

Introduction topologique à la géométrie

Frédéric Paulin

Professeur à l'Université Paris-Saclay (Faculté des sciences d'Orsay)

Cours de première année de Master (M1), parcours :
Mathématiques fondamentales (MF)
et Voie Hadamard (VH),

Université Paris-Saclay

Année 2024-2025

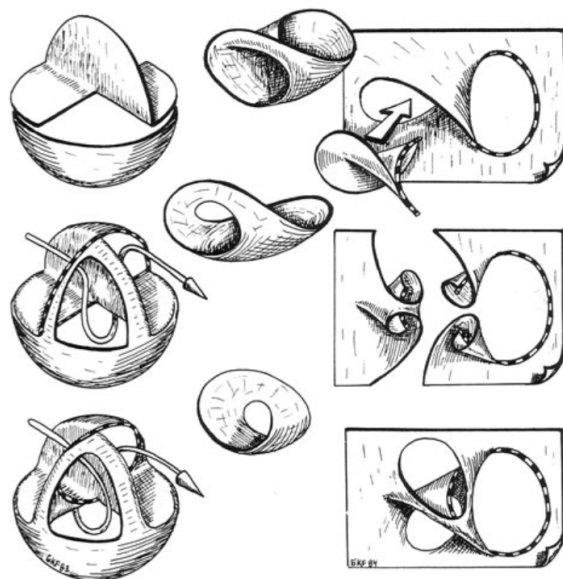


Table des matières

Préambule	6
1 Homotopie et groupe fondamental	8
1.1 Homotopie	8
1.2 Groupe fondamental	10
1.2.1 Composition et homotopie des chemins	10
1.2.2 Lacets et groupe fondamental	12
1.2.3 Changement de point base	12
1.2.4 Propriété fonctorielle du groupe fondamental	13
1.2.5 Groupe fondamental et homotopie	14
1.3 Autres exercices	17
1.4 Indications pour la résolution des exercices	21
2 Revêtements	31
2.1 Définitions	31
2.2 Homéomorphismes locaux et revêtements	33
2.3 Actions de groupes topologiques	34
2.4 Actions de groupes et revêtements	39
2.5 Unicité des relèvements	42
2.6 Relèvement des chemins et des homotopies	43
2.7 Action sur la fibre du groupe fondamental de la base	46
2.8 Groupes fondamentaux de graphes	49
2.9 Relèvement des applications	51
2.10 Structure des morphismes de revêtements	53
2.11 Revêtements galoisiens	57
2.12 Revêtements universels	60
2.13 Classification des revêtements	64
2.14 Autres exercices	67
2.15 Indications pour la résolution des exercices	71
3 Présentation de groupes fondamentaux	94
3.1 Propriétés universelles sur les groupes	94
3.1.1 Somme amalgamée de groupes	94
3.1.2 Formes normales dans les produits amalgamés	98
3.2 Le théorème de van Kampen	99
3.3 Autres exercices	109
3.4 Indications pour la résolution des exercices	113
4 Sous-variétés différentielles	127
4.1 Variétés topologiques	127
4.2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$	132
4.3 Applications différentiables	136
4.4 Espaces tangents et applications tangentes	140
4.4.1 Sous-espace tangent en un point	140
4.4.2 Fibré tangent	142
4.4.3 Applications tangentes	143

4.5	Exemples	144
4.6	Variétés différentielles	150
4.7	Autres exercices	159
4.8	Indications pour la résolution des exercices	162
5	Théorème de Sard et théorie du degré	178
5.1	Le théorème de Sard	179
5.2	Sous-variétés différentielles à bord	182
5.3	Le théorème du point fixe de Brouwer	188
5.4	Sous-variétés différentielles orientables	189
5.5	Degré des applications différentiables	193
5.6	Autres exercices	198
5.7	Indications pour la résolution des exercices	201
6	Théorie de Morse	207
6.1	Points critiques non dégénérés	208
6.2	Existence de fonctions de Morse lisses	213
6.3	Flot local d'un champ de vecteurs	218
6.3.1	Opérations sur les champs de vecteurs	219
6.3.2	Équation différentielle associée à un champ de vecteurs sur une sous-variété	220
6.3.3	Dérivation des fonctions associée à un champ de vecteurs	224
6.4	Structure des variétés entre deux niveaux critiques	226
6.5	CW-complexes finis et caractéristique d'Euler	228
6.6	Décomposition en anses des variétés différentielles	234
6.7	Autres exercices	238
6.8	Indications pour la résolution des exercices	242
7	Topologie des surfaces	258
7.1	Recollements lisses de variétés et sommes connexes	258
7.2	Les surfaces compactes connexes modèles	265
7.3	Classification lisse des surfaces à bord compactes connexes	272
7.4	Autres exercices	278
7.5	Indications pour la résolution des exercices	280
8	Courbure des courbes et surfaces de l'espace euclidien	289
8.1	Courbure des courbes planes et gauches	289
8.1.1	Classification à déplacement près des courbes planes	290
8.1.2	Classification à déplacement près des courbes gauches	293
8.2	Formes fondamentales et courbures des sous-variétés	302
8.2.1	Fibré normal et point focaux	302
8.2.2	La première forme fondamentale	304
8.2.3	La seconde forme fondamentale et les courbures	306
8.2.4	Le cas des hypersurfaces orientées	310
8.3	Points focaux et courbures principales	313
8.4	Courbures des surfaces de $\mathbb{R}^3$	316
8.5	Surfaces minimales	326
8.6	Géodésiques	332

8.7	La formule de Gauss-Bonnet	342
8.8	Le remarquable théorème de Gauss	342
8.9	Autres exercices	344
8.10	Indications pour la résolution des exercices	344
A	Annexe : rappels de topologie générale	352
A.1	Généralités	352
A.1.1	Topologie engendrée, prébase et base d'ouverts	353
A.1.2	Voisinages, systèmes fondamentaux de voisinages	354
A.1.3	Intérieur, adhérence, frontière	354
A.1.4	Séparation	355
A.1.5	Continuité	356
A.1.6	Connexité	356
A.2	Constructions de topologies	357
A.2.1	Comparaison de topologies	357
A.2.2	Topologie initiale	357
A.2.3	Sous-espace topologique	358
A.2.4	Topologie produit	359
A.2.5	Topologie finale	360
A.2.6	Topologie quotient	362
A.2.7	Topologie de l'ordre	367
A.3	Limites et valeurs d'adhérence	368
A.3.1	Limites	368
A.3.2	Propriétés des limites	369
A.3.3	Valeurs d'adhérence	370
A.4	Compacité	371
A.4.1	Espace compact	371
A.4.2	Compacité et valeurs d'adhérence	373
A.4.3	Compacité et produits	373
A.4.4	Espaces localement compacts	374
A.4.5	Compacité et continuité	376
A.4.6	Topologie compacte-ouverte	378
A.5	Exercices récapitulatifs	379
A.6	Indications pour la résolution des exercices	381
B	Annexe : rappels de théorie des groupes	389
B.1	Action de groupes	389
B.2	Groupes libres	391
B.3	Graphe de Cayley	393
B.4	Groupes définis par générateurs et relations	396
B.5	Indications pour la résolution des exercices	397
C	Annexe : rappels de calcul différentiel	400
C.1	Exercices de révision	404
C.2	Indications pour la résolution des exercices	406
	Index	408

1. Je remercie les étudiants des années 2020 à 2025 pour leurs corrections, et Kevin Destagnol pour la solution de nombreux exercices.

Préambule.

Les beaux² objets géométriques se prêtent à une étude triple, topologique, différentiable et métrique. L'un des buts de ce cours est de donner quelques outils de ces trois domaines permettant de décrire ces beaux objets géométriques.

Nous commencerons par une introduction à la topologie algébrique, qui essaye de classer (ou du moins de comprendre) les espaces topologiques X (dans des familles données) en leur associant des objets algébriques (nombres, groupes, anneaux, modules, algèbres, etc) dont la classe d'isomorphisme ne dépend que de la classe d'homéomorphisme de X . En particulier, ceci peut permettre de distinguer à homéomorphisme près des espaces topologiques. La notion de connexité a été l'un des premiers invariants topologiques à être utilisé dans ce but. Le nombre de composantes connexes par arcs, par exemple, ou le groupe abélien libre engendré par l'ensemble des composantes connexes par arcs, sont des invariants algébriques. Par exemple la droite $\mathbb{R}$ et le plan $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes, car en enlevant un point du premier, il est disconnecté, tandis que le second ne l'est pas. De même, le cercle $\mathbb{S}_1$ et la sphère $\mathbb{S}_2$ ne sont pas homéomorphes, car enlever un point à $\mathbb{S}_1$ disconnecte un voisinage connexe de ce point, alors que ce n'est pas le cas dans $\mathbb{S}_2$.

Pour formaliser cette méthodologie, définissons un *foncteur covariant de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des groupes* comme la donnée, pour tout espace topologique X , d'un groupe $F(X)$, et, pour toute application continue $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces topologiques, d'un morphisme de groupes $F(f)$ de $F(X)$ dans $F(Y)$, telle que

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)} \quad \text{et} \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

pour toute application continue $g : Y \rightarrow Z$. Ces propriétés impliquent que si $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme, alors $F(f)$ est un isomorphisme de groupes. Le groupe fondamental que nous introduirons dans la partie 1 est une variante d'un tel foncteur. Plus précisément, il associe un groupe à un espace topologique pointé (c'est-à-dire muni d'un point base) et un morphisme de groupes à une application continue préservant les points bases, de sorte que les deux propriétés ci-dessus soient vérifiées.

Le second objet de ce cours est d'introduire (dans la partie 4) les sous-variétés différentielles, qui sont en particulier les espaces de phases (hors singularités) de la physique, dans lesquels s'effectuent par exemple les mouvements des objets soumis aux équations de la physique. Pour n et N des entiers strictement positifs tels que $n \leq N$, les sous-variétés de dimension n de $\mathbb{R}^N$ sont les parties de $\mathbb{R}^N$ sur lesquelles existent localement des systèmes de n coordonnées permettant d'effectuer du calcul différentiel comme dans les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Nous donnerons aussi quelques outils de base pour manipuler ces sous-variétés différentielles, le théorème de Sard (voir la partie 5.1) qui donne un lien avec la théorie de la mesure, et la théorie de Morse (voir la partie 6), qui permet de donner une description topologique combinatoire des sous-variétés différentielles. Nous ne définirons les variétés différentielles abstraites que dans le but de réaliser, via des théorèmes de plongements, des exemples concrets de sous-variétés différentielles. Nous renvoyons à des apprentissages de seconde année de Master pour une étude complète des variétés différentielles (voir par exemple [Spi, Paul]).

2. Lire par exemple Montesquieu (Charles-Louis de Secondat, baron de La Brède et de Montesquieu), *Essai sur le goût* (1757).

Les sous-variétés M des espaces euclidiens $\mathbb{R}^N$ héritent de $\mathbb{R}^N$ une structure de produit scalaire sur leurs espaces tangents, exemple archétypal d'une *métrique riemannienne* sur M , qui permet de considérer les aspects métriques des sous-variétés différentielles, bien plus rigides que les aspects différentiels. Après avoir développé le cas des courbes dans la partie 8.1, nous étudierons les propriétés de courbure (courbures principales, courbure de Gauss, courbure moyenne, points focaux) et les géodésiques des sous-variétés dans la partie 8. Nous renvoyons à des apprentissages de seconde année de Master pour une étude plus complète de la géométrie riemannienne (voir par exemple [Spi, GaHL, Pau4]).

Nous donnerons la classification à difféomorphismes lisses près des surfaces lisses compactes connexes dans la partie 7 et nous étudierons particulièrement la géométrie des surfaces dans $\mathbb{R}^3$ (surfaces de révolution, surfaces minimales, etc) dans la seconde moitié de la partie 8.

Nous recommandons fortement l'utilisation de l'index (très complet) pour trouver rapidement où sont définies les notions utilisées ailleurs dans le texte.

Des références de base pour ce cours sont les livres [God1, Mil1, Laf, doC] et [Cha, Chap. 6], complétés pour ceux qui le souhaitent par [Car, Spa, Spi, Pau1, Pau3] et autres références ponctuelles. Les prérequis en topologie générale sont contenus dans l'appendice A, voir aussi les notes de cours [Pau2]. Tous les portraits de mathématiciens qui apparaissent en note de bas de page de ce cours sont extraits de Wikipedia. Le dessin de couverture est extrait du livre [Fra]. Les très nombreuses illustrations de ce cours sont, pour la plupart, aussi extraites de Wikipedia.

Nous noterons $\mathbb{S}_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ la sphère unité de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{B}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ la boule unité fermée de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$. Pour tous les entiers $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leq b$, nous noterons $\llbracket a, b \rrbracket = [a, b] \cap \mathbb{Z}$. Si A et B sont deux ensembles, nous noterons $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ le complémentaire de $A \cap B$ dans A .

Caveat. Conformément à l'enseignement gaulois de N. Bourbaki, tous les espaces compacts, localement compacts ou σ -compacts sont, par définition, séparés.

1 Homotopie et groupe fondamental

Nous renvoyons à l'appendice A pour des rappels de topologie. Le groupe fondamental, que nous définirons dans la partie 1.2, est un invariant algébrique des espaces topologiques pointés. Avant de le définir, il est important de comprendre (voir la partie 1.1) des propriétés de déformations (par équivalence d'homotopie) des espaces topologiques, qui peuvent changer le type topologique (c'est-à-dire ne pas préserver la classe d'homéomorphisme), mais s'avèreront ne pas changer, à isomorphisme de groupes près, le groupe fondamental. La propriété d'invariance homotopique du groupe fondamental formera, avec la théorie des revêtements donnée dans la partie 2 et le théorème de van Kampen démontré dans la partie 3.2, les trois outils principaux pour le calcul ou la détermination des groupes fondamentaux d'espaces topologiques pointés.

L'exercice suivant sera souvent utilisé (de manière implicite) dans cette partie.

Exercice E.1. Soient X et Y deux espaces topologiques, $(F_i)_{i \in I}$ un recouvrement fermé fini de X , et $f_i : F_i \rightarrow Y$ une application continue pour tout $i \in I$. Si f_i et f_j coïncident sur $F_i \cap F_j$ pour tous les $i, j \in I$, alors il existe une et une seule application continue $f : X \rightarrow Y$ égale à f_i sur F_i pour tout $i \in I$.

1.1 Homotopie

Soient X et Y deux espaces topologiques. Deux applications continues $f, g : X \rightarrow Y$ sont *homotopes* s'il existe une application continue $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $h(x, 0) = f(x)$ et $h(x, 1) = g(x)$ pour tout x dans X . Nous noterons alors $f \sim g$, et nous dirons que h est une *homotopie* entre f et g . Pour tout s dans $[0, 1]$, nous noterons $h_s : X \rightarrow Y$ l'application définie par $h_s(x) = h(x, s)$ pour tout $x \in X$.

Si A est une partie de l'espace de départ X , deux applications continues $f, g : X \rightarrow Y$ sont *homotopes relativement à A* s'il existe une application continue $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $h(x, 0) = f(x)$ et $h(x, 1) = g(x)$ pour tout x dans X , et telle que $h(a, s) = f(a)$ pour tous les a dans A et s dans $[0, 1]$. Nous noterons alors $f \sim g \text{ rel } A$, et nous dirons que h est une *homotopie relative à A* entre f et g .

Il est immédiat que $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ des applications continues de X dans Y . En effet, $f \sim f$ par l'homotopie constante $h : (x, s) \mapsto f(x)$; si $f \sim g$ par l'homotopie h , alors $g \sim f$ par l'homotopie inverse $\bar{h} : (x, s) \mapsto h(x, 1 - s)$; si $f_1 \sim f_2$ par l'homotopie h_1 et $f_2 \sim f_3$ par l'homotopie h_2 , alors $f_1 \sim f_3$ par l'homotopie composée

$$(x, s) \mapsto \begin{cases} h_1(x, 2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ h_2(x, 2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

De même, $\sim \text{ rel } A$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications continues de X dans Y qui coïncident sur A avec une application continue donnée de A dans Y .

Un espace topologique X est *contractile* s'il est non vide et si l'application identique id_X de X est homotope à une application constante de X dans X .

Par exemple, un convexe non vide C dans un *espace vectoriel topologique* (c'est-à-dire un espace vectoriel réel ou complexe muni d'une topologie telle que l'addition et la multiplication externe soient des applications continues) est contractile : si $x_0 \in C$, alors l'application $(x, s) \mapsto (1 - s)x + sx_0$ de $C \times [0, 1]$ dans C est une homotopie entre id_C

et l'application constante $x \mapsto x_0$. En particulier, la boule fermée $\mathbb{B}_n$ et la boule ouverte $\mathring{\mathbb{B}}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$ de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$ sont contractiles.

La notion d'espace contractile est importante, car la plupart des espaces topologiques que nous rencontrons sont *localement contractiles*, c'est-à-dire admettent un système fondamental de voisinages ouverts contractiles. C'est en particulier le cas des ouverts des espaces vectoriels topologiques et des *variétés topologiques* (c'est-à-dire les espaces topologiques X , supposés métrisables séparables sauf mention explicite du contraire, tels que pour tout x dans X , il existe $n \in \mathbb{N}$ et V un voisinage de x dans X , tels que V soit homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, voir la partie 4.1). C'est aussi le cas des CW-complexes (voir la partie 6.5) et des complexes simpliciaux (voir par exemple [Pau3, Spa]).

Un espace topologique est *simplement connexe* s'il est connexe par arcs et si toute application continue du cercle $\mathbb{S}_1$ dans X se prolonge (continuellement) en une application continue du disque $\mathbb{B}_2$ dans X , ou, de manière équivalente si toute application continue de $\mathbb{S}_1$ dans X est homotope à une application constante de $\mathbb{S}_1$ dans X (voir aussi l'exercice E.5 et la proposition 1.10).

Exercice E.2. *Montrer qu'un espace contractile est simplement connexe.*

Soient X et Y deux espaces topologiques. Une application continue $f : X \rightarrow Y$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe une application $g : Y \rightarrow X$ continue telle que $f \circ g$ soit homotope à l'application identique de Y et $g \circ f$ soit homotope à l'application identique de X . S'il existe une équivalence d'homotopie entre X et Y , nous dirons que X et Y ont le même *type d'homotopie*.

Il est immédiat de vérifier que la relation « avoir même type d'homotopie » est une relation d'équivalence sur tout ensemble d'espaces topologiques.

L'intérêt de la notion d'équivalence d'homotopie vient du fait que la plupart des invariants de topologie algébrique que nous construirons (dont le groupe fondamental, voir la partie 1.2, en faisant attention à la gestion des points bases), sont non seulement des invariants topologiques, mais aussi des invariants homotopiques (c'est-à-dire tels que les invariants associés à deux espaces topologiques ayant même type d'homotopie soient isomorphes).

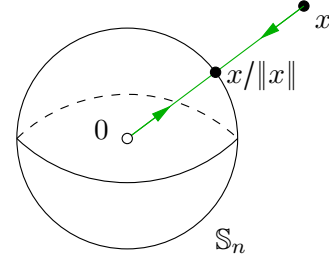
Exemple : Un espace topologique est contractile si et seulement s'il a le même type d'homotopie qu'un singleton.³

Soient X un espace topologique, A un sous-espace de X et $i : A \rightarrow X$ l'inclusion (c'est-à-dire l'application de A dans X définie par $x \mapsto x$). Nous dirons que A est un *rétracte* de X s'il existe une application continue $r : X \rightarrow A$ telle que $r \circ i = \text{id}_A$. Nous dirons que A est un *rétracte de X par déformation* si de plus $i \circ r$ est homotope à id_X . Nous dirons que A est un *rétracte de X par déformation forte* si de plus $i \circ r$ est homotope à id_X relativement à A . Nous dirons alors que r est respectivement une *rétraction*, *rétraction par déformation*, *rétraction par déformation forte*.

Notons que si A est un rétracte par déformation de X , alors A et X ont le même type d'homotopie.

3. Il existe une et une seule topologie sur un ensemble ayant un seul élément !

Exemples : (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la sphère $\mathbb{S}_n$ est un rétracte par déformation forte de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. En effet, en notant $i : \mathbb{S}_n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ l'inclusion, si $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}_n$ est la *rétraction radiale* définie par $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$, alors nous avons $r \circ i = \text{id}_{\mathbb{S}_n}$ et la composition $i \circ r$ est homotope à l'application identique de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'homotopie définie par $h(x, s) = sx + (1-s)\frac{x}{\|x\|}$, qui fixe $\mathbb{S}_n$. En particulier, l'inclusion i de $\mathbb{S}_n$ dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ est une équivalence d'homotopie, et les espaces topologiques $\mathbb{S}_n$ et $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ont le même type d'homotopie. Ils ne sont par contre pas homéomorphes (voir le théorème d'invariance du domaine de Brouwer 4.1).



(2) Si X est un espace topologique, Y un espace contractile et y un point de Y , alors $X \times \{y\}$ est un rétracte par déformation de $X \times Y$. Donc $X \times Y$ et X ont le même type d'homotopie.

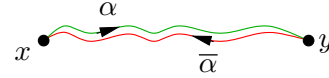
1.2 Groupe fondamental

1.2.1 Composition et homotopie des chemins

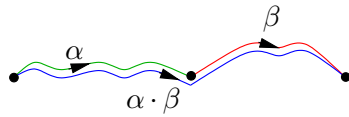
Considérons un espace topologique X . Un *chemin* dans X est une application continue $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$; son *origine* est $x = \alpha(0)$, son *extrémité* est $y = \alpha(1)$; nous dirons aussi que α est un chemin *joignant* x à y .

Pour tout x dans X , nous appelons *chemin constant en* x le chemin c_x tel que $c_x(t) = x$ pour tout t dans $[0, 1]$.

Si α est un chemin dans X joignant x à y , nous appelons *chemin inverse* de α le chemin $\bar{\alpha}$, joignant y à x , défini par $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ pour tout t dans $[0, 1]$.



Soient α et β deux chemins dans X tels que $\alpha(1) = \beta(0)$. Nous notons $\alpha \cdot \beta$ le chemin



$$t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Nous dirons que $\alpha \cdot \beta$ est le chemin *composé* (ou *concaténé*) de α et β . Deux chemins α et β sont *composables* (ou *concaténables*) si l'extrémité de α est égale à l'origine de β . L'application $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$ de l'ensemble des couples de chemins composables dans l'ensemble des chemins s'appelle la *composition* (ou *concaténation*) des chemins.

Deux chemins α et β dans X d'origine x_0 et d'extrémité x_1 sont *homotopes* (nous dirons parfois *homotopes relativement aux extrémités* s'il y a risque de confusion), et nous notons $\alpha \sim \beta$ (et $\alpha \sim \beta \text{ rel } 0, 1$ s'il y a risque de confusion), si les applications α et β de $[0, 1]$ dans X sont homotopes relativement à la partie $\{0, 1\}$ de $[0, 1]$, c'est-à-dire s'il existe une application continue $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ notée $(t, s) \mapsto h(t, s)$ telle que

- $h(t, 0) = \alpha(t)$ et $h(t, 1) = \beta(t)$ pour tout t dans $[0, 1]$,
- $h(0, s) = x_0$ et $h(1, s) = x_1$ pour tout s dans $[0, 1]$.

Nous dirons que t est le *paramètre de chemin* et s le *paramètre d'homotopie*. Une telle application h est appelée une *homotopie* de α à β (nous dirons parfois *homotopie relative*

s'il y a risque de confusion). Nous notons $[\alpha]$ la classe d'homotopie (relativement aux extrémités) d'un chemin α .

Le résultat suivant donne les principales propriétés de la composition et de l'homotopie des chemins.

Lemme 1.1. Soient $\alpha, \beta, b, c, \gamma$ des chemins dans X .

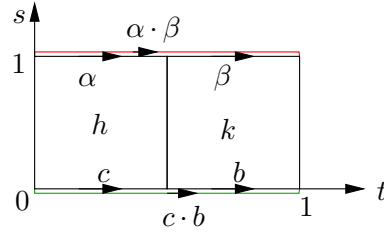
- (1) Si $\alpha \sim \beta$, alors $\overline{\alpha} \sim \overline{\beta}$.
- (2) Si $c \sim \alpha$, si $b \sim \beta$ et si c et b sont composables, alors α et β sont composables et $c \cdot b \sim \alpha \cdot \beta$.
- (3) Soient α un chemin joignant x à y , β un chemin joignant y à z , γ un chemin joignant z à w . Alors les chemins $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ et $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ sont homotopes.
- (4) Si α est un chemin joignant x à y , alors $c_x \cdot \alpha$ et $\alpha \cdot c_y$ sont homotopes à α .
- (5) Si α est un chemin joignant x à y , alors $\alpha \cdot \overline{\alpha}$ et $\overline{\alpha} \cdot \alpha$ sont homotopes à c_x et c_y respectivement.

Démonstration. (1) Si h est une homotopie du chemin α au chemin β , alors l'application $(t, s) \mapsto h(1-t, s)$ est une homotopie du chemin $\overline{\alpha}$ au chemin $\overline{\beta}$.

(2) Soit h une homotopie du chemin c au chemin α et k une homotopie du chemin b au chemin β . Alors l'application

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} h(2t, s) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ k(2t-1, s) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

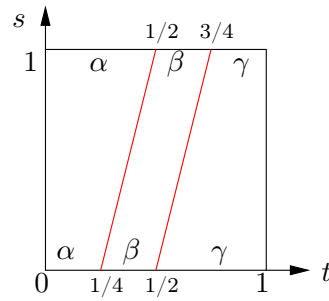
est une homotopie du chemin $c \cdot b$ au chemin $\alpha \cdot \beta$.



(3) L'application

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{1+s}) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4} \\ \beta(4t-s-1) & \text{si } \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4} \\ \gamma(\frac{4t-s-2}{2-s}) & \text{si } \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

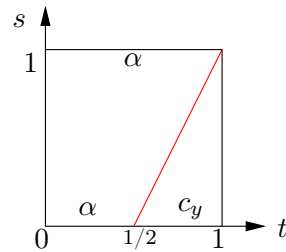
est une homotopie du chemin $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ au chemin $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.



(4) L'application

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} \alpha(\frac{2t}{1+s}) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ y & \text{si } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

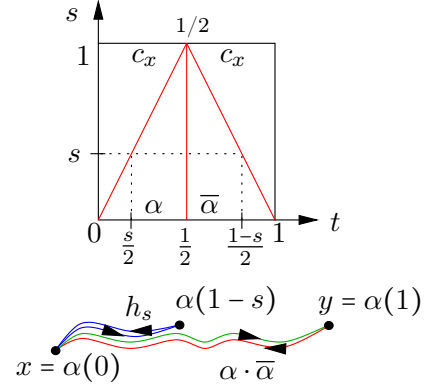
est une homotopie du chemin $\alpha \cdot c_y$ au chemin α . Nous construisons de même une homotopie du chemin $c_x \cdot \alpha$ au chemin α .



(5) L'application

$$h : (t, s) \mapsto \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \alpha(2t - s) & \text{si } \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2 - 2t - s) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2-s}{2} \\ x & \text{si } \frac{2-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est une homotopie du chemin $\alpha \cdot \bar{\alpha}$ au chemin c_x .
Nous construisons de même une homotopie du chemin $\bar{\alpha} \cdot \alpha$ au chemin c_y .



□

1.2.2 Lacets et groupe fondamental

Soit x un point de X . Un *lacet* en x dans X est un chemin dans X d'origine et d'extrémité x . Le point x est appelé le *point base* de ce lacet. Les chemins constants sont des lacets, et le chemin inverse d'un lacet est un lacet. Deux lacets sont *homotopes* s'ils sont homotopes en tant que chemin (donc relativement à leur point base).

Sur l'ensemble $L(X, x)$ des lacets en x , la relation « être homotope à » est une relation d'équivalence, d'ensemble quotient noté $\pi_1(X, x)$.

La composition des chemins, restreinte aux lacets en x , est une loi de composition interne sur $L(X, x)$, qui (par le lemme 1.1 (2)) passe au quotient en une loi de composition interne sur $\pi_1(X, x)$.

Proposition 1.2. *La composition des chemins induit une structure de groupe sur l'ensemble $\pi_1(X, x)$ des classes d'homotopie de lacets dans X de point base x .*

Démonstration. La propriété d'associativité découle du lemme 1.1 (3). La classe du lacet constant en x est un élément neutre par le lemme 1.1 (4). Si $[c]$ est une classe dans $\pi_1(X, x)$, la classe $[\bar{c}]$ de $\bar{c}$ ne dépend pas du choix du représentant c de $[c]$ par le lemme 1.1 (1). De plus, la classe $[\bar{c}]$ est l'inverse de $[c]$ pour la loi de $\pi_1(X, x)$ par le lemme 1.1 (5). □

Le groupe $\pi_1(X, x)$ s'appelle le *groupe fondamental* (ou *groupe de Poincaré*, ou *premier groupe d'homotopie*) de X en x .

Exemple. Puisque le seul lacet d'un espace topologique réduit à un point est le lacet constant, si $X = \{x\}$, alors $\pi_1(X, x) = \{0\}$.

1.2.3 Changement de point base

Rappelons que par le lemme 1.1 (3), si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des chemins consécutivement composables, alors la classe $[\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n] = [\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot (\dots \cdot \alpha_n) \dots)]$ ne dépend en fait pas des parenthésages.

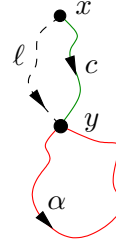
Proposition 1.3. *Soit c un chemin d'origine x et d'extrémité y dans X . L'application $\phi_c : [\alpha] \mapsto [c \cdot \alpha \cdot \bar{c}]$ est un isomorphisme de groupes de $\pi_1(X, y)$ dans $\pi_1(X, x)$, qui ne dépend que de la classe d'homotopie (relativement aux extrémités) de c . Si ℓ est un autre chemin joignant x à y , alors les isomorphismes de groupes ϕ_c et ϕ_ℓ sont conjugués.*

Démonstration. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \forall [\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, y), \quad \phi_c([\alpha \cdot \beta]) &= [c \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \bar{c}] = [c \cdot \alpha \cdot \bar{c} \cdot c \cdot \beta \cdot \bar{c}] \\ &= [c \cdot \alpha \cdot \bar{c}][c \cdot \beta \cdot \bar{c}] = \phi_c([\alpha]) \phi_c([\beta]). \end{aligned}$$

De plus, nous avons $\phi_{\bar{c}} = \phi_c^{-1}$, et si g est la classe d'homotopie du lacet $\ell \cdot \bar{c}$ de point base x , alors

$$\begin{aligned} \forall [\alpha] \in \pi_1(X, y), \quad \phi_\ell([\alpha]) &= [\ell \cdot \alpha \cdot \bar{\ell}] = [\ell \cdot \bar{c} \cdot c \cdot \alpha \cdot \bar{c} \cdot c \cdot \bar{\ell}] \\ &= [\ell \cdot \bar{c}][c \cdot \alpha \cdot \bar{c}][\ell \cdot \bar{c}]^{-1} = g \phi_c([\alpha]) g^{-1}. \end{aligned}$$



□

Corollaire 1.4. Si X est connexe par arcs et $x, y \in X$, alors les groupes $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(X, y)$ sont isomorphes. Si $\pi_1(X, x)$ est abélien, cet isomorphisme est canonique. □

Nous noterons souvent $\pi_1 X$ au lieu de $\pi_1(X, x_0)$, quand un point base x_0 de X est sous-entendu et indifférent. La proposition précédente laisse penser que cet abus de notation ne pose que peu de problèmes. Mais “peu de problèmes” ne signifie pas “pas de problèmes”, et du soin est nécessaire en ce qui concerne le traitement des points bases des groupes fondamentaux.

Exercice E.3. Soit $((X_i, x_i))_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques pointés. Montrer que les groupes $\pi_1(\prod_{i \in I} X_i, (x_i)_{i \in I})$ et $\prod_{i \in I} \pi_1(X_i, x_i)$ sont isomorphes. En particulier,

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \simeq \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y).$$

1.2.4 Propriété fonctorielle du groupe fondamental

Soient X et Y deux espaces topologiques, et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Si c est un chemin dans X joignant x à y , alors $f \circ c$ est un chemin dans Y joignant $f(x)$ à $f(y)$. La post-composition $c \mapsto f \circ c$ par f des chemins est compatible avec l'homotopie (relativement aux extrémités) des chemins :

si α et β sont deux chemins homotopes dans X , alors $f \circ \alpha$ et $f \circ \beta$ le sont aussi dans Y

(car si $h : [0, 1]^2 \rightarrow X$ est une homotopie entre α et β , alors $f \circ h : [0, 1]^2 \rightarrow Y$ est une homotopie entre $f \circ \alpha$ et $f \circ \beta$) et avec la composition des chemins :

$$f \circ (\alpha \cdot \beta) = (f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta).$$

Le résultat suivant en découle.

Proposition 1.5. Pour tout $x \in X$, une application continue $f : X \rightarrow Y$ induit un morphisme de groupes $f_* : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ de $\pi_1(X, x)$ dans $\pi_1(Y, f(x))$. □

De plus, si f est l'application identique de X , alors f_* est l'application identique de $\pi_1(X, x)$; si g est une application continue de Y dans un espace topologique Z , alors

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Z, g \circ f(x)).$$

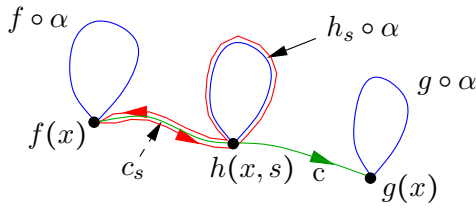
1.2.5 Groupe fondamental et homotopie

Proposition 1.6. Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues homotopes. Pour tout x dans X , il existe un isomorphisme de groupes $u : \pi_1(Y, g(x)) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(Y, f(x)) \\ & \nearrow f_* & \\ \pi_1(X, x) & & \uparrow u \\ & \searrow g_* & \\ & & \pi_1(Y, g(x)) . \end{array}$$

Si f et g sont homotopes relativement à $\{x\}$, alors $f_* = g_*$.

