Université Paris-Saclay (Orsay) Mardi 1 décembre 2026, 9h-12h

Corrigé de l'examen partiel de Groupes et Géométrie

Exercice I (1) Cette action de $\mathbb{R}^\times$ sur M est clairement lisse, libre et propre. Donc par le théorème **??**, l'espace topologique quotient $E_k = \mathbb{R}^\times\backslash M$ admet une et une seule structure de variété C^∞ telle que la projection canonique $\pi_k : M \to E_k$ soit une submersion. De plus, par passage au quotient (voir le théorème **??** (**??**)) de l'application de $M = (\mathbb{R}^{n+1}\smallsetminus\{0\}) \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ définie par $((x_0, \dots, x_n), x)) \mapsto [x_0 : \dots : x_n]$, qui est lisse (car la projection canonique de $\mathbb{R}^{n+1}\smallsetminus\{0\}$ dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est lisse), l'application p_k est lisse. Pour tout $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\smallsetminus\{0\}$, l'application de $\mathbb{R}$ dans la fibre $p_k^{-1}([x_0 : \dots : x_n])$ définie par $x \mapsto [x_0, \dots, x_n; x]$ est une bijection. Elle dépend du choix d'un représentant $(x_0, \dots, x_n)$ de $[x_0 : \dots : x_n]$, car nous avons $[\lambda\, x_0, \dots, \lambda\, x_n; x] = [x_0, \dots, x_n; \lambda^{-k}\, x]$. Puisque l'application $x \mapsto \lambda^{-k}\, x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$-linéaire, ceci munit en particulier chaque fibre de p_k d'une structure naturelle d'espace vectoriel réel de dimension 1.

Puisque la projection canonique $\mathfrak{p} : \mathbb{R}^{n+1}\smallsetminus\{0\} \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est une fibration lisse (voir le théorème **??**, mais le fait que $\mathfrak{p}$ soit une submersion lisse suffit), pour tout $b_0 \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, il existe un voisinage ouvert U de b_0 dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ et une section lisse $\sigma : U \to \mathbb{R}^{n+1}\smallsetminus\{0\}$ de $\mathfrak{p}$ définie sur U. Alors l'application $\psi : U \times \mathbb{R} \to p_k^{-1}(U)$ définie par

$$(b, t) \mapsto \mathbb{R}^\times(\sigma(b), t)$$

est un C^∞-difféomorphisme, linéaire en la seconde variable par la définition de la structure d'espace vectoriel réel sur les fibres de p_k, tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\psi} & p_k^{-1}(U) \\ & {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_k} & \\ & U\,. & \end{array}$$

Donc p_k est un fibré vectoriel réel sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. L'unicité est tautologique, puisque la projection et la structure d'espace vectoriel sur chaque fibre déterminent un fibré vectoriel.

[Il était aussi possible de raisonner de la manière suivante, en utilisant le fait que l'existence de trivialisations locales compatibles permet aussi de définir une structure de variété lisse sur l'espace total. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, considérons l'ouvert U_i de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ (appelé le domaine d'une *carte affine de coordonnée* de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$), défini par

$$U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) : x_i \neq 0\}\,.$$

de sorte que l'application $\mathbb{R}^n \to U_i$ définie par

$$(y_0, \dots, \widehat{y_i}, \dots, y_n) \mapsto [y_0 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n]$$

soit l'inverse d'une carte locale de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ de domaine U_i. Notons $\phi_i : (p_k)^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}$ l'application lisse définie par passage au quotient de l'application lisse définie sur l'ouvert $\{((x_0, \dots, x_n), x) \in (\mathbb{R}^{n+1}\smallsetminus\{0\} \times \mathbb{R}) : x_i \neq 0\}$ par $((x_0, \dots, x_n), x) \mapsto ([x_0 : \dots : x_n], \frac{x}{{x_i}^k})$

(ce qui est possible car si $((y_0,\dots,y_n),y)\in\mathbb{R}^\times((x_0,\dots,x_n),x)$, alors $\frac{y}{{y_i}^k}=\frac{x}{{x_i}^k}$). Elle rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc}(p_k)^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\phi_i} & U_i\times\mathbb{R}\\ & {\scriptstyle p_k}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} & \\ & U_i & \end{array}.$$

