TD5 : Entropie topologique

Exercice 1 Soit ϕ un homéomorphisme d'un espace métrique compact X. Montrer que $h_{\mathrm{top}}(\phi^{-1}) = h_{\mathrm{top}}(\phi)$.

Exercice 2 (1) Soient (X, d) un espace métrique compact et $\phi : X \to X$ une application 1-lispchitzienne (pour tous les x, y dans X, nous avons $d(\phi(x), \phi(y)) \leq d(x, y)$). Montrer que $h_{\mathrm{top}}(\phi) = 0$.

(2) Montrer que toute rotation du cercle est d'entropie topologique nulle.

Exercice 3 Soient X le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\phi : X \to X$ l'application définie par $x \mapsto Nx$, pour N dans $\mathbb{N} - \{0, 1\}$. Le but de cet exercice est, entre autre, de montrer que la mesure de Lebesgue est l'unique mesure d'entropie maximale pour ϕ.

(1) Soit μ une mesure de probabilité borélienne invariante par ϕ sur le cercle $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Montrer que $h_\mu(\phi) \leq \ln(N)$.

(2) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si μ est la mesure de Lebesgue λ sur X.

(3) Calculer l'entropie topologique de ϕ.

Exercice 4 Soient $\mathscr{A}$ un alphabet fini de cardinal N, et $(\Sigma_+ = \mathscr{A}^{\mathbb{N}}, \sigma_+)$ le système de Bernoulli unilatère sur $\mathscr{A}$. Notons ν l'équiprobabilité sur $\mathscr{A}$. Le but de cet exercice est, entre autre, de montrer que la mesure produit $\nu^{\mathbb{N}}$ est l'unique mesure d'entropie maximale pour le décalage de Bernoulli.

(1) Soit μ une mesure de probabilité borélienne invariante par σ_+ sur Σ_+. Montrer que $h_\mu(\sigma_+) \leq \ln(N)$.

(2) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si μ est la mesure produit $\nu^{\mathbb{N}}$ sur X.

(3) Calculer l'entropie topologique de σ_+.

(4) Montrer que la mesure produit $\nu^{\mathbb{Z}}$ est l'unique mesure d'entropie maximale pour le système de Bernoulli bilatère $(\Sigma = \mathscr{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$.

Exercice 5 Soient (Σ_A, σ_A) un sous-décalage de type fini bilatère de matrice d'incidence A apériodique, et $P_n = \{\omega \in \Sigma_A \mid \sigma_A^n(\omega) = \omega)\}$ l'ensemble des points périodiques de période divisant n. Montrer que, quand n tend vers $+\infty$, on a

$$\mathrm{Card}(P_n) \sim e^{n h_{\mathrm{top}}(\sigma_A)}$$

Exercice 6 Soient $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ une matrice hyperbolique de valeurs propres λ_1, λ_2 et $\phi_M : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ l'automorphisme linéaire du tore associé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ notons $P_n = \{x \in \mathbb{T}^2 \mid \phi^n(x) = x\}$ l'ensemble des points périodiques de période divisant n.

(1) Montrer qu'un point de $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est périodique pour ϕ_M si et seulement si il est rationnel (c'est-à-dire appartient à $\mathbb{Q}^2/\mathbb{Z}^2$).

(2) Montrer que $\mathrm{Card}(P_n) = |\lambda_1^n + \lambda_2^n - 2|$.

(3) Montrer que, quand n tend vers $+\infty$, on a

$$\mathrm{Card}(P_n) \sim e^{n h_{\mathrm{top}}(\phi_M)}$$

TD5 : Topological Entropy

Exercice 1 Let ϕ be a homeomorphism of a compact metric space X. Show that $h_{\text{top}}(\phi^{-1}) = h_{\text{top}}(\phi)$.

Exercice 2
(1) Let (X, d) be a compact metric space and $\phi : X \to X$ be a 1-Lipschitz map (for all x, y in X, $d(\phi(x), \phi(y)) \leq d(x, y)$). Show that $h_{\text{top}}(\phi) = 0$.
(2) Show that any rotation of the circle has zero topological entropy.

Exercice 3 Let X be the circle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ and $\phi : X \to X$ the map defined by $x \mapsto Nx$, where N is in $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. The goal of this exercise is, among other things, to show that the Lebesgue measure is the unique measure of maximal entropy for ϕ.
(1) Let μ be a Borel probability measure invariant under ϕ on the circle $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Show that $h_\mu(\phi) \leq \ln(N)$.
(2) Show that equality holds if and only if μ is the Lebesgue measure λ on X.
(3) Compute the topological entropy of ϕ.

Exercice 4 Let $\mathscr{A}$ be a finite alphabet of cardinality N, and $(\Sigma_+ = \mathscr{A}^{\mathbb{N}}, \sigma_+)$ be the one-sided Bernoulli shift on $\mathscr{A}$. Denote ν the uniform probability on $\mathscr{A}$. The goal of this exercise is, among other things, to show that the product measure $\nu^{\mathbb{N}}$ is the unique measure of maximal entropy for the Bernoulli shift.
(1) Let μ be a Borel probability measure invariant under σ_+ on Σ_+. Show that $h_\mu(\sigma_+) \leq \ln(N)$.
(2) Show that equality holds if and only if μ is the product measure $\nu^{\mathbb{N}}$ on X.
(3) Compute the topological entropy of σ_+.
(4) Show that the product measure $\nu^{\mathbb{Z}}$ is the unique measure of maximal entropy for the two-sided Bernoulli system $(\Sigma = \mathscr{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$.

Exercice 5 Let (Σ_A, σ_A) be a two-sided shift of finite type with an aperiodic incidence matrix A, and $P_n = \{\omega \in \Sigma_A \mid \sigma_A^n(\omega) = \omega\}$ the set of periodic points of period dividing n. Show that as n tends to $+\infty$, we have
$$\mathrm{Card}(P_n) \sim e^{n h_{\text{top}}(\sigma_A)}.$$

Exercice 6 Let $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ be a hyperbolic matrix with eigenvalues λ_1, λ_2, and $\phi_M : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ the associated linear automorphism of the torus. For every $n \in \mathbb{N}^*$, denote $P_n = \{x \in \mathbb{T}^2 \mid \phi^n(x) = x\}$ the set of periodic points of period dividing n.
(1) Show that a point in $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ is periodic for ϕ_M if and only if it is rational (i.e., belongs to $\mathbb{Q}^2/\mathbb{Z}^2$).
(2) Show that $\mathrm{Card}(P_n) = |\lambda_1^n + \lambda_2^n - 2|$.
(3) Show that as n tends to $+\infty$, we have
$$\mathrm{Card}(P_n) \sim e^{n h_{\text{top}}(\phi_M)}.$$