Démonstration. Soit h une homotopie entre f et g . Soit c le chemin $s \mapsto h_s(x) = h(x, s)$ dans Y entre $f(x)$ et $g(x)$. Par la proposition 1.3, l'application $u = \phi_c : [\beta] \mapsto [c \cdot \beta \cdot \bar{c}]$ est un isomorphisme de groupes de $\pi_1(Y, g(x))$ dans $\pi_1(Y, f(x))$. Pour montrer que $f_* = u \circ g_*$, il suffit de montrer que pour tout lacet α d'origine x dans X , les lacets $(c \cdot (g \circ \alpha)) \cdot \bar{c}$ et $f \circ \alpha$ sont homotopes (relativement aux extrémités).



Pour tout s dans $[0, 1]$, considérons le chemin $c_s : t \mapsto h(x, st)$ dans Y . L'application $(s, t) \mapsto ((c_s \cdot (h_s \circ \alpha)) \cdot \bar{c}_s)(t)$ est continue. En $s = 0$, elle vaut $(c_{f(x)} \cdot (f \circ \alpha)) \cdot c_{f(x)}$ (où $c_{f(x)}$ est le lacet constant en $f(x)$), qui est homotope à $f \circ \alpha$. En $s = 1$, elle vaut $(c \cdot (g \circ \alpha)) \cdot \bar{c}$. $\square$

Corollaire 1.7. Si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie entre X et Y , alors l'application $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ induite par f sur les groupes fondamentaux est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. Soit $g : Y \rightarrow X$ un inverse homotopique de f , c'est-à-dire une application continue telle que les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes à l'identité. Posons $y = f(x)$. Par la proposition précédente et les propriétés fonctorielles (voir la fin de la partie 1.2.4), les applications $(f \circ g)_* = f_* \circ g_* : \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(Y, f \circ g(y))$ et $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, g \circ f(x))$ sont des isomorphismes de groupes. Donc $f_* : \pi_1(X, g(y)) \rightarrow \pi_1(Y, f \circ g(y))$ est surjective par la première affirmation précédente et $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ est injective par la seconde. Or x et $g(y) = g(f(x))$ sont dans la même composante connexe par arc de X car $g \circ f$ est homotope à id_X . De même, $f \circ g(y) = f \circ g(f(x))$ et $f(x)$ sont dans la même composante connexe par arc de Y car $f \circ g$ est homotope à id_Y . Or les changements de point base dans les groupes fondamentaux, lorsque ces points bases sont dans une même composante connexe par arc, sont des isomorphismes de groupes, par la proposition 1.3. Puisque pré-composer une application surjective par une application bijective et la post-composer par une application bijective ne changent pas son caractère surjectif, nous avons donc que $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ est à la fois injective et surjective, donc bijective. $\square$

Corollaire 1.8. Les groupes fondamentaux de deux espaces connexes par arcs, ayant même type d'homotopie, sont isomorphes. $\square$

Méthodologie 1 :

Scrountch !

Pour calculer (à isomorphisme près) le groupe fondamental d'un espace topologique connexe par arcs B de point base b quelconque, on pourra montrer que B a le même type d'homotopie qu'un espace topologique connexe par arcs X de point base x quelconque dont on connaît le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ (par exemple en montrant que B se rétracte par déformation forte sur une partie A de B qui est homéomorphe à X), et de conclure que $\pi_1(B, b) \simeq \pi_1(X, x)$ en invoquant le corollaire 1.8 ci-dessus.

Corollaire 1.9. *Tout groupe fondamental d'espace contractile est trivial.*

Démonstration. Un espace contractile a même type d'homotopie qu'un singleton. $\square$

Soient X un espace topologique et $x \in X$. Considérons l'espace topologique quotient $[0, 1]/\langle\{0, 1\}\rangle$ (voir l'exemple (3) suivant l'exercice E.A.110 dans l'appendice A) obtenu en recollant entre elles les deux extrémités de l'intervalle $[0, 1]$. Nous l'identifions avec $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ par l'homéomorphisme $[\theta] \mapsto e^{2i\pi\theta}$. À tout lacet α dans X d'origine x est ainsi associé une application continue, encore notée α , de $\mathbb{S}_1$ dans X telle que $\alpha(1) = x$.

Si α est un lacet de X , nous appelons *classe d'homotopie relative* de α la classe d'homotopie relativement à $\{1\}$ de l'application continue $\alpha : \mathbb{S}_1 \rightarrow X$ ainsi définie, et, pour distinguer, nous appelons *classe d'homotopie libre* de α la classe d'homotopie de l'application continue $\alpha : \mathbb{S}_1 \rightarrow X$ ainsi définie.

La proposition suivante est souvent utilisée pour vérifier ou utiliser l'annulation d'une classe d'homotopie.

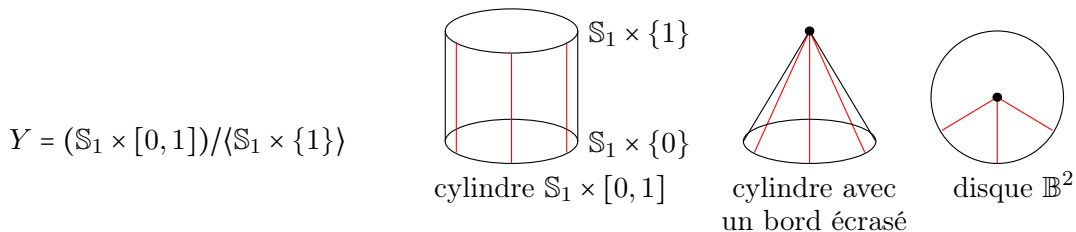
Proposition 1.10. *Soit $\alpha : \mathbb{S}_1 \rightarrow X$ une application continue, telle que $\alpha(1) = x$. Alors $[\alpha] = 1$ dans $\pi_1(X, x)$ si et seulement si α s'étend continuellement en une application continue $\mathbb{B}_2 \rightarrow X$.*

Démonstration. Si α s'étend continuellement en $f : \mathbb{B}_2 \rightarrow X$, si $i : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$ est l'inclusion, alors, par fonctorialité, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(\mathbb{B}_2, 1) & \\ i_* \nearrow & \downarrow f_* & \\ \pi_1(\mathbb{S}_1, 1) & \xrightarrow{\alpha_*} & \pi_1(X, x) . \end{array}$$

Or si $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_1 = [0, 1]/\langle\{0, 1\}\rangle$ est le lacet induit par passage au quotient de l'identité de $[0, 1]$, alors $\alpha_*[\beta] = [\alpha]$. Comme $\pi_1(\mathbb{B}_2, 1) = \{1\}$ par le corollaire 1.9, le morphisme α_* est trivial par la commutativité du diagramme ci-dessus. Ceci montre que $[\alpha]$ est l'élément neutre de $\pi_1(X, x)$.

Réciproquement, si $[\alpha] = 1$, alors soit $h : \mathbb{S}_1 \times [0, 1] \rightarrow X$ une homotopie entre α et l'application constante. Considérons l'espace topologique quotient



obtenu en écrasant en un point la composante connexe $\mathbb{S}_1 \times \{1\}$ du bord du cylindre $\mathbb{S}_1 \times [0, 1]$. Il est homéomorphe au disque $\mathbb{B}^2$ par l'application $[e^{i\theta}, s] \mapsto (1-s)e^{i\theta}$, qui envoie $\mathbb{S}_1$ (identifié à l'image de $\mathbb{S}_1 \times \{0\}$) sur $\mathbb{S}_1$ (le bord de $\mathbb{B}^2$) par l'identité. Alors h factorise en une application continue de Y à valeurs dans X . Or Y est homéomorphe au disque, par un homéomorphisme valant l'identité sur $\mathbb{S}_1$, en identifiant $\mathbb{S}_1$ avec un sous-espace de Y par l'application induite par $x \mapsto (x, 0)$. Comme $h_0 = \alpha$, ceci montre le résultat. $\square$

Exercice E.4. Soient X un espace topologique connexe par arcs et x un point de X . Nous notons $[\mathbb{S}_1, X]$ l'ensemble des classes d'homotopies d'applications du cercle $\mathbb{S}_1$ dans X . Montrer que l'application de $\pi_1(X, x)$ dans $[\mathbb{S}_1, X]$ qui à la classe d'homotopie relative d'un lacet α associe la classe d'homotopie libre de l'application α de $\mathbb{S}_1$ dans X , est surjective et induit une bijection de l'ensemble des classes de conjugaison du groupe $\pi_1(X, x)$ sur $[\mathbb{S}_1, X]$.

Exercice E.5. Soit X un espace topologique connexe par arcs. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) l'espace X est simplement connexe ;
- (2) il existe x dans X tel que $\pi_1(X, x) = 0$;
- (3) nous avons $\pi_1(X, x) = 0$ pour tout x dans X ;
- (4) deux chemins de même origine et même extrémité sont homotopes (relativement aux extrémités).

Proposition 1.11. Soient X un espace topologique, U et V deux ouverts connexes par arcs de X , tels que $X = U \cup V$ et tels que $U \cap V$ soit connexe par arcs. Pour tout x dans $U \cap V$, si $i : U \rightarrow X$ et $j : V \rightarrow X$ sont les inclusions, alors $i_*\pi_1(U, x) \cup j_*\pi_1(V, x)$ engendre le groupe $\pi_1(X, x)$. En particulier, si U et V sont de plus simplement connexes d'intersection non vide, alors X est simplement connexe.

Démonstration. Soit α un lacet en x . Par compacité de $[0, 1]$ et continuité de α , il existe $n \in \mathbb{N}$ non nul tel que $\alpha([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}])$ soit contenu dans U ou dans V pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, soit c_i un chemin entre x et $\alpha(\frac{i}{n})$, contenu dans $U, V, U \cap V$ si $\alpha(\frac{i}{n})$ appartient à $U, V, U \cap V$ respectivement (ce qui est possible car $U, V, U \cap V$ sont connexes par arcs), avec c_0 et c_n constants. Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, nous notons α_i le chemin $t \mapsto \alpha(\frac{i+t}{n})$. Par le lemme 1.1, le lacet α en x est homotope au lacet

$$(c_0 \cdot \alpha_0 \cdot \bar{c}_1) \cdot (c_1 \cdot \alpha_1 \cdot \bar{c}_2) \cdot \dots \cdot (c_{n-2} \cdot \alpha_{n-2} \cdot \bar{c}_{n-1}) \cdot (c_{n-1} \cdot \alpha_{n-1} \cdot \bar{c}_n) . \quad (1)$$

Pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, le chemin $c_i \cdot \alpha_i \cdot \bar{c}_{i+1}$, est un lacet en x contenu dans U ou dans V . Donc $i_*\pi_1(U, x) \cup j_*\pi_1(V, x)$ engendre $\pi_1(X, x)$.

Montrons la dernière assertion. Si $U \cap V$ est non vide, alors X est connexe par arcs (voir la partie A.1.6 de l'appendice A). Si U et V sont simplement connexes, alors chaque $\bar{c}_i \cdot \alpha_i \cdot c_{i+1}$ est homotope au lacet constant en x . Donc α est homotope au lacet constant en x par l'expression (1) et le lemme 1.1. Par conséquent, X est simplement connexe. $\square$

Corollaire 1.12. Pour $n \geq 2$, la sphère $\mathbb{S}_n$ est simplement connexe.

Démonstration. Elle s'écrit comme réunion de l'ouvert U complémentaire du pôle nord, et de l'ouvert V complémentaire du pôle sud. Les ouverts U et V sont contractiles (par la

rétraction par déformation forte sur le pôle qu'ils contiennent le long des méridiens), donc simplement connexes par l'exercice E.2. L'intersection $U \cap V$ se rétracte par déformation forte le long des méridiens sur l'équateur $\mathbb{S}_{n-1}$, qui est connexe par arcs si $n \geq 2$. $\square$

Corollaire 1.13. *Pour $n \geq 1$, l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est simplement connexe.*

Démonstration. Rappelons (voir l'exercice E.A.121 (2) de l'appendice A) que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'espace projectif complexe de dimension n est l'espace des droites complexes de $\mathbb{C}^{n+1}$

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^* .$$

Raisonnons par récurrence sur n . D'après l'exercice E.A.121 (3) de l'appendice A, la droite projective $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_2$. Donc, par le corollaire 1.12, nous avons

$$\pi_1(\mathbb{P}_1(\mathbb{C})) = 0 .$$

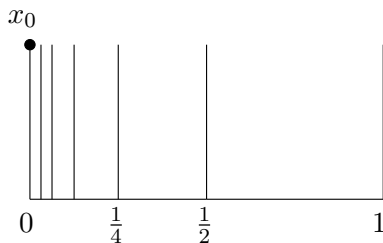
Supposons maintenant $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ simplement connexe. Si $f : \partial \mathbb{B}_{2n+2} = \mathbb{S}_{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est la projection canonique, alors le recollement ⁴ $\mathbb{B}_{2n+2} \cup_f \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ (voir l'exercice E.A.121 (6)). L'intérieur $\mathring{\mathbb{B}}_{2n+2}$ de $\mathbb{B}_{2n+2}$ est un ouvert U de $\mathbb{B}_{2n+2} \cup_f \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, par les propriétés des recollements données dans l'exemple (5) suivant l'exercice E.A.111. Le complémentaire de l'origine de $\mathbb{B}_{2n+2}$ est un ouvert V de $\mathbb{B}_{2n+2} \cup_f \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Remarquons que U est contractile, et que V se rétracte par déformation forte sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ (par la rétraction radiale de $\mathbb{B}_{2n+2} \setminus \{0\}$ sur son bord), donc est simplement connexe. De plus, l'ouvert $U \cap V$ est connexe par arcs, car la boule ouverte épointée $\mathring{\mathbb{B}}_{2n+2} \setminus \{0\}$ se rétracte par déformation forte (radialement) sur la sphère de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$, qui est homéomorphe à $\mathbb{S}_{2n+1}$, donc est connexe par arcs. La proposition 1.11 montre alors que $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ est simplement connexe. $\square$

1.3 Autres exercices

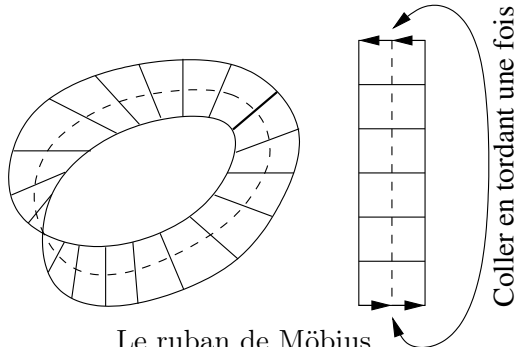
Exercice E.6. Dans cet exercice, nous appelons *peigne* le sous-espace topologique X de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$X = ([0, 1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{\alpha \in \{0\} \cup \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}} \{\alpha\} \times [0, 1] .$$

Montrer que le peigne est contractile. Soit $x_0 = (0, 1)$. Montrer que id_X est homotope à l'application constante en x_0 , mais n'est pas homotope à l'application constante en x_0 relativement à $\{x_0\}$.



Le peigne



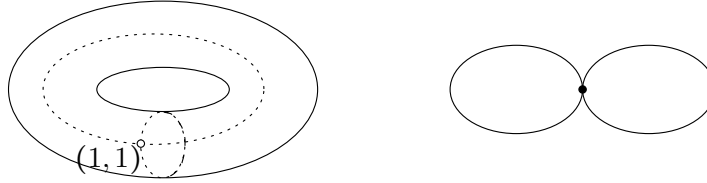
Le ruban de Möbius

4. Voir l'exemple (5) suivant l'exercice E.A.111 dans l'appendice A pour une définition.

Exercice E.7.

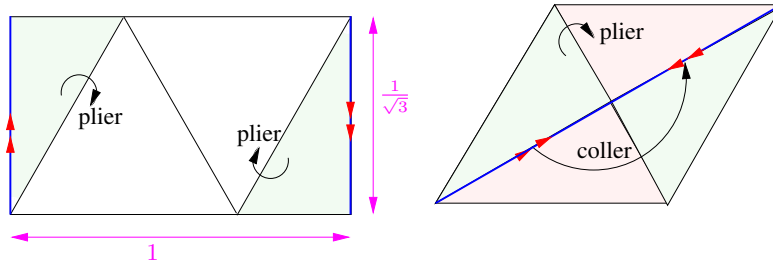
- (1) Montrer que l'espace topologique quotient $C = [0, 1] \times [0, 1] / \sim_C$, où $\sim_C$ est la relation d'équivalence engendrée par $(0, s) \sim_C (1, s)$ pour tout $s \in [0, 1]$, est homéomorphe au sous-espace topologique $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$ (appelé un *anneau*) de $\mathbb{C}$ et à l'espace topologique produit $\tilde{C} = \mathbb{S}_1 \times [0, 1]$ (appelé un *cylindre*). Montrer que cet anneau, ainsi que l'anneau ouvert $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$, ont le même type d'homotopie que le cercle $\mathbb{S}_1$.
- (2) Montrer que le *ruban de Möbius*⁵ $M = ([0, 1] \times [0, 1]) / \sim_M$, où $\sim_M$ est la relation d'équivalence engendrée par $(0, s) \sim_M (1, 1 - s)$ pour tout $s \in [0, 1]$, a le même type d'homotopie que le cercle $\mathbb{S}_1$. On pourra par exemple montrer que l'*âme du ruban de Möbius* $A_M = \pi([0, 1] \times \{\frac{1}{2}\})$, où $\pi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ est la projection canonique, est un rétracte par déformation forte de M .
- (3) Montrer qu'il existe un homéomorphisme local $\bar{f} : C \rightarrow M$ tel que tout point de M admette exactement deux antécédents (l'application $\bar{f}$ est un revêtement à deux feuillets, avec la terminologie de la partie 2).
- (4) En utilisant par exemple le théorème de Jordan disant que toute courbe fermée simple⁶ du plan euclidien le sépare en deux composantes connexes, montrer que C et M ne sont pas homéomorphes.

Exercice E.8. Montrer que le tore troué $(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1) \setminus \{(1, 1)\}$ a le même type d'homotopie que le bouquet⁷ de deux cercles $(\mathbb{S}_1, 1) \vee (\mathbb{S}_1, 1)$.



Exercice E.9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le plan euclidien, privé de n points, a le même type d'homotopie que le bouquet de n cercles (voir l'exemple (4) suivant l'exercice E.A.110 dans la partie A.2.6 de l'appendice A pour la définition d'un bouquet de cercles).

5. Nous renvoyons au superbe article (2023) “The Optimal Paper Möbius Band” de Richard Evan Schwartz (et à ses papiers et articles de presse reliés, disponibles sur la page oueb de l'auteur <https://www.math.brown.edu/reschwar/papers.html>), qui caractérise la hauteur maximale d'un rectangle de papier de longueur 1 permettant de fabriquer un ruban de Möbius en recollant ses extrémités.



6. c'est-à-dire l'image d'une application de $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{R}^2$ qui est un homéomorphisme sur son image

7. Voir l'exemple (4) suivant l'exercice E.A.110 dans la partie A.2.6 de l'appendice A pour la définition d'un bouquet de cercles.

Exercice E.10. Soit V un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$ (muni de sa topologie usuelle définie par n'importe laquelle de ses normes). Soit W un sous-espace vectoriel de dimension k avec $0 \leq k \leq n - 1$.

- (1) Montrer que $V \setminus W$ est connexe (donc connexe par arcs) si et seulement si $k \leq n - 2$.
- (2) Supposons maintenant que $n \geq 2$ et $k \leq n - 2$. Montrer que $V \setminus W$ a le même type d'homotopie que la sphère $\mathbb{S}_{n-k-1}$. En déduire le groupe fondamental de $V \setminus W$ en fonction de n et k .⁸

Exercice E.11. Soit G un groupe topologique, d'élément neutre e . Si $f, g : [0, 1] \rightarrow G$ sont deux lacets en e , nous notons $fg : [0, 1] \rightarrow G$ le lacet défini par $fg : t \mapsto f(t)g(t)$.

- (1) Montrer que les lacets $f \cdot g$ et fg sont homotopes (rel $\{0, 1\}$).
- (2) Montrer que $\pi_1(G, e)$ est abélien.

(En particulier avec les notations qui seront introduites dans la partie 2.3, les groupes $\pi_1(\mathbb{T}^n, 0)$, $\pi_1(\mathrm{SO}(n), e)$ et $\pi_1(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), e)$ sont abéliens.)

Exercice E.12. Rappelons tout d'abord le théorème de relèvement des applications et des homotopies à valeurs dans le cercle (voir le corollaire 2.28 pour une démonstration dans un cadre général).

- Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_1$ est une application continue, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(0) = e^{2i\pi t_0}$, il existe une application continue $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(t) = e^{2i\pi \tilde{f}(t)}$ pour tout $t \in [0, 1]$, appelée un *relèvement de f* , qui est unique si nous demandons de plus que $\tilde{f}(0) = t_0$.
- Si $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_1$ est une application continue, et si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue telle que $h(t, 0) = e^{2i\pi f(t)}$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors il existe une et une seule application continue $\tilde{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tilde{h}(t, 0) = f(t)$ et $h(t, s) = e^{2i\pi \tilde{h}(t, s)}$ pour tous les $t, s \in [0, 1]$.

- (1) Montrer que, pour tout élément x dans $\mathbb{S}_1$, l'application $\varphi_x : \pi_1(\mathbb{S}_1, x) \rightarrow \mathbb{Z}$, définie par $[\gamma] \mapsto \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$ où $\tilde{\gamma}$ est un relèvement du lacet γ défini ci-dessus, est un isomorphisme de groupes.

Si c est un chemin dans $\mathbb{S}_1$, d'origine x et d'extrémité y , et si $\phi_c : \pi_1(\mathbb{S}_1, y) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}_1, x)$ est l'isomorphisme de groupes défini dans la proposition 1.3, montrer que $\varphi_x \circ \phi_c = \varphi_y$.

Soient $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ une application continue et x un point de $\mathbb{S}_1$. Posons $y = f(x)$. La composition des morphismes de groupes

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_x^{-1}} \pi_1(\mathbb{S}_1, x) \xrightarrow{f_*} \pi_1(\mathbb{S}_1, y) \xrightarrow{\varphi_y} \mathbb{Z}$$

est un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. C'est donc la multiplication par un entier $n \in \mathbb{Z}$, qui ne dépend pas de x par ce qui précède. Nous le notons $\deg(f)$, et nous l'appelons le *degré* de f .

Dans ce qui suit, f et g sont des applications continues de $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{S}_1$.

- (2) Si f est une rotation, calculer $\deg(f)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer le degré de l'application $z \mapsto z^n$.

8. Si $k = n - 2$, on pourra utiliser l'exercice E.12 (1).

- (3) Montrer que $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$. En déduire que si f est un homéomorphisme, alors $\deg(f) \in \{\pm 1\}$.
- (4) Montrer que $\deg(f) = \deg(g)$ si et seulement si f et g sont homotopes. En déduire que $\deg(f) = 0$ si et seulement si f se prolonge continûment en une application continue $f' : \mathbb{B}_2 \rightarrow \mathbb{S}_1$.
- (5) Montrer qu'il n'existe pas de rétraction $\mathbb{B}_2 \rightarrow \mathbb{S}_1$.
- (6) Démontrer le théorème de d'Alembert : tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine complexe.
- (7) Soit $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ une application continue telle que $f(-x) = -f(x)$. Montrer que f est de degré impair.
- (8) Calculer le groupe fondamental du tore $\mathbb{T}^n$ de dimension n , du ruban de Möbius et des anneaux sphériques fermés $\{x \in \mathbb{R}^n : a \leq \|x\| \leq b\}$ et ouverts $\{x \in \mathbb{R}^n : a < \|x\| < b\}$ où $b > a > 0$.

Exercice E.13. (Théorème de Borsuk-Ulam en dimension 1 et 2)⁹ Le théorème de Borsuk-Ulam affirme que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute application continue $f : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$, il existe un point $x \in \mathbb{S}_n$ tel que $f(x) = f(-x)$.¹⁰

- (1) Montrez que ce théorème est vrai si $n = 1$.
- (2) Supposons par l'absurde qu'il existe une application continue $f : \mathbb{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que pour tout $x \in \mathbb{S}_2$ nous ayons $f(x) \neq f(-x)$
 - a) Montrez que le degré d'une application continue $\varphi : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ vérifiant $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}_1$ est impair.
 - b) Construire une application continue $g : \mathbb{S}_2 \rightarrow \mathbb{S}_1$ telle que pour tout $x \in \mathbb{S}_2$ nous ayons $g(-x) = -g(x)$.
 - c) Notons $\iota : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_2$ l'inclusion du cercle $\mathbb{S}_1$ comme équateur de la sphère $\mathbb{S}_2$. Montrez que ι est homotope à une application constante, alors que $g \circ \iota$ ne l'est pas. Conclure.

Exercice E.14.

- (1) Soient X un espace topologique et $CX = (X \times [0, 1]) / \{X \times \{1\}\}$ le cône sur X (voir l'exemple (1) suivant l'exercice E.A.110 dans la partie A.2.6 de l'appendice A). Nous notons $[x, t]$ la classe dans CX de l'élément (x, t) de $X \times [0, 1]$. Montrer que CX est contractile, et que si $x_0 = [x, 1]$ (pour tout x dans X) est le sommet de ce cône, alors $CX \setminus \{x_0\}$ se rétracte par déformation forte sur X (identifié par $x \mapsto [x, 0]$ avec une partie fermée de CX).
- (2) Si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, nous appelons *cône* de f , et nous notons $C(f)$ l'espace topologique obtenu par recollement (voir l'exemple (5) suivant l'exercice E.A.111 dans la partie A.2.6 de l'appendice A pour la définition d'un recollement) du cône CX de X sur Y par l'application f (comme ci-dessus, X est identifié à une partie fermée de CX) :

$$C(f) = CX \cup_f Y.$$

Nous notons encore x_0 l'image de $x_0 \in CX$ dans $C(f)$.

Montrer que $C(f) \setminus \{x_0\}$ se rétracte par déformation forte sur Y .

9. Voir l'exercice E.72 en dimension quelconque.

10. En particulier avec $n = 2$, ce résultat montre que sur la surface terrestre, il existe deux points antipodaux qui sont à la même altitude et ont la même température, ainsi que deux points antipodaux qui ont la même pression atmosphérique et la même température.

- (3) Soient X un espace topologique et $SX = (X \times [-1, 1])/\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x, 1) \sim (x', 1)$ et $(x, -1) \sim (x', -1)$ pour tous x, x' dans X , la suspension de X (voir l'exemple (2) suivant l'exercice E.A.110 dans la partie A.2.6 de l'appendice A). Montrer que si X est connexe par arcs, alors SX est simplement connexe. Donner un contre-exemple si l'hypothèse n'est pas vérifiée.

1.4 Indications pour la résolution des exercices

Correction de l'exercice E.1. Puisque les applications f_i et f_j coïncident sur $F_i \cap F_j$ pour tous les $i, j \in I$, il existe une et une seule application $f : X \rightarrow Y$ égale à f_i sur F_i pour tout $i \in I$. Montrons qu'elle est continue. Soit F un fermé de Y . Puisque la famille $(F_i)_{i \in I}$ recouvre X , nous avons

$$f^{-1}(Y) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(Y) \cap F_i = \bigcup_{i \in I} (f_i)^{-1}(Y).$$

Comme l'application f_i est continue, l'image réciproque $(f_i)^{-1}(Y)$ est un fermé de F_i , donc un fermé de X puisque F_i est fermé dans X . Donc $f^{-1}(Y)$ est fermé comme union finie (car I est finie) de fermés.

Correction de l'exercice E.2. Soient X un espace topologique contractile, $x_0 \in X$, et $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow X$ une application continue. Montrons que f s'étend en une application continue $\tilde{f} : \mathbb{B}_2 \rightarrow X$. Puisque X est contractile, il existe une homotopie $h : X \times [0, 1] \rightarrow X$ entre l'application identique de X et l'application constante de valeur x_0 . Pour tout $s \in [0, 1]$, notons $h_s : x \mapsto h(x, s)$. Considérons l'application $\tilde{f} : \mathbb{B}_2 \rightarrow X$ définie par $\tilde{f}(0) = x_0$ et $\tilde{f}(\rho e^{i\theta}) = h(f(e^{i\theta}), 1 - \rho)$ pour tous les $\rho \in]0, 1]$. Alors l'application $\tilde{f}$ coïncide avec f sur $\mathbb{S}_1$ car $h_0 = \text{id}_X$. Elle est continue sur $\mathbb{B}_2 \setminus \{0\}$ par composition d'applications continues. Elle est aussi continue en 0, car h_1 est l'application constante de valeur x_0 et puisque les applications f et h sont continues. Donc X est simplement connexe.

Correction de l'exercice E.3. Pour tout $i \in I$, notons $p_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ la i -ème projection canonique, définie par $(y_i)_{i \in I} \mapsto y_i$. Elle est continue par la définition de la topologie produit (voir la partie A.2.4 de l'appendice A). Donc l'application induite

$$(p_i)_* : \pi_1\left(\prod_{i \in I} X_i, (x_i)_{i \in I}\right) \rightarrow \pi_1(X_i, x_i)$$

est un morphisme de groupes. L'application

$$\phi = \prod_{i \in I} (p_i)_* : \pi_1\left(\prod_{i \in I} X_i, (x_i)_{i \in I}\right) \rightarrow \prod_{i \in I} \pi_1(X_i, x_i)$$

définie par $[\alpha] \mapsto ((p_i)_*([\alpha]))_{i \in I}$ est donc un morphisme de groupes.

Par les propriétés de la topologie produit, si $\gamma_i, \gamma'_i : [0, 1] \rightarrow X_i$ sont des lacets en x_i pour tout $i \in I$, alors l'application $\prod_{i \in I} \gamma_i : [0, 1] \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ définie par $t \mapsto (\gamma_i(t))_{i \in I}$ est un lacet en $(x_i)_{i \in I}$. Elle vérifie $(\prod_{i \in I} \gamma_i) \cdot (\prod_{i \in I} \gamma'_i) = \prod_{i \in I} (\gamma_i \cdot \gamma'_i)$ en regardant composante par composante. Donc l'application $\psi : ([\gamma_i])_{i \in I} \mapsto [\prod_{i \in I} \gamma_i]$ de $\prod_{i \in I} \pi_1(X_i, x_i)$ dans $\pi_1(\prod_{i \in I} X_i, (x_i)_{i \in I})$ est un morphisme de groupes. Il est élémentaire de vérifier que ϕ et ψ sont inverses l'un de l'autre.

Correction de l'exercice E.5. L'équivalence entre les assertions (1) et (2) découle de la proposition 1.10. Comme X est connexe par arcs, l'équivalence entre les assertions (2) et (3) découle du corollaire 1.4.

Si l'assertion (4) est vérifiée, alors en particulier tout lacet est homotope au lacet constant en son point base, donc l'assertion (3) est vérifiée. Si l'assertion (1) est vérifiée, si α et β sont deux chemins de même origine et de même extrémité, alors l'application f du cercle $\mathbb{S}_1$ dans X définie par $f(e^{2i\pi t}) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2-2t) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ est continue par l'exercice E.1, donc s'étend continuellement en une application $g : \mathbb{B}_2 \rightarrow X$ par l'assertion (1). L'application $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ définie par

$$h(t, s) = g((1-s)e^{2i\pi t} + se^{-2i\pi t})$$

(obtenue en postcomposant par g l'homotopie affine le long des segments verticaux dans $\mathbb{B}_2$ entre le demi-cercle supérieur et le demi-cercle inférieur de $\mathbb{S}_1$), est alors une homotopie relative entre α et β .

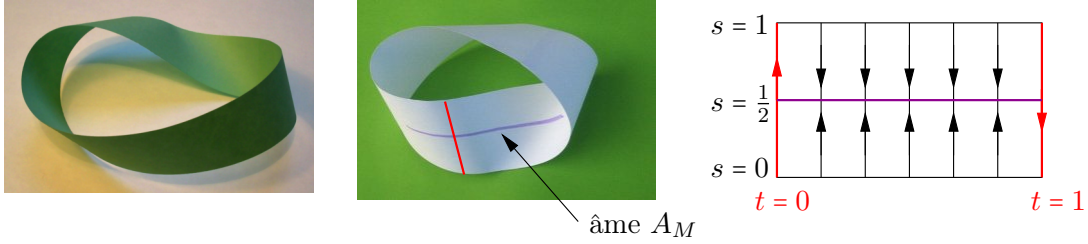
Correction de l'exercice E.6. Le peigne X se rétracte par déformation forte sur son segment horizontal $[0, 1] \times \{0\}$ par l'homotopie affine le long de ses segments verticaux. Ce segment horizontal se rétracte par déformation forte sur son origine $x'_0 = (0, 0)$ par l'homotopie affine $h : (t, s) \mapsto (t(1-s), 0)$ le long de lui-même. Enfin, les applications constantes sur X de valeurs x'_0 et x_0 (qui sont tous les deux des points de X) sont homotopes, par l'homotopie affine le long du segment vertical $\{0\} \times [0, 1]$ entre x'_0 et x_0 . Par composition des homotopies, ceci montre que X est contractile et que id_X est homotope à l'application constante en x_0 .

Supposons par l'absurde qu'il existe une homotopie $h : X \times [0, 1] \rightarrow X$ relative à $\{x_0\}$ entre id_X et l'application constante en x_0 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $y_n = (2^{-n}, 1)$. L'application $s \mapsto h(y_n, s)$ est un chemin continu de y_n à x_0 . Puisque x_0 et y_n sont dans des composantes connexes par arcs différentes de $X \setminus \{x'_0\}$, il existe un temps $s_n \in [0, 1]$ tel que $h(y_n, s_n) = x'_0$. Quitte à extraire, nous pouvons supposer que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $s \in [0, 1]$. Par la continuité de h , puisque la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x_0 dans X , et puisque l'homotopie h est relative à $\{x_0\}$, nous avons donc $x_0 = h(x_0, s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(y_n, s_n) = x'_0$. Ceci contredit le fait que $x'_0 \neq x_0$.