L'application ϕ_i est un C^∞-difféomorphisme, car ϕ_i est bijective d'inverse l'application lisse $([y_0:\dots:y_{i-1}:1:y_{i+1}:\dots:y_n],y)\mapsto[y_0,\dots,y_{i-1},1,y_{i+1};y]$. De plus, ϕ_i est un isomorphisme linéaire de chaque fibre de p_k au-dessus de U_i sur la fibre correspondante de pr_1, par la définition de la structure vectorielle voulue sur les fibres de p_k. Pour tous les $i,j\in[\![0,n]\!]$, l'application de transition $\phi_j\circ(\phi_i)^{-1}:(U_i\cap U_j)\times\mathbb{R}\to(U_i\cap U_j)\times\mathbb{R}$ est l'application lisse $([x_0:\dots:x_n],t)\mapsto([x_0:\dots:x_n],\frac{(x_i)^k}{(x_j)^k}t)$, qui est un difféomorphisme et un isomorphisme linéaire sur chaque fibre. Donc la donnée de l'application p_k et des structures d'espace vectoriel sur les fibres de l'énoncé est un fibré vectoriel de rang 1 sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, tautologiquement unique.]

(2) Pour tout élément $(\ell,v)\in\mathbb{P}_n(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{n+1}$ tel que le vecteur v appartienne à la droite vectorielle ℓ, notons $\psi(\ell,v)=[x_0,\dots,x_n;x]$ où $\ell=[x_0:\dots:x_n]$ et $x\in\mathbb{R}$ est l'unique élément tel que $v=x(x_0,\dots,x_n)$. Un tel x existe et est unique, car $(x_0,\dots,x_n)$ est un vecteur directeur de la droite vectorielle ℓ. Il dépend linéairement de v, car si $v'=x'(x_0,\dots,x_n)$, alors $v+sv'=(x+sx')(x_0,\dots,x_n)$ pour tout $s\in\mathbb{R}$. Comme nous avons l'égalité $[\lambda\,x_0,\dots,\lambda\,x_n;\lambda^{-1}\,x]=[x_0,\dots,x_n;x]$ dans E_{-1}, comme si $v=x(x_0,\dots,x_n)$, alors $v=(\lambda^{-1}x)(\lambda\,x_0,\dots,\lambda\,x_n)$, la classe $\psi(\ell,v)=[x_0,\dots,x_n;x]$ est bien définie dans E_{-1}. Par la construction de ψ, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}F & \xrightarrow{\psi} & E_{-1}\\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_{-1}} & \\ & \mathbb{P}_n(\mathbb{R})\,. & \end{array}$$

En prenant des sections locales des fibrés vectoriels η et ξ_{-1}, nous obtenons que l'application ψ est lisse. Elle est linéaire sur les fibres, et bijective, d'inverse l'application $[x_0,\dots,x_n;x]\mapsto\big([x_0:\dots:x_n],x(x_0,\dots,x_n)\big)$, qui est bien définie par la relation d'équivalence définissant E_{-1}, et qui est lisse toujours en prenant des sections locales. Donc ψ^{-1} est un isomorphisme de fibrés vectoriels entre η et ξ_{-1}.

(3) Pour tout $\ell=[x_0:\dots:x_n]\in\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, nous avons

$$T_\ell\mathbb{P}_n(\mathbb{R})=\Big\{(X_0,\dots,X_n)\in\mathbb{R}^n:\sum_{i=0}^n x_iX_i=0\Big\}$$

(en remarquant que l'égalité $\sum_{i=0}^n x_iX_i=0$ est indépendante du choix du représentant de ℓ). Donc l'espace total du fibré tangent de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est la variété quotient

$$T\mathbb{P}_n(\mathbb{R})=\mathbb{R}^\times\backslash\big\{(x_0,\dots,x_n,X_0,\dots,X_n)\in(\mathbb{R}^{n+1}\smallsetminus\{0\})\times\mathbb{R}^{n+1}:\sum_{i=0}^n x_iX_i=0\big\}$$

où le groupe de Lie $\mathbb{R}^\times$ agit de manière lisse, libre et propre sur $(\mathbb{R}^{n+1}\smallsetminus\{0\})\times\mathbb{R}^{n+1}$ par

$$(\lambda,(x_0,\dots,x_n,X_0,\dots,X_n))\mapsto(\lambda\,x_0,\dots,\lambda\,x_n,\lambda\,X_0,\dots,\lambda\,X_n)\,.$$

De même, l'espace total du fibré vectoriel $\bigoplus_{i=0}^{n} \xi_1$ somme directe de $n+1$ copies de ξ_1 est la variété quotient $A = \mathbb{R}^\times \backslash \big((\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{n+1} \big)$ où le groupe de Lie $\mathbb{R}^\times$ agit comme dans la formule centrée ci-dessus.

