C^k-difféomorphismes de M muni de la convergence uniforme sur les compacts des applications et de leurs applications tangentes jusqu'à l'ordre k.

(1) Pour tous les $p, q \in \mathbb{N}$, construire un C^1-difféomorphisme du cercle préservant l'orientation ayant exactement $2p$ points fixes, tous hyperboliques, et, si $q \geq 1$, un C^1-difféomorphisme du cercle préservant l'orientation ayant exactement $p + q$ points fixes, dont p hyperboliques et q non hyperboliques.

(2) Soit ϕ un C^1-difféomorphisme du cercle préservant l'orientation ayant un nombre fini non nul de points fixes, tous hyperboliques.

- Montrer que ϕ admet un nombre pair de points fixes, notés $p_1, \dots, p_{2k}$ dans l'ordre trigonométrique.
- Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ assez petit tel que les arcs ouverts de cercle A_i de longueur 2ε centrés en p_i sont deux à deux disjoints, et que si ψ est suffisamment C^1-proche de ϕ, alors ψ a exactement un point fixe p'_i dans chaque arc de cercle de longueur 2ε centré en p_i et n'a pas de point fixe en dehors des A_i.
- En fixant un point a_i de l'arc de cercle entre p_i et p_{i+1} qui n'appartient pas à $A_i \cup A_{i+1}$, montrer qu'il existe une application continue $h : \mathbb{S}_1 \to \mathbb{S}_1$ telle que, pour tout $i = 1, \dots, 2k$, nous avons $h(p_i) = p'_i$, $h(a_i) = a_i$, $h(\phi(a_i)) = \psi(a_i)$, h est affine sur l'arc de cercle entre a_i et $\phi(a_i)$, et $h \circ \phi = \psi \circ h$.
- En déduire que ϕ est structurellement stable. [2]

(3) On se replace dans le cadre général. Soient $\phi \in \mathrm{Diff}^k(M)$ et U un ouvert de M d'adhérence compacte dans laquelle ϕ admet un et un seul point fixe x_ϕ tels que $x_\phi \in U$ et l'application tangente de ϕ en ce point soit sans valeur propre égale à 1 (respectivement soit hyperbolique). Montrer qu'il existe un voisinage V de ϕ dans $\mathrm{Diff}^k(M)$ tel que tout $\psi \in V$ admette un et un seul point fixe x_ψ dans $\overline{U}$, et tel que l'application tangente de ψ en ce point est sans valeur propre égale à 1 (respectivement sans valeur propre de module égal à 1). On pourra successivement, si 1 n'est pas valeur propre de $d_{x_\phi}\phi$, et si ψ est C^1-proche de ϕ :

- se ramener au cas où $M = \mathbb{R}^N$ et $x_\phi = 0$;

1. Rappelons que toute variété différentielle lisse est supposée métrisable et séparable (donc σ-compacte et à base dénombrable de voisinages), et munie d'une distance induisant sa topologie. Pour toutes les variétés différentielles lisses M, N et les applications $f, g : M \to N$ de classe C^k, on définit par récurrence les espaces tangents itérés par $T^0M = M$ et $T^nM = T(T^{n-1}M)$ si $n \geq 1$, et les applications tangentes itérées par $T^0f = f$ et $T^nf = T(T^{n-1}f) : T^nM \to T^nN$ si $1 \leq n \leq k$. En notant K_i un compact de T^iM pour tout $i = 0, \dots, k$, et $\mathcal{K} = (K_i)_{0 \leq i \leq k}$, notons $d_{\mathcal{K}}(f, g) = \sum_{i=0}^{k} \sup_{x \in K_i} d(T^if(x), T^ig(x))$. La *topologie* C^k (faible) sur l'ensemble $C^k(M, N)$ des applications C^k de M dans N est la topologie métrisable définie par la famille de pseudo-distances $(d_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}}$. On montre que $\mathrm{Diff}^k(M)$ est ouvert dans $C^k(M, M)$, que c'est un espace de Baire, et que la composition des applications C^k est continue pour la topologie C^k. En pratique, pour travailler avec la topologie C^k, on regarde la convergence uniforme, dans les compacts des cartes locales, des applications et de toutes leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre k. La même définition convient si $k = \infty$, sauf que la topologie n'est pas forcément métrisable, et la variété n'est pas banachique, mais de Fréchet.