Correction de l'exercice E.7. (1) L'application $(e^{2i\pi\theta}, s) \mapsto (1+s)e^{2i\pi\theta}$ est une bijection continue entre les espaces compacts $\widehat{C}$ et A , donc un homéomorphisme.

Notons $\pi_C : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow C = ([0, 1] \times [0, 1]) / \sim_C$ la projection canonique. L'application $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \widehat{C}$ définie par $(t, s) \mapsto (e^{2i\pi t}, s)$ est continue. Elle vérifie $(t, s) \sim_C (t', s')$ si et seulement si $f(t, s) = f(t', s')$. Elle passe donc au quotient en une bijection $\bar{f}$ continue de C dans $\widehat{C}$. De plus, par l'exercice E.A.107 (2) de l'appendice A, l'espace quotient C est séparé, donc compact car π_C est continue et $[0, 1] \times [0, 1]$ compact. Comme une bijection continue entre espaces compacts est un homéomorphisme (voir le théorème A.23 de l'appendice A), l'application $\bar{f}$ est un homéomorphisme.

Puisque les intervalles $[0, 1]$ et $]0, 1[$ sont contractiles et par l'exemple (2) juste avant la partie 1.2, l'espace $\widehat{C}$ (ainsi que tout espace qui lui est homéomorphe), et l'anneau ouvert $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ (qui est homéomorphe à $\mathbb{S}_1 \times]0, 1[$ par restriction) ont le même type d'homotopie que le cercle $\mathbb{S}_1$.



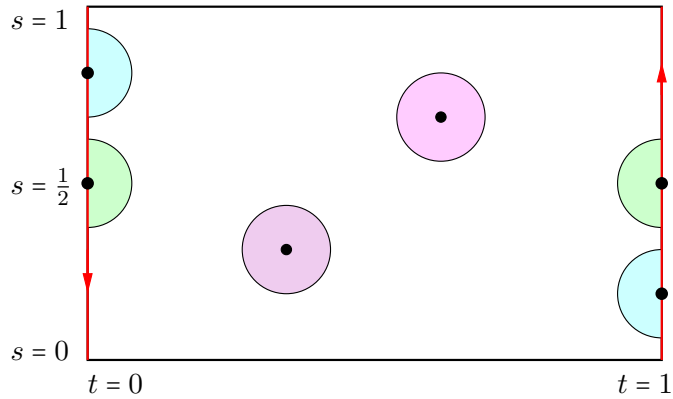
(2) L'application $h : ([0, 1] \times [0, 1]) \times [0, 1] \rightarrow ([0, 1] \times [0, 1])$ définie par

$$((t, s), u) \mapsto (t, (1 - u)s + \frac{u}{2})$$

est continue. Puisque $(1 - u)(1 - s) + \frac{u}{2} = 1 - ((1 - u)s + \frac{u}{2})$, elle passe au quotient en une application continue $\bar{h} : M \times [0, 1] \rightarrow M$, qui est une homotopie relative à A_M entre l'identité de M et une rétraction de M sur A_M . Donc le ruban de Möbius et son âme (qui est homéomorphe au cercle comme déjà vu pour montrer que le quotient d'un intervalle fermé par l'identification de ses extrémités est homéomorphe au cercle) ont le même type d'homotopie. Puisque la relation « avoir même type d'homotopie » est une relation d'équivalence, les espaces C et M ont le même type d'homotopie.

(3) Notons $\pi_M : ([0, 1] \times [0, 1]) \rightarrow M = ([0, 1] \times [0, 1]) / \sim_M$ la projection canonique.

En considérant de manière séparée les cas où $t, t' \in \{0, 1\}$ et $t, t' \notin \{0, 1\}$, il est élémentaire de montrer que deux points (t, s) et (t', s) de $[0, 1] \times [0, 1]$, qui ne sont pas équivalents par $\sim_M$, ont des voisinages saturés disjoints, voir la figure ci-contre.



Donc par la proposition A.4 de l'appendice A, l'espace M est séparé. Il est donc compact car c'est l'image par l'application continue π_M du compact $[0, 1] \times [0, 1]$. L'application

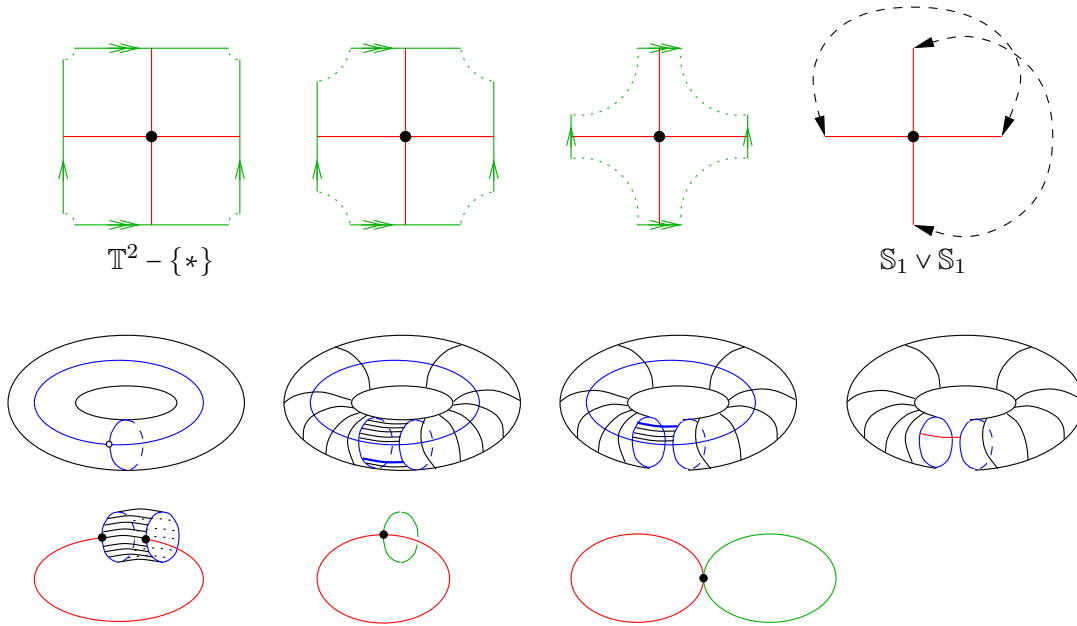
$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ définie par $(t, s) \mapsto \begin{cases} \pi_M(2t, s) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \pi_M(2t - 1, 1 - s) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ est bien définie en

$t = \frac{1}{2}$, car $\pi_M(1, s) = \pi_M(0, 1 - s)$. Elle est continue par l'exercice E.1 appliqué aux fermés $F_1 = ([0, \frac{1}{2}] \times [0, 1])$ et $F_2 = ([\frac{1}{2}, 1] \times [0, 1])$. De nouveau puisque $\pi_M(1, s) = \pi_M(0, 1 - s)$, elle passe au quotient en une application $\bar{f} : C \rightarrow M$, dont les préimages ont exactement deux points, et qui est continue par les propriétés du passage au quotient. De plus, en restriction à l'image par π_C du rectangle vertical $([t - \epsilon, t + \epsilon] \cap [0, 1]) \times [0, 1]$ pour tous les $t \in]0, 1[$ et $\epsilon \in]0, \frac{1}{10}]$, ainsi qu'à l'image par π_C de $([0, \frac{1}{10}] \cup [\frac{1}{10}, 1]) \times [0, 1]$, l'application $\bar{f}$ est une bijection continue entre deux compacts, donc un homéomorphisme.

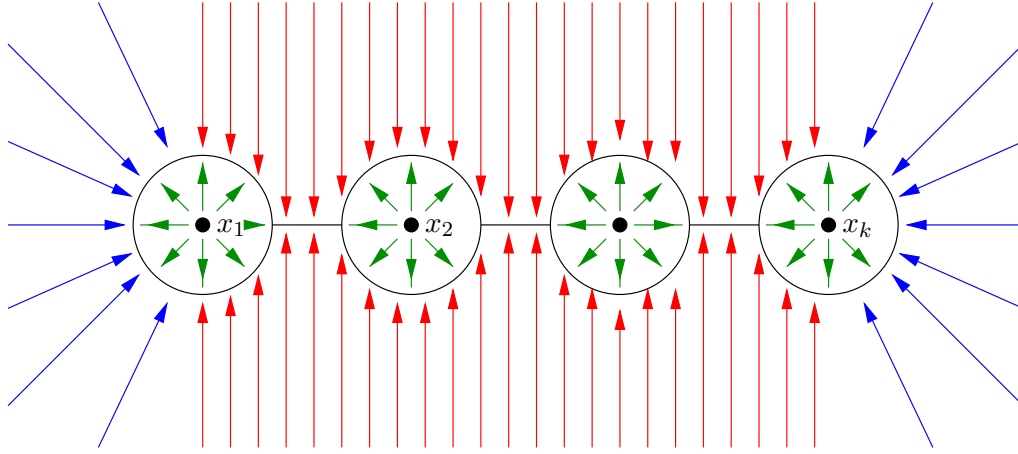
(4) Supposons par l'absurde qu'il existe un homéomorphisme f du ruban de Möbius M dans l'anneau C . Notons que M privé de son âme A_M se rétracte par déformation forte sur son bord, qui est homéomorphe à un cercle, donc M privé de A_M est connexe. Mais

alors $f(A_M)$ est une courbe fermée simple dans l'anneau A qui ne sépare pas l'anneau, et comme tout point du plan est joignable par un chemin (radialement par exemple) à l'une des deux composantes de bord de A , l'image $f(A_M)$ est une courbe fermée simple dans le plan qui ne sépare pas le plan, ce qui contredit le théorème de Jordan.

Correction de l'exercice E.8. Les deux séries de respectivement 4 et 7 dessins ci-dessous montrent que le tore troué se rétracte par déformation forte sur un sous-espace homéomorphe à un bouquet de deux cercles, ce qui implique le résultat. La première série voit le tore (à homéomorphisme près) comme l'espace topologique quotient du carré $[0, 1]$ par l'identification par translation des côtés opposés. La seconde série voit le tore (à homéomorphisme près) comme le tore de révolution autour de l'axe de coordonnée vertical d'un cercle vertical disjoint de cet axe de coordonnée.



Correction de l'exercice E.9. Nous avons déjà vu le résultat si $n = 1$ (voir l'exemple (1) juste avant la partie 1.2). Nous supposons donc $n \geq 2$. Le groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}^2$ agit transitivement sur les n -uplets de points deux à deux distincts (voir par exemple la proposition 5.17, démontrée dans la partie 6.3.2). Nous pouvons donc supposer que les n points considérés sont les $x_k = (3k, 0)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Notons $S(x, r)$ le cercle dans $\mathbb{R}^2$ de centre $x \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$. Notons $X = \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} [3k+1, 3k+2] \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^n S(3k, 1) \right)$. Alors X est un espace topologique ayant le même type d'homotopie qu'un bouquet de n cercles, en écrasant en un point la réunion contractile des intervalles $[3k+1, 3k+2]$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et des demi-cercles supérieurs fermés des cercles $S(3k, 1)$ pour $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ (avec la convention usuelle de l'ensemble vide si $n = 2$). De plus, le plan euclidien privé des points x_k pour $1 \leq k \leq n$ se rétracte par déformation forte sur X , en considérant la rétraction radiale sur son bord sur chaque disque de centre x_k et de rayon 1, la rétraction le long des verticales pour tout point de $[3, 3n] \times \mathbb{R}$, la rétraction le long des rayons partant de $(3, 0)$ d'angle en ce point dans $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ modulo 2π , ainsi que la rétraction le long des rayons partant de $(3n, 0)$ d'angle en ce point dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ modulo 2π .



Correction de l'exercice E.10. (1) En prenant des bases et puisque les bijections linéaires sont des homéomorphismes, nous pouvons supposer que $V = \mathbb{R}^n$ et $W = \mathbb{R}^k \times \{0\}$. Pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'ouvert $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ de $\mathbb{R}^m$ est connexe (donc connexe par arcs) si et seulement si $m \geq 2$. Donc l'ouvert $V \setminus W = \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^{n-k} \setminus \{0\})$ est connexe (donc connexe par arcs) si et seulement si $k \leq n - 2$.

(2) Puisque $\mathbb{R}^k$ est contractile, puisque $\mathbb{R}^{n-k} \setminus \{0\}$ a le même type d'homotopie que la sphère $\mathbb{S}_{n-k-1}$ par rétraction radiale (voir l'exemple (1) avant la partie 1.2) et comme le produit préserve les équivalences d'homotopie (voir l'exemple (2) avant la partie 1.2), l'espace $V \setminus W$ a le même type d'homotopie que la sphère $\mathbb{S}_{n-k-1}$. Puisque $\mathbb{S}_{n-k-1}$ est simplement connexe si $n - k - 1 \geq 2$, le groupe fondamental de $V \setminus W$ est donc trivial si $k \leq n - 3$. Si $k = n - 2$, alors le groupe fondamental de $V \setminus W$ est isomorphe à celui du cercle $\mathbb{S}_1$, qui est isomorphe à $\mathbb{Z}$ (comme vu par exemple dans l'exercice E.12 (1)).

Correction de l'exercice E.11. (1) Notons c_e le lacet constant en l'élément neutre e dans G . Comme vu dans la démonstration du lemme 1.1 (4), les lacets $f \cdot c_e$ et f sont homotopes, par l'homotopie $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$ définie par

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} f\left(\frac{2t}{s+1}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ e & \text{si } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

De la même manière, les lacets f et $c_e \cdot f$ sont homotopes.

Par multiplication point par point des homotopies, si f et f' sont des lacets en e homotopes, et si g et g' sont des lacets en e homotopes, alors les lacets fg et $f'g'$ sont homotopes.

Le résultat découle donc du fait que $(f \cdot c_e)(c_e \cdot g) = f \cdot g$.

(2) L'application $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$ définie par

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ f(s)g(2t-s) & \text{si } \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ f(2t-1) & \text{si } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est continue par l'exercice E.1. Pour tout $t \in [0, 1]$, nous avons $h(t, 0) = (g \cdot f)(t)$ et de plus $h(t, 1) = (f \cdot g)(t)$. Donc les lacets $g \cdot f$ et $f \cdot g$ sont homotopes, et

$$[g][f] = [g \cdot f] = [f \cdot g] = [g][f].$$

Ceci montre que $\pi_1(G, e)$ est abélien.

Correction de l'exercice E.12. Nous noterons $\mathbf{p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1$ l'application continue définie par $t \mapsto e^{2i\pi t}$. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, la fibre $\mathbf{p}^{-1}(\mathbf{p}(s))$ de $\mathbf{p}$ au-dessus de s est l'orbite $s + \mathbb{Z}$ de s par les translations entières dans $\mathbb{R}$.

(1) Montrons tout d'abord que l'application φ_x est bien définie.

Elle est bien à valeurs entières, car la différence de deux points d'une même fibre de $\mathbf{p}$ est entière.

Elle ne dépend pas du choix des relèvements. En effet, soient $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\tilde{\gamma}}$ deux relèvements d'un lacet γ en x . Puisque la différence de deux points d'une même fibre de $\mathbf{p}$ est entière, l'application $t \mapsto \tilde{\tilde{\gamma}}(t) - \tilde{\gamma}(t)$ est continue et à valeurs dans l'espace discret $\mathbb{Z}$, donc constante. En particulier $\tilde{\tilde{\gamma}}(1) - \tilde{\gamma}(1) = \tilde{\tilde{\gamma}}(0) - \tilde{\gamma}(0)$ et $\tilde{\tilde{\gamma}}(1) - \tilde{\tilde{\gamma}}(0) = \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$.

Elle ne dépend pas du choix d'un lacet γ représentant une classe d'homotopie donnée $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{S}_1, x)$. En effet, soient γ et γ' des lacets en x homotopes. Soient $\tilde{\gamma}$ un relèvement de γ et $\tilde{\gamma}'$ l'unique relèvement de γ' tel que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}'(0)$ (ce qui est possible car $\gamma(0) = \gamma'(0)$). Soient h une homotopie de γ à γ' et $\tilde{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ l'unique relèvement de l'homotopie h telle que $\tilde{h}(t, 0) = \tilde{\gamma}(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Alors le chemin $t \mapsto \tilde{h}(t, 1)$ est un relèvement de γ' d'origine $\tilde{\gamma}'(0)$, donc est égal à $\tilde{\gamma}'$ par unicité. Puisque l'application $s \mapsto h(1, s)$ est constante et comme tout relèvement de chemin constant est constant, nous obtenons donc que $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$. Par conséquent $\tilde{\gamma}'(1) - \tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$.

Montrons que si γ et γ' sont des lacets en x tels que $\varphi_x([\gamma']) = \varphi_x([\gamma])$, alors γ et γ' sont homotopes. Ceci montrera l'injectivité de φ_x . Soient $\tilde{\gamma}$ un relèvement de γ et $\tilde{\gamma}'$ un relèvement de γ' tels que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}'(0)$. Puisque $\varphi_x([\gamma']) = \varphi_x([\gamma])$, nous avons donc $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$. Les deux chemins $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}'$ dans $\mathbb{R}$ ont donc même origine et même extrémité. Puisque $\mathbb{R}$ est simplement connexe (voir l'exercice E.5, mais ici il suffit de considérer l'application $(t, s) \mapsto s\tilde{\gamma}(t) + (1-s)\tilde{\gamma}'(t)$, qui est clairement une homotopie (relativement aux extrémités) entre les chemins $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}'$), ils sont homotopes. Puisque $\mathbf{p}$ est continue, les lacets $\gamma = \mathbf{p} \circ \tilde{\gamma}$ et $\gamma' = \mathbf{p} \circ \tilde{\gamma}'$ sont homotopes. Donc φ_x est injectif.

Montrons que φ_x est surjectif. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'application $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_1$ définie par $t \mapsto xe^{2i\pi kt}$ est un lacet en x dans $\mathbb{S}_1$. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{p}(s) = x$, l'application $\tilde{\gamma}_k : t \mapsto s + kt$ est un relèvement de γ_k , donc $\varphi_x([\gamma_k]) = \tilde{\gamma}_k(1) - \tilde{\gamma}_k(0) = k$. Par conséquent φ_x est surjectif.

Montrons que φ_x est un morphisme de groupes. Pour tous les lacets γ et γ' en x dans $\mathbb{S}_1$, soient $\tilde{\gamma}$ un relèvement de γ et $\tilde{\tilde{\gamma}}'$ l'unique relèvement du chemin inverse $\overline{\gamma'}$ tel que

$$\tilde{\tilde{\gamma}}'(0) = \tilde{\gamma}(1)$$

(ce qui est possible car $\mathbf{p}(\tilde{\gamma}(1)) = x = \mathbf{p}(\tilde{\tilde{\gamma}}'(0))$). Notons que $\tilde{\tilde{\gamma}}'$ est un relèvement de γ' , donc

$$\tilde{\tilde{\gamma}}'(0) - \tilde{\tilde{\gamma}}'(1) = \tilde{\tilde{\gamma}}'(1) - \tilde{\tilde{\gamma}}'(0) = \varphi_x([\gamma']) .$$

Alors par l'exercice E.1, la concaténation $\tilde{\gamma} \cdot \tilde{\tilde{\gamma}}'$ des chemins concaténables $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\tilde{\gamma}}'$ est un relèvement de la concaténation $\gamma \cdot \overline{\gamma'}$. Donc

$$\begin{aligned} \varphi_x([\gamma][\gamma']^{-1}) &= \varphi_x([\gamma \cdot \overline{\gamma'}]) = \tilde{\gamma} \cdot \tilde{\tilde{\gamma}}'(1) - \tilde{\gamma} \cdot \tilde{\tilde{\gamma}}'(0) = \tilde{\tilde{\gamma}}'(1) - \tilde{\gamma}(0) \\ &= \tilde{\tilde{\gamma}}'(1) - \tilde{\tilde{\gamma}}'(0) + \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = (\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)) - (\tilde{\tilde{\gamma}}'(0) - \tilde{\tilde{\gamma}}'(1)) \\ &= \varphi_x([\gamma]) - \varphi_x([\gamma']) , \end{aligned}$$

ce qui montre que φ_x est un morphisme de groupes.

Enfin, soient $y \in \mathbb{S}_1$, γ un lacet en y dans $\mathbb{S}_1$ et c un chemin dans $\mathbb{S}_1$, d'origine x et d'extrémité y . Notons $\tilde{\gamma}$ un relèvement de γ , $\tilde{c}$ le relèvement de c tel que $\tilde{c}(1) = \tilde{\gamma}(0)$ et $\tilde{\bar{c}}$ le relèvement de $\bar{c}$ tel que $\tilde{\bar{c}}(0) = \tilde{\gamma}(1)$. Notons que $\tilde{\bar{c}}$ est aussi un relevé de c , donc

$$-(\tilde{\bar{c}}(1) - \tilde{\bar{c}}(0)) = \tilde{c}(1) - \tilde{c}(0) .$$

Alors le chemin concaténé $(\tilde{c} \cdot \tilde{\gamma}) \cdot \tilde{\bar{c}}$ est un relèvement du lacet $(c \cdot \gamma) \cdot \bar{c}$ en x . Donc

$$\begin{aligned} \varphi_x \circ \phi_c([\gamma]) &= \varphi_x([(c \cdot \gamma) \cdot \bar{c}]) = (\tilde{c} \cdot \tilde{\gamma}) \cdot \tilde{\bar{c}}(1) - (\tilde{c} \cdot \tilde{\gamma}) \cdot \tilde{\bar{c}}(0) = \tilde{\bar{c}}(1) - \tilde{c}(0) \\ &= \tilde{\bar{c}}(1) - \tilde{c}(0) + \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) + \tilde{c}(1) - \tilde{c}(0) = \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = \varphi_y([\gamma]) . \end{aligned}$$

(2) Montrons que le degré d'une application continue $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ ne dépend pas du choix du point base x de $\mathbb{S}_1$. En effet, soient $x' \in \mathbb{S}_1$ et $y' = f(x')$, et soit c un chemin de x à x' dans $\mathbb{S}_1$. Nous avons un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi_x^{-1}} & \pi_1(\mathbb{S}_1, x) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(\mathbb{S}_1, y) & \xrightarrow{\varphi_y} & \mathbb{Z} \\ \text{id} \uparrow & & \uparrow \phi_c & & \uparrow \phi_{f \circ c} & & \uparrow \text{id} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi_{x'}^{-1}} & \pi_1(\mathbb{S}_1, x') & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(\mathbb{S}_1, y') & \xrightarrow{\varphi_{y'}} & \mathbb{Z} \end{array}$$

dont le carré de droite et le carré de gauche commutent par dernière affirmation de la question (1).

Montrons que le carré du milieu commute, ce qui montrera que la composition des applications de la ligne du bas coïncide avec la composition des applications de la ligne du haut, donc que le degré ne dépend pas du choix du point base.

En effet, pour tout lacet γ en x' , nous avons

$$\begin{aligned} f_* \circ \phi_c([\gamma]) &= f_*([c \cdot \gamma \cdot \bar{c}]) = [f \circ (c \cdot \gamma \cdot \bar{c})] = [(f \circ c) \cdot (f \circ \gamma) \cdot (f \circ \bar{c})] \\ &= \phi_{f \circ c}([f \circ \gamma]) = \phi_{f \circ c} \circ f_*([\gamma]) . \end{aligned}$$

L'application $\gamma : t \mapsto e^{2i\pi t}$ définie sur $[0, 1]$ est un lacet en 1 dont un relèvement est $t \mapsto t$, donc vérifiant $\varphi_1([\gamma]) = 1$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, si $f : z \mapsto e^{2i\pi\theta}z$ est la rotation d'angle $2\pi\theta$ modulo 2π , alors $f \circ \gamma$ est le lacet $t \mapsto e^{2i\pi(t+\theta)}$ en $e^{2i\pi\theta}$, dont un relevé est $\alpha : t \mapsto t + \theta$. Donc par la définition du degré, nous avons

$$\deg f = \varphi_{e^{2i\pi\theta}} \circ f_* \circ (\varphi_1)^{-1}(1) = \varphi_{e^{2i\pi\theta}} \circ f_*([\gamma]) = \varphi_{e^{2i\pi\theta}}([f \circ \gamma]) = \alpha(1) - \alpha(0) = 1 .$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si $g : z \mapsto z^n$, alors $g \circ \gamma$ est le lacet $t \mapsto e^{2i\pi nt}$ en 1, dont un relevé est $\beta : t \mapsto nt$. Donc

$$\deg g = \beta(1) - \beta(0) = n .$$

(3) Soient $f, g : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ deux applications continues et $x \in \mathbb{S}_1$. Notons $y = g(x)$ et $z = f(y)$, de sorte que $f \circ g(x) = z$. Alors par la définition du degré, nous avons

$$\begin{aligned} \deg(f \circ g) &= \varphi_z \circ (f \circ g)_* \circ (\varphi_x)^{-1}(1) = \varphi_z \circ f_* \circ g_* \circ (\varphi_x)^{-1}(1) \\ &= \varphi_z \circ f_* \circ \varphi_y^{-1}(\varphi_y \circ g_* \circ (\varphi_x)^{-1}(1)) = \varphi_z \circ f_* \circ \varphi_y^{-1}(\deg g) = (\deg f)(\deg g) . \end{aligned}$$

Si f est un homéomorphisme, puisque $\deg(\text{id}) = 1$ (par exemple parce que $\text{id}_* = \text{id}$), il découle de la propriété de multiplicativité ci-dessus que $\deg f$ est un entier inversible, donc $\deg f \in \{\pm 1\}$.

(4) Supposons que f et g soient deux applications homotopes du cercle dans le cercle. Soit $x \in \mathbb{S}_1$, posons $y = f(x)$ et $z = g(x)$. Soit h une homotopie entre f et g , posons $c : s \mapsto h(x, s)$, qui est un chemin entre $h(x, 0) = f(x) = y$ et $h(x, 1) = g(x) = z$. Par la proposition 1.6 et par la dernière assertion de la question (1), le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi_x^{-1}} & \pi_1(\mathbb{S}_1, x) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(\mathbb{S}_1, y) & \xrightarrow{\varphi_y} & \mathbb{Z} \\ \text{id} \uparrow & & \uparrow \text{id} & & \uparrow \phi_c & & \uparrow \text{id} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi_x^{-1}} & \pi_1(\mathbb{S}_1, x) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(\mathbb{S}_1, z) & \xrightarrow{\varphi_z} & \mathbb{Z} \end{array} .$$

Donc les compositions des applications de la ligne du haut et de celles du bas sont égales, et $\deg f = \deg g$.

Réciproquement, supposons que nous ayons $\deg f = \deg g$. Soit $\gamma : t \mapsto e^{2i\pi t}$, qui est un lacet en 1 dans $\mathbb{S}_1$. Alors $f \circ \gamma$ et $g \circ \gamma$ sont des lacets en $y = f(1)$ et $z = g(1)$ respectivement. Soient $\widetilde{f \circ \gamma}$ et $\widetilde{g \circ \gamma}$ des relèvements de $f \circ \gamma$ et $g \circ \gamma$. Puisque $\deg f = \deg g$, nous avons

$$\widetilde{f \circ \gamma}(1) - \widetilde{f \circ \gamma}(0) = \widetilde{g \circ \gamma}(1) - \widetilde{g \circ \gamma}(0)$$

par la définition du degré. Considérons l'application continue $h' : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_1$ définie par $(t, s) \mapsto \mathbf{p}((1-s)\widetilde{f \circ \gamma}(t) + s\widetilde{g \circ \gamma}(t))$. Par la formule centrée ci-dessus et puisque $f \circ \gamma(1) = f(1) = f \circ \gamma(0) = e^{2\pi i \widetilde{f \circ \gamma}(0)}$, nous avons $h'(1, s) = h'(0, s)$ pour tout $s \in [0, 1]$. Donc l'application continue h' induit une application continue $h : \mathbb{S}_1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_1$ telle que $h(\gamma(t), s) = h(e^{2i\pi t}, s) = h'(t, s)$ pour tous les éléments $t, s \in [0, 1]$. De plus, nous avons

$$h(z, 0) = h(\gamma(1), 0) = h'(1, 0) = \mathbf{p}(\widetilde{f \circ \gamma}(1)) = f(\gamma(1)) = f(z)$$

et de même $h(z, 1) = g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{S}_1$, par définition des relèvements $\widetilde{f \circ \gamma}$ et $\widetilde{g \circ \gamma}$. Donc f et g sont homotopes.

Il découle de cette équivalence, et du fait qu'une application constante est de degré 0, que $\deg f = 0$ si et seulement si f est homotope à une application constante.

Soit $h : \mathbb{S}_1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_1$ une homotopie entre l'application constante en $x_0 \in \mathbb{S}_1$ et l'application f . Alors l'application $f' : \mathbb{B}_2 \rightarrow \mathbb{S}_1$ définie par $f'(z) = h(\frac{z}{|z|}, |z|)$ si $z \neq 0$ et $f'(0) = x_0$ est continue, puisque h est continue et $h(z', s)$ tend vers x_0 quand s tend vers 0 uniformément en $z' \in \mathbb{S}_1$. De plus, f' coïncide avec f sur le bord de $\mathbb{B}_2$.

Réciproquement, s'il existe une extension continue $f' : \mathbb{B}_2 \rightarrow \mathbb{S}_1$ de f , alors l'application $h : (z, s) \mapsto f'(sz)$ est une homotopie entre l'application constante en $f(0) \in \mathbb{S}_1$ et l'application f .

(5) Supposons par l'absurde qu'il existe une rétraction $r : \mathbb{B}_2 \rightarrow \mathbb{S}_1$, et notons $i : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$ l'inclusion, de sorte que $r \circ i = \text{id}_{\mathbb{S}_1}$. Alors par la fonctorialité du groupe fondamental (voir la partie 1.2.4), en utilisant 1 comme point base de $\mathbb{S}_1$, nous avons $r_* \circ i_* = \text{id}_{\pi_1(\mathbb{S}_1, 1)}$. Donc le morphisme de groupes $i_* : \pi_1(\mathbb{S}_1, 1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{B}_2, 1)$ est injectif. Or son groupe de départ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et son groupe d'arrivée est trivial, ce qui est une contradiction.

(6) Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme complexe P non constant et sans racine complexe. En particulier P ne s'annule pas sur le cercle $\mathbb{S}_1$, et l'application $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ définie par $z \mapsto \frac{P(z)}{|P(z)|}$ est continue.

Encore puisque P ne s'annule pas, l'application continue $h : \mathbb{S}_1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_1$ définie par $(z, s) \mapsto \frac{P((1-s)z)}{|P((1-s)z)|}$ est une homotopie entre f et l'application constante en $\frac{P(0)}{|P(0)|}$. Donc $\deg f = 0$ par les questions (3) et (4).

Notons $k \geq 1$ le degré du polynôme P , et remarquons que pour tous les $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{C}$, l'expression $u_z(s) = s^k \sum_{i=0}^k a_i \left(\frac{z}{s}\right)^i = \sum_{i=0}^k s^{k-i} a_i z^i$ converge vers $a_k z^k$ quand $s \rightarrow 0$, uniformément pour z dans un compact de $\mathbb{C}$. Toujours puisque P ne s'annule pas, l'application continue $h : \mathbb{S}_1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_1$ définie par $(z, s) \mapsto \frac{s^k P(\frac{z}{s})}{|s^k P(\frac{z}{s})|}$ est donc une homotopie entre f et l'application $z \mapsto z^k$. Par conséquent, nous avons $\deg f = k$ par la question (4). Ceci implique que $k = 0$, contredisant l'hypothèse initiale.

(7) Soit $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ une application continue telle que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}_1$. Le lacet $\gamma : t \mapsto f(e^{2i\pi t})$ dans $\mathbb{S}_1$ vérifie alors $\gamma(t + \frac{1}{2}) = -\gamma(t)$. Si $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est un relèvement de γ , alors

$$e^{2i\pi \tilde{\gamma}(\frac{1}{2})} = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma(0) = e^{2i\pi(\tilde{\gamma}(0) + \frac{1}{2})}.$$

Il existe donc un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\tilde{\gamma}(\frac{1}{2}) - \tilde{\gamma}(0) = n + \frac{1}{2}$.

L'application $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{\gamma} : t \mapsto \begin{cases} \tilde{\gamma}(t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{\gamma}(\frac{1}{2}) - \tilde{\gamma}(0) + \tilde{\gamma}(t - \frac{1}{2}) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

est aussi un relèvement (continu) de γ . Par la définition du degré, nous avons donc

$$\deg f = \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(\frac{1}{2}) - \tilde{\gamma}(0) + \tilde{\gamma}(\frac{1}{2}) - \tilde{\gamma}(0) = 2(\tilde{\gamma}(\frac{1}{2}) - \tilde{\gamma}(0)) = 2n + 1.$$

Correction de l'exercice E.13. (1) Considérons l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $t \mapsto f(e^{it}) - f(-e^{it})$. Alors g est continue, vaut $g(0) = f(1) - f(-1)$ en $t = 0$ et vaut $g(\pi) = f(-1) - f(1) = -g(0)$ en $t = \pi$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, l'application g prend la valeur 0 dans l'intervalle $[0, \pi]$, ce qui montre le résultat.

(2) a) Ceci a été montré dans l'exercice E.12 (7).

b) Il suffit de considérer l'application $g : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$, dont le dénominateur ne s'annule pas par l'hypothèse d'aburdité sur f , donc est continue.

c) L'inclusion ι est homotope à l'application constante au pôle Nord, par exemple par l'homotopie h rétractant l'équateur le long des méridiens nord. L'application $g \circ \iota$ est de degré impair par la question a), et aussi de degré nul, car elle est homotope à une application constante par l'application $g \circ h$, ce qui est la contradiction cherchée.