Notons $p = \pi_{\mathbb{P}_n(\mathbb{R})}$ la projection $T\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ du fibré tangent de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Considérons l'application ψ' de A dans l'espace total $T\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \times_p (\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R})$ du fibré vectoriel somme directe $T\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \oplus \xi_{\mathbb{R}}$, définie par

$$[x_0, \dots, x_n, Y_0, \dots, Y_n] \mapsto \big([x_0, \dots, x_n, Y_0 - t x_0, \dots, Y_n - t x_n], ([x_0 : \dots : x_n], t) \big)$$

où $t = \frac{\sum_{0 \leqslant i \leqslant n} x_i Y_i}{\sum_{0 \leqslant i \leqslant n} {x_i}^2}$. Remarquons que t est bien défini car $\sum_{0 \leqslant i \leqslant n} {x_i}^2 \neq 0$ et linéaire en $(Y_0, \dots, Y_n)$. Les classes d'équivalence $[x_0 : \dots : x_n]$ et $[x_0, \dots, x_n, Y_0 - t x_0, \dots, Y_n - t x_n]$ ne dépendent pas des choix des représentants de $[x_0, \dots, x_n, Y_0, \dots, Y_n]$. Nous avons l'égalité $\sum_{i=0}^{n} x_i (Y_i - t x_i) = 0$ par la définition de t. Donc l'application ψ' est bien définie. Elle est clairement lisse en prenant des sections locales de $\bigoplus_{i=0}^{n} \xi_1$ et $T\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \oplus \xi_{\mathbb{R}}$, et linéaire sur les fibres. Son inverse

$$\big([x_0, \dots, x_n, X_0, \dots, X_n], ([x_0 : \dots : x_n], t) \big) \mapsto [x_0, \dots, x_n, X_0 + t\, x_0, \dots, X_n + t\, x_n]$$

est aussi bien défini et lisse. Enfin, si p' est la projection du fibré vectoriel $\bigoplus_{i=0}^{n} \xi_1$ et p'' celle de $T\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \oplus \xi_{\mathbb{R}}$, alors nous avons $p'' \circ \psi' = p'$. Ceci montre que ψ' est un isomorphisme de fibrés vectoriels.

Exercice II (1) Par la définition de q, la base canonique

$$\big(e_0 = (1,0,0,0),\ e_1 = (0,1,0,0),\ e_2 = (0,0,1,0),\ e_3 = (0,0,0,1) \big)$$

de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4$ est une base de Lorentz de $(\mathbb{R}^4, q)$. Puisque tout élément du groupe $\mathrm{O}(1,3)$ préserve la forme quadratique q et la forme bilinéaire b, l'action diagonale $(g, (v_0, v_1, v_2, v_3)) \mapsto (g\, v_0, g\, v_1, g\, v_2, g\, v_3)$ de $\mathrm{O}(1,3)$ sur $(\mathbb{R}^4)^4$, qui est lisse (car polynomiale), préserve $\mathscr{B}_{\mathscr{L}}$. Soit (v_0, v_1, v_2, v_3) une base de Lorentz. Considérons l'application linéaire $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ telle que $(g\, e_0, g\, e_1, g\, e_2, g\, e_3) = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ (qui existe et est unique car (e_0, e_1, e_2, e_3) est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$). Alors nous avons $q \circ g = q$ car par la définition d'une base de Lorentz, pour tous les $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, nous avons

$$q(x_0 v_0 + x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3) = -{x_0}^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = q(x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3)\,.$$

Donc en identifiant de manière usuelle g avec sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, par l'expression matricielle de la forme quadratique q, nous avons ${}^t g\, I_{1,3}\, g = I_{1,3}$. Comme la matrice $I_{1,3}$ est inversible, nous avons donc $|\det(g)| = 1 \neq 0$, donc g est inversible. Ceci montre que $\mathrm{O}(1,3)$ agit transitivement sur $\mathscr{B}_{\mathscr{L}}$.

