TD 4 : Entropie. Sous-décalages

Exercice 1 Soient $(X, \mathscr{B}, \mu, \phi)$ et $(Y, \mathscr{C}, \nu, \psi)$ deux systèmes dynamiques probabilisés à temps discret.

(1) On considère le système dynamique produit $(X \times Y, \mathscr{B} \otimes \mathscr{C}, \mu \otimes \nu, \phi \times \psi)$.
Démontrer que
$$h_{\mu\otimes\nu}(\phi \times \psi) = h_\mu(\phi) + h_\nu(\psi).$$

(2) Supposons maintenant que Y est un facteur de X. Démontrer que $h_\nu(\psi) \leq h_\mu(\phi)$.

Exercice 2 (Facteur de Pinsker) Soit $(X, \mathscr{B}, \mu, \phi)$ un système dynamique probabilisé. Notons $\Pi(\phi) = \{B \in \mathscr{B} \mid h_\mu(\phi, \{B, B^c\}) = 0\}$ (où par convention si $B = \varnothing$ ou $B = X$ on pose $\{B, B^c\} = \{X\}$).

(1) Montrer que $\Pi(\phi)$ est une σ-algèbre ϕ-invariante.

(2) Démontrer que $(X, \Pi(\phi), \mu, \phi)$ est un facteur de X d'entropie nulle, et qui est maximal pour cette propriété (au sens où si $(Y, \mathscr{C}, \nu, \psi)$ est un facteur de X d'entropie nulle, et $h : X \to Y$ une semi-conjugaison, alors h est $\Pi(\Phi)$-mesurable).

Exercice 3 Soit $X = \mathbb{S}^1$ muni de la mesure de Lebesgue μ, et notons ϕ la translation $x \mapsto x+\theta$, pour un $\theta \in \mathbb{S}^1$. Calculer l'entropie $h_\mu(\phi)$.

Exercice 4 Soit $\mathscr{A} = \{a, 1, 2, b\}$. On considère le sous-décalage Σ défini comme l'ensemble des suites $(x_n) \in \mathscr{A}^{\mathbb{Z}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

- si $x_n = a$ alors $x_{n+1} = 1$
- si $x_n = 1$ alors $x_{n+1} = 1$ ou $x_{n+1} = b$
- si $x_n = b$ alors $x_{n+1} = 2$
- si $x_n = 2$ alors $x_{n+1} = a$.

On munit Σ de la tribu $\mathscr{B}$ engendrée par les cylindres, d'une mesure de Markov μ, et du décalage ϕ.

(1) Vérifier que $(\Sigma, \mathscr{B}, \mu, \phi)$ est mélangeant.

(2) Soit $A \subset \Sigma$ l'ensemble $\{(x_n) \mid x_0 = a \text{ ou } b\}$. Montrer que le système dynamique induit $(A, \mathscr{B}_A, \mu_A, \phi_A)$ n'est pas mélangeant.

Exercice 5 Soit $\Omega \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $(\omega_i)_{i\geq 0}$ telles que $\omega_i\omega_{i+1} = 0$ pour tout i. On munit Ω du décalage θ.

(1) Pour $p \in]0, 1[$, montrer qu'il existe une mesure de Markov ν_p de support égal à Ω et dont la matrice d'incidence associée donne probabilité p à rester en l'état 0 depuis l'état 0. Calculer alors l'entropie $h_{\nu_p}(\theta)$.

(2) Montrer qu'il existe p_0 tel que $h_{\nu_{p_0}}(\theta)$ est maximal. Dans la suite on note $\nu = \nu_{p_0}$. Quelle est la valeur de $h_\nu(\theta)$?

(3) Soit $I = [0, 1]$, β le nombre d'or (vérifiant $\beta > 1$ et $\beta^2 = \beta + 1$). On note $\psi : \Omega \to I$ l'application définie par
$$\psi((\omega_k)_{k\geq 0}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_k}{\beta^{k+1}}$$
et on note $T : I \to I$ l'application $x \mapsto \{\beta x\}$ (où $\{z\}$ est la partie fractionnaire de z).

(a) Démontrer que $\psi : \Omega \to I$ est bien définie, puis qu'elle est surjective et continue. Décrire la mesure image $\mu = \psi_* \nu$.

(b) Vérifier que les systèmes dynamiques (Ω, θ, ν) et (I, T, μ) sont conjugués. Combien vaut $h_\mu(T)$?