Correction de l'exercice E.14. (1) L'application $h : ([x, t], s) \mapsto [x, (1-s)t + s]$, qui est continue par les propriétés de passage au quotient, est une homotopie entre l'application identique de CX et l'application constante en x_0 .

De même, l'application $h : ([x, t], s) \mapsto [x, (1-s)t]$ est une homotopie entre l'application identique de $CX \setminus \{x_0\}$ et la rétraction $[x, t] \mapsto [x, 0]$ de $CX \setminus \{x_0\}$ sur X (celle-ci étant bien continue, car la restriction de la projection canonique $X \times [0, 1[\rightarrow CX$ est un homéomorphisme sur son image, voir l'exercice E.A.112 dans l'appendice A).

(2) L'application $\tilde{h} : (((CX \setminus \{x_0\}) \amalg Y) \times [0, 1] \rightarrow (CX \amalg Y)$ définie par $\tilde{h}([x, t], s) = [f(x), (1-s)t]$ et $\tilde{h}(y, s) = y$ pour tous les $[x, t] \in CX \setminus \{x_0\}$, $y \in Y$ et $s \in [0, 1]$, qui

est continue comme vu ci-dessus et par composition, passe au quotient en une application continue de $(C(f) \setminus \{x_0\}) \times [0, 1]$ dans $C(f) \setminus \{x_0\}$, qui est une rétraction par déformation forte sur Y .

(3) Nous pouvons supposer que X est non vide. Notons $[x, t] \in SX$ la classe d'équivalence de $(x, t) \in X \times [-1, 1]$. Considérons les points $p_- = [x, -1]$ et $p_+ = [x, 1]$, qui ne dépendent pas de $x \in X$. Les parties $U = SX \setminus \{p_-\}$ et $V = SX \setminus \{p_+\}$ de SX sont ouvertes, car ce sont les images des ouverts saturés $X \times]-1, 1]$ et $X \times [-1, 1[$ respectivement. Ils sont contractiles (donc simplement connexes), car l'application $h : U \times [0, 1] \rightarrow U$ définie par $([x, t], s) \mapsto [x, (1-s)t + s]$ est une homotopie entre l'application identique de U et l'application constante en p_+ , et de même pour V . L'intersection $U \cap V$ se rétracte par déformation forte sur X (identifié à son image dans SX par $x \mapsto [x, 0]$) par l'homotopie $([x, t], s) \mapsto [x, (1-s)t]$, donc est connexe par arcs par l'hypothèse sur X . Le résultat découle alors de la proposition 1.11.

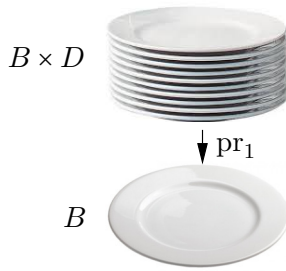
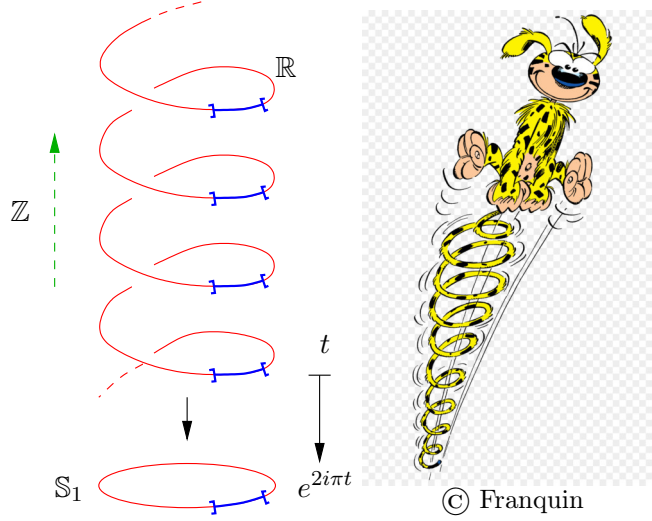
2 Revêtements

Avant toute définition, donnons deux exemples de revêtements qu'il sera important de garder en tête tout au long de ce chapitre 2.

L'application continue $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1$ de la droite réelle dans le cercle, définie par $t \mapsto e^{2\pi i t}$, vérifie la propriété suivante : pour tout élément $x = e^{2\pi i \theta}$ dans $\mathbb{S}_1$, si $V = \mathbb{S}_1 \setminus \{-x\}$, alors $p^{-1}(V)$ est une réunion disjointe

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\theta + (2k-1)\pi, \theta + (2k+1)\pi[$$

et la restriction de p à chacun des $]\theta + (2k-1)\pi, \theta + (2k+1)\pi[$ est un homéomorphisme de cet ouvert sur V . De plus, le groupe $\mathbb{Z}$ des translations entières de $\mathbb{R}$ agit transitivement sur l'ensemble des préimages par p d'un point donné du cercle.



Pour tout espace topologique B (ci-contre représenté par l'assiette blanche en bas) et pour tout espace topologique discret D non vide, la première projection $\text{pr}_1 : B \times D \rightarrow B$ (définie par $(x, d) \mapsto x$) de l'espace topologique produit $B \times D$ (ci-contre représenté par la pile disjointe d'assiettes en haut) est aussi, en restriction à chaque « tranche » $B \times \{d\}$ pour $d \in D$, un homéomorphisme sur B .

2.1 Définitions

Soient X et B deux espaces topologiques, et $p : X \rightarrow B$ une application continue. Nous dirons que p est un *revêtement* si pour tout $b \in B$, il existe un voisinage V de b dans B , un espace discret D non vide et $\theta : V \times D \rightarrow p^{-1}(V)$ un homéomorphisme tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V \times D & \xrightarrow{\theta} & p^{-1}(V) \\ \text{pr}_1 \searrow & & \downarrow p \\ & & V \end{array} .$$

Nous dirons que B est la *base* de p et X l'*espace total* de p . Pour tout $b \in B$, nous dirons que $p^{-1}(b) = \theta(\{b\} \times D)$ est la *fibres* de p au-dessus de b , V un *voisinage distingué* de b pour p , et θ une *trivialisation locale* de p au-dessus de V .

Remarque. Comme D est non vide, un revêtement est surjectif. Comme D est discret et θ est un homéomorphisme, notons que les fibres $p^{-1}(b)$, pour tout $b \in B$, sont des sous-espaces discrets de X .

Soient $f : X \rightarrow B$ et $f' : X' \rightarrow B$ deux revêtements ayant la même base. Un *morphisme de revêtements* de f sur f' est une application continue $\phi : X \rightarrow X'$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & X' \\ f \searrow & & \swarrow f' \\ & B & \end{array} .$$

Une application continue $\phi : X \rightarrow X'$ est donc un morphisme de revêtements si et seulement si, pour tout $b \in B$, l'application ϕ envoie la fibre $f^{-1}(b)$ de f au-dessus de b dans la fibre $(f')^{-1}(b)$ de f' au-dessus de b .

L'application $\text{id} = \text{id}_X : x \mapsto x$ de X dans X est un morphisme de revêtements, dit *morphisme identité*, de f sur f . Si $f'' : X'' \rightarrow B$ est un revêtement de base B et si ϕ' est un morphisme de revêtements de f' sur f'' , alors $\phi' \circ \phi$ est un morphisme de revêtements de f sur f'' , dit *morphisme composé*. Un *isomorphisme de revêtements* de f sur f' est un morphisme de revêtements $\phi : X \rightarrow X'$ de f sur f' tel qu'il existe un morphisme de revêtements $\psi : X' \rightarrow X$ de f' sur f tel que $\psi \circ \phi = \text{id}_X$ et $\phi \circ \psi = \text{id}_{X'}$. Si de plus $f = f'$, nous parlons d'*automorphisme de revêtements* de f . Deux revêtements ayant la même base sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de revêtements de l'un sur l'autre.

Nous notons $\text{Aut}(f)$ le groupe des automorphismes de revêtements de f (nous noterons aussi parfois $\text{Aut}_B(X)$ ce groupe, mais cette notation est abusive, car il peut exister deux revêtements non isomorphes entre deux espaces topologiques donnés, comme les applications $z \mapsto z^n$ et $z \mapsto z^m$ avec $n \neq m$ du cercle $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ dans lui-même, voir aussi l'exercice E.30).

Un revêtement $f : X \rightarrow B$ de base B est dit *trivial* s'il est isomorphe à un revêtement $\text{pr}_1 : B \times D \rightarrow B$, où D est un espace discret non vide.

Si $f : X \rightarrow B$ est un revêtement et W un ouvert de B , alors $f|_{f^{-1}(W)} : f^{-1}(W) \rightarrow W$ est un revêtement. Il est trivial si et seulement si W est un ouvert distingué.

Proposition 2.1. *Soient X et B deux espaces topologiques. Une application continue $f : X \rightarrow B$ est un revêtement si et seulement si tout point y de B admet un voisinage V tel que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$ soit une union disjointe non vide d'ouverts U_i de X tels que $f|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ soit un homéomorphisme.*

Démonstration. Si f est un revêtement, alors pour tout $y \in B$, notons V un voisinage distingué de y et h une trivialisatation locale de f au-dessus de V . En posant $I = D$ et $U_i = h(V \times \{i\})$ pour tout i dans I , l'application f vérifie la propriété demandée.

Réciproquement, supposons que pour tout $y \in B$, une famille $(U_i)_{i \in I}$ comme dans l'énoncé existe. Alors notons D l'ensemble I muni de la topologie discrète, et considérons l'application

$$g : f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i \rightarrow V \times I$$

telle que $g(x) = (f(x), i)$ si $x \in U_i$. Il est élémentaire de vérifier que g est un homéomorphisme, dont l'inverse est une trivialisatation locale de f au-dessus de V . $\square$

2.2 Homéomorphismes locaux et revêtements

Dans cette partie, nous comparons les homéomorphismes locaux et les revêtements.

Soient X et Y deux espaces topologiques. Un *homéomorphisme local* est une application continue $f : X \rightarrow Y$ telle que pour tout x dans X , il existe un voisinage ouvert U de x tel que $f(U)$ soit ouvert et $f|_U : U \rightarrow f(U)$ soit un homéomorphisme.

Remarques.

- (1) Un homéomorphisme local est une application ouverte.
- (2) S'il existe un homéomorphisme local surjectif entre deux espaces topologiques, alors ceux-ci ont les mêmes propriétés topologiques locales (locale connexité, locale connexité par arcs, locale contractibilité, etc).
- (3) Un revêtement est un homéomorphisme local.
- (4) Comme nous le verrons dans la partie 4, si X et Y sont deux sous-variétés différentielles de même dimension, alors une application différentiable $f : X \rightarrow Y$ est une *submersion* (c'est-à-dire son application tangente en chaque point est surjective) si et seulement si elle est une *immersion* (c'est-à-dire son application tangente en chaque point est injective), et alors f est un homéomorphisme local, par le théorème d'inversion locale.
- (5) Si $f : X \rightarrow B$ est un revêtement et si B est connexe, alors le cardinal¹¹ de la fibre $f^{-1}(y)$ est constant en y dans B .

Un revêtement $f : X \rightarrow B$ est un *revêtement fini* si pour tout y dans B , le cardinal de la fibre $f^{-1}(y)$ est fini. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Un revêtement $f : X \rightarrow B$ est un *revêtement à n feuillets* si pour tout y dans B , le cardinal de la fibre $f^{-1}(y)$ est égal à n .

Proposition 2.2. *Un revêtement à un feuillet est un homéomorphisme.*

Démonstration. Un revêtement à un feuillet est injectif, et tout revêtement est continu, ouvert, surjectif. $\square$

Proposition 2.3. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme local, et supposons que X soit séparé. Si l'une des deux conditions suivantes*

- *le cardinal de chaque fibre $f^{-1}(y)$ est fini constant non nul,*
- *l'espace topologique Y est séparé et connexe et l'application f est propre¹²,*

est vérifiée, alors f est un revêtement fini. Donc il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que f soit un revêtement à n feuillets.

Démonstration. Pour tout y dans Y , et tout x dans $F = f^{-1}(y)$, il existe un voisinage ouvert U_x de x tel que $f|_{U_x} : U_x \rightarrow f(U_x)$ soit un homéomorphisme.

Supposons tout d'abord que le cardinal des fibres de p soit fini et constant. Comme X est séparé, nous pouvons supposer que les U_x pour x dans F sont deux à deux disjoints. Posons $V = \bigcap_{x \in F} f(U_x)$, qui est ouvert car l'application f est ouverte et l'ensemble F est fini. Alors nous avons une inclusion

$$f^{-1}(V) \supset \bigcup_{x \in F} (f^{-1}(V) \cap U_x).$$

11. qu'il soit fini ou pas

12. c'est-à-dire fermée et dont les images réciproques des points sont compactes, voir la définition générale au dessus de la proposition A.24 dans l'appendice A, et surtout la définition équivalente dans le cas particulier où X et Y sont localement compacts donnée par la proposition A.24

Comme cette union est disjointe, et comme le cardinal des fibres de f est constant, cette inclusion est une égalité.¹³ De plus la restriction de f à $f^{-1}(V) \cap U_x$ est un homéomorphisme entre $f^{-1}(V) \cap U_x$ et V . Donc f est un revêtement par la proposition 2.1.

Supposons maintenant que X soit séparé connexe et que f soit propre. Alors le cardinal de chaque fibre est fini non nul. En effet, l'application f est ouverte, car c'est un homéomorphisme local, et fermée car propre (voir la définition au-dessus de la proposition A.24 dans l'appendice A). Comme Y est connexe, nous avons donc $f(X) = Y$. Donc f est surjective. Pour tout y dans Y , la fibre $F = f^{-1}(y)$ est compacte car f est propre. Elle est aussi discrète, car f étant un homéomorphisme local, pour tout $x \in F$, il existe U_x un voisinage ouvert de x tel que $U_x \cap F = \{x\}$. Elle est donc finie.

Soit U_x pour $x \in F$ comme ci-dessus. Puisque F est fini et comme X est séparé, nous pouvons supposer que les ouverts U_x pour $x \in F$ sont deux à deux disjoints. Comme f est fermée, le sous-ensemble $V = Y \setminus f(X \setminus \bigcup_{x \in F} U_x)$ est un voisinage ouvert de y tel que $f^{-1}(V) \subset \bigcup_{x \in F} U_x$. Donc $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in F} f^{-1}(V) \cap U_x$ (union disjointe) et la restriction de f à $f^{-1}(V) \cap U_x$ est un homéomorphisme entre $f^{-1}(V) \cap U_x$ et V . Donc f est un revêtement par la proposition 2.1. Par la remarque (5) ci-dessus, le cardinal (fini) des fibres de f est constant. $\square$

Exemples.

- L'application de l'intervalle $]0, 2[$ dans le cercle $\mathbb{S}_1$ définie par $t \mapsto e^{2\pi it}$ est un homéomorphisme local, de fibres finies non vides, mais qui n'est pas un revêtement.
- Si $X = \{0_\pm\} \cup]0, 1]$ est l'espace topologique non séparé de l'exercice E.A.99 dans l'appendice A, l'application $X \rightarrow [0, 1]$ définie par $0_\pm \mapsto 0$ et $t \mapsto t$ si $t > 0$ est un homéomorphisme local, de fibres finies non vides, mais qui n'est pas un revêtement.
- Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$, ainsi que de $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{S}_1$, définie par $z \mapsto z^n$ est un revêtement à n feuillets.
- Soit P un polynôme complexe à une variable de degré $n > 0$. Soient Z l'ensemble des racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme dérivé P' , F l'ensemble fini $P(Z)$ et U l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus P^{-1}(F)$. Alors l'application $P|_U : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus F$ est un revêtement à n feuillets. En effet, c'est un homéomorphisme local, car P est une immersion sur l'ouvert U de même dimension que l'ouvert $\mathbb{C} \setminus F$, et les images réciproques de chaque point de $\mathbb{C} \setminus F$ ont exactement n racines.
- En utilisant les définitions de la partie 4.2, si X et Y sont des sous-variétés différentielles connexes compactes de même dimension, et si $f : X \rightarrow Y$ est une submersion ou une immersion, alors f est un revêtement (car un homéomorphisme local propre).

2.3 Actions de groupes topologiques

Cette partie est composée de définitions et propriétés élémentaires sur les groupes topologiques et les actions continues de groupes. Nous renvoyons à l'appendice B.1 pour des rappels sur les actions ensemblistes de groupes.

13. En effet, pour tout $y \in V$, la fibre $f^{-1}(y)$ contient déjà un point dans l'ouvert $f^{-1}(V) \cap U_x$ (en restriction auquel f est un homéomorphisme sur V) pour tout $x \in F$. Comme $f^{-1}(y)$ est de cardinal n , elle n'en contient pas d'autre. Comme $f^{-1}(V) = \bigcup_{y \in V} f^{-1}(y)$, ceci montre donc que l'inclusion dans la formule centrée ci-dessus est une égalité.

Un *groupe topologique* est un ensemble G muni d'une structure de groupe et d'une structure d'espace topologique compatibles, c'est-à-dire telles que l'application

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\mapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

soit continue.¹⁴ Un *morphisme de groupes topologiques* est un morphisme de groupes qui est continu. Un *isomorphisme de groupes topologiques* est un isomorphisme de groupes qui est un homéomorphisme. Deux groupes topologiques sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de groupes topologiques de l'un sur l'autre. « Être isomorphe » est une relation d'équivalence sur tout ensemble de groupes topologiques. Si G est un groupe topologique, alors pour tout $g \in G$, la *translation à gauche* $L_g : \begin{array}{ccc} G &\longrightarrow & G \\ h &\mapsto & gh \end{array}$ par g et la

translation à droite $R_g : \begin{array}{ccc} G &\longrightarrow & G \\ h &\mapsto & hg^{-1} \end{array}$ par g^{-1} sont des homéomorphismes.

Exemple. Soit G un groupe. Muni de la topologie discrète, G est un groupe topologique, que nous appellerons un *groupe discret*.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Notons $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ le *groupe linéaire* complexe des matrices complexes n - n inversibles, muni de la topologie induite par la topologie usuelle¹⁵ sur $\mathbb{C}^{n^2}$, et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ son sous-groupe des matrices à coefficients réels, appelé le *groupe linéaire réel*. Soient

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : \det x = 1\}$$

le *groupe spécial linéaire* complexe,

$$\mathrm{U}(n) = \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : x^{-1} = x^*\}$$

le *groupe unitaire*, où $x^* = {}^t\bar{x}$ est la matrice adjointe de x , et $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ le *groupe spécial unitaire*. Soient

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det x = 1\}$$

le *groupe spécial linéaire* réel,

$$\mathrm{O}(n) = \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : x^{-1} = {}^t x\}$$

le *groupe orthogonal*, et $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ le *groupe spécial orthogonal*.

Exercice E.15. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- (1) Montrer que tout sous-groupe d'un groupe topologique, muni de la topologie induite, est un groupe topologique. Montrer que le produit d'une famille (quelconque) de groupes topologiques, muni de la topologie produit et de la structure de groupe produit, est un groupe topologique. Montrer que si G est un groupe topologique et H un sous-groupe distingué, alors le groupe quotient G/H , muni de la topologie quotient,¹⁶ est un groupe topologique.

14. Montrer que cette condition est équivalente au fait de demander que les deux applications $G \times G \longrightarrow G$ et $G \longrightarrow G$
 $(x, y) \mapsto xy$ et $x \mapsto x^{-1}$ soient continues.

15. définie par n'importe laquelle de ses normes

16. Voir le corollaire 2.7 pour un critère suffisant de séparation de l'espace topologique quotient G/H .

- (2) Montrer que le groupe abélien $\mathbb{R}^n$, muni de la topologie usuelle, est un groupe topologique localement compact. Montrer (voir le corollaire 2.7) que $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est un groupe topologique compact.
- (3) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est ouvert dans $\mathbb{C}^{n^2}$, et que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathbb{R}^{n^2}$.
- (4) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un groupe topologique localement compact.
- (5) Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Ce sont donc des groupes topologiques localement compacts.
- (6) Montrer (ou attendre la proposition 4.14) que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont des variétés topologiques (métrisables séparables), donc sont localement contractiles.
- (7) Montrer que le cercle $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, muni de la multiplication des nombres complexes, est un groupe topologique, isomorphe (en tant que groupe topologique) au groupe topologique quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, à $\mathrm{SO}(2)$ et à $\mathrm{U}(1)$.
- (8) Montrer que les espaces topologiques $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont compacts.
- (9) Montrer que les espaces topologiques $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont connexes par arcs, et que $\mathrm{O}(n)$ a deux composantes connexes.
- (10) Soit $\mathcal{H}$ (respectivement $\mathcal{H}^{++}$) le sous-espace topologique de $\mathbb{C}^{n^2}$ formé des matrices hermitiennes (respectivement hermitiennes définies positives). Montrer que l'application exponentielle est un homéomorphisme de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}^{++}$. Montrer qu'il existe un homéomorphisme $x \mapsto \sqrt{x}$ et un seul de $\mathcal{H}^{++}$ dans lui-même tel que $\sqrt{x}^2 = x$ pour tout $x \in \mathcal{H}^{++}$.

Montrer que l'application $\mathcal{H}^{++} \times \mathrm{U}(n) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ définie par $(x, y) \mapsto xy$ est un homéomorphisme (appelé la décomposition polaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$), d'inverse l'application $x \mapsto (\sqrt{xx^*}, \sqrt{xx^*}^{-1}x)$. En déduire que l'espace topologique $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathrm{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$, que l'espace topologique $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathrm{SU}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-1}$, que l'espace topologique $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, et que l'espace topologique $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathrm{SO}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}-1}$.

Fixons X un espace topologique et G un groupe topologique, d'élément neutre noté e .

Une action (à gauche) continue de G sur X est une action (à gauche) de G sur X qui est continue, c'est-à-dire une application

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\mapsto gx \end{aligned}$$

continue telle que $g'(gx) = (g'g)x$ et $ex = x$ pour tous les g, g' dans G et x dans X . Nous dirons que G opère (ou agit) continuellement sur X s'il est muni d'une action continue de G sur X . Nous supposons souvent de manière implicite qu'une action d'un groupe topologique sur un espace topologique est continue.

Remarques. (1) Pour tout g dans G , l'application $x \mapsto gx$ est alors un homéomorphisme de X , d'inverse l'application $x \mapsto g^{-1}x$.

(2) Une action d'un groupe discret G sur un espace topologique est continue si et seulement si, pour tout g dans G , l'application $\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ x & \mapsto & gx \end{array}$ est continue.

Nous supposons dans la suite de la partie 2.3 que G agit continuellement sur X .

L'espace des orbites $G \backslash X$ sera muni de la topologie quotient (voir la partie A.2). Si H est un sous-groupe de G , alors l'application $g \mapsto g^{-1}$ induit un homéomorphisme entre les espaces topologiques quotients $H \backslash G$ et G/H , et l'action par translations à gauche de G sur l'espace des classes à droite G/H est continue.

Remarque 2.4. La projection canonique $\pi : X \rightarrow G \backslash X$ est continue (par définition de la topologie quotient sur $G \backslash X$). Mais c'est un fait remarquable qu'elle est aussi ouverte : si U est un ouvert de X , alors le saturé $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$ de U est un ouvert de X (en tant que réunion d'ouverts), donc $\pi(U)$ est ouvert, par définition de la topologie quotient sur $G \backslash X$.

Si G et X sont séparés, une action continue de G sur X est dite *propre*, et le groupe topologique G est dit agir *proprement* sur l'espace topologique X , si l'application graphe

$$\begin{aligned} \mathbf{gr} : G \times X &\longrightarrow X \times X \\ (g, x) &\mapsto (x, gx), \end{aligned}$$

qui est continue, est propre (i.e. fermée, et dont les images réciproques de points sont compactes, voir la partie A.4.5 dans l'appendice A). Lorsque G est discret, une action (continue) propre de G sur X est aussi appelée une action *proprement discontinue*. La définition ci-dessus n'est pas très utile, même si elle est générale. Dans la plupart des exemples que nous rencontrerons, les espaces topologiques X ainsi que les groupes topologiques G seront localement compacts, auquel cas nous ne retiendrons comme définition que la condition équivalente donnée par la proposition 2.5 (1) ci-dessous.

Proposition 2.5.

- (1) Si X est localement compact et G séparé, une action continue de G sur X est propre si et seulement si, pour tout compact K de X , la partie

$$\{g \in G : K \cap gK \neq \emptyset\}$$

est compacte dans G .

- (2) Si G est compact (par exemple fini discret), toute action continue de G sur un espace localement compact est propre.¹⁷

Lorsque G est discret (auquel cas ses compacts sont exactement ses parties finies), l'assertion (1) de cette proposition dit une action (continue) de G sur un espace localement compact X est propre si et seulement si pour tout compact K de X , la partie

$$\{g \in G : K \cap gK \neq \emptyset\}$$

est finie. C'est cette définition (parfois appelée la propriété d'être *proprement discontinue*) qu'il convient de retenir et d'utiliser dans la plupart des applications. Lorsque G est discret et fini, toute action continue de G sur un espace localement compact est donc propre.

Démonstration. (1) Si l'action est propre, pour tout compact K de X , alors $\mathbf{gr}^{-1}(K \times K)$ est compact dans $G \times X$ (voir la proposition A.24 de l'appendice A). Donc

$$\{g \in G : K \cap gK \neq \emptyset\} = \text{pr}_1(\mathbf{gr}^{-1}(K \times K))$$

17. Voir aussi l'assertion (3) de l'exercice E.16.

est compact car G est séparé et car la projection sur le premier facteur $\text{pr}_1 : G \times X \rightarrow G$ est continue.

Réciproquement, pour tout compact L de $X \times X$, soit K un compact de X tel que $L \subset K \times K$ (par exemple $K = \text{pr}_1(L) \cup \text{pr}_2(L) \subset X$ où $\text{pr}_i : X \times X \rightarrow X$ est la projection sur le i ème facteur, cette union de compacts étant compacte car X est séparé). Alors $\mathbf{gr}^{-1}(L)$ est un fermé, contenu dans le compact $\{g \in G : K \cap gK \neq \emptyset\} \times K$, donc est compact. Comme $X \times X$ est localement compact et $G \times X$ séparé, la proposition A.24 montre que $\mathbf{gr}$ est propre.

(2) Supposons que G soit compact. Pour tout compact K de X , la partie de X définie par $GK = \{gx : g \in G, x \in K\}$ est compacte, car image du compact $G \times K$ dans l'espace séparé X par l'application continue $(g, x) \mapsto gx$. L'application $\psi : G \times K \times K \rightarrow GK \times GK$ définie par $(g, x, y) \mapsto (x, gy)$ est continue entre espaces compacts donc est propre. Si Δ est la diagonale de $GK \times GK$, alors Δ est fermée donc compacte dans $GK \times GK$. Donc $\psi^{-1}(\Delta)$ est compact dans $G \times K \times K$. Par la continuité de la projection sur le premier facteur $\text{pr}_1 : G \times K \times K \rightarrow G$ et par la séparation de G , nous avons donc que le sous-espace $\{g \in G : K \cap gK \neq \emptyset\} = \text{pr}_1(\psi^{-1}(\Delta))$ est compact dans G . Le résultat découle alors de l'assertion (1). $\square$

Une action continue d'un groupe topologique G sur un espace topologique X est dite *cocompacte* s'il existe un compact K de X dont l'orbite par G recouvre X . Par exemple si X est compact, toute action continue de G sur X est cocompacte.

Proposition 2.6. *Si X et G sont séparés et si G agit proprement sur X , alors l'espace des orbites $G \backslash X$ est séparé et les orbites de G dans X sont fermées. Si X est localement compact, si G est séparé et si G agit proprement sur X , alors $G \backslash X$ est localement compact. Si X et G sont séparés et si l'action de G sur X est propre et cocompacte, alors $G \backslash X$ est compact.*

Démonstration.¹⁸ Comme l'application graphe $\mathbf{gr}$ est propre, elle est fermée, donc son image

$$\text{im}(\mathbf{gr}) = \{(x, y) \in X \times X : \exists g \in G, y = gx\}$$

est fermée dans $X \times X$. Soient $x, y \in X$. Si x n'est pas dans la même orbite que y , alors le couple (x, y) n'appartient pas à $\text{im}(\mathbf{gr})$, donc il existe des ouverts U et V de X tels que $(x, y) \in U \times V \subset (X \times X) \setminus \text{im}(\mathbf{gr})$. Alors $\pi(U)$ et $\pi(V)$ sont des ouverts (car π est ouverte), disjoints (car $(U \times V) \cap \text{im}(\mathbf{gr})$ est vide), et contenant $\pi(x)$ et $\pi(y)$ respectivement. Donc $G \backslash X$ est séparé.

18. Voici une démonstration de la séparation de $G \backslash X$ lorsque X et G sont supposés localement compacts et métrisables.

Soient x et x' deux points de X qui ne sont pas dans la même orbite par G . Soient K et K' deux voisinages compacts disjoints de x et x' dans X , qui existent car X est localement compact (donc séparé). Puisque X est métrisable, soient $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(K'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des systèmes fondamentaux dénombrables de voisinages de x et x' contenus dans K et K' respectivement. Montrons par l'absurde qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'intersection $K_N \cap GK'_N$ soit vide. Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K_n$ et $g_n \in G$ tels que $g_n x_n \in K'_n$. Comme $K \cup K'$ est compact (car X est séparé) et l'action est propre, la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reste dans un compact de l'espace métrisable G , donc, quitte à extraire, converge vers $g \in G$. Or $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x et $(g_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers x' . Donc par la continuité de l'action, nous avons $x' = gx$, ce qui contredit l'hypothèse initiale. Puisque la projection canonique π est ouverte, les images K_N et K'_N sont alors des voisinages disjoints de $\pi(x)$ et $\pi(x')$ respectivement. Donc l'espace topologique quotient $G \backslash X$ est séparé.

Les orbites, images réciproques par l'application $\pi : X \rightarrow G \backslash X$ (continue) des singletons de $G \backslash X$ (fermés car $G \backslash X$ est séparé) sont donc fermées. Les deux dernières assertions découlent du fait que l'image d'un compact par une application continue à valeurs dans un espace séparé est compact, et que l'image d'un voisinage d'un point $x \in X$ par l'application ouverte π est un voisinage de $\pi(x)$. $\square$

Corollaire 2.7. *Soit H un sous-groupe fermé d'un groupe topologique localement compact G . Alors les espaces topologiques $H \backslash G$ et G/H sont séparés et localement compacts. Ils sont compacts si G est compact.*

Si de plus H est distingué, alors G/H est un groupe topologique localement compact. Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le quotient $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ est un groupe topologique compact.

Démonstration. Puisque l'inversion $g \mapsto g^{-1}$ induit par passage au quotient un homéomorphisme de $H \backslash G$ sur G/H , il suffit de montrer le résultat pour $H \backslash G$. Un sous-espace fermé d'un espace localement compact est localement compact, donc H est un groupe topologique localement compact. Pour tout compact K de G , et pour tout $h \in H$, nous avons $K \cap hK \neq \emptyset$ si et seulement si $h \in KK^{-1}$. Par la compacité de $K \times K$, par la continuité de l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ de $K \times K$ dans G et puisque G est séparé, la partie KK^{-1} est compacte dans G , et donc $KK^{-1} \cap H = \{h \in H : K \cap hK \neq \emptyset\}$ est un compact de H par la proposition 2.5 (1). Par conséquent, l'action par translations à gauche de H sur G est propre. Le résultat découle alors de la proposition 2.6. $\square$

Exercice E.16.

- (1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, les espaces topologiques quotients $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$ sont séparés et homéomorphes respectivement à $\mathbb{R}^{n^2}$, $\mathbb{R}^{n^2-1}$, $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ et $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}-1}$.
- (2) Si $\mathrm{SO}(n)$ est identifié à un sous-groupe de $\mathrm{SO}(n+1)$ par l'application $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ en notation par blocs, montrer que l'espace topologique quotient $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ est séparé et homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_n$.
- (3) Si G est un groupe topologique compact agissant (continuellement) sur un espace topologique séparé X , montrer que l'action de G sur X est propre. (Cette question étend l'assertion (2) de la proposition 2.5.)

2.4 Actions de groupes et revêtements

Cette partie introduit une classe d'exemples fondamentaux de revêtements, ceux définis par les actions libres¹⁹ et propres de groupes discrets. Ils jouent un rôle essentiel dans la théorie des revêtements.

Théorème 2.8. *Soit G un groupe discret agissant (continuellement) librement et proprement sur un espace topologique séparé X . Alors*

- (1) pour tout x dans X , il existe un voisinage V de x tel que $gV \cap V = \emptyset$ pour tout g dans $G \setminus \{e\}$
- (2) chaque orbite de G est discrète ;

19. Voir la partie B.1 pour des rappels sur les actions de groupes.

(3) la projection canonique $X \rightarrow G \backslash X$ est un revêtement.

Un tel revêtement est galoisien, voir la partie 2.11 pour des définitions.

Démonstration. (1)²⁰ L'application graphe $\mathbf{gr}$ est continue, injective (car l'action de G sur X est libre) et fermée (car propre), donc est un homéomorphisme sur son image. Comme $\{e\} \times X$ est un ouvert de $G \times X$, son image par $\mathbf{gr}$, qui est la diagonale de $X \times X$, est ouverte dans $\text{im}(\mathbf{gr})$. Pour tout x dans X , il existe donc un voisinage V de x dans X tel que l'intersection $(V \times V) \cap \text{im}(\mathbf{gr})$ soit contenue dans la diagonale de $X \times X$. Si l'intersection $V \cap gV$ est non vide, alors il existe $(x, y) \in V \times V$ tel que $y = gx$, donc $(x, y) \in (V \times V) \cap \text{im}(\mathbf{gr})$. D'où $x = y$ et donc $g = e$ car l'action est libre.