La partie $\mathscr{B}_{\mathscr{L}}$ est donc une orbite de l'action lisse définie ci-dessus du groupe de Lie $\mathrm{O}(1,3)$ sur la variété lisse $(\mathbb{R}^4)^4$. Montrons que cette action est propre. Si $g \in \mathrm{O}(1,3)$, alors $g\, e_0$, $g\, e_1$, $g\, e_2$, $g\, e_3$ sont les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ dont les vecteurs colonnes dans la base canonique sont exactement les vecteurs colonnes de la matrice g. Donc si $(g\, e_0, g\, e_1, g\, e_2, g\, e_3)$ sort de tout compact dans $(\mathbb{R}^4)^4$, alors g sort de tout compact de $\mathrm{O}(1,3) \subset \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. Le fait que l'orbite $\mathscr{B}_{\mathscr{L}}$ soit une sous-variété lisse de $(\mathbb{R}^4)^4$ découle par conséquent du théorème **??** (**??**).

(2) Soit $a = (a_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant 3} \in \mathrm{O}(1,3)$. Nous avons déjà vu que $|\det a| = 1$. Le coefficient $(0,0)$ de la matrice ${}^t a\, I_{1,3}\, a$ est égal à $-{a_{0,0}}^2 + {a_{0,1}}^2 + {a_{0,2}}^2 + {a_{0,3}}^2$. Donc puisque le coefficient

$(0,0)$ de la matrice $I_{1,3}$ est -1 et puisque $a \in \mathrm{O}(1,3)$, nous avons $-{a_{0,0}}^2 + {a_{0,1}}^2 + {a_{0,2}}^2 + {a_{0,3}}^2 = -1$. En particulier $|a_{0,0}| \geqslant 1$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons $\det a_t = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ et $\cosh t > 0$. Nous avons

$$ {}^t\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cosh t & \sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. $$

Donc $a_t \in \mathrm{SO}_0(1,3)$. De plus, l'application $t \mapsto a_t$ est lisse et est un morphisme de groupes car $\cosh(s+t) = \cosh s \cosh t + \sinh s \sinh t$ et $\sinh(s+t) = \sinh s \cosh t + \cosh s \sinh t$ pour tous les $s, t \in \mathbb{R}$, donc $\begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s \\ \sinh s & \cosh s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(s+t) & \sinh(s+t \\ \sinh(s+t) & \cosh(s+t) \end{pmatrix}$.

(3)(a)Puisque $\mathrm{O}(1,3)$ préserve q et $\{0\}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la partie $\mathscr{O}_\alpha$ de $\mathbb{R}^4$ est invariante par $\mathrm{O}(1,3)$. Puisque le groupe des rotations $\mathrm{SO}(3)$ agit transitivement sur toute sphère de $\mathbb{R}^3$, et s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{O}(1,3)$ préservant l'hyperplan des trois dernières coordonnées, tout point de $\mathscr{O}_\alpha$ est dans l'orbite par $\mathrm{O}(1,3)$ d'un point $(x,y,0,0)$ avec $y \geqslant 0$ et $-x^2 + y^2 = \alpha$. Pour tout $\lambda > 0$, l'homothétie h_λ de $\mathbb{R}^4$ de rapport λ commute avec $\mathrm{O}(1,3)$, et nous avons $h_\lambda(\mathscr{O}_\alpha) = \mathscr{O}_{\lambda^2\alpha}$. Nous pouvons donc supposer que $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$.

Si $\alpha = -1$, soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $|x| = \cosh t$ et $\frac{|x|}{x}\, y = \sinh t$ (ce qui est possible car $|x| = \sqrt{1+y^2} \geqslant 1$ et $(|x|)^2 - \left(\frac{|x|}{x}\, y\right)^2 = x^2 - y^2 = 1$). Alors $a_t\left(\frac{x}{|x|}, 0, 0, 0\right) = (x, y, 0, 0)$. Nous avons ${}^t I_{1,3} I_{1,3} I_{1,3} = I_{1,3}$, donc $I_{1,3} \in \mathrm{O}(1,3)$ et $I_{1,3}(-1,0,0,0) = (1,0,0,0)$. Comme $\frac{x}{|x|} = \pm 1$, le groupe $G = \mathrm{O}(1,3)$ agit donc transitivement sur $\mathscr{O}_\alpha = G \cdot (1,0,0,0)$.

Si $\alpha = 1$, soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $y = \cosh t$ et $x = \sinh t$ (ce qui est possible car $y \geqslant 0$ et $|y| = \sqrt{1+x^2} \geqslant 1$, donc $y \geqslant 1$). Alors $a_t(0,1,0,0) = (x,y,0,0)$, donc $G = \mathrm{O}(1,3)$ agit transitivement sur $\mathscr{O}_\alpha = G \cdot (0,1,0,0)$.