2. Pour tout $k \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty\}$, un système dynamique différentiable (X, ϕ) de classe C^k est dit *structurellement stable* s'il existe un voisinage V de ϕ dans $C^k(X, X)$ pour la topologie C^k tel que tout élément $\psi \in V$ soit topologiquement conjugué à ϕ. En général, la conjugaison n'est pas de classe C^k.

- montrer que l'application $\widetilde{\psi} : x \mapsto \psi(x) - x$ est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 sur un voisinage ouvert de 0, et en déduire que ψ admet un point fixe x_ψ ;
- montrer que ψ admet au plus un point fixe dans un voisinage de 0 ;
- montrer que si de plus $d_{x_\phi}\phi$ n'a pas de valeur propre de module égal à 1, et si ψ est C^1-proche de ϕ, alors $d_{x_\psi}\psi$ n'a pas non plus de valeur propre de module égal à 1, en considérant les applications $x \mapsto \psi(x) - \lambda x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{S}_1$.

(4) Montrer que le sous-espace E_1 (respectivement E_2) de $\mathrm{Diff}^k(M)$ des C^k-difféomorphismes de M ayant un nombre fini de points fixes et en lesquels l'application tangente de ϕ est sans valeur propre égale à 1 (respectivement est hyperbolique) est un ouvert dense. Pour montrer la densité, on pourra successivement

- en appliquant le théorème de Sard[3] à l'application $f : x \mapsto x - \psi(x)$, montrer que pour toute application $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1, où on suppose que $M = \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, il existe des y arbitrairement proches de 0 tels que l'application $\psi_y : x \mapsto \phi(x) + y$ ait, dans tout compact de Ω, un nombre fini de points fixes, en lesquels la différentielle de ψ n'a pas la valeur propre 1 ;
- montrer que tout point de M admet un voisinage U d'adhérence compacte tel que l'ensemble E_U des C^k-difféomorphismes de M qui n'ont qu'un nombre fini de points fixes dans $\overline{U}$, ceux-ci appartenant à U, et en lesquels la différentielle de ϕ n'a pas la valeur propre 1, est un ouvert dense de $\mathrm{Diff}^k(M)$;
- en déduire la densité cherchée, en utilisant après vérification, dans le cas des points fixes hyperboliques, que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ valant x en dehors de $B(0, 2\varepsilon)$, valant $(1-\varepsilon)x$ sur $B(0,\varepsilon)$ et convergeant en topologie C^k vers l'identité quand ε tend vers 0.

(5) Montrer qu'il existe un G_δ dense de $\mathrm{Diff}^k(M)$ constitué d'éléments, ayant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un nombre fini de points périodiques de période n, tous hyperboliques.

(6) Montrer que si ϕ est un C^k-difféomorphisme structurellement stable de M, alors ϕ admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un nombre fini de points périodiques de période n.

Exercice 2 Notons $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\phi = \phi_M : x \mod \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathcal{M}x \mod \mathbb{Z}^2$ le difféomorphisme du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ défini par $\mathcal{M}$.

(1) Montrer que $0 \in \mathbb{T}^2$ est un point fixe hyperbolique de ϕ, et déterminer les espaces stable E^s_0 et instable E^u_0 dans $T_0\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2$.

(2) Calculer les variétés stable $W^s(0)$ et instables $W^u(0)$ de 0, et montrer qu'elles sont denses.

3. Si $f : M \to N$ est une application C^1 entre deux variétés différentielels lisses, une *valeur critique* de f est un point $y \in N$ tel qu'il existe un point $x \in M$ tel que $f(x) = y$ et $T_xf : T_xM \to T_yN$ ne soit pas surjective. Une *valeur régulière* est un point de N qui n'est pas valeur critique. Le *théorème de Sard* dit que si M et N sont deux variétés de dimensions m et n, et si $f : M \to N$ est une application de classe C^k où $k > \max\{0, m-n\}$, alors l'ensemble des valeurs régulières de f est dense dans N (en fait de mesure pleine pour toute mesure sur N absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dans chaque carte.)