(2) Ceci découle de (1), voir l'exercice E.A.101 de l'appendice A.2.

(3) Pour tout x dans X , soit V un voisinage ouvert de x comme dans l'assertion (1). Alors $U = \pi(V)$ est un ouvert, car π est ouverte. De plus $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{g \in G} gV$ et cette union est disjointe, car si $y \in gV \cap g'V$, alors $g^{-1}y \in V \cap (g^{-1}g')V$. Donc $g^{-1}g' = e$ par l'assertion (1), c'est-à-dire $g = g'$. De plus, l'application $\pi|_{gV} : gV \rightarrow U$ est continue, ouverte, surjective car $U = \pi(V) = \pi(gV)$. Elle est aussi injective. En effet, si $x, x' \in V$ vérifient $\pi(gx) = \pi(gx')$, alors $\pi(x) = \pi(x')$, et puisque la restriction $\pi|_V$ est injective par l'assertion (1), nous avons $x = x'$. Donc $\pi|_{gV} : gV \rightarrow U$ est un homéomorphisme et π est un revêtement par la proposition 2.1. $\square$

Corollaire 2.9. Soit G un groupe fini (discret) agissant librement (par homéomorphismes) sur un espace séparé X . Alors $G \backslash X$ est séparé, et la projection canonique $X \rightarrow G \backslash X$ est un revêtement à $\text{Card}(G)$ feuillets.

Démonstration.²¹ Par la proposition 2.6 et le théorème 2.8 précédent, il suffit de montrer que l'application graphe $\mathbf{gr}$ est propre. Comme un groupe fini discret est compact, ceci découle de l'assertion (3) de l'exercice E.16. Mais nous donnons une autre démonstration ci-dessous.

Comme G est fini, l'image réciproque d'un point par l'application graphe $\mathbf{gr}$ est finie, donc compacte car $G \times X$ est séparé. De plus, si F est un fermé de $G \times X$, alors pour tout g dans G , le fermé $F \cap (\{g\} \times X)$ est de la forme $\{g\} \times F_g$ où F_g est un fermé de X . Comme $X \times X$ est séparé, le sous-ensemble $F'_g = \{(x, y) \in X \times X : \text{pr}_1(x, y) = g \text{ pr}_2(x, y)\}$ est fermé (voir par exemple l'exercice E.A.119). D'où

$$\mathbf{gr}(F) = \bigcup_{g \in G} \mathbf{gr}(F \cap (\{g\} \times X)) = \bigcup_{g \in G} \text{pr}_1^{-1}(F_g) \cap F'_g$$

est fermé (car l'union est finie). $\square$

20. Voici une démonstration lorsque X est supposé localement compact. Pour tout x dans X , soit U un voisinage compact de x . Comme l'action est propre et le groupe G discret, il existe $g_1, \dots, g_k$ dans $G \setminus \{e\}$ tels que

$$\{g \in G \setminus \{e\} : gU \cap U \neq \emptyset\} = \{g_1, \dots, g_k\}.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, comme l'action est libre, nous avons $g_i x \neq x$. Comme X est séparé et l'action continue, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, il existe un voisinage ouvert U_i de x , contenu dans U , tel que $g_i U_i \cap U_i = \emptyset$. Alors $V = \bigcap_{1 \leq i \leq k} U_i$ est un ouvert qui convient.

21. Si X est supposé localement compact, alors l'action de G sur X est propre car pour tout compact K de X , l'ensemble $\{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}$, étant une partie du groupe fini G , est finie. Le corollaire 2.9 découle alors du théorème 2.8.

Exemples.

- (1) Le groupe fini $\{\pm 1\}$ agit librement sur la sphère $\mathbb{S}_n$ par $x \mapsto \pm x$. Donc l'espace projectif réel $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \{\pm 1\} \backslash \mathbb{S}_n$ est un espace topologique séparé, et l'application canonique $\mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est un revêtement à deux feuillets (par le corollaire 2.9). Pour visualiser le cas $n = 2$, je recommande la vidéo sur YouTube de Henri-Paul de Saint-Gervais

<https://www.youtube.com/watch?v=1EvJqGvY24c>

- (2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Le groupe multiplicatif fini $\mathcal{U}_p = \{z \in \mathbb{C} : z^p = 1\}$ des racines p -èmes de l'unité agit (continuellement) sur la sphère de dimension impaire

$$\mathbb{S}_{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$$

par l'action diagonale $(\lambda, (z_0, \dots, z_n)) \mapsto (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n)$. Cette action est libre, donc $L_{n,p} = \mathcal{U}_p \backslash \mathbb{S}_{2n+1}$ est un espace topologique séparé, appelé un *espace lenticulaire*, et la projection canonique $\mathbb{S}_{2n+1} \rightarrow L_{n,p}$ est un revêtement à p feuillets (par le corollaire 2.9).

Corollaire 2.10. *Soit H un sous-groupe discret d'un groupe topologique séparé G , alors le sous-espace topologique H est fermé, l'espace topologique quotient $H \backslash G$ est séparé et la projection canonique $G \rightarrow H \backslash G$ est un revêtement.*

Démonstration.²² Soit U un voisinage de l'élément neutre e dans G , tel que $U \cap H = \{e\}$. Soit V un voisinage de e dans G tel que $VV^{-1} \subset U$, qui existe par la continuité en (e, e) de l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ de $G \times G$ dans G , qui envoie (e, e) sur e . Supposons par l'absurde qu'il existe $g \in \overline{H} \setminus H$, où $\overline{H}$ est l'adhérence de H . Alors Vg est un voisinage de g , qui rencontre H en au moins deux éléments distincts h, h' (car G est séparé). Soient v et v' dans V tels que $vg = h$ et $v'g = h'$. Alors $h'h^{-1} = v'v^{-1}$ est un élément de H différent de e qui appartient à U , ce qui est une contradiction. Donc H est fermé.

Maintenant, afin de montrer les deux dernières affirmations du corollaire 2.10 dans le cas général, par la proposition 2.6 et le théorème 2.8, il suffit de montrer que l'application graphe $\mathbf{gr} : H \times G \rightarrow G \times G$ définie par $\mathbf{gr}(h, g) = (g, hg)$ est propre. Comme elle est injective, les images réciproques de singletons de $G \times G$ sont des singletons de l'espace séparé $H \times G$, donc sont compactes. L'image de $\mathbf{gr}$ est

$$\text{im}(\mathbf{gr}) = \{(g, g') \in G \times G : g'g^{-1} \in H\}.$$

Notons que $\text{im}(\mathbf{gr})$ est fermé dans $G \times G$, car l'application $(g, g') \mapsto g'g^{-1}$ de $G \times G$ dans G est continue et H est fermé dans G comme nous venons de le voir. Donc pour tout fermé F de $H \times G$, son image directe $\mathbf{gr}(F)$ par $\mathbf{gr}$, qui est son image réciproque par l'application continue $\mathbf{gr}^{-1} : \text{im}(\mathbf{gr}) \rightarrow H \times G$ définie par $(g, g') \mapsto (g'g^{-1}, g)$ est fermée dans $\text{im}(\mathbf{gr})$, donc fermée dans $G \times G$. $\square$

Exemple. L'application canonique $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ est un revêtement. Par le paragraphe précédant l'exercice E.A.107, l'application $\mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{S}_1)^n$ définie par $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (e^{2i\pi t_1}, \dots, e^{2i\pi t_n})$ est un revêtement.

22. Comme tout sous-espace fermé d'un espace topologique localement compact est localement compact, si G est localement compact, alors H l'est (et en particulier est séparé). Les deux dernières assertions du corollaire 2.10 découlent donc, si G est localement compact, du corollaire 2.7 et de la version localement compacte du théorème 2.8 (voir la note de bas de page 20).

2.5 Unicité des relèvements

L'une des propriétés fondamentales des revêtements est de pouvoir relever de manière unique en une application à valeurs dans l'espace total certaines applications à valeurs dans la base. Dans cette partie, nous étudions le problème de l'unicité (voir la partie 2.9 pour le problème de l'existence).

Soient $p : X \rightarrow B$ un revêtement et $f : Y \rightarrow B$ une application continue.

Un *relèvement* (ou *relevé*) de f par p est une application continue $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ telle que $p \circ \tilde{f} = f$, c'est-à-dire telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \tilde{f} \nearrow & \downarrow p & \\ Y & \xrightarrow{f} & B . \end{array}$$

Une *section* de p est un relèvement de l'identité $B \rightarrow B$, c'est-à-dire une application continue $s : B \rightarrow X$ telle que $p \circ s = \text{id}_B$:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ s \nearrow & \downarrow p & \\ B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B . \end{array}$$

Exemples. (1) Si p est un revêtement trivial, si $y \in Y$, $b = f(y)$ et $x \in p^{-1}(b)$ alors f admet au moins un relèvement $\tilde{f}$ tel que $\tilde{f}(y) = x$. En effet, si D est un espace discret non vide, si $\text{pr}_1 : B \times D \rightarrow B$ est la première projection, et si $\theta : B \times D \rightarrow X$ est un isomorphisme de revêtements au-dessus de B , alors pour tout d dans D , l'application $\tilde{f} : y \mapsto \theta(f(y), d)$ est un relèvement de f . En prenant $f = \text{id}$, nous obtenons que tout revêtement trivial (par exemple la restriction d'un revêtement à la préimage d'un ouvert distingué de la base) admet, pour tout point x de la fibre au-dessus d'un point b de la base, au moins une section s telle que $s(b) = x$.

(2) Si $p' : X' \rightarrow B$ est un revêtement, alors tout morphisme de revêtements φ de p sur p' est un relèvement de l'application continue p par le revêtement p' : le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} & X' & \\ \varphi \nearrow & \downarrow p' & \\ X & \xrightarrow{p} & B . \end{array}$$

Nous donnerons dans la partie 2.9 un critère nécessaire et suffisant pour l'existence de relèvements.

Proposition 2.11. (Unicité des relèvements) *Si Y est connexe, alors deux relèvements de f qui coïncident en un point sont égaux.*

Démonstration. Soient $f', f'' : Y \rightarrow X$ deux relèvements de f qui coïncident en un point $y \in Y$, et

$$A_0 = \{u \in Y : f'(u) = f''(u)\}, \quad A_1 = \{u \in Y : f'(u) \neq f''(u)\},$$

qui sont deux parties disjointes de Y . Soient $u \in Y$, V un voisinage ouvert distingué de $f(u)$, $h : V \times D \rightarrow p^{-1}(V)$ une trivialisatation de p au-dessus de V , et $V_d = h(V \times \{d\})$ pour

tout $d \in D$. Si $u \in A_0$, soit $d \in D$ tel que $f'(u) \in V_d$. Alors $(f')^{-1}(V_d) \cap (f'')^{-1}(V_d)$ est un voisinage ouvert de u contenu dans A_0 , donc A_0 est ouvert. Si $u \in A_1$, soient d' et d'' dans D tels que $f'(u) \in V_{d'}$ et $f''(u) \in V_{d''}$. Alors $d' \neq d''$ et $(f')^{-1}(V_{d'}) \cap (f'')^{-1}(V_{d''})$ est un voisinage ouvert de u contenu dans A_1 , donc A_1 est ouvert. Comme $y \in A_0$, et par connexité de Y , nous avons donc $A_1 = \emptyset$ et $f' = f''$. $\square$

Corollaire 2.12.

- (1) Soient $p : X \rightarrow B$ et $p' : X' \rightarrow B$ deux revêtements. Si X est connexe, alors deux morphismes de p sur p' qui coïncident en un point sont égaux.
- (2) Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement, d'espace total X connexe. Le groupe $\text{Aut}(p)$ des automorphismes du revêtement p agit librement sur X .
- (3) Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement, de base B connexe. Deux sections de p qui coïncident en un point sont égales.
- (4) Soit G un groupe discret agissant proprement et librement sur un espace connexe séparé X , et $p : X \rightarrow G \backslash X$ le revêtement associé (voir le théorème 2.8). Si $x \in X$, alors l'application Θ_x qui à un automorphisme de revêtements ϕ de p associe l'unique élément $g = g_{\phi, x}$ de G tel que $\phi(x) = gx$, est un isomorphisme du groupe $\text{Aut}(p)$ sur le groupe G indépendant de x .

Démonstration. (1) Ceci découle de l'exemple (2) ci-dessus et de la proposition 2.11 appliquée à $f = p$.

(2) Un automorphisme de p ayant un point fixe coïncide en ce point avec l'automorphisme identité, donc lui est égal par l'assertion (1).

(3) Ceci est un cas particulier de l'assertion (1).

(4) Soit $x \in X$. L'application Θ_x est bien définie, car le point $\phi(x)$ appartient à $p^{-1}(p(x)) = Gx$ puisque ϕ est un morphisme de revêtements, et l'unicité de g découle de la liberté de l'action de G sur X . Pour tout $g' \in G$, l'application $\varphi_{g'} : X \rightarrow X$ définie par $y \mapsto gy$ est un automorphisme de revêtements, puisqu'elle envoie orbite sur orbite et est d'inverse $\varphi_{(g')^{-1}}$.

L'élément $g = g_{\varphi, x}$ ne dépend en fait pas de x , car les morphismes de revêtements ϕ et φ_g coïncident en x donc partout par la connexité de X et l'assertion (1). Donc pour tout $\phi' \in \text{Aut}(p)$, nous avons

$$g_{\phi' \circ \phi, x} x = \phi' \circ \phi(x) = \phi'(g_{\varphi, x} x) = g_{\varphi', g_{\varphi, x} x} (g_{\varphi, x} x) = (g_{\varphi', x} g_{\varphi, x}) x.$$

Puisque l'action de G est libre, ceci implique que $g_{\phi' \circ \phi, x} = g_{\varphi', x} g_{\varphi, x}$. Par conséquent Θ_x est un morphisme de revêtements, indépendant de x .

Montrons que l'application Θ_x est surjective. Pour tout $g' \in G$, par définition, $\Theta_x(\varphi_{g'})$ est l'unique élément $g'' \in G$ tel que $\varphi_{g'}(x) = g''x$. Or $\varphi_{g'}(x) = g'x$ par la définition de l'automorphisme de revêtements $\varphi_{g'}$. Donc $\Theta_x(\varphi_{g'}) = g'$, ce qui conclut.

Enfin, l'application Θ_x est injective, car pour tous les $\phi, \phi' \in \text{Aut}(p)$, si $\Theta_x(\phi) = \Theta_x(\phi')$, alors $\phi(x) = \phi'(x)$, donc $\phi = \phi'$ par l'assertion (1). $\square$

2.6 Relèvement des chemins et des homotopies

Dans cette partie, nous montrons que les revêtements ont la propriété de relèvement unique des chemins et des homotopies.

Proposition 2.13. (Relèvement des chemins) Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement. Pour tout chemin α dans B d'origine b , pour tout x dans $p^{-1}(b)$, il existe un unique relèvement $\tilde{\alpha}$ de α d'origine x .

Cette proposition est en fait un cas particulier de la proposition suivante, en prenant pour Y l'espace réduit à un point.

Proposition 2.14. (Relèvement des homotopies) Soient $p : X \rightarrow B$ un revêtement et $f : Y \rightarrow B$ une application continue, admettant un relèvement $\tilde{f} : Y \rightarrow X$. Pour toute application continue $h : Y \times [0, 1] \rightarrow B$ telle que pour tout $y \in Y$, nous ayons $h(y, 0) = f(y)$, il existe un unique relèvement $\tilde{h} : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ de h tel que pour tout $y \in Y$, nous ayons $\tilde{h}(y, 0) = \tilde{f}(y)$.

Démonstration. L'existence d'une telle application $\tilde{h}$ est élémentaire si p est trivial : si D est un espace discret non vide, si $\theta : B \times D \rightarrow X$ est un isomorphisme de revêtements entre les revêtements $\text{pr}_1 : B \times D \rightarrow B$ et $p : X \rightarrow B$, alors l'application $\tilde{h}$ définie par $(y, t) \mapsto \theta(h(y, t), \text{pr}_2 \circ \theta^{-1} \circ \tilde{f}(y))$ convient.²³

Par compacité de $[0, 1]$, pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert U_y de y et $n = n_y \in \mathbb{N}$ non nul tel que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, l'image $h(U_y \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}])$ soit contenue dans un voisinage ouvert distingué $V_{y,i}$ de $h(y, \frac{i}{n})$.

Puisque $p|_{p^{-1}(V_{y,0})}$ est un revêtement trivial par la définition des ouverts distingués, soit $\tilde{g}_0$ un relèvement de $h|_{U_y \times [0, \frac{1}{n}]}$ tel que $\tilde{g}_0(z, 0) = \tilde{f}(z)$ pour tout z dans U_y . Par récurrence sur $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, puisque $p|_{p^{-1}(V_{y,i})}$ est un revêtement trivial, nous construisons un relèvement $\tilde{g}_i$ de $h|_{U_y \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]}$ tel que $\tilde{g}_i(z, \frac{i}{n}) = \tilde{g}_{i-1}(z, \frac{i}{n})$ pour tout z dans U_y . En recollant ces relevés (voir l'exercice E.1), nous obtenons un relèvement $\tilde{g}_y$ de $h|_{U_y \times [0, 1]}$ tel que $\tilde{g}_y(z, 0) = \tilde{f}(z)$ pour tout z dans U_y .

Si $y' \in Y$, et pour tout z dans $U_y \cap U_{y'}$, les relèvements $\tilde{g}_y$ et $\tilde{g}_{y'}$ coïncident en $(z, 0)$. Donc par la connexité de $\{z\} \times [0, 1]$ et la proposition 2.11, ces relèvements coïncident sur $\{z\} \times [0, 1]$. Par conséquent $\tilde{g}_y$ et $\tilde{g}_{y'}$ coïncident sur $(U_y \cap U_{y'}) \times [0, 1]$. En recollant les $\tilde{g}_y$, nous obtenons un relèvement $\tilde{h}$ cherché.

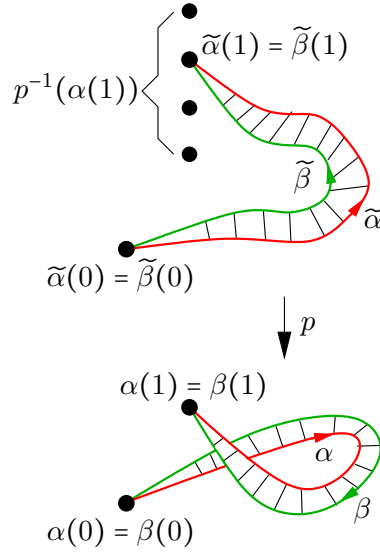
Pour tout y dans Y , deux tels relèvements coïncident en $(y, 0)$, donc sur $\{y\} \times [0, 1]$ par la connexité de $[0, 1]$, donc ils sont égaux. $\square$

23. En effet, puisque $p \circ \theta = \text{pr}_1$, pour tous les $y \in Y$ et $t \in [0, 1]$, nous avons

$$p \circ \tilde{h}(y, t) = \text{pr}_1(h(y, t), \text{pr}_2 \circ \theta^{-1} \circ \tilde{f}(y)) = h(y, t).$$

De plus, pour tout $y \in Y$, nous avons $\text{pr}_1 \circ \theta^{-1}(\tilde{f}(y)) = f(y) = h(y, 0)$ et donc

$$\tilde{h}(y, 0) = \theta(h(y, 0), \text{pr}_2 \circ \theta^{-1} \circ \tilde{f}(y)) = \theta(\text{pr}_1 \circ \theta^{-1}(\tilde{f}(y)), \text{pr}_2 \circ \theta^{-1} \circ \tilde{f}(y)) = \theta \circ \theta^{-1}(\tilde{f}(y)) = \tilde{f}(y).$$



Corollaire 2.15. Si α et β sont deux chemins homotopes dans B , si $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont des relèvements par p de α et β respectivement, ayant la même origine, alors les chemins $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ ont la même extrémité et sont homotopes.

Démonstration. Si $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$ est une homotopie entre α et β , telle que

$$h(t, 0) = \alpha(t), \quad h(t, 1) = \beta(t), \quad h(0, s) = \alpha(0) = \beta(0), \quad h(1, s) = \alpha(1) = \beta(1),$$

soit $\tilde{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ le relèvement de h tel que $\tilde{h}(t, 0) = \tilde{\alpha}(t)$ donné par la proposition 2.14. Comme les chemins constants $s \mapsto h(0, s)$ et $s \mapsto h(1, s)$ se relèvent en des chemins constants, nous avons $\tilde{h}(0, s) = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$ et $\tilde{h}(1, s) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$. Puisque l'application $t \mapsto \tilde{h}(t, 1)$ est un relèvement de β d'origine $\tilde{h}(0, 1) = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$ et par l'unicité dans la proposition 2.13, nous avons $\tilde{h}(t, 1) = \tilde{\beta}(t)$. $\square$

Corollaire 2.16. Soient x un point base dans X et $b = p(x)$. Le morphisme de groupes $p_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(B, b)$ est injectif.

Démonstration. Soit α un lacet en x dans X . Si le lacet $p \circ \alpha$ en b dans B est homotope au lacet constant en b , alors α , qui par la propriété d'unicité des relèvements, est le relèvement de $p \circ \alpha$ d'origine x , est homotope au lacet constant en x , par le corollaire 2.15. $\square$

Corollaire 2.17. Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement, d'espace total X connexe par arcs. Soient $b \in B$ et $x \in p^{-1}(b)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) l'espace topologique X est simplement connexe,
- (2) deux lacets c et c' en b dans B sont homotopes dans B si leurs relèvements d'origine x dans X ont même extrémité.

Démonstration. Nous utilisons la caractérisation de la simple connexité donnée par le dernier point de l'exercice E.5.

Si X est simplement connexe, alors deux chemins dans X ayant même origine et même extrémité sont homotopes, donc leurs images par p aussi. Donc l'assertion (1) implique l'assertion (2).

Réciproquement, soient α et α' deux chemins dans X ayant même origine x et même extrémité. Alors les chemins $p \circ \alpha$ et $p \circ \alpha'$ dans B ont leurs relèvements dans X d'origine x qui ont même extrémité. Ils sont donc homotopes dans B si l'assertion (2) est vérifiée. Par la propriété de relèvement des homotopies, les chemins α et α' sont homotopes dans X , ce qui implique l'assertion (1). $\square$

Exercice E.17. Montrer que si $p : X \rightarrow B$ est un revêtement, si X est connexe par arcs, si $b \in B$ et si $x, y \in p^{-1}(b)$, alors les sous-groupes $p_*\pi_1(X, x)$ et $p_*\pi_1(X, y)$ sont conjugués dans le groupe $\pi_1(B, b)$.

2.7 Action sur la fibre du groupe fondamental de la base

Dans cette partie, nous construisons et étudions une action naturelle du groupe fondamental de la base sur la fibre d'un revêtement.

Soient $p : X \rightarrow B$ un revêtement, $b \in B$ et $F = p^{-1}(b)$ la fibre au-dessus de b .

Pour tous les $x \in F$ et $g \in \pi_1(B, b)$, soit α un lacet en b dans B représentant g , c'est-à-dire tel que $g = [\alpha]$. Nous notons $xg = \tilde{\alpha}(1) \in F$ l'extrémité de l'unique relèvement $\tilde{\alpha}$ de α d'origine x . Par le corollaire 2.15, le point xg de F ne dépend pas du choix du représentant α de g .

Proposition 2.18.

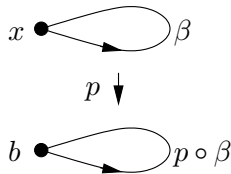
- (1) L'application $(x, g) \mapsto xg$ est une action à droite du groupe $\pi_1(B, b)$ sur la fibre F .
- (2) Le stabilisateur de $x \in F$ par l'action à droite du groupe $\pi_1(B, b)$ sur la fibre F est égal à $p_*\pi_1(X, x)$.

Démonstration. (1) Par unicité, pour tous les lacets α et α' en b , le relèvement d'origine x de la concaténation des chemins $\alpha \cdot \alpha'$ est la concaténation du relèvement $\tilde{\alpha}$ de α d'origine x et du relèvement $\tilde{\alpha}'$ de α' d'origine $\tilde{\alpha}(1) = x[\alpha]$. Le relevé d'origine x du chemin constant en b est le chemin constant en x . Nous obtenons donc

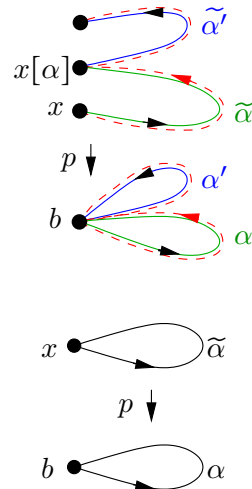
$$\forall x \in F, \forall g, g' \in \pi_1(B, b), \quad (xg)g' = x(gg') \quad \text{et} \quad xe = x$$

où e est l'élément neutre de $\pi_1(B, b)$.

- (2) Soit $g \in \pi_1(B, b)$ fixant x . Si α est un lacet en b représentant g , de relevé d'origine x noté $\tilde{\alpha}$, alors $\tilde{\alpha}(1) = x$, donc $\tilde{\alpha}$ est un lacet en x , dont la classe d'homotopie a pour image g par p_* .



Réciproquement, soit $g \in \pi_1(X, x)$ et β un lacet en x représentant g . Alors β est par unicité le relevé de $p \circ \beta$ d'origine x et $\beta(1) = x$. Donc $xp_*(g) = x$ et $p_*(g)$ appartient au stabilisateur de x . $\square$



Si X est un espace topologique, notons $\pi_0 X$ l'ensemble de ses composantes connexes par arcs.

Proposition 2.19. *Si B est connexe par arcs, l'application de F dans $\pi_0 X$, qui à $x \in F$ associe sa composante connexe par arcs C_x dans X , induit une bijection*

$$F/\pi_1(B, b) \simeq \pi_0 X$$

entre l'ensemble des orbites de $\pi_1(B, b)$ dans F et $\pi_0 X$.

Démonstration. L'application $\tilde{\theta} : F \rightarrow \pi_0 X$ définie par $x \mapsto C_x$ est surjective, car pour tout $y \in X$, si α est un chemin dans l'espace connexe par arcs B entre $p(y)$ et b , alors le relèvement de α d'origine y admet pour extrémité un point de F , qui appartient donc à la même composante connexe par arcs que y .

Par construction, pour tous les x et x' dans F , si $x' = xg$ pour un g dans $\pi_1(B, b)$, alors il existe un chemin entre x et x' . Donc l'application $\tilde{\theta}$ passe au quotient en une application surjective $\theta : F/\pi_1(B, b) \rightarrow \pi_0 X$.

Enfin, cette application θ est injective, car si deux points x et x' de F sont joints par un chemin α dans X , alors $p \circ \alpha$ est un lacet en b dans B , dont le relèvement d'origine x est exactement α , et en particulier a pour extrémité x' . Donc $x[p \circ \alpha] = x'$. $\square$

Il découle des propositions 2.19 et 2.18 que si B est connexe par arcs, alors X est connexe par arcs si et seulement si $\pi_1(B, b)$ agit transitivement sur F . Nous avons de plus le fait suivant, qui découle de la proposition B.1 de l'appendice B (n'utilisant que des propriétés des actions de groupes).

Corollaire 2.20. *Si X est connexe par arcs, alors pour tout x dans F , l'application de $\pi_1(B, b)$ dans F définie par $g \mapsto xg$ induit une bijection*

$$p_*\pi_1(X, x) \backslash \pi_1(B, b) \simeq F. \quad \square$$

En particulier, si X est connexe par arcs et si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alors p est un revêtement à n feuillets si et seulement si $p_*\pi_1(X, x)$ est un sous-groupe d'indice n de $\pi_1(B, b)$. Comme un revêtement est un homéomorphisme si et seulement si c'est un revêtement à 1 feuillet, nous avons le résultat suivant.

Corollaire 2.21. *Si X est connexe par arcs, alors p est un homéomorphisme si et seulement si le morphisme $p_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(B, b)$ est un isomorphisme de groupes (sa surjectivité suffit par le corollaire 2.16).* $\square$

Le corollaire suivant est assez souvent utilisé pour montrer que deux espaces sont homéomorphes (voir par exemple la démonstration du théorème de Poincaré sur les groupes de réflexions [Har1]).

Corollaire 2.22. *Un revêtement d'espace total connexe par arcs et de base simplement connexe est un homéomorphisme.*

Démonstration. Si $p : X \rightarrow B$ est un tel revêtement, alors le morphisme de groupes p_* est injectif par le corollaire 2.16, et d'image nulle car B est simplement connexe, donc est un isomorphisme. Par le corollaire 2.21 précédent, l'application p est donc un homéomorphisme. $\square$

Proposition 2.23. *Soient G un groupe discret, agissant proprement et librement sur un espace topologique X séparé et connexe par arcs, $p : X \rightarrow B = G \backslash X$ la projection canonique, $b \in B$ et $x \in F = p^{-1}(b)$. Pour tout $\gamma \in \pi_1(B, b)$, il existe un et un seul $g_\gamma \in G$ tel que $x\gamma = g_\gamma x$. L'application $\pi_1(B, b) \rightarrow G$ définie par $\gamma \mapsto g_\gamma$ est un morphisme de groupes, surjectif, de noyau $p_*\pi_1(X, x)$.*

Démonstration. Par définition, F est l'orbite de x par G , ce qui montre l'existence de g_γ . L'unicité vient du fait que l'action de G sur X est libre. Il est clair que $g_e = e$.

Soient g dans G et γ dans $\pi_1(B, b)$. Soit α un lacet en b représentant γ . Alors $x\gamma$ est l'extrémité du relèvement $\tilde{\alpha}$ de α d'origine x et $g(x\gamma)$ est donc l'extrémité du relèvement $g\tilde{\alpha}$ de α d'origine gx . Par unicité, nous avons donc $g(x\gamma) = (gx)\gamma$.

Par conséquent, pour tous les γ, γ' dans $\pi_1(B, b)$, nous avons

$$g_{\gamma'\gamma}x = x(\gamma'\gamma) = (x\gamma')\gamma = (g_{\gamma'}x)\gamma = g_{\gamma'}(x\gamma) = g_{\gamma'}(g_\gamma x) = (g_{\gamma'}g_\gamma)x.$$

Puisque l'action de G sur X est libre, nous avons $g_{\gamma'\gamma} = g_{\gamma'}g_\gamma$. Ceci montre que l'application $\gamma \mapsto g_\gamma$ est un morphisme de groupes.

La surjectivité découle du fait que le groupe $\pi_1(B, b)$ agit transitivement sur F car X est connexe par arcs (voir le commentaire suivant la démonstration de la proposition 2.19). Le noyau du morphisme de groupes $\gamma \mapsto g_\gamma$ est égal au stabilisateur de x dans $\pi_1(B, b)$, par la définition de g_γ et par la liberté de l'action, donc est égal à $p_*\pi_1(X, x)$ par la proposition 2.18 (2). $\square$

En particulier, sous les hypothèses de la proposition 2.23 précédente, le groupe image $p_*\pi_1(X, x)$ devient alors un sous-groupe distingué²⁴ de $\pi_1(B, b)$ et le groupe quotient associé $\pi_1(B, b)/p_*\pi_1(X, x)$ est isomorphe à G .

Corollaire 2.24. Soient G un groupe discret, agissant proprement et librement sur un espace topologique X séparé et simplement connexe, et $B = G \backslash X$. Alors pour tout $b \in B$, le groupe $\pi_1(B, b)$ est isomorphe à G . Plus précisément, si $x \in X$ est tel que $b = Gx$ soit l'orbite de x par G , alors l'unique application $\phi : \pi_1(B, b) \rightarrow G$ telle que $x\gamma = \phi(\gamma)x$ pour tout $\gamma \in \pi_1(B, b)$ est un isomorphisme de groupes. $\square$

Méthodologie 2 :

Olé Olé !

Pour calculer (à isomorphisme près) le groupe fondamental d'un espace topologique connexe par arcs B de point base b quelconque, on pourra montrer que B est (homéomorphe à) l'espace quotient d'un espace séparé et simplement connexe X par l'action propre et libre d'un groupe discret G , et de conclure par $\pi_1(B, b) \simeq G$ en invoquant le corollaire 2.24 ci-dessus (et l'invariance topologique des groupes fondamentaux, voir par exemple le corollaire 1.7).

Exemples :

- (1) Comme la projection canonique $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un revêtement, puisque $\mathbb{R}$ est séparé et simplement connexe, et puisque $\mathbb{S}_1$ est homéomorphe à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, nous avons donc

$$\pi_1(\mathbb{S}_1) \simeq \mathbb{Z}.$$

Plus généralement, $\pi_1(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n) \simeq \mathbb{Z}^n$.

- (2) Comme la projection canonique $\mathbb{S}_n \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{S}_n = \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est un revêtement, et puisque $\mathbb{S}_n$ est simplement connexe pour $n \geq 2$, nous avons donc

$$\text{si } n \geq 2, \text{ alors } \pi_1(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Comme $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ est homéomorphe au cercle, nous avons bien sûr $\pi_1(\mathbb{P}_1(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}$.

24. Ceci est une propriété remarquable d'un revêtement p défini par l'action libre et propre d'un groupe discret, qui n'est pas vérifiée par tous les revêtements, voir la partie 2.11

- (3) Comme la projection canonique $\mathbb{S}_{2n+1} \rightarrow \mathbb{U}_p \backslash \mathbb{S}_{2n+1} = L_{n,p}$ est un revêtement, et puisque $\mathbb{S}_{2n+1}$ est simplement connexe pour $n \geq 1$, le groupe fondamental de l'espace lenticulaire $L_{n,p}$ est donc

$$\forall n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \pi_1(L_{n,p}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

2.8 Groupes fondamentaux de graphes

Comme son nom l'indique, le but de cette partie est de calculer les groupes fondamentaux des graphes. Nous renvoyons à la partie 3 pour une autre méthode. Nous utiliserons la définition des graphes due à [Ser]. Nous renvoyons à l'appendice B.2 pour des rappels sur les groupes libres et les graphes de Cayley de groupes.