Si $\alpha = 0$ (ce qui implique que $|x| = y > 0$), soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $e^t = y$. Alors nous avons

$$ a_t(1,1,0,0) = (\cosh t + \sinh t, \cosh t + \sinh t, 0, 0) = (|x|, y, 0, 0)\,. $$

Comme $I_{1,3}(-1,1,0,0) = (1,1,0,0)$, ceci montre que $G = \mathrm{O}(1,3)$ agit transitivement sur $\mathscr{O}_0 = G \cdot (1,1,0,0)$.

L'orthogonal de $\mathbb{R}(1,0,0,0)$ pour la forme quadratique q est égal à $\{0\} \times \mathbb{R}^3$ et celui de $\mathbb{R}(0,0,0,1)$ est égal à $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$. Puisqu'un élément de $\mathrm{O}(1,3)$ préservant un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ préserve son orthogonal pour q, le stabilisateur de $(1,0,0,0)$ dans $\mathrm{O}(1,3)$ est égal à $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} : {}^t A\, I_3\, A = I_3\right\} = \mathrm{O}(3)$. De même, le stabilisateur de $(0,0,0,1)$ dans $\mathrm{O}(1,3)$ est égal à $\left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : {}^t A\, I_{1,2}\, A = I_{1,2}\right\} = \mathrm{O}(1,2)$.

(b) L'application $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ est une submersion en tout point non nul. Donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la préimage $\mathscr{O}_\alpha = (q_{|\,\mathbb{R}^4 \smallsetminus \{0\}})^{-1}(\alpha)$ est une sous-variété lisse de dimension $4 - 1 = 3$. Par la question précédente (**??**), l'image de l'application orbitale en $(1,0,0,0)$ de l'action linéaire lisse de $\mathrm{O}(1,3)$ est la sous-variété $\mathscr{O}_{-1}$ (qui est en particulier localement fermée), et le stabilisateur de $(1,0,0,0)$ dans $\mathrm{O}(1,3)$ est $\mathrm{O}(3)$. Donc par le théorème **??** (**??**), l'application canonique $\Theta_{(1,0,0,0)}$ est un C^∞-difféomorphisme de l'espace homogène quotient $\mathrm{O}(1,3)/\mathrm{O}(3)$ sur la sous-variété $\mathscr{O}_1$. De même, l'espace homogène quotient $\mathrm{O}(1,3)/\mathrm{O}(1,2)$ est C^∞-difféomorphe à $\mathscr{O}_{-1}$.

Or $\mathscr{O}_1$ admet deux composantes connexes C^∞-difféomorphes à $\mathbb{R}^3$, car ce sont les graphes des deux applications lisses de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$ (x_1, x_2, x_3) \mapsto \pm\sqrt{1 + {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\,. $$

De même, puisque $\mathbb{S}_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1\}$, l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_2$ dans $\mathscr{O}_{-1}$ définie par

$$(t, (x_1, x_2, x_3)) \mapsto (\cosh t, (\sinh t)x_1, (\sinh t)x_2, (\sinh t)x_3)$$

est un C^∞-difféomorphisme. Le résultat en découle.

(c) L'action de $\mathrm{SO}_0(1,3)$ préserve $\mathscr{O}_1$, et par construction, elle préserve même la composante connexe $\{x \in \mathscr{O}_1 : x_0 > 0\}$ de $\mathscr{O}_1$ contenant $(1,0,0,0)$. Par la démonstration de la question (**??**), pour tout $g \in \mathrm{SO}_0(1,3)$, il existe $\rho \in \mathrm{SO}(3)$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $a_t\, \rho\, g(1,0,0,0) = (1,0,0,0)$. Or le stabilisateur de $(1,0,0,0)$ dans $\mathrm{SO}_0(1,3)$ est, par la question (**??**), égal à $\mathrm{SO}_0(1,3) \cap \mathrm{O}(3) = \mathrm{SO}(3)$. Il existe donc $\rho' \in \mathrm{SO}(3)$ tel que $a_t\, \rho\, g = \rho'$, c'est-à-dire $g = \rho^{-1} a_{-t}\, \rho'$. Comme $\mathbb{R}$ et $\mathrm{SO}(3)$ sont connexes par arcs, ceci montre qu'il existe un chemin continu dans $\mathrm{SO}_0(1,3)$ de g à l'élément neutre de $\mathrm{SO}_0(1,3)$. Donc $\mathrm{SO}_0(1,3)$ est connexe par arcs. Comme $\det a \in \{\pm 1\}$ pour tout $a \in \mathrm{O}(1,3)$ et puisque $\{\pm 1\}$ est une partie discrète de $\mathbb{R}$, le sous-groupe de Lie $\mathrm{SO}_0(1,3)$ est ouvert dans $\mathrm{O}(1,3)$. Son complémentaire, union des classes à gauche non triviales modulo $\mathrm{SO}_0(1,3)$, est aussi ouvert, donc $\mathrm{SO}_0(1,3)$ est la composante neutre de $\mathrm{O}(1,3)$.

(4) (a) L'application de $\mathbb{R}^4$ dans Herm_2 définie par

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto \sum_{j=0}^{4} x_j \sigma_j = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - i\, x_2 \\ x_1 + i\, x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$$

est clairement linéaire, et même un isomorphisme linéaire, puisqu'elle envoie la base canonique de $\mathbb{R}^4$ sur la base de Pauli (réordonnée) de Herm_2. Notons φ l'inverse de cette application. De plus, nous avons

$$\begin{aligned} -\det\Big(\sum_{j=0}^{4} x_j \sigma_j\Big) &= -(x_0 + x_3)(x_0 - x_3) + (x_1 - i\, x_2)(x_1 + i\, x_2) \\ &= -{x_0}^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = q(x_0, x_1, x_2, x_3)\ . \end{aligned}$$

Donc nous avons $q \circ \varphi = -\det$.

(b) Pour tout $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, l'application $\Phi'(A)$ envoie Herm_2 dans Herm_2, car $(AXA^*)^* = AX^*A^* = AXA^*$ si $X \in \mathrm{Herm}_2$. L'application $\Phi'(A)$ est linéaire et inversible d'inverse $\Phi'(A^{-1})$. L'application Φ', dont la source et le but sont des groupes de Lie, est de classe C^∞ (car polynomiale en les coefficients). C'est un morphisme de groupes, car pour tous les $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $X \in \mathrm{Herm}_2$, nous avons $(AB)X(AB)^* = A(BXB^*)A^*$, donc $\Phi'(AB) = \Phi'(A) \circ \Phi'(B)$. C'est par conséquent un morphisme de groupes de Lie.

(c) L'application $\Phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ est un morphisme de groupes lisse, donc un morphisme de groupes de Lie. Puisque pour tous les $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $X \in \mathrm{Herm}_2$, nous avons

$$\det(AXA^*) = |\det(A)|^2 \det X = \det X\ ,$$

l'application linéaire $\Phi'(A)$ préserve l'application $-\det$. Puisque $q \circ \varphi = -\det$, l'application Φ est à valeurs dans $\mathrm{O}(1,3)$. Puisque l'espace topologique $\mathrm{SU}(2)$ et l'espace vectoriel réel $\{X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) : X^* = X,\ \mathrm{tr}\, X = 0\}$ sont connexes, l'espace topologique $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est connexe, donc l'image de Φ est contenue dans la composante neutre de $\mathrm{O}(1,3)$, qui est $\mathrm{SO}_0(1,3)$ par la conclusion de la question (**??**) (**??**).

Montrons que l'application $\Phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}_0(1,3)$ est surjective. Par la question (**??**) (**??**), il suffit de montrer que pour tous les $\rho \in \mathrm{SO}(3)$ et $t \in \mathbb{R}$, les transformations $\rho \in \mathrm{SO}_0(1,3)$ et $a_t \in \mathrm{SO}_0(1,3)$ sont dans l'image de Φ.

Or un petit calcul montre que l'application linéaire $\Phi'(A) : X \mapsto AXA^*$ envoie $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sur respectivement

$$\cosh\psi\ \sigma_0 + \sinh\psi\ \sigma_1,\ \ \sinh\psi\ \sigma_0 + \cosh\psi\ \sigma_1,\ \ \sigma_2,\ \ \sigma_3\ .$$

Donc si $A = \begin{pmatrix} \cosh\frac{t}{2} & \sinh\frac{t}{2} \\ \sinh\frac{t}{2} & \cosh\frac{t}{2} \end{pmatrix}$, alors $\Phi(A) = a_t$.