Un *graphe combinatoire*²⁵ est un quintuplet $X = (VX, EX, \bar{\cdot}, o, t)$ où

- VX et EX sont des ensembles,
- $\bar{\cdot} : EX \rightarrow EX$ est une involution sans point fixe,
- $o, t : EX \rightarrow VX$ sont deux applications telles que $t(\bar{e}) = o(e)$ pour tout $e \in EX$.

Les ensembles VX et EX sont appelés l'ensemble des *sommets* et l'ensemble des *arêtes* de X respectivement. Pour tout $e \in EX$, les sommets $o(e)$ et $t(e)$ sont appelés *l'origine* et *l'extrémité* de e respectivement, et l'arête $\bar{e}$ est appelée l'arête *opposée* à e . Notons que $\bar{e} \neq e$ par l'hypothèse d'involution sans point fixe.

Une *orientation* d'un graphe est un choix d'un des deux éléments de chaque paire $\{e, \bar{e}\}$ composée d'une arête e et de son arête opposée $\bar{e}$. Un *graphe orienté* est un graphe muni d'une orientation.

Le graphe X est dit *connexe* si pour tous les sommets distincts $v, v' \in VX$, il existe un *chemin d'arêtes* entre v et v' , c'est-à-dire une suite finie $(e_0, \dots, e_n)$ d'arêtes de X où $n \in \mathbb{N}$ telles que $t(e_{i-1}) = o(e_i)$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $o(e_0) = v$, $t(e_n) = v'$. Un graphe est un *arbre combinatoire* s'il est connexe et s'il ne contient pas de *cycle de longueur* $n \geq 2$, c'est-à-dire de chemin d'arêtes $(e_0, \dots, e_n)$ tel que $e_0 = e_n$, $o(e_i) = t(e_{i-1})$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et qui est *sans aller-retour*, c'est-à-dire vérifiant $e_i \neq \bar{e}_{i-1}$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Le graphe X est dit *localement fini* si pour tout sommet $v \in VX$ de X , l'ensemble $\{e \in EX : o(e) = v\}$ des arêtes de X d'origine v est fini.

Une *action* d'un groupe G sur un graphe X est un couple formé d'une action de G sur VX et d'une action de G sur EX tel que pour tous les $g \in G$ et $e \in EX$, nous ayons $o(ge) = g o(e)$, $t(ge) = g t(e)$, $\overline{ge} = g \bar{e}$ et $ge \neq \bar{e}$. Cette dernière condition s'appelle la propriété d'être *sans inversion*. Elle est nécessaire pour que le *graphe quotient* défini par $G \backslash X = (G \backslash VX, G \backslash EX, \bar{\cdot}, o, t)$ où $o(Ge) = G o(e)$, $t(Ge) = G t(e)$ et $\overline{Ge} = G \bar{e}$ soit bien un graphe (c'est-à-dire pour que l'application $\bar{\cdot} : G \backslash EX \rightarrow G \backslash EX$ soit bien une involution sans point fixe).

La *réalisation topologique* $|X|$ d'un graphe combinatoire X est, de manière informelle, l'espace topologique obtenu en prenant une copie I_e de l'intervalle $[0, 1]$ pour chaque arête e , en identifiant les intervalles I_e et $I_{\bar{e}}$ par symétrie, et en recollant l'origine/extrémité de l'intervalle I_e sur le sommet origine/extrémité de e . Plus précisément, $|X|$ est l'espace topologique quotient

$$|X| = (VX \sqcup (EX \times [0, 1])) / \mathcal{R}$$

de l'espace topologique somme disjointe $VX \sqcup (EX \times [0, 1])$, où VX et EX sont munis de la topologie discrète et $EX \times [0, 1]$ de la topologie produit, par la relation d'équivalence

25. Nous omettons le mot « combinatoire » lorsque le contexte est suffisant.

$\mathcal{R}$ engendrée par la relation $(e, t) \sim (\bar{e}, 1 - t)$, $v \sim (e, 0)$ si $o(e) = v$ et $v \sim (e, 1)$ si $t(e) = v$, pour tous les $t \in [0, 1]$, $v \in VX$ et $e \in EX$.

Un *graphe topologique*²⁶ (respectivement *arbre topologique*) est la réalisation topologique d'un graphe (respectivement arbre) combinatoire.

L'inclusion de VX dans $VX \sqcup (EX \times [0, 1])$ induit par passage au quotient un homéomorphisme sur son image, qui est une partie discrète de $|X|$, appelée par abus l'ensemble des *sommets* du graphe $|X|$ et encore notée VX .²⁷

Pour toute arête e , l'inclusion de $\{e\} \times]0, 1[$ dans $VX \sqcup (EX \times [0, 1])$ induit par passage au quotient un homéomorphisme sur son image, qui est un ouvert de $|X|$, appelée une *arête ouverte* de $|X|$. La préimage par la projection canonique de l'arête ouverte image de $\{e\} \times]0, 1[$ est exactement $\{e, \bar{e}\} \times]0, 1[$. La topologie induite sur la réunion des arêtes ouvertes, qui est égale à $|X| \setminus VX$, est la topologie faible (voir la partie A.2) définie par la famille des arêtes ouvertes.

Une action d'un groupe G sur un graphe combinatoire X induit une action (continue) du groupe discret G sur la réalisation topologique $|X|$ de X , obtenue en passant au quotient par la relation d'équivalence l'application

$$G \times (VX \sqcup (EX \times [0, 1])) \rightarrow (VX \sqcup (EX \times [0, 1]))$$

définie par $(g, v) \mapsto gv$ et $(g, (e, t)) \mapsto (ge, t)$ pour tous les $g \in G$, $v \in VX$, $e \in EX$ et $t \in [0, 1]$. La réalisation topologique $|G \backslash X|$ du graphe quotient $G \backslash X$ s'identifie avec l'espace topologique quotient $G \backslash |X|$ de la réalisation topologique $|X|$ par G .

Remarques. Un graphe topologique $|X|$ est un espace topologique séparé²⁸ et localement contractile.²⁹ Un compact de $|X|$ ne rencontre qu'un nombre fini d'arêtes ouvertes.³⁰

26. Nous omettons le mot « topologique » lorsque le contexte est suffisant.

27. L'ensemble des sommets de la réalisation topologique $|X|$ dépend du graphe combinatoire X , et pas seulement de l'espace topologique $|X|$. En particulier, si X a un sommet x de valence 2 (c'est-à-dire ayant deux et seulement deux arêtes d'origine x), alors le sommet x de $|X|$ ne se détecte pas topologiquement. Avant de donner d'autres exemples, définissons la *subdivision barycentrique* d'un graphe combinatoire $X = (VX, EX, -, o, t)$ comme le graphe combinatoire $X' = (VX', EX', -, o', t')$ où

- $VX' = VX \sqcup (EX / (e \sim \bar{e}))$, correspondant au fait de rajouter un sommet au “milieu” de chaque arête de X ,
- $EX' = EX \times \{-1, 1\}$
- pour tout $e \in EX$, nous avons $o'((e, -1)) = o(e)$, $t'((e, -1)) = \{e, \bar{e}\}$, $o'((e, 1)) = \{e, \bar{e}\}$, $t'((e, 1)) = t(e)$ et $(e, \pm 1)' = (\bar{e}, \mp 1)$.

Alors les réalisations topologiques d'un graphe et de sa subdivision barycentrique sont homéomorphes.

28. Si $(e, t), (e', t') \in EX \times [0, 1]$ ne sont pas équivalents pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$, il est élémentaire de construire des voisinages saturés disjoints de (e, t) et (e', t') , en distinguant les cas où $t, t' \in \{0, 1\}$.

29. Chaque arête ouverte est un voisinage ouvert contractile de chacun de ses points. La réunion d'un sommet v et des demi-arêtes ouvertes d'extrémités v est un voisinage ouvert contractile de v dans $|X|$.

30. Soit K un compact de $|X|$. Munissons toute arête ouverte $\overset{\circ}{e}$ de $|X|$, identifiée avec $]0, 1[$, de sa distance euclidienne d et notons $m_{\overset{\circ}{e}}$ son milieu. Supposons par l'absurde qu'il existe un ensemble infini E d'arêtes ouvertes rencontrant K . Pour tout $\overset{\circ}{e} \in E$, puisque $K \cap \overset{\circ}{e} \neq \emptyset$, notons

$$r_{\overset{\circ}{e}} = \min_{x \in K \cap \overset{\circ}{e}} d(x, m_{\overset{\circ}{e}}), \quad U_{\overset{\circ}{e}} = \{x \in \overset{\circ}{e} : d(m_{\overset{\circ}{e}}, x) < \frac{1 + 2r_{\overset{\circ}{e}}}{4}\}, \quad F_{\overset{\circ}{e}} = \{x \in \overset{\circ}{e} : d(x, m_{\overset{\circ}{e}}) \leq r_{\overset{\circ}{e}}\},$$

de sorte que $r_{\overset{\circ}{e}} \in [0, \frac{1}{2}[$, la partie $U_{\overset{\circ}{e}}$ soit un ouvert de $\overset{\circ}{e}$ et la partie $F_{\overset{\circ}{e}}$ soit un fermé de $\overset{\circ}{e}$. Enfin, notons $U = |X| \setminus \bigcup_{\overset{\circ}{e} \in E} F_{\overset{\circ}{e}}$, qui est un ouvert de $|X|$ par la définition de la topologie quotient et de la topologie somme disjointe. Alors $\{U\} \cup \{U_{\overset{\circ}{e}} : \overset{\circ}{e} \in E\}$ est un recouvrement ouvert de K qui n'a pas de sous-recouvrement fini. En effet, pour tout $x \in K$, ou bien il n'existe pas de $\overset{\circ}{e} \in E$ tel que $x \in \overset{\circ}{e}$, auquel cas $x \in U$, ou bien il existe

Un graphe topologique est connexe (donc connexe par arcs) si et seulement si le graphe combinatoire est connexe. Un graphe topologique est localement compact si et seulement si le graphe combinatoire est localement fini.

Proposition 2.25. *Un arbre est contractile. Tout groupe fondamental de graphe est un groupe libre.*

Démonstration. Soit x_0 un sommet d'un arbre (topologique) T . Pour tout $x \in T$, il existe un unique chemin d'arêtes sans aller-retour, paramétré de manière isométrique le long de chaque arête, de x_0 à x si x est un sommet, ou au premier sommet en partant de x_0 de l'unique arête e contenant x dans son intérieur sinon, et dans ce dernier cas, nous prolongeons le paramétrage jusqu'à x par l'unique paramétrage isométrique du segment de e entre v et x . La rétraction par déformation forte sur x_0 le long de ces paramétrages montre alors que T est contractile.

Soient X un graphe (topologique) et x_0 un sommet de X . Nous pouvons supposer que X est connexe (donc connexe par arcs), quitte à remplacer X par sa composante connexe contenant x_0 . Par le lemme de Zorn, il existe un arbre maximal dans X contenant x_0 . Par un écrasement de cet arbre maximal en x_0 comme ci-dessus, tout graphe connexe a le même type d'homotopie qu'un bouquet de cercles. Par invariance par homotopie (voir le corollaire 1.7), il suffit donc de montrer que si B est un bouquet de cercles de sommet b , et si S est l'ensemble de ses cercles, alors $\pi_1(B, b)$ est isomorphe au groupe libre $L(S)$.

Si T est le graphe de Cayley (voir la partie B.3) du groupe $L(S)$ pour sa partie génératrice S , alors T est un arbre. L'espace topologique quotient $L(S) \backslash T$ est homéomorphe à B et la projection canonique $T \rightarrow L(S) \backslash T$ est un revêtement (voir le lemme B.4 de l'appendice B.3 pour un résultat plus général). Comme T est contractile, donc simplement connexe, et séparé, le résultat découle donc du corollaire 2.24. $\square$

Corollaire 2.26. *(Théorème de Schreier) Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.*

Démonstration. Soit H un sous-groupe du groupe libre $L(S)$ sur un ensemble S . Soit T le graphe de Cayley du groupe $L(S)$ pour sa partie génératrice S . Le groupe H agit aussi proprement et librement sur T . Puisque T est simplement connexe et séparé, le groupe fondamental de $H \backslash T$ est isomorphe à H par le corollaire 2.24. Puisque le quotient $H \backslash T$ est un graphe, le résultat découle de la proposition 2.25. $\square$

2.9 Relèvement des applications

Dans cette partie, nous étudions l'existence de relèvements d'applications à valeurs dans la base d'un revêtement.

Théorème 2.27. (Théorème du relèvement) *Soient $p : X \rightarrow B$ un revêtement, Y un espace topologique connexe et localement connexe par arcs, et $f : Y \rightarrow B$ une application continue. Soient $y \in Y$, $b = f(y)$ et $x \in p^{-1}(b)$. Il existe un relèvement $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ de f par p tel que $\tilde{f}(y) = x$ si et seulement si*

$$f_* \pi_1(Y, y) \subset p_* \pi_1(X, x) .$$

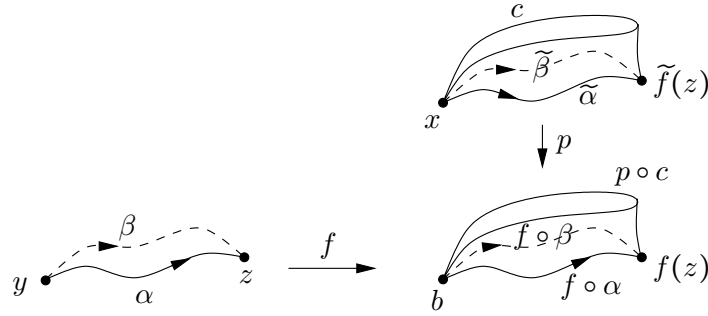
$e \in E$ tel que $x \in \overset{\circ}{e}$, auquel cas $d(x, m_e) \geq r_e$. Si $d(x, m_e) > r_e$, alors $x \in U$. Enfin, si $d(x, m_e)$ est égal à r_e , qui est strictement inférieur à $\frac{1+2r_e}{4}$ car $r_e < \frac{1}{2}$, alors $x \in U_e$.

Démonstration. Si un tel relèvement existe, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & (X, x) & \\ \tilde{f} \nearrow & \downarrow p & \\ (Y, y) & \xrightarrow{f} & (B, b) \end{array}$$

commute, c'est-à-dire $f = p \circ \tilde{f}$, donc $f_* = p_* \circ \tilde{f}_*$. Ceci montre que la condition est nécessaire.

Réciproquement, supposons que $f_*\pi_1(Y, y) \subset p_*\pi_1(X, x)$. Pour tout z dans Y , choisissons³¹ un chemin α de y à z . Alors $f \circ \alpha$ est un chemin de b à $f(z)$. Nous notons $\tilde{f}(z)$ l'extrémité de l'unique relevé $\tilde{\alpha}$ de $f \circ \alpha$ d'origine x .



Si β est un autre chemin de y à z , notons $\tilde{\beta}$ le relevé de $f \circ \beta$ d'origine x . Alors

$$[(f \circ \alpha) \cdot \overline{(f \circ \beta)}] = [f \circ (\alpha \cdot \overline{\beta})] \in f_*\pi_1(Y, y) \subset p_*\pi_1(X, x).$$

Il existe donc un lacet c en x dans X tel que $(f \circ \alpha) \cdot \overline{(f \circ \beta)}$ soit homotope à $p \circ c$. Par les propriétés de relèvement des homotopies et d'unicité du relèvement d'origine donnée d'un chemin, nous en déduisons que les chemins $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ ont la même extrémité. Donc $\tilde{f}(z)$ ne dépend pas du choix de α .

Soit U un voisinage ouvert de $\tilde{f}(z)$ tel que $p(U)$ soit ouvert et $p|_U$ soit un homéomorphisme sur son image. Soit $V \subset f^{-1}(p(U))$ un voisinage ouvert connexe par arcs de z . Pour tout w dans V , si α' est un chemin de z à w contenu dans V , alors $\tilde{f}(w)$ est l'extrémité du relèvement de $f \circ (\alpha \cdot \alpha') = (f \circ \alpha) \cdot (f \circ \alpha')$ d'origine x , donc appartient à U . Par conséquent, $\tilde{f}$ est continue. $\square$

Le corollaire immédiat suivant dit qu'un revêtement possède la propriété de relèvement (unique lorsque des points bases sont choisis) de toutes les applications continues définies sur un espace simplement connexe (et localement connexe par arcs).

Corollaire 2.28. *Si $p : X \rightarrow B$ est un revêtement, pour tout espace topologique Y localement connexe par arcs et simplement connexe, pour toute application continue $f : Y \rightarrow B$, pour tous les $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $p(x) = f(y)$, il existe un et un seul relèvement $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ de f tel que $\tilde{f}(y) = x$.*

Démonstration. Nous avons $\pi_1(Y, y) = \{e\}$ car Y est simplement connexe. Par conséquent $f_*\pi_1(Y, y) = \{e\} \subset p_*\pi_1(X, x)$, et le théorème du relèvement 2.27 s'applique. L'unicité découle de la proposition 2.11. $\square$

31. Rappelons (voir la partie A.1.6 de l'appendice A) qu'un espace connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs, car la composante connexe par arcs de tout point d'un tel espace est à la fois ouverte et de complémentaire ouvert.

Corollaire 2.29. *Deux revêtements $p : X \rightarrow B$ et $p' : X' \rightarrow B$, tels que X et X' soient simplement connexes et localement connexes par arcs, sont isomorphes. De plus, si $x \in X$ et $x' \in X'$ sont tels que $p(x) = p'(x')$, alors il existe un unique isomorphisme de revêtements $\phi : X \rightarrow X'$ de p sur p' envoyant x sur x' .*

Démonstration. Par le corollaire précédent, soit $\tilde{p} : X \rightarrow X'$ le relèvement de l'application continue p par le revêtement p' tel que $\tilde{p}(x) = x'$. De même, notons $\tilde{p}' : X' \rightarrow X$ le relèvement de l'application continue p' par le revêtement p tel que $\tilde{p}'(x') = x$. Alors l'application continue $\tilde{p} \circ \tilde{p}' : X' \rightarrow X'$ est un morphisme de revêtements de p' sur p' . En effet, pour tous les $y' \in X'$ et $y \in X$, nous avons $\tilde{p}'(y') \in p^{-1}(p'(y'))$ et $\tilde{p}(y) \in (p')^{-1}(p(y))$, donc

$$\tilde{p} \circ \tilde{p}'(y') \in (p')^{-1}(p(p^{-1}(p'(y')))) = (p')^{-1}(p'(y')) ,$$

d'où $p'(\tilde{p} \circ \tilde{p}'(y')) = p'(y')$. Ce morphisme fixe x' , donc vaut l'identité de X' (voir le corollaire 2.12 (1)) car X' est connexe. De même $\tilde{p}' \circ \tilde{p} = \text{id}_X$ et $\tilde{p}$ est un isomorphisme de revêtements. L'unicité découle aussi du corollaire 2.12 (1). $\square$

Exercice E.18. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ l'application $z \mapsto z^n$. Montrer qu'une application continue $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ admet un relèvement par le revêtement p si et seulement si son degré³² divise n .

2.10 Structure des morphismes de revêtements

Dans cette partie essentiellement technique (et donc qui peut être omise en première lecture), nous introduisons les outils permettant de montrer l'équivalence des définitions de revêtement galoisien (voir la partie 2.11). Nous étudions pour cela les propriétés des morphismes de revêtements.

Soient $p : X \rightarrow B$ et $p' : X' \rightarrow B$ deux revêtements de même base, $b \in B$, $F = p^{-1}(b)$ la fibre au-dessus de b dans X et $F' = p'^{-1}(b)$ celle dans X' .

Soit $f : X \rightarrow X'$ un morphisme de revêtements de p sur p' . En particulier, $f(F) \subset F'$. De plus, l'application $f|_F : F \rightarrow F'$ est $\pi_1(B, b)$ -équivariante³³ (pour les actions à droite de $\pi_1(B, b)$ sur F et sur F' , voir la partie 2.7), c'est-à-dire

$$\forall g \in \pi_1(B, b), \quad \forall x \in F, \quad f(xg) = f(x)g .$$

En effet, si $g = [\alpha]$, alors xg est l'extrémité de l'unique chemin $\tilde{\alpha}$ de X d'origine x qui est un relèvement de α par p . Puisque $p' \circ f = p$ et $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, le chemin $f \circ \tilde{\alpha}$ dans X' est un relèvement par p' de α d'origine $f(x)$. Donc son extrémité $f(xg)$ vaut $f(x)g$ par unicité.

Notons $\text{Mor}(p, p')$ l'ensemble des morphismes de revêtements de p sur p' , et notons $\text{Mor}_{\pi_1(B, b)}(F, F')$ l'ensemble des applications $\pi_1(B, b)$ -équivariantes de F dans F' .

Proposition 2.30. *Si B est connexe et localement connexe par arcs, alors l'application*

$$\begin{aligned} \Theta : \text{Mor}(p, p') &\rightarrow \text{Mor}_{\pi_1(B, b)}(F, F') \\ f &\mapsto f|_F \end{aligned}$$

est une bijection.

32. Voir l'exercice E.12.

33. Voir l'appendice B.1 pour la terminologie.

Démonstration. Étape 1 : Ramènon-nous tout d'abord au cas où X est connexe par arcs.

Lemme 2.31. *Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement, de base B connexe et localement connexe par arcs. Si C est une composante connexe par arcs de X , alors $p|_C : C \rightarrow B$ est un revêtement.*

Démonstration. Pour tout $b \in B$, soit V un voisinage distingué et connexe par arcs de b , et $\theta : V \times D \rightarrow p^{-1}(V)$ une trivialisatation locale de p au-dessus de V . Notons D' l'ensemble des éléments d dans D tels que $\theta(V \times \{d\}) \cap C \neq \emptyset$ ou, de manière équivalente puisque $\theta(V \times \{d\})$ est connexe par arcs comme image d'un espace connexe par arcs par une application continue, tels que $\theta(V \times \{d\}) \subset C$.

Si $x \in C$, notons α un chemin³⁴ entre $p(x)$ et b , et $\tilde{\alpha}$ son relevé d'origine x . Alors $\tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(V) \cap C$ et si $d' \in D$ est tel que $\tilde{\alpha}(1) \in \theta(V \times \{d'\})$, alors la partie connexe par arcs $\theta(V \times \{d'\})$, qui contient $\tilde{\alpha}(1)$, est contenue dans la composante connexe par arcs de $\tilde{\alpha}(1)$ dans X , qui est égale à C . Donc $d' \in D'$ et D' est non vide.

Puisque l'intersection $\theta(V \times \{d\}) \cap C$ est vide si $d \notin D'$, la restriction $\theta|_{V \times D'}$ est une trivialisatation locale de $p|_C$ au-dessus de V . $\square$

Soit $(X_i)_{i \in I}$ la famille des composantes connexes par arcs de X . Par la proposition 2.19, les orbites de $\pi_1(B, b)$ dans F sont les $F \cap X_i$ pour $i \in I$. Les restrictions à chaque X_i des applications de X dans X' , et de F dans F' , donnent donc des bijections

$$\text{Mor}(p, p') \simeq \prod_{i \in I} \text{Mor}(p|_{X_i}, p') \quad \text{et} \quad \text{Mor}_{\pi_1(B, b)}(F, F') \simeq \prod_{i \in I} \text{Mor}_{\pi_1(B, b)}(F \cap X_i, F').$$

Si la proposition 2.30 est vraie pour chaque X_i , elle est donc vraie pour X .

Étape 2 : Nous supposons maintenant que X est connexe par arcs. En particulier, l'action de $\pi_1(B, b)$ sur F est transitive (voir la proposition 2.19).

Pour montrer que l'application Θ est injective, soient f et g dans $\text{Mor}(p, p')$ telles que $f|_F = g|_F$. Comme F est non vide et X connexe, nous avons $f = g$ par le corollaire 2.12 (1).

Pour montrer que l'application Θ est surjective, considérons $\phi : F \rightarrow F'$ une application $\pi_1(B, b)$ -équivariante. Soient $x \in F$ et $x' = \phi(x) \in F'$.

Montrons qu'il existe un (unique) relèvement $f : X \rightarrow X'$ de l'application continue $p : X \rightarrow B$ par le revêtement $p' : X' \rightarrow B$ tel que $f(x) = x'$. En effet, par le théorème du relèvement 2.27, il suffit de montrer que $p_*\pi_1(X, x)$ est contenu dans $p'_*\pi_1(X', x')$. Par la proposition 2.18, le stabilisateur de x (respectivement x') par l'action de $\pi_1(B, b)$ sur F (respectivement F') est égal à $p_*\pi_1(X, x)$ (respectivement $p'_*\pi_1(X', x')$). Comme ϕ est équivariante, si $g \in p_*\pi_1(X, x)$, alors

$$x'g = \phi(x)g = \phi(xg) = \phi(x) = x'.$$

Donc $g \in p'_*\pi_1(X', x')$, ce qui montre l'existence de f .

Comme les applications $f|_F$ et ϕ sont $\pi_1(B, b)$ -équivariantes, comme l'action de $\pi_1(B, b)$ sur F est transitive et comme $f(x) = \phi(x)$, nous avons donc $f|_F = \phi$. Puisqu'un relèvement d'un revêtement p par un revêtement p' est un morphisme de revêtements de p sur p' comme vu dans la démonstration du corollaire 2.29, ceci montre la surjectivité. $\square$

34. qui existe car B est connexe par arcs, voir la note de bas de page 31.

Corollaire 2.32. *Sous les hypothèses de la proposition 2.30, la restriction à F induit une bijection de l'ensemble $\text{Isom}(p, p')$ des isomorphismes de revêtements de p sur p' à valeurs dans l'ensemble $\text{Isom}_{\pi_1(B, b)}(F, F')$ des bijections $\pi_1(B, b)$ -équivariantes de F sur F' .*

Démonstration. Si $f : X \rightarrow X'$ est un isomorphisme de revêtements, alors $f|_F$ est une bijection (d'inverse $g|_{F'}$ où $g : X' \rightarrow X$ est l'isomorphisme de revêtements inverse de f).

Réciproquement, si $\phi : F \rightarrow F'$ est une bijection $\pi_1(B, b)$ -équivariante, d'inverse noté $\psi : F' \rightarrow F$, soient $f : X \rightarrow X'$ et $g : X' \rightarrow X$ les morphismes de revêtements tels que nous ayons $f|_F = \phi$ et $g|_{F'} = \psi$. Alors $g \circ f$ est un morphisme de revêtements de p sur p , tel que $g \circ f|_F = \text{id}_{X|_F}$, donc par unicité (et puisque F est non vide), nous avons $g \circ f = \text{id}_X$. De même, nous avons $f \circ g = \text{id}_{X'}$ et l'application $f : X \rightarrow X'$ est un isomorphisme de revêtements. $\square$

En particulier, les revêtements p et p' sont isomorphes si et seulement s'il existe une bijection $\pi_1(B, b)$ -équivariante de F sur F' .

Corollaire 2.33. *Si $p : X \rightarrow B$ est un revêtement, de base B connexe et localement connexe par arcs, s'il existe $b \in B$ tel que l'action de $\pi_1(B, b)$ sur $F = p^{-1}(b)$ soit triviale, alors p est un revêtement trivial.*

Démonstration. L'application $\text{pr}_1 : B \times F \rightarrow B$ est un revêtement de B , et l'action de $\pi_1(B, b)$ sur $\text{pr}_1^{-1}(b) = \{b\} \times F$ est triviale (car si x et x' sont deux points distincts de F , alors il n'existe pas de chemin entre (b, x) et (b, x')). Donc la seconde projection $\text{pr}_1^{-1}(b) = \{b\} \times F \rightarrow p^{-1}(b) = F$ est une bijection $\pi_1(B, b)$ -équivariante. Par le corollaire 2.32, les revêtements $\text{pr}_1 : B \times F \rightarrow B$ et $p : X \rightarrow B$ sont donc isomorphes. $\square$

Corollaire 2.34. *Tout revêtement d'un espace simplement connexe et localement connexe par arcs est trivial.*

Démonstration. Toute action d'un groupe trivial est triviale. $\square$

Avant de donner d'autres applications de la proposition 2.30, voici quelques rappels de théorie des groupes.

Soit H un sous-groupe d'un groupe G . Le *normalisateur* de H dans G est

$$N(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

Il est facile de montrer que $N(H)$ est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est distingué, et que H est distingué dans G si et seulement si $N(H) = G$.

Pour l'action à droite par translations à droite $(Hg', g) \mapsto Hg'g$ de G sur $H \backslash G$, notons $\text{Aut}_G(H \backslash G)$ le groupe des bijections G -équivariantes de l'ensemble $H \backslash G$ muni de cette action.

Lemme 2.35. *Les groupes $\text{Aut}_G(H \backslash G)$ et $H \backslash N(H)$ sont isomorphes.*

Démonstration. Pour tout $\phi \in \text{Aut}_G(H \backslash G)$, soit $n = n_\phi \in G$ tel que $\phi(He) = Hn$. Par la G -équivariance de ϕ , nous avons,

$$\forall g \in G, \quad \phi(Hg) = \phi(Heg) = \phi(He)g = Hng. \quad (2)$$

En particulier, $Hen = \phi(He) = \phi(Hh) = Hnh$ pour tout $h \in H$. En multipliant à droite cette égalité par n^{-1} , nous avons $nhn^{-1} \in H$ pour tout $h \in H$. Donc n appartient à $N(H)$. Nous avons par conséquent une application

$$\begin{aligned} \text{Aut}_G(H \backslash G) &\rightarrow H \backslash N(H) \\ \phi &\mapsto Hn_\phi \end{aligned} .$$

C'est un morphisme de groupes injectif par la formule (2) ci-dessus, qui montre d'une part que $n = n_\phi$ détermine ϕ , d'autre part que si ϕ' est un autre élément de $\text{Aut}_H(H \backslash G)$, alors

$$Hn_{\phi' \circ \phi} = \phi' \circ \phi(He) = \phi'(Hn_\phi) = Hn_{\phi'}n_\phi .$$

Pour tous les n dans $N(H)$ et h dans H , l'application $\bar{\phi} : G \rightarrow H \backslash G$ définie par $\bar{\phi}(g) = Hng$ vérifie $\bar{\phi}(hg) = Hnhg = H(nhn^{-1})ng = \bar{\phi}(g)$. Elle induit donc par passage au quotient une application $\phi_n : H \backslash G \rightarrow H \backslash G$. Celle-ci est G -équivariante et bijective, d'inverse $\phi_{n^{-1}}$, et son image par l'application $\text{Aut}_G(H \backslash G) \rightarrow H \backslash N(H)$ est la classe à gauche Hn . Donc l'application $\phi \mapsto Hn_\phi$ est surjective. $\square$

En particulier, le groupe des bijections G -équivariantes de $H \backslash G$ (pour l'action à droite de G sur $H \backslash G$) agit transitivement sur $H \backslash G$ si et seulement si $N(H) = G$, c'est-à-dire si et seulement si H est distingué dans G .

Corollaire 2.36. *Si $p : X \rightarrow B$ est un revêtement, d'espace total X connexe et localement connexe par arcs, et si $x \in X$, alors les groupes $\text{Aut}(p)$ et $p_*\pi_1(X, x) \backslash N(p_*\pi_1(X, x))$ sont isomorphes.*

Démonstration. Soient $b = p(x)$ et $F = p^{-1}(b)$. Puisque X est connexe par arcs,³⁵ son image B par l'application continue p l'est aussi. Par l'affirmation qui précède le corollaire 2.20, l'action à droite de $G = \pi_1(B, b)$ sur F est transitive. Donc il existe une bijection G -équivariante entre F et $H \backslash G$ où H est le stabilisateur de x par l'action de G sur F , qui est égal à $p_*\pi_1(X, x)$ par la proposition 2.18 (2). Par le corollaire 2.32 et le lemme 2.35 précédent, nous avons donc

$$\text{Aut}(p) \simeq \text{Aut}_{\pi_1(B, b)}(F) \simeq \text{Aut}_G(H \backslash G) \simeq H \backslash N(H) = p_*\pi_1(X, x) \backslash N(p_*\pi_1(X, x)). \quad \square$$

Voici enfin les dernières propriétés des automorphismes de revêtements dont nous aurons besoin dans la suite.

Proposition 2.37. *Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement, d'espace total X connexe, et de base B localement connexe et séparée. Le groupe discret $\Gamma = \text{Aut}(p)$ des automorphismes de p agit (continuellement) proprement et librement sur X . Si Γ' est un sous-groupe de Γ et si $p_{\Gamma'} : \Gamma' \backslash X \rightarrow B$ est l'application induite par p , alors $p_{\Gamma'}$ est un revêtement, et la projection canonique $\pi : X \rightarrow \Gamma' \backslash X$ est un morphisme de revêtements de p sur $p_{\Gamma'}$.*

Démonstration. Notons que X est séparé (voir l'exercice E.23 (1) dans la partie 2.14). Comme X est connexe, le groupe Γ agit librement sur X par le corollaire 2.12 (1). Soit $\mathbf{gr} : \Gamma \times X \rightarrow X \times X$ l'application graphe $(g, x) \mapsto (x, gx)$. Comme Γ agit librement et comme $\Gamma \times X$ est séparé, l'image réciproque d'un singleton par $\mathbf{gr}$ est un singleton, donc compact. Soient F un fermé de $\Gamma \times X$ et $(x, y) \in \overline{\mathbf{gr}(F)}$. Comme $p \times p$ est continue et B séparé, si Δ

35. voir la note de bas de page 31

est la diagonale de $B \times B$, alors Δ est fermée dans $B \times B$ (voir l'exercice E.A.119 dans la partie A.5 de l'appendice A). Par la continuité de $p \times p$ (voir la partie A.1.3 de l'appendice A pour l'inclusion ci-dessous), nous avons

$$(p \times p)(x, y) \in (p \times p)(\overline{\mathbf{gr}(F)}) \subset \overline{(p \times p)(\mathbf{gr}(F))} \subset \overline{\Delta} = \Delta.$$

Donc $p(x) = p(y)$. Soit V un voisinage distingué connexe de $p(x)$, qui existe puisque B est localement connexe. Soient V_x et V_y les composantes connexes de $p^{-1}(V)$ contenant x et y respectivement. Comme $(x, y) \in \overline{\mathbf{gr}(F)}$, l'intersection $(V_x \times V_y) \cap \mathbf{gr}(F)$ est non vide. Soient $g \in \Gamma$ et $u \in X$ tels que $u \in V_x$ et $gu \in V_y$. Comme g est un automorphisme de revêtements de p , nous avons donc $gV_x = V_y$ et en particulier $y = gx$. Donc $\mathbf{gr}$ est fermée. Par conséquent, le groupe Γ agit proprement sur X .