Appelons *rotation spatiale* de $\mathbb{R}^4$ tout élément de l'image de $\mathrm{SO}(3)$ dans $\mathrm{SO}_0(1,3)$. Puisque Φ est un morphisme de groupes et puisque toute rotation dans $\mathbb{R}^3$ est un produit de rotations autour des trois axes de coordonnées, pour montrer que toute rotation spatiale appartient à l'image de Φ, il suffit de montrer que les rotations spatiales d'axes de rotation $\mathbb{R}e_1$, $\mathbb{R}e_2$ et $\mathbb{R}e_3$ appartiennent à l'image de Φ. Or un petit calcul [1] montre que

$$\text{si}\ \ A = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \Phi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (\cdot 1 \cdot)$$

qui est la rotation spatiale d'axe $\mathbb{R}e_3$ et d'angle θ. Celle-ci appartient donc à l'image de Φ. Notons (en prenant le cas particulier $\theta = -\pi$) que l'élément $R'_3 = \Phi\left(\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)\right)$ de $\mathrm{SO}_0(1,3)$ envoie $\mathbb{R}e_1$ sur $\mathbb{R}e_2$. De même, [2]

$$\text{si}\ \ A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \Phi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad (\cdot 2 \cdot)$$

qui est la rotation spatiale d'axe $\mathbb{R}e_1$ et d'angle θ. Celle-ci appartient donc à l'image de Φ.

Enfin, si R'_2 est n'importe quelle rotation spatiale d'axe $\mathbb{R}e_2$, alors $(R'_3)^{-1} \circ R'_2 \circ R'_3$ est une rotation spatiale d'axe $\mathbb{R}e_1$, donc appartient à l'image de Φ. Puisque R'_3 appartient aussi à l'image de Φ et puisque Φ est un morphisme de groupes, nous avons donc que R'_2 appartient à l'image de Φ. Ceci montre que le morphisme de groupes de Lie $\Phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}_0(1,3)$ est surjectif.

Montrons que le noyau $\ker\Phi$ de Φ est égal à $\{\pm\,\mathrm{id}\}$, ou de manière équivalente que le noyau $\ker\Phi' = \ker\Phi$ de Φ' est égal à $\{\pm\,\mathrm{id}\}$. Soit $A \in \ker\Phi'$. Alors pour tout $X \in \mathrm{Herm}_2$, nous avons

$$AXA^* = X\ .$$

En prenant en particulier pour X la matrice identité, nous en déduisons que $AA^* = \mathrm{id}$, donc que A est unitaire, d'inverse égal à A^*. D'où $AX = XA$ pour tout $X \in \mathrm{Herm}_2$. En prenant pour X la matrice σ_3, qui est diagonale à valeurs propres distinctes, nous en déduisons donc que A doit être diagonale. En prenant $X = \sigma_1$, nous en déduisons que les coefficients diagonaux de A sont égaux. Comme $\det A = 1$, ceci implique que $A = \pm\,\mathrm{id}$. Donc $\ker\Phi \subset \{\pm\,\mathrm{id}\}$ et l'inclusion réciproque étant immédiate, nous avons

$$\ker\Phi = \{\pm\,\mathrm{id}\}\ .$$

1. Vérifier que l'application $X \mapsto AXA^*$ envoie $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sur respectivement σ_0, $\cos\theta\ \sigma_1 + \sin\theta\ \sigma_2$, $-\sin\theta\ \sigma_1 + \cos\theta\ \sigma_2$ et σ_3.

2. Vérifier que l'application $X \mapsto AXA^*$ envoie maintenant $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sur respectivement σ_0, σ_1 $\cos\theta\ \sigma_2 + \sin\theta\ \sigma_3$ et $-\sin\theta\ \sigma_2 + \cos\theta\ \sigma_3$.

Puisque $\ker\Phi$ est un sous-groupe discret d'ordre 2, ceci montre que $\Phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}_0(1,3)$ est un revêtement à deux feuillets. Puisque l'espace topologique $\mathrm{SU}(2)$, homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_3$, et l'espace vectoriel réel $\{X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) : X^* = X, \operatorname{tr} X = 0\}$ sont simplement connexes, Φ est un revêtement universel de groupes de Lie.