Tout sous-groupe Γ' de Γ agit aussi librement et proprement. Si V est un ouvert distingué connexe dans B pour p , alors, puisque Γ' permute les composantes connexes de $p^{-1}(V)$, il est immédiat que V est aussi un ouvert distingué dans B pour $p_{\Gamma'}$.

Puisque Γ préserve les fibres de p , la projection canonique π envoie fibre de p dans fibre de $p_{\Gamma'}$, donc π est un morphisme de revêtements de p sur $p_{\Gamma'}$. $\square$

Proposition 2.38. *Soient $p : X \rightarrow B$ et $p' : X' \rightarrow B$ deux revêtements, d'espaces totaux X et X' connexes et de base B localement connexe. Si $\phi : X \rightarrow X'$ est un morphisme de revêtements de p sur p' , alors ϕ est un revêtement.*

Démonstration. Soient $x' \in X'$, $b = p'(x')$ et V un voisinage connexe de b , distingué pour p et pour p' . Soit $s' : V \rightarrow p'^{-1}(V)$ la section du revêtement trivial $p'|_{p'^{-1}(V)}$ telle que $s'(b) = x'$.

Si $\phi(X)$ rencontre $s'(V)$, soient $y \in X$ et $b' \in V$ tels que $\phi(y) = s'(b')$. Nous notons $s : V \rightarrow p^{-1}(V)$ la section du revêtement trivial $p|_{p^{-1}(V)}$ telle que $s(b') = y$, ce qui est possible car $p(y) = p' \circ \phi(y) = p' \circ s'(b') = b'$. Puisque $p' \circ \phi = p$, les applications $\phi \circ s$ et s' sont deux sections de $p'|_{p'^{-1}(V)}$ qui coïncident en b' , donc sont égales, car V est connexe (voir le corollaire 2.12 (3)). En particulier, comme $x' = s'(b) \in s'(V) = \phi \circ s(V)$, nous avons $x' \in \phi(X)$. Donc par contraposition, si $x' \notin \phi(X)$, alors $\phi(X)$ ne rencontre pas le voisinage $s'(V)$ de x' . En faisant varier x' dans X' , ceci montre que le complémentaire de $\phi(X)$ est ouvert.

L'image réciproque $\phi^{-1}(x')$ est discrète, car contenue dans la fibre $p^{-1}(p'(x'))$ puisque $p' \circ \phi = p$. Pour tout x dans $\phi^{-1}(x')$, notons $s_x : V \rightarrow p^{-1}(V)$ la section du revêtement trivial $p|_{p^{-1}(V)}$ telle que $s_x(b) = x$, ce qui est possible car $p(x) \in p(\phi^{-1}(x')) = \{p'(x')\} = \{b\}$. Comme ci-dessus, nous avons $\phi \circ s_x = s'$. Donc l'homéomorphisme de $s'(V) \times \phi^{-1}(x')$ dans $\phi^{-1}(s'(V)) = \bigcup_{x \in \phi^{-1}(x')} s_x(V) \subset p^{-1}(V)$ défini par $(u, x) \mapsto s_x \circ p'(u)$ est une trivialisation de ϕ au-dessus de $s'(V)$.

En particulier, l'application ϕ est ouverte. D'où $\phi(X)$ est ouvert non vide et de complémentaire ouvert dans X' , donc est égal à X' par connexité. Comme $\phi^{-1}(x')$ est non vide, nous en déduisons que ϕ est un revêtement. $\square$

2.11 Revêtements galoisiens

Le but de cette partie est de décrire de manière intrinsèque la collection des revêtements isomorphes aux revêtements de la forme $X \rightarrow G \backslash X$ où G est un groupe discret agissant librement et proprement sur un espace topologique séparé X .

Théorème 2.39. Soient $p : X \rightarrow B$ un revêtement, d'espace total X connexe et localement connexe par arcs, $x \in X$, $b = p(x)$ et $F = p^{-1}(b)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) l'action de $\text{Aut}(p)$ sur F est transitive ;
- (2) le sous-groupe $p_*\pi_1(X, x)$ est distingué dans $\pi_1(B, b)$;
- (3) nous avons $p_*\pi_1(X, y) = p_*\pi_1(X, z)$ pour tous les y et z dans F ;
- (4) pour tout lacet α de B en b , ou bien tout relèvement de α est un lacet, ou bien aucun relèvement de α n'est un lacet.

Si B est séparé, ces conditions sont équivalentes à :

- (5) il existe un groupe discret Γ agissant librement et proprement sur X et un homéomorphisme $f : \Gamma \backslash X \rightarrow B$ tels que si $\pi : X \rightarrow \Gamma \backslash X$ est la projection canonique, alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \pi \swarrow & & \searrow p \\ \Gamma \backslash X & \xrightarrow{f} & B . \end{array}$$

Démonstration. Supposons que l'assertion (1) soit vérifiée. Alors l'assertion (4) l'est aussi, par l'unicité des relèvements des chemins d'origine donnée dans la fibre F et puisque $\text{Aut}(p)$ préserve l'ensemble des relèvements d'un lacet en b dans B .

Supposons que l'assertion (4) soit vérifiée. Pour tous les y et z dans F , si α est un lacet en y dans X , alors α est un relèvement de $p \circ \alpha$ qui est un lacet, donc le relèvement β de $p \circ \alpha$ d'origine z est aussi un lacet, et $p_*[\alpha] = p_*[\beta]$. Donc $p_*\pi_1(X, y) \subset p_*\pi_1(X, z)$. En échangeant y et z , l'assertion (3) est donc vérifiée.

Supposons que l'assertion (3) soit vérifiée. Pour tout lacet α en b dans B , soit c son relèvement d'origine x , soit y l'extrémité de c , et soit $\phi_{\bar{c}} : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$ l'isomorphisme de groupes $[\beta] \mapsto [\bar{c} \cdot \beta \cdot c]$ (voir la proposition 1.3). Puisque $p \circ c = \alpha$, pour tout $[\beta] \in \pi_1(X, x)$, nous avons l'égalité

$$p_*([\bar{c} \cdot \beta \cdot c]) = [p \circ (\bar{c} \cdot \beta \cdot c)] = [(p \circ \bar{c}) \cdot (p \circ \beta) \cdot (p \circ c)] = [\alpha]^{-1} p_*([\beta]) [\alpha] .$$

En utilisant l'assertion (3) pour la dernière égalité, nous avons alors

$$[\alpha] p_*\pi_1(X, x) [\alpha]^{-1} = p_*(\phi_{\bar{c}}(\pi_1(X, x))) = p_*\pi_1(X, y) = p_*\pi_1(X, x) .$$

Donc l'assertion (2) est vérifiée.

Montrons que l'assertion (2) implique l'assertion (1).³⁶ Considérons les deux groupes $G = \pi_1(B, b)$ et $H = p_*\pi_1(X, x)$. Par la remarque précédant le corollaire 2.36, puisque H est un sous-groupe distingué de G par l'assertion (2), le groupe $\text{Aut}_G(H \backslash G)$ agit transitivement sur $H \backslash G$.³⁷ Comme X est connexe par arcs,³⁸ il existe par le corollaire 2.20 une

36. Cette implication peut être admise par le lecteur ou la lectrice n'ayant pas lu la partie 2.10.

37. Voici un argument direct. Pour tout $g \in G$, notons $\varphi_g : H \backslash G \rightarrow H \backslash G$ l'application définie par $Hg' \mapsto Hgg'$. Cette application est bien définie car pour tout $h \in H$, nous avons $Hghg' = Hghg^{-1}gg' = Hgg'$ puisque H est distingué dans G . Elle est clairement équivariante pour l'action par translations à droite de G sur $H \backslash G$, et elle est bijective d'inverse $\varphi_{g^{-1}}$. Donc $\varphi_g \in \text{Aut}_G(H \backslash G)$. Comme φ_g envoie He sur Hg , ceci montre le résultat en faisant varier g dans G .

38. Voir la note de bas de page 31.

bijection de F sur $H \backslash G$, qui est G -équivariante pour les actions à droite de G sur F et sur $H \backslash G$. Donc par le corollaire 2.32, puisque le groupe des bijections G -équivariantes de $H \backslash G$ agit transitivement sur $H \backslash G$, le groupe $\text{Aut}(p)$ agit transitivement sur F , ce qui montre l'assertion (1).

Supposons maintenant que la base B soit séparée. Notons que B est aussi localement connexe (par arcs), car p est un homéomorphisme local surjectif.

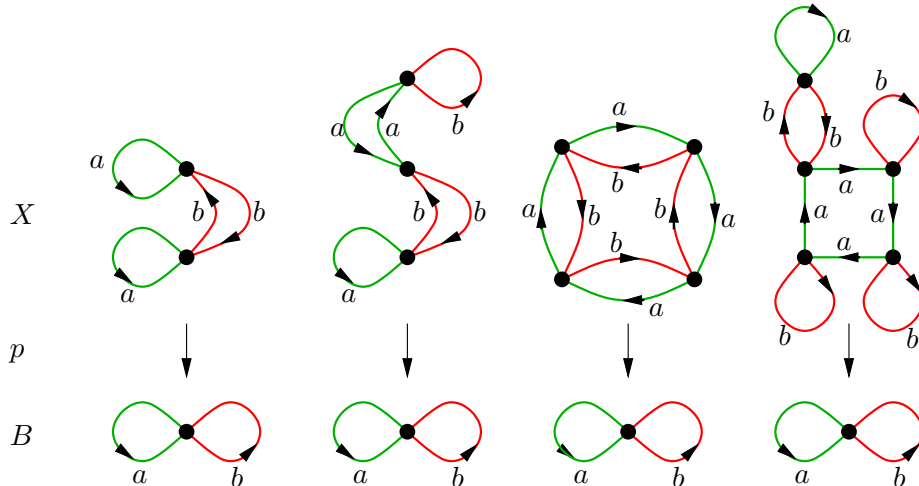
Supposons que l'assertion (5) soit vérifiée. Puisque Γ agit librement, il s'identifie avec un groupe d'homéomorphismes de X via l'application $g \mapsto \{x \mapsto gx\}$. Alors Γ , qui préserve les fibres (qui sont les orbites de Γ), est contenu dans $\text{Aut}(\pi)$ et agit transitivement sur chacune des fibres de π . Donc l'assertion (1) est vérifiée.

Réciproquement, supposons que l'assertion (1) soit vérifiée. Alors par la proposition 2.37, puisque X est connexe et B est localement connexe et séparée, le groupe discret $\Gamma = \text{Aut}(p)$ agit proprement et librement sur X , et l'application $f = p_\Gamma : \Gamma \backslash X \rightarrow B$ induite par p par passage au quotient est un revêtement. Puisque Γ agit transitivement sur les fibres par l'assertion (1), le revêtement f est à un feuillet. Par la proposition 2.2, l'application f est donc un homéomorphisme, et elle vérifie $f \circ \pi = p$. Par conséquent, l'assertion (5) est vérifiée. $\square$

Un revêtement $p : X \rightarrow B$, d'espace total X connexe et localement connexe par arcs, est dit *galoisien* si l'une des propriétés (1)-(4) du théorème précédent est vérifiée. Le groupe $\Gamma = \text{Aut}(p)$ s'appelle alors le *groupe de Galois* de p .

Exemple. Comme tout sous-groupe d'un groupe abélien est distingué et par la définition (2) du théorème précédent, tout revêtement connexe d'un espace topologique connexe, localement connexe par arcs, de groupe fondamental abélien, est galoisien.

Exercice E.19. Montrer que les applications $p : X \rightarrow B$ suivantes entre graphes sont des revêtements. Quels sont ceux qui sont galoisiens ? Quels sont leurs groupes d'automorphismes de revêtements ? (Les sommets de X sont envoyés par p sur l'unique sommet de B , et la restriction de p à chaque arête ouverte orientée du graphe X étiquetée par une lettre, est un homéomorphisme préservant l'orientation sur l'arête ouverte orientée de B étiquetée par la même lettre.)



2.12 Revêtements universels

Le but de cette partie est de montrer l'existence de revêtements simplement connexes pour les espaces topologiques suffisamment gentils.

Dans cette partie, nous fixons un espace topologique B connexe et localement connexe par arcs.

Un *revêtement universel* de B est un revêtement $\tilde{\pi} : \tilde{B} \rightarrow B$ d'espace total $\tilde{B}$ connexe tel que pour tout revêtement $p : X \rightarrow B$ d'espace total X connexe, pour tous les $\tilde{b} \in \tilde{B}$ et $x \in X$ tels que $\tilde{\pi}(\tilde{b}) = p(x)$, il existe un morphisme de revêtements $\phi : \tilde{B} \rightarrow X$ de $\tilde{\pi}$ sur p tel que $\phi(\tilde{b}) = x$.

Par le corollaire 2.12 (1), le morphisme ϕ est unique. Un revêtement universel de B est unique à isomorphisme près (même démonstration que celle du corollaire 2.29). Cet isomorphisme est unique une fois effectué un choix de point base dans la fibre au-dessus d'un point base de B . Pour cette raison, nous dirons parfois par abus "le revêtement universel" de B .

Lemme 2.40. *Un revêtement universel de B est galoisien.*

Démonstration. Pour tout $b \in B$, si $x, y \in p^{-1}(b)$, alors il existe par la propriété universelle un morphisme de revêtements $\phi_{x,y} : \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}$ de p tel que $\phi_{x,y}(x) = y$. Comme $\phi_{x,y}$ est un automorphisme de revêtements (d'inverse $\phi_{y,x}$), ceci montre que l'assertion (1) du théorème 2.39 est vérifiée. $\square$

Le corollaire 2.28 s'énonce de la manière suivante.

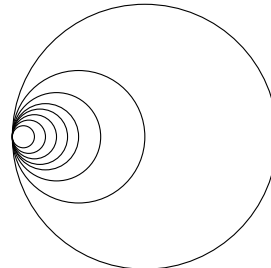
Proposition 2.41. *Si $p : X \rightarrow B$ est un revêtement, d'espace total X simplement connexe, alors p est un revêtement universel.* $\square$

Exemples. L'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1$ définie par $t \mapsto e^{2i\pi t}$, ainsi que les projections canoniques $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 2$, et $\mathbb{S}_{2n+1} \rightarrow L_{n,p}$ pour $n, p \geq 1$ (où $L_{n,p}$ est l'espace lenticulaire de dimension $2n+1$ et de groupe fondamental $\mathbb{U}_p \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, défini juste avant le corollaire 2.10) sont des revêtements universels.

Un espace topologique Y est *semilocallement simplement connexe* si tout point y de Y admet un voisinage U tel que tout lacet en y contenu dans U soit homotope dans Y au lacet constant en y (ou de manière équivalente tel que le morphisme $i_* : \pi_1(U, y) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ soit le morphisme nul, pour $i : U \rightarrow Y$ l'inclusion.)

Si Y est localement contractile, par exemple si Y est une variété topologique (voir la partie 4.1), ou un CW-complexe (voir la partie 6.5 et par exemple [Pau3, Spa]), alors Y est semilocallement simplement connexe.

Exercice E.20. *Considérons le cercle S_n de centre $(\frac{1}{n+1}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{n+1}$ dans $\mathbb{R}^2$. Soit $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$, muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$, appelé l'anneau hawaïen.^a Montrer que B est connexe et localement connexe par arcs, mais n'est pas semilocallement simplement connexe. Montrer que B n'admet pas de revêtement universel. Montrer que B n'est pas homéomorphe au bouquet $B' = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{S}_1, 1)$ d'un ensemble dénombrable infini de cercles.*



^a. ou encore les boucles d'oreille hawaïennes

Attention, la propriété d'être semilocalement simplement connexe n'est pas une propriété locale (c'est-à-dire un ouvert d'un espace topologique semilocalement simplement connexe ne l'est pas forcément). Par exemple, le cône³⁹ CB sur l'anneau hawaïen B (construit dans l'exercice E.20 ci-dessus) est contractile, mais le cône CB privé de son sommet est un ouvert qui se rétracte par déformation forte sur B , donc n'est pas semilocalement simplement connexe.

Théorème 2.42. *Soit B un espace topologique séparé, connexe et localement connexe par arcs. Alors B admet un revêtement d'espace total simplement connexe si et seulement si B est semilocalement simplement connexe.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un revêtement $p : X \rightarrow B$ de B d'espace total X simplement connexe. Pour tout point b de B , si V est un voisinage distingué de b , et si $s : V \rightarrow X$ est une section du revêtement trivial $p|_{p^{-1}(V)}$, alors l'inclusion $i : V \rightarrow B$ est égale à $p \circ s$. Donc par fonctorialité (voir la partie 1.2.4), le morphisme de groupes $i_* : \pi_1(V, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ est le morphisme trivial, car il factorise par le groupe trivial : nous avons $i_* = p_* \circ s_*$ avec $p_* : \pi_1(X, s(b)) \rightarrow \pi_1(B, b)$ et $\pi_1(X, s(b)) = \{1\}$ car X est simplement connexe. Par conséquent, B est semilocalement simplement connexe.

Réciproquement, supposons que B soit semilocalement simplement connexe. Soit $b \in B$, soit $\tilde{B}$ l'ensemble des classes d'homotopie des chemins d'origine b et soit

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : \tilde{B} &\rightarrow B \\ [\beta] &\mapsto \beta(1) \end{aligned}$$

l'application quotient de l'application d'évaluation en 1, qui est bien définie (car l'homotopie des chemins est relativement aux extrémités) et surjective (car B est connexe par arcs⁴⁰).

Munissons l'ensemble des chemins dans B d'origine b de la topologie compacte-ouverte (voir la partie A.4.6 de l'appendice A ; lorsque B est un espace métrique et puisque $[0, 1]$ est compact, c'est la topologie de la convergence uniforme), et $\tilde{B}$ de la topologie quotient. Comme l'application d'évaluation en un point est continue pour la topologie compacte-ouverte (voir l'exercice E.A.118 de la partie A.4.6 de l'appendice A), et par la continuité des applications induites par passage au quotient d'applications continues, l'application $\tilde{\pi}$ est continue.

Le groupe discret $G = \pi_1(B, b)$ agit sur $\tilde{B}$ par

$$\begin{aligned} G \times \tilde{B} &\rightarrow \tilde{B} \\ ([\alpha], [\beta]) &\mapsto [\alpha][\beta] = [\alpha \cdot \beta] \end{aligned}$$

Cette action est continue par passage au quotient, car nous pouvons vérifier que l'application de concaténation par un lacet α des chemins dans B d'origine b est continue pour la topologie compacte-ouverte. Elle est libre, car si $[\alpha \cdot \beta] = [\beta]$, alors $[\alpha] = [\alpha \cdot \beta \cdot \bar{\beta}] = [\beta \cdot \bar{\beta}] = [c_b]$ est la classe d'homotopie du lacet constant c_b en b . Les orbites de G sont les fibres de $\tilde{\pi}$, car pour tous les $[\alpha] \in G$ et $[\beta], [\beta'] \in \tilde{B}$,

- nous avons $(\alpha \cdot \beta)(1) = \beta(1)$ donc $\tilde{\pi}([\alpha][\beta]) = \tilde{\pi}([\beta])$ et
- si $\tilde{\pi}([\beta]) = \tilde{\pi}([\beta'])$, alors $\beta' \cdot \bar{\beta}$ est un lacet en b et $[\beta'] = [\beta' \cdot \bar{\beta}][\beta]$.

39. Voir l'exemple (1) suivant l'exercice E.A.110 de la partie A.2.6 de l'appendice A.

40. Voir la note de bas de page 31.

Si $p : \tilde{B} \rightarrow G \setminus \tilde{B}$ est la projection canonique et si $G \setminus \tilde{B}$ est muni de la topologie quotient, alors l'application continue $\tilde{\pi}$ induit par passage au quotient une application $f : G \setminus \tilde{B} \rightarrow B$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B} & & \\ p \downarrow & \searrow \tilde{\pi} & \\ G \setminus \tilde{B} & \xrightarrow{f} & B \end{array}, \quad (3)$$

et l'application f est continue et bijective.

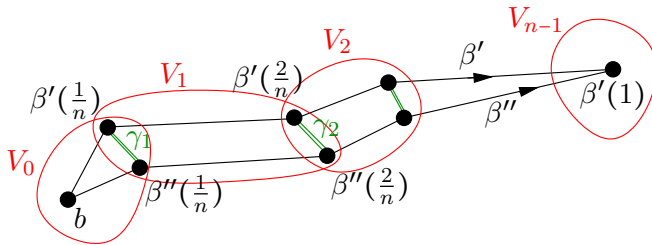
Lemme 2.43. *Pour tout $[\beta]$ dans $\tilde{B}$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{[\beta]}$ de $[\beta]$ dans $\tilde{B}$ tel que*

- pour tout g dans G , si $\mathcal{O} \cap g\mathcal{O}$ est non vide, alors $g = e$,
- la partie $\tilde{\pi}(\mathcal{O})$ est ouverte dans B .

Démonstration. Soit $[\beta]$ dans $\tilde{B}$. Par la compacité de $[0, 1]$ et puisque B est semilocallement simplement connexe, il existe un entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et, pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, des ouverts V_i connexes par arcs dans B , tels que

- (i) tout lacet dans V_i est homotope dans B au lacet constant,
- (ii) la partie $\beta([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}])$ est contenue dans V_i .

Soit $\tilde{\mathcal{O}}$ l'ouvert de l'espace des chemins dans B d'origine b , formé des chemins β' d'origine b tels que $\beta'([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]) \subset V_i$ et $\beta'(\frac{i}{n})$ appartient à la même composante connexe par arcs de $V_i \cap V_{i-1}$ que $\beta(\frac{i}{n})$ (les composantes connexes par arcs d'un espace localement connexe par arcs sont ouvertes, voir la fin de la partie A.1.6 de l'appendice A). Soient β' et β'' dans $\tilde{\mathcal{O}}$ tels que $\beta'(1) = \beta''(1)$.



Soit γ_0 le chemin constant en b . Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe par construction un chemin γ_i dans $V_i \cap V_{i-1}$ joignant $\beta'(\frac{i}{n})$ à $\beta''(\frac{i}{n})$, et nous pouvons supposer que γ_n est constant. Posons alors

$$\beta''_i = \beta''|_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]}$$

Soit c le chemin

$$c = (\gamma_0 \cdot \beta''_0 \cdot \overline{\gamma_1}) \cdot (\gamma_1 \cdot \beta''_1 \cdot \overline{\gamma_2}) \cdot \dots \cdot (\gamma_{n-2} \cdot \beta''_{n-2} \cdot \overline{\gamma_{n-1}}) \cdot (\gamma_{n-1} \cdot \beta''_{n-1} \cdot \overline{\gamma_n}).$$

Alors par la première propriété (i) des ouverts V_i , nous avons $\beta'' \sim c \sim \beta'$.

En particulier, deux chemins dans B , suffisamment proches, ayant mêmes extrémités, sont homotopes (relativement aux extrémités). Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des classes d'homotopie (relativement aux extrémités) des éléments de $\tilde{\mathcal{O}}$. Montrons que cet ensemble $\mathcal{O}$ est ouvert dans $\tilde{B}$. Il suffit de montrer que le saturé de $\tilde{\mathcal{O}}$ est ouvert dans l'espace des chemins dans B d'origine b . Soit α un chemin dans B d'origine b suffisamment proche d'un chemin α' homotope à un chemin α'' de $\tilde{\mathcal{O}}$. Concaténons α par un petit chemin α_0 entre $\alpha(1)$ et $\alpha'(1) = \alpha''(1)$ contenu dans un voisinage connexe par arcs de $\alpha'(1)$ contenu dans V_{n-1} .

Comme vu ci-dessus, nous avons alors $\alpha \cdot \alpha_0 \sim \alpha'$ si α est suffisamment proche de α' , donc $\alpha \sim \alpha'' \cdot \bar{\alpha}_0$, qui est un chemin dans $\tilde{\mathcal{O}}$.

Soient $g \in G$ et $[\beta'], [\beta''] \in \mathcal{O}$ tels que $[\beta'] = g[\beta'']$. Alors $\beta'(1) = \beta''(1)$, donc par ce qui précède, $[\beta'] = [\beta'']$. Comme G agit librement sur $\tilde{B}$, nous avons donc $g = e$.

Nous avons $\tilde{\pi}(\mathcal{O}) = V_{n-1}$ par la définition de $\mathcal{O}$ et la connexité par arcs de V_{n-1} , donc $\tilde{\pi}(\mathcal{O})$ est ouvert dans B . $\square$

Lemme 2.44. *L'application $\tilde{\pi}$ est ouverte, l'espace $\tilde{B}$ est séparé, et l'action de G sur $\tilde{B}$ est propre.*

Démonstration. L'application $\tilde{\pi}$ est ouverte par le lemme précédent (et le fait qu'une partie d'un espace topologique est ouverte si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points).

Montrons que l'espace $\tilde{B}$ est séparé. Soient x et y dans $\tilde{B}$. Si $\tilde{\pi}(x) \neq \tilde{\pi}(y)$, comme $\tilde{\pi}$ est continue et B séparé, alors x et y admettent des voisinages disjoints (images réciproques par $\tilde{\pi}$ de voisinages disjoints de $\tilde{\pi}(x)$ et $\tilde{\pi}(y)$). Si $\tilde{\pi}(x) = \tilde{\pi}(y)$, alors il existe g dans G tel que $y = gx$. Donc $\mathcal{O}_x$ et $g\mathcal{O}_x$ sont des voisinages ouverts de x et y , qui, par la première assertion du lemme 2.43, sont disjoints sauf si $g = e$, c'est-à-dire lorsque $x = y$.

Soit $\mathbf{gr} : G \times \tilde{B} \rightarrow \tilde{B} \times \tilde{B}$ l'application graphe. Puisque G agit librement, l'image réciproque par $\mathbf{gr}$ d'un singleton est un singleton, donc est compact car $G \times \tilde{B}$ est séparé.

Comme l'application $f : G \backslash \tilde{B} \rightarrow B$ est continue et bijective à valeurs dans un espace séparé, l'espace quotient $G \backslash \tilde{B}$ est séparé (voir le second point de l'exercice E.A.119 de la partie A.5 de l'appendice A). Donc (voir le premier point de l'exercice E.A.119 de la partie A.5 de l'appendice A) la diagonale Δ de $(G \backslash \tilde{B}) \times (G \backslash \tilde{B})$ est fermée, et l'image $\text{im}(\mathbf{gr}) = (p \times p)^{-1}(\Delta)$ est fermée dans $\tilde{B} \times \tilde{B}$, par la continuité de $p \times p$. L'application $\mathbf{gr}^{-1} : \text{im}(\mathbf{gr}) \rightarrow G \times \tilde{B}$ est égale à $([\beta], [\beta']) \mapsto ([\beta' \cdot \bar{\beta}], [\beta])$, donc est continue. Par conséquent, puisqu'un fermé d'un sous-espace fermé est fermé, l'application $\mathbf{gr}$ est fermée. $\square$

Par le lemme précédent et puisque $f \circ p = \tilde{\pi}$, l'application f du diagramme (3) est ouverte, donc est un homéomorphisme, et p est un revêtement (voir le théorème 2.8). Par conséquent, $\tilde{\pi}$ est un revêtement.

Il suffit maintenant de montrer que $\tilde{B}$ est simplement connexe.

Soient α un chemin d'origine b dans B et $\alpha_t : s \mapsto \alpha(st)$, qui est un chemin dans B , pour tout $t \in [0, 1]$. Comme l'application $(s, t) \mapsto \alpha(st)$ est continue et comme les propriétés des topologies compactes-ouvertes assurent que $\mathcal{C}([0, 1] \times [0, 1], B) = \mathcal{C}([0, 1], \mathcal{C}([0, 1], B))$ (voir l'exercice E.A.118 (2) de la partie A.4.6 de l'appendice A), l'application $t \mapsto \alpha_t$ est un chemin dans l'espace des chemins d'origine b . Donc l'application $t \mapsto [\alpha_t]$ est un chemin dans $\tilde{B}$, d'origine la classe d'homotopie du lacet constant $[c_b]$ en b et d'extrémité $[\alpha]$. Donc $\tilde{B}$ est connexe par arcs.

De plus, $t \mapsto [\alpha_t]$ est le relèvement de α d'origine $[c_b]$ pour le revêtement $\tilde{\pi}$. Soit γ un lacet en $[c_b]$ dans $\tilde{B}$. Comme γ est le relèvement de $\tilde{\pi} \circ \gamma$ d'origine $[c_b]$, nous avons par unicité $\gamma(t) = [(\tilde{\pi} \circ \gamma)_t]$ pour tout $t \in [0, 1]$. Si $h : (t, s) \mapsto [((\tilde{\pi} \circ \gamma)_t)_s]$, alors h est une homotopie entre $[c_b]$ et γ . $\square$

Le résultat suivant découle en particulier du théorème 2.42 et de la proposition 2.41.

Corollaire 2.45. *Tout espace topologique séparé, connexe, localement contractile admet un revêtement universel.* $\square$

Soit B un espace topologique séparé, connexe, localement connexe par arcs, et semi-localement simplement connexe. Si $\tilde{\pi} : \tilde{B} \rightarrow B$ est un revêtement universel de B , alors par unicité, $\tilde{B}$ est simplement connexe. Le groupe $\Gamma = \text{Aut}(\tilde{\pi})$ des automorphismes de revêtements de $\tilde{\pi}$ agit librement et proprement sur $\tilde{B}$ (par la proposition 2.37), et transitivement sur les fibres (car $\tilde{\pi}$ est galoisien par le lemme 2.40). Donc l'application $\tilde{\pi}_\Gamma : \Gamma \backslash \tilde{B} \rightarrow B$, induite par passage au quotient de $\tilde{\pi}$, qui est un revêtement par la proposition 2.37, est un homéomorphisme. De plus, pour tous les b dans B et x dans $\tilde{\pi}^{-1}(b)$, les groupes Γ et $\pi_1(B, b)$ sont isomorphes, ce que nous écrivons

$$\text{Aut}(\tilde{\pi}) \simeq \pi_1(B, b) ,$$

par l'unique isomorphisme $\phi' : \text{Aut}(\tilde{\pi}) \rightarrow \pi_1(B, b)$ tel que $\gamma x = x\phi'(\gamma)$ pour tout γ dans Γ (voir le corollaire 2.24). Notons que cet isomorphisme $\phi' = \phi'_x$ dépend de x , mais seulement à conjugaison près à la source : si $y \in \tilde{\pi}^{-1}(b)$ est un autre point dans la fibre au-dessus de b , et si $g \in \Gamma = \text{Aut}(\tilde{\pi})$ vérifie $y = gx$ (ce qui est possible par la transitivité de l'action de Γ sur $\tilde{\pi}^{-1}(b)$), alors nous avons⁴¹ $\phi'_y(\gamma) = \phi'_x(g^{-1}\gamma g)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

2.13 Classification des revêtements

Le but de cette partie est d'établir une correspondance entre les revêtements connexes d'un espace topologique (suffisamment gentil) et les sous-groupes de son groupe fondamental.

Soit B un espace topologique séparé, connexe, localement connexe par arcs, et semi-localement simplement connexe. Fixons-nous un point $b \in B$, un revêtement universel $\tilde{\pi} : \tilde{B} \rightarrow B$ de B (qui existe par le théorème 2.42) et $x \in \tilde{\pi}^{-1}(b)$. Identifions $\text{Aut}(\tilde{\pi})$ avec $\pi_1(B, b)$ comme à la fin de la partie précédente (ce qui dépend du choix de x).

Si H est un sous-groupe de $\text{Aut}(\tilde{\pi})$, alors l'application $\tilde{\pi} : \tilde{B} \rightarrow B$ induit par passage au quotient une application $\tilde{\pi}_H : H \backslash \tilde{B} \rightarrow B$, appelée le *revêtement de B associé à H* . Par exemple, nous avons $\tilde{\pi}_{\{e\}} = \tilde{\pi}$. Nous appellerons *revêtement connexe* de B tout revêtement de B d'espace total connexe.

Théorème 2.46. *L'application $H \mapsto \tilde{\pi}_H$ induit une bijection de l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de $\text{Aut}(\tilde{\pi})$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements connexes de B . Elle induit aussi une bijection de l'ensemble des sous-groupes distingués de $\text{Aut}(\tilde{\pi})$ dans l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements galoisiens de B , ainsi que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, une bijection de l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes d'indice n de $\text{Aut}(\tilde{\pi})$ dans l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements à n feuillets de B .*

Démonstration. Soient $G = \text{Aut}(\tilde{\pi})$ et H un sous-groupe de G . Par construction, la fibre de $\tilde{\pi}_H$ au-dessus de b est en bijection G -équivariante avec $H \backslash G$, et donc est de cardinal n si et seulement si H est d'indice n dans G . L'espace $H \backslash \tilde{B}$ est connexe car $\tilde{B}$ l'est.