(d) L'application tangente $T_{\mathrm{id}}\Phi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{so}(1,3)$ du morphisme de groupes de Lie Φ en l'élément neutre est un morphisme d'algèbres de Lie réelles entre les algèbres de Lie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SO}_0(1,3)$ par la proposition **??**. De plus, comme Φ est un revêtement lisse, l'application tangente $T_{\mathrm{id}}\Phi$ est un isomorphisme linéaire.

Par les propriétés (5) de l'application exponentielle du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathrm{SO}_0(1,3)$), ses sous-groupes à un paramètre $(a_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sont exactement de la forme $t \mapsto \exp(tX)$ où $X = \frac{d}{dt}_{|t=0} a_t \in \mathfrak{sl}_X(\mathbb{C})$ (respectivement $X \in \mathfrak{o}(1,3)$). Comme $\frac{d}{dt}_{|t=0}\Phi(a_t) = T_e\Phi\big(\frac{d}{dt}_{|t=0} a_t\big)$, l'application $\widehat{\Phi}$ est bien une bijection.

Pour tout $Y \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, l'application linéaire $T_{\mathrm{id}}\Phi'(Y) \in T_{\mathrm{id}}\,\mathrm{GL}(\mathrm{Herm}_2) = \mathrm{End}(\mathrm{Herm}_2)$ est l'application $X \mapsto YX + XY^*$. Donc si $Y = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\alpha\end{smallmatrix}\right)$, alors $T_{\mathrm{id}}\Phi'(Y)$ envoie σ_0 sur $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\alpha\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\overline{\alpha} & 0\\ 0 & -\overline{\alpha}\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}2\operatorname{Re}\alpha & 0\\ 0 & -2\operatorname{Re}\alpha\end{smallmatrix}\right) = (2\operatorname{Re}\alpha)\,\sigma_3$. De même, $T_{\mathrm{id}}\Phi'(Y)$ envoie σ_1 sur $\left(\begin{smallmatrix}0 & 2i\operatorname{Im}\alpha\\ -2i\operatorname{Im}\alpha & 0\end{smallmatrix}\right) = (-2\operatorname{Im}\alpha)\,\sigma_2$. Elle envoie σ_2 sur $\left(\begin{smallmatrix}0 & 2i\operatorname{Im}\alpha\\ 2i\operatorname{Im}\alpha & 0\end{smallmatrix}\right) = (2\operatorname{Im}\alpha)\,\sigma_1$, et elle envoie σ_3 sur $\left(\begin{smallmatrix}2\operatorname{Re}\alpha & 0\\ 0 & 2\operatorname{Re}\alpha\end{smallmatrix}\right) = (2\operatorname{Re}\alpha)\,\sigma_1$. Donc

$$T_{\mathrm{id}}\Phi\Big(\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\alpha\end{smallmatrix}\right)\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2\operatorname{Re}\alpha \\ 0 & 0 & 2\operatorname{Im}\alpha & 0 \\ 0 & -2\operatorname{Im}\alpha & 0 & 0 \\ 2\operatorname{Re}\alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5) Par le théorème de Jordan, tout élément de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est conjugué par un élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, donc par un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, à $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\alpha\end{smallmatrix}\right)$ ou à $\left(\begin{smallmatrix}0 & \beta\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Deux éléments de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sont conjugués par un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si les sous-groupes à un paramètre qu'ils définissent sont conjugués dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$: pour tous les $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $X, Y \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, nous avons $Y = g\,X\,g^{-1}$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons $\exp(tY) = g\exp(tY)g^{-1}$ (en dérivant en $t = 0$ pour le sens réciproque). Une matrice carrée à coefficients réels ou complexes est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ si et seulement si son exponentielle l'est.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\exp\Big(t\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\alpha\end{smallmatrix}\right)\Big) = \begin{pmatrix} \cosh(2t\operatorname{Re}\alpha) & 0 & 0 & \sinh(2t\operatorname{Re}\alpha) \\ 0 & \cos(2t\operatorname{Im}\alpha) & \sin(2t\operatorname{Im}\alpha) & 0 \\ 0 & -\sin(2t\operatorname{Im}\alpha) & \cos(2t\operatorname{Im}\alpha) & 0 \\ \sinh(2t\operatorname{Re}\alpha) & 0 & 0 & \cosh(2t\operatorname{Re}\alpha) \end{pmatrix}.$$

Comme la permutation cyclique des vecteurs e_1, e_2, e_3 est un élément de $\mathrm{SO}(3) \subset \mathrm{SO}_0(1,3)$, ceci montre le résultat.