L'application $\tilde{\pi}_H$ est un revêtement par la proposition 2.37, qui est galoisien si et seulement si H , qui est égal à $(\tilde{\pi}_H)_* \pi_1(H \backslash \tilde{B}, Hx)$ par le corollaire 2.24 et l'identification ci-dessus de G et $\pi_1(B, b)$, est distingué dans $G = \pi_1(B, b)$, par le théorème 2.39 (2).

41. En effet, pour tout $\gamma \in \Gamma$, nous avons $\gamma y = y\phi'_y(\gamma)$ si et seulement si $\gamma gx = gx\phi'_y(\gamma)$, c'est-à-dire $g^{-1}\gamma gx = x\phi'_y(\gamma)$. Donc $x\phi'_y(\gamma) = x\phi'_x(g^{-1}\gamma g)$. Alors, par la liberté de l'action à droite de $\pi_1(B, b)$ sur la fibre $\pi^{-1}(b)$, ceci implique que $\phi'_y(\gamma) = \phi'_x(g^{-1}\gamma g)$ comme voulu.

Si H et H' sont conjugués par $g \in G$ (c'est-à-dire si $H' = gHg^{-1}$), alors l'automorphisme de revêtements $g : \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}$ de $\tilde{\pi}$ induit un isomorphisme de revêtements $H \backslash \tilde{B} \rightarrow H' \backslash \tilde{B}$ de $\tilde{\pi}_H$ sur $\tilde{\pi}_{H'}$ (défini par $Hx \mapsto Hgx$). Donc l'application $H \mapsto \tilde{\pi}_H$ induit une application Ψ de l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de G dans l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements connexes de B .

Réciproquement, si les revêtements $\tilde{\pi}_H$ et $\tilde{\pi}_{H'}$ sont isomorphes, alors par le corollaire 2.32, les fibres de $\tilde{\pi}_H$ et $\tilde{\pi}_{H'}$ au-dessus de b sont en bijection G -équivariante. Donc il existe une bijection G -équivariante $\phi : H \backslash G \rightarrow H' \backslash G$. Si $\phi(He) = H'g_0$, par la G -équivariance de ϕ , nous avons pour tout h dans H ,

$$H'g_0 = \phi(He) = \phi(Hh) = \phi(He)h = H'g_0h.$$

Donc $g_0Hg_0^{-1} \subset H'$, et en utilisant ϕ^{-1} , nous avons $g_0Hg_0^{-1} = H'$, et les sous-groupes H et H' sont conjugués. Par conséquent, l'application Ψ est injective.

Enfin, si $p : X \rightarrow B$ est un revêtement connexe et $u \in F = p^{-1}(b)$, alors la fibre F est en bijection G -équivariante avec $H \backslash G$, où $H = p_*\pi_1(X, u)$, par le corollaire 2.20. Donc les fibres des revêtements connexes p et $\tilde{\pi}_H$ sont en bijection G -équivariante. Par le corollaire 2.32, les revêtements p et $\tilde{\pi}_H$ sont isomorphes. Donc Ψ est surjective. $\square$

Remarques. (1) En particulier, pour tout revêtement connexe $p : X \rightarrow B$, il existe un revêtement $\pi_X : \tilde{B} \rightarrow X$ tel que le diagramme suivant commute (nous dirons que tout revêtement connexe de B est factorisé par son revêtement universel)

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{B} & \\ & \searrow \pi_X & \\ \tilde{\pi} \downarrow & & X \\ & \swarrow p & \\ & B & \end{array}.$$

(2) Soient H un sous-groupe distingué de $G = \text{Aut}(\tilde{\pi})$, et $H \backslash G$ le groupe quotient. Alors son revêtement associé $\tilde{\pi}_H : H \backslash \tilde{B} \rightarrow B$ est galoisien, et nous avons un isomorphisme de groupes

$$\text{Aut}(\tilde{\pi}_H) \simeq H \backslash G.$$

Le groupe discret $H \backslash G$ agit donc librement et proprement sur $H \backslash \tilde{B}$, avec quotient homéomorphe à B (voir la proposition 2.37).

(3) Soient H et H' des sous-groupes de $G = \pi_1(B, b)$. L'ensemble $\text{Mor}(\pi_H, \pi_{H'})$ des morphismes de revêtements de π_H sur $\pi_{H'}$ est en bijection avec l'ensemble $\text{Mor}_G(H \backslash G, H' \backslash G)$ des applications G -équivariantes de $H \backslash G$ dans $H' \backslash G$ (voir la proposition 2.30).

(4) L'application $H \mapsto \pi_H$ induit une bijection de l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes d'indice fini de $\pi_1(B, b)$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements connexes finis de B .

Méthodologie 3 :

Classer !

Pour classer (à isomorphisme de revêtements près) les revêtements connexes d'un espace topologique B localement connexe par arcs, on pourra procéder comme suit.

1) Trouver (lorsqu'il existe) un revêtement $\tilde{\pi} : \tilde{B} \rightarrow B$ de B par un espace localement compact simplement connexe $\tilde{B}$, muni d'une action propre et libre d'un groupe discret G tel que l'espace topologique quotient $G \backslash \tilde{B}$ soit homéomorphe à B .

2) Donner une liste $\mathcal{L}$ (exhaustive et sans répétition) des sous-groupes de G à conjugaison près, ainsi que celle $\mathcal{L}_{\text{dis}}$ des sous-groupes distingués de G .

3) Appliquer le théorème 2.46 disant que les revêtements connexes à isomorphisme près sont exactement les applications induites par passage au quotient $\tilde{\pi}_H : H \backslash \tilde{B} \rightarrow G \backslash \tilde{B}$ suivi de la composition par un homéomorphisme $G \backslash \tilde{B} \rightarrow B$, où H parcourt la liste $\mathcal{L}$ (et la liste $\mathcal{L}_{\text{dis}}$ lorsque nous cherchons les revêtements galoisiens).

4) Tâcher de reconnaître, lorsque c'est possible, les revêtements déjà connus dans la liste $\{\tilde{\pi}_H : H \in \mathcal{L}\}$ ci-dessus.

Exemple. Comme les seuls sous-groupes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\{0\}$, pour $n \geq 2$, les revêtements connexes de l'espace projectif réel $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ sont, à isomorphisme près, son revêtement universel $\mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ et l'identité $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

Exercice E.21. Montrer que les revêtements connexes du cercle $\mathbb{S}_1$ sont, à isomorphisme près, son revêtement universel $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1$ défini par $t \mapsto e^{2i\pi t}$, et ses revêtements à n feuillets $\mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ définis par $z \mapsto z^n$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Le résultat suivant étend le théorème 2.46 de classification des revêtements connexes de B aux revêtements non nécessairement connexes.

Proposition 2.47. Soit (B, b) comme au début de la partie 2.13. Pour tout ensemble non vide E muni d'une action à droite du groupe fondamental $\pi_1(B, b)$, il existe un revêtement $p_E : X_E \rightarrow B$ et une bijection $\pi_1(B, b)$ -équivariante $u_E : p_E^{-1}(b) \rightarrow E$. Si E' est un autre ensemble muni d'une action à droite de $\pi_1(B, b)$, et si $f : E \rightarrow E'$ est une application (resp. bijection) $\pi_1(B, b)$ -équivariante, alors il existe un unique morphisme (resp. isomorphisme) de revêtements $\phi : X_E \rightarrow X_{E'}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} p_E^{-1}(b) & \xrightarrow{u_E} & E \\ \phi|_{p_E^{-1}(b)} \downarrow & & \downarrow f \\ p_{E'}^{-1}(b) & \xrightarrow{u_{E'}} & E' \end{array} .$$

Si $p : X \rightarrow B$ est un revêtement de B , alors il existe un ensemble non vide E muni d'une action à droite du groupe fondamental $\pi_1(B, b)$, unique à bijection $\pi_1(B, b)$ -équivariante près, tel que les revêtements $p : X \rightarrow B$ et $p_E : X_E \rightarrow B$ soient isomorphes.

Démonstration. Soit $E = \coprod_{\alpha \in A} E_\alpha$ la partition de E en orbites pour $\pi_1(B, b)$. Pour tout $\alpha \in A$, soient x_α un point de E_α et H_α le stabilisateur de x_α dans $\pi_1(B, b)$. Soit $\pi_\alpha : X_\alpha = H_\alpha \backslash \tilde{B} \rightarrow B$ le revêtement connexe de B associé au sous-groupe H_α de $\pi_1(B, b)$.

Posons $X_E = \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$ (muni de la topologie somme disjointe) et $p_E : X_E \rightarrow B$ l'application dont la restriction à X_α est π_α . Alors p_E est un revêtement de fibre $p_E^{-1}(b) = \coprod_{\alpha \in A} \pi_\alpha^{-1}(b)$, et nous notons u_E l'application de $p_E^{-1}(b)$ dans E dont la restriction à $\pi_\alpha^{-1}(b)$ vaut la composition des bijections $\pi_\alpha^{-1}(b) \simeq H_\alpha \setminus \pi_1(B, b) \simeq E_\alpha$.

La deuxième assertion découle de la proposition 2.30 et de son corollaire 2.32, appliqués à $u_E^{-1} \circ f \circ u_E$, qui est une application (resp. bijection) $\pi_1(B, b)$ -équivariante de $p_E^{-1}(b)$ dans $p_{E'}^{-1}(b)$.

La dernière assertion découle du théorème 2.46 en posant $E = p^{-1}(b)$, $A = \pi_0 X$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de X et $E_\alpha = p^{-1}(b) \cap \alpha$, pour tout $\alpha \in A$.

□

2.14 Autres exercices

Exercice E.22.

- (1) Soient $p : X \rightarrow B$ un revêtement et U un ouvert de B . Montrer que la restriction $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \rightarrow U$ est un revêtement.
- (2) Soient $p : X \rightarrow B$ et $p' : X' \rightarrow B'$ deux revêtements. Montrer que l'application $p \times p'$ de $X \times X'$ dans $B \times B'$ définie par $(x, x') \mapsto (p(x), p'(x'))$ est un revêtement. Montrer que cette propriété est vraie pour les produits finis de revêtements, mais n'est plus vraie pour les produits infinis de revêtements : montrer que l'application de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ dans $(S_1)^\mathbb{N}$ définie par $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (e^{2i\pi t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas un revêtement.
- (3) Soient $p : X \rightarrow B$ et $p' : X' \rightarrow B$ deux revêtements, $X \times_B X'$ le sous-espace topologique de $X \times X'$ défini par

$$X \times_B X' = \{(x, x') \in X \times X' \mid p(x) = p(x')\},$$

et $\pi : X \times_B X' \rightarrow B$ l'application définie par $\pi(x, x') = p(x)$. Montrer que π est un revêtement.

Exercice E.23. Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement.

- (1) Montrer que si B est séparé, alors X est séparé.
- (2) Montrer que si B est compact et si p est un revêtement fini, alors X est compact.

Exercice E.24. Soient G un groupe topologique séparé et H un sous-groupe. Montrer que $H \setminus G$ est séparé si et seulement si H est fermé dans G . Si $G = \mathbb{R}$ et $H = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$, montrer que la topologie de l'espace topologique quotient G/H est la topologie grossière.

Exercice E.25.

- (1) Montrer que la projection canonique

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \{\pm \mathrm{Id}\}$$

est un revêtement à deux feuillets.

- (2) Soit $\mathbb{U}_n$ le groupe des racines n -èmes de l'unité, montrer que la projection canonique $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{PSL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) / \mathbb{U}_n \mathrm{Id}$ est un revêtement à n feuillets.

Exercice E.26.

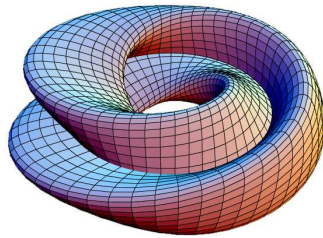
- (1) Montrer que le groupe topologique $SU(2) = \{x \in SL_2(\mathbb{C}) : {}^t\bar{x} = \text{id}\}$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$.
- (2) Considérons l'espace vectoriel réel $V = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : {}^t\bar{X} = -X, \text{tr}(X) = 0\}$ des matrices anti-hermitiennes de trace nulle. Montrer que $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} \text{tr}(X {}^t\bar{Y})$ est un produit scalaire euclidien sur V , invariant par l'action par conjugaison de $SU(2)$.
- (3) En déduire l'existence d'un revêtement à deux feuillets $SU(2) \rightarrow SO(3)$.
- (4) Quel est le groupe fondamental de $SO(3)$?

Exercice E.27.

- (1) Notons G le sous-groupe du groupe des transformations (isométriques affines) de $\mathbb{R}^2$ engendré par $a : (x, y) \mapsto (x+1, 1-y)$ et $b : (x, y) \mapsto (x, y+1)$. Montrer que tout élément de G s'écrit de manière unique $b^n(b^{-1}a)^m$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$. Montrer que G agit librement et proprement, avec quotient compact, sur l'espace topologique localement compact $\mathbb{R}^2$. L'espace topologique quotient $K = G \backslash \mathbb{R}^2$ est appelé la *bouteille de Klein*. Montrer que la projection canonique $\mathbb{R}^2 \rightarrow K$ est un revêtement universel de K . Calculer le groupe fondamental de K .



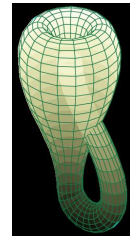
Bouteille de Klein



Huit de Klein

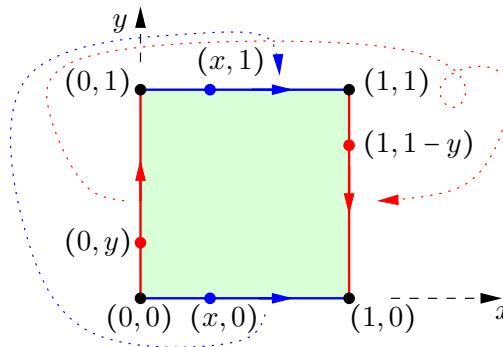


Bonnet de Klein



Dent de Klein

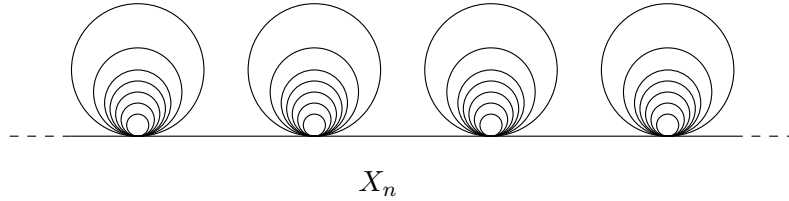
- (2) Montrer que la bouteille de Klein est homéomorphe à l'espace topologique quotient $[0, 1]^2 / \mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par la relation $(0, y) \sim (1, 1-y)$ et $(x, 0) \sim (x, 1)$ pour tous les $x, y \in [0, 1]$.



- (3) Notons M_1 et M_2 deux copies du ruban de Möbius $([0, 1] \times [0, 1]) / \mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $(1, t) \sim (0, 1-t)$, et $f : \partial M_1 \rightarrow \partial M_2$ l'application identité. Montrer que la bouteille de Klein K est homéomorphe à l'espace $M_1 \cup_f M_2$ recollement (voir l'exemple (5) après l'exercice E.A.111 de la partie A.2.6 de l'appendice A) de deux rubans de Möbius par l'identité le long de leur bord.
- (4) Montrer qu'il existe un revêtement à deux feuillets p du tore $\mathbb{T}^2$ sur K . Pour tout $x \in \mathbb{T}^2$, quelle est l'application $p_* : \pi_1(\mathbb{T}^2, x) \rightarrow \pi_1(K, p(x))$?
- (5) (Utilise les définitions et résultats de la partie 3.1) Montrer que G admet comme présentation de groupes $\langle \bar{a}, \bar{b} \mid \bar{a} \bar{b}^{-1} \bar{a}^{-1} = \bar{b} \rangle$ et $\langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^2 \rangle$. Montrer que G est isomorphe au produit amalgamé $\mathbb{Z} *_\mathbb{Z} \mathbb{Z}$ où les deux morphismes de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ sont tous deux le morphisme de multiplication par 2. Quel est l'abélianisé de G , c'est-à-dire

le quotient de G par son sous-groupe dérivé $[G, G]$ (engendré par les commutateurs $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ pour $x, y \in G$) ? Montrez que la bouteille de Klein n'a pas le même type d'homotopie que le tore.

Exercice E.28. Soit B l'anneau hawaïen (voir l'exercice E.20), muni du point base x commun à tous les cercles S_n pour $n \in \mathbb{N}$. Pour tout cercle S_n de B , notons X_n l'espace topologique obtenu par recollement en son point base d'une copie de $\overline{B \setminus S_n}$ sur chaque point entier de $\mathbb{R}$.



- (1) Montrer qu'il existe un revêtement $p_n : X_n \rightarrow B$, unique à isomorphisme de revêtements près, tel que la restriction de p_n à chaque copie de $\overline{B \setminus S_n}$ soit un homéomorphisme sur son image, et la restriction de p_n à $\mathbb{R}$ soit un revêtement de S_n . Montrer que p_n et p_m sont deux revêtements de B non isomorphes pour $n \neq m$.
- (2) Pour toute suite $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $\{-1, +1\}$, notons $c_{(\epsilon_i)}$ le lacet dans B en x dont la restriction à $[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}]$ vaut $t \mapsto \frac{1}{n+1}(e^{\epsilon_n 2i\pi 2^{n+1}t} + 1)$ (c'est-à-dire qu'il parcourt le cercle S_n à vitesse 2^{n+1} dans le sens positif si $\epsilon_n = 1$, et négatif sinon), pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $c_{(\epsilon_i)}$ est bien un lacet dans B en x . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $(\epsilon'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une autre suite dans $\{-1, +1\}$ telle que $\epsilon_n \neq \epsilon'_n$, alors les actions des lacets $c_{(\epsilon_i)}$ et $c_{(\epsilon'_i)}$ sur la fibre $p_n^{-1}(x)$ du revêtement p_n sont différentes.
- (3) En déduire que le groupe fondamental de B est non dénombrable.

Exercice E.29.

- (1) Soient $p : X \rightarrow Y$ et $q : Y \rightarrow B$ des revêtements, tels que q soit fini. Montrer que $q \circ p : X \rightarrow B$ est un revêtement. (En particulier, la composition de deux revêtements finis est un revêtement fini.)
- (2) Donner un exemple de deux revêtements $p : X \rightarrow Y$ et $q : Y \rightarrow B$ connexes par arcs tels que p soit un revêtement fini et tels que $q \circ p$ ne soit pas un revêtement. On pourra prendre B égal à l'anneau hawaïen (voir l'exercice E.20 ci-dessus) et q un revêtement p_n comme dans l'exercice E.28 ci-dessus, pour $n = 0$ par exemple, et chercher p qui soit un revêtement à deux feuillets.

Exercice E.30. Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, quel est le nombre de classes d'isomorphisme de revêtements connexes à deux feuillets du bouquet de k cercles ? Combien sont galoisiens ?

Pour $n \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$, quel est le nombre (de classes d'isomorphismes) de revêtements connexes à n feuillets du bouquet de deux cercles $\mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_1$? Combien sont galoisiens ? Quels sont leurs groupes d'automorphismes de revêtements ?

Exercice E.31. Montrer que le groupe libre $L(a, b)$ de rang 2 admet un sous-groupe distingué libre $L(\{x_0, x_1, \dots\})$ de rang le cardinal dénombrable infini.

Exercice E.32. Construire un revêtement universel des bouquets de deux et trois cercles, de $\mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_2$ et de $\mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_2$.

Exercice E.33. Quels sont (à isomorphisme près) les revêtements connexes du tore $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$, du plan projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, de l'espace lenticulaire $L_{n,p}$, de $\mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_2$, de la bouteille de Klein ?

Exercice E.34. Soit G un groupe topologique connexe et localement connexe par arcs, admettant un revêtement universel $\tilde{\pi} : \tilde{G} \rightarrow G$. Fixons $\tilde{e} \in \tilde{\pi}^{-1}(e)$. Pour tous les $x, y \in \tilde{G}$, soient γ_x et γ_y des chemins dans $\tilde{G}$ de $\tilde{e}$ à x et y respectivement. Notons γ_{xy} l'unique relèvement par $\tilde{\pi}$ du chemin $(\tilde{\pi} \circ \gamma_x)(\tilde{\pi} \circ \gamma_y)$ tel que $\gamma_{xy}(0) = \tilde{e}$. Posons $xy = \gamma_{xy}(1)$.

- (1) Montrer que $\tilde{G}$ est connexe par arcs. Vérifier que l'élément xy de $\tilde{G}$ ne dépend pas des chemins γ_x et γ_y . Montrer que l'application de $\tilde{G} \times \tilde{G}$ dans $\tilde{G}$ définie par $(x, y) \mapsto xy$ est une loi de groupes topologiques sur $\tilde{G}$. Montrer que $\tilde{\pi}$ est un morphisme de groupes topologiques.
- (2) Montrer que le noyau de $\tilde{\pi}$ est un sous-groupe central de $\tilde{G}$, isomorphe au groupe fondamental de G .
- (3) Pour $n \in \{2, 3\}$, calculer les groupes fondamentaux des groupes topologiques $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/(\{\pm \mathrm{id}\} \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}))$ en l'élément neutre. ⁴²

Exercice E.35. Soit $\mathbb{S}_2$ la sphère unité des éléments t de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$ tels que $\|t\| = 1$, soit $\mathbb{S}_3$ la sphère unité des $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, et soit G le sous-groupe des isométries de l'espace euclidien usuel $\mathbb{C}$ engendré par $z \mapsto e^{i\frac{\pi}{5}}z$ et $z \mapsto \bar{z}$. Pour $g \in G$, on note $\epsilon(g) = 1$ si g est une rotation, et $\epsilon(g) = -1$ sinon. Le groupe G agit à gauche sur l'espace topologique produit $X = \mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_2$ par

$$(g, (z_1, z_2, t)) \mapsto (gz_1, gz_2, \epsilon(g)t).$$

Notons B l'espace topologique quotient $G \backslash X$ et $p : X \rightarrow B$ la projection canonique.

- (1) Montrer que G est fini. Montrer que p est un revêtement. Calculer le groupe fondamental de B .
- (2) Donner, à isomorphisme de revêtements près, la liste des revêtements connexes de B . Parmi ceux-ci, lesquels sont galoisiens ?

Exercice E.36. Notons $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle, et $T = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ le tore. Le groupe à deux éléments $G = \{\pm 1\}$ agit sur T par

$$(\epsilon, (w, z)) = (w^\epsilon, z^\epsilon)$$

avec $w, z \in \mathbb{S}_1$ et $\epsilon \in G$. Notons S l'espace topologique quotient $G \backslash T$ et $\pi : T \rightarrow S$ la projection canonique.

- (1) Calculer $\pi_1(T \setminus \{x_1, \dots, x_k\})$, où $x_1, \dots, x_k$ sont des points deux à deux distincts de T .
- (2) Montrer que G laisse fixe exactement quatre points x_1, x_2, x_3, x_4 de T , et que l'application $\pi : T \setminus \{x_1, \dots, x_4\} \rightarrow S \setminus \{\pi(x_1), \dots, \pi(x_4)\}$ est un revêtement.
- (3) Montrer, à l'aide de dessins, que S est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_2$.

42. Il est possible de montrer que pour $n = 2$, les espaces totaux des revêtements universels de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, qui sont isomorphes (en tant que groupe topologique), ne sont pas linéaires, c'est-à-dire ne sont pas isomorphes (en tant que groupes) à des sous-groupes d'un $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$.

Exercice E.37. Soit C l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ tels que $4p^3 + 27q^2 \neq 0$. Rappelons que, pour tout $(p, q) \in C$, l'équation $X^3 + pX + q = 0$ admet trois racines complexes distinctes. Notons

$$B = \{(p, q, x) \in C \times \mathbb{C} : x^3 + px + q = 0\} \quad \text{et}$$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x + y + z = 0, x \neq y \neq z \neq x\}.$$

Notons $\pi : A \rightarrow B$ l'application $(x, y, z) \mapsto (p, q, x)$ où p et q sont définis par l'égalité suivante de polynômes complexes à une indéterminée

$$X^3 + pX + q = (X - x)(X - y)(X - z).$$

Notons $\rho : B \rightarrow C$ la projection $(p, q, x) \rightarrow (p, q)$.

- (1) Montrer que π, ρ et $\rho \circ \pi$ sont des revêtements finis.
- (2) Montrer que A, B et C sont connexes par arcs.
- (3) Soit $a = (-1, 0) \in C$. Montrer que l'action du groupe fondamental de $\pi_1(C, a)$ sur la fibre $\rho^{-1}(a)$ définit un morphisme surjectif de $\pi_1(C, a)$ sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$.
- (4) Parmi les revêtements π, ρ et $\rho \circ \pi$, lesquels sont galoisiens? Quels sont les groupes d'automorphismes de revêtements de π, ρ et $\rho \circ \pi$?
- (5) Notons K le sous-espace de la sphère $\mathbb{S}_3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 2\}$ défini par

$$K = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| = |w| = 1, z^3 = w^2\}.$$

Montrer que C et $\mathbb{S}_3 \setminus K$ ont le même type d'homotopie. Montrer que K est homéomorphe au cercle $\mathbb{S}_1 = \{(z, w) \in \mathbb{S}_3 : w = 0\}$, mais que $\mathbb{S}_3 \setminus K$ et $\mathbb{S}_3 \setminus \mathbb{S}_1$ ne sont pas homéomorphes.

2.15 Indications pour la résolution des exercices

Correction de l'exercice E.15. (1) Si H est un sous-groupe d'un groupe topologique H , alors la restriction au sous-espace $H \times H$ de $G \times G$ de l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ est continue (et à valeurs dans H), donc H est un groupe topologique. Si $(G_i)_{i \in I}$ est une famille de groupes topologiques, alors l'application $(\prod_{i \in I} G_i) \times (\prod_{i \in I} G_i) \rightarrow (\prod_{i \in I} G_i)$ définie par $((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \mapsto (x_i y_i^{-1})_{i \in I}$ est continue, par les propriétés de continuité des projections canoniques $\text{pr}_i : \prod_{j \in I} G_j \rightarrow G_i$ pour tout $i \in I$ et des applications à valeurs dans un produit (voir la partie A.2.4 de l'appendice A). L'application de $G/H \times G/H \rightarrow G/H$ définie par $(xH, yH) \mapsto (xH)(yH)^{-1} = (xy^{-1})H$ est continue par passage au quotient de l'application continue $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ de $G \times G$ dans G .

(2) Dans tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, l'application $(x, y) \mapsto x - y$ est continue par l'inégalité triangulaire : $\|(x - y) - (x_0 - y_0)\| \leq \|x - x_0\| + \|y - y_0\|$. Le théorème de Riesz dit que E est localement compact si et seulement si E est de dimension finie.

L'espace topologique quotient $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ est séparé, car si $x, y \in \mathbb{R}^n$ vérifient $x - y \notin \mathbb{Z}^n$, si $\epsilon = \frac{1}{3} d(x - y, \mathbb{Z}^n) > 0$, alors $B(x, \epsilon) + \mathbb{Z}^n$ et $B(y, \epsilon) + \mathbb{Z}^n$ sont des voisinages saturés disjoints de x et de y respectivement. Il est aussi possible, puisque $\mathbb{Z}^n$ est un sous-groupe fermé du groupe localement compact $\mathbb{R}^n$, d'invoquer le corollaire 2.7. L'espace $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ est l'image du compact $[0, 1]^n$ par la projection continue $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, qui est continue, donc est compact.

(3) Ceci découle de la continuité de l'application déterminant (et du fait que les singletons sont fermés dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$).

(4) Ceci découle du fait que les coefficients du produit de deux matrices sont des polynômes (quadratiques) en les coefficients des deux matrices, du fait que les coefficients de l'inverse d'une matrice inversible sont des fractions rationnelles, de dénominateurs ne s'annulant pas, des coefficients de la matrice, et du fait qu'un ouvert (par la question (3)) d'un espace localement compact (par la question (2)) est encore localement compact.

(5) Le fait que ce sont des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{C})$ est bien connu, et le fait qu'ils soient fermés découle de la continuité des applications partie imaginaire, déterminant, $x \mapsto xx^*$ et $x \mapsto x^t x$, toutes à valeurs dans un espace topologique séparé, donc à singletons fermés.

(7) Les applications $t \bmod \mathbb{Z} \mapsto e^{2i\pi t}$ de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{S}_1$, $\theta \bmod \mathbb{Z} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $SO(2)$ et $z \mapsto (z)$ de $\mathbb{S}_1$ dans $U(1)$ sont clairement des isomorphismes de groupes topologiques.

(8), (9) et (10) Voir par exemple [Pau5, §3.5]

Correction de l'exercice E.16. (1) Par la décomposition polaire (exercice E.15 (10)), nous avons vu que l'application de $\mathcal{H}^{++} \times SU(n)$ dans $GL_n(\mathbb{C})$ définie par $(x, y) \mapsto xy$ est un homéomorphisme d'inverse l'application $x \mapsto (\sqrt{xx^*}, \sqrt{xx^*}^{-1}x)$. Donc l'application de $\mathcal{H}$ dans $GL_n(\mathbb{C})/SU(n)$, induite par passage au quotient de l'inclusion de $\mathcal{H}^{++}$ dans $GL_n(\mathbb{C})$, est une bijection continue, d'inverse l'application induite par passage au quotient de l'application continue de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{H}^{++}$ définie par $\sqrt{xx^*}$. Comme l'application exponentielle est un homéomorphisme de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}^{++}$ (voir loc. cit.), et puisque $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel réel de dimension n^2 , nous obtenons que $GL_n(\mathbb{C})/SU(n)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n^2}$. Les autres résultats se démontrent de même.

(2) Puisque $SO(n)$ est le stabilisateur du point $(1, 0, \dots, 0)$ pour l'action par rotation de $SO(n+1)$ sur la sphère $\mathbb{S}_n$, l'application orbitale $g \mapsto g(1, 0, \dots, 0)$ de $SO(n+1)$ dans $\mathbb{S}_n$ induit par passage au quotient une bijection continue de $SO(n+1)/SO(n)$ dans $\mathbb{S}_n$. Puisque l'espace topologique $\mathbb{S}_n$ est séparé et par l'exercice E.A.107 (2) de l'appendice A, l'espace topologique quotient $SO(n+1)/SO(n)$ est séparé. Donc puisque $SO(n+1)$ est compact et la projection canonique $SO(n+1) \rightarrow SO(n+1)/SO(n)$ continue, l'espace $SO(n+1)/SO(n)$ est compact.⁴³ Puisqu'une bijection continue entre espaces compacts est un homéomorphisme, les espaces $SO(n+1)/SO(n)$ et $\mathbb{S}_n$ sont homéomorphes.

(3) La diagonale Δ de $X \times X$ est fermée car X est séparé (voir l'exercice E.A.119 de la partie A.5 de l'appendice A). Pour tout $(x, y) \in X \times X$, comme l'action de G sur X est continue, l'ensemble K des éléments $g \in G$ tels que $gx = y$, qui est l'image réciproque de Δ par l'application continue $g \mapsto (gx, y)$ de G dans $X \times X$, est fermé dans G , donc compact. Par conséquent, comme $G \times X$ est séparé, l'image réciproque $\{(g, x) \in G \times X : gx = y\} = K \times \{x\}$ du point (x, y) de $X \times X$ par l'application graphe **gr** est compact.

Il reste à montrer que l'application **gr** est fermée, ce que nous admettrons.

Correction de l'exercice E.17. Puisque X est connexe par arcs, soit c un chemin dans X entre x et y . Alors $p \circ c$ est un lacet en b , et nous avons $p \circ \bar{c} = \bar{p} \circ \bar{c}$. Rappelons que

43. Le résultat découle aussi du corollaire 2.7, car $SO(n)$ est un sous-groupe fermé du groupe compact $SO(n+1)$.

l'application $\phi_c : \pi_1(X, y) \rightarrow \pi_1(X, x)$ définie par $[\alpha] \mapsto [c \cdot \alpha \cdot \bar{c}]$ est un isomorphisme de groupes par la proposition 1.3. Pour tout lacet α en y dans X , nous avons

$$[p \circ c][p \circ \alpha][\bar{p} \circ c] = [(p \circ c) \cdot (p \circ \alpha) \cdot (p \circ \bar{c})] = [p \circ (c \cdot \alpha \cdot \bar{c})] .$$

La conjugaison par l'élément $[p \circ c]$ de $\pi_1(B, b)$ envoie donc $p_*\pi_1(X, y)$ surjectivement dans $p_*\pi_1(X, x)$.

Correction de l'exercice E.18. Rappelons la définition et les propriétés du degré d'une application continue $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$, avec une présentation différente (et plus courte, maintenant que nous avons plus de résultats à notre disposition).

(1) Si $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un *relèvement* (total) de f par le revêtement $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1$ défini par $t \mapsto e^{2i\pi t}$ (c'est-à-dire un relèvement par π de l'application continue $f \circ \pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1$ définie sur un espace simplement connexe et localement connexe par arcs, qui existe par le théorème 2.27), alors le *degré* de f est défini comme

$$\deg f = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) .$$

Ceci ne dépend pas du choix du relèvement $\tilde{f}$, car les fibres de π sont les orbites par translations entières dans $\mathbb{R}$ et donc deux relèvements diffèrent d'une translation entière par le corollaire 2.12 (1).

(2) En particulier

$$\deg(p : z \mapsto z^n) = n$$

car l'application $t \mapsto nt$ est un relèvement de $z \mapsto z^n$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\deg(z \mapsto e^{i\theta} z) = 1 ,$$

car $t \mapsto t + \frac{\theta}{2\pi}$ est un relèvement de $z \mapsto e^{i\theta} z$.

(3) Nous avons

$$\deg(f \circ g) = (\deg f)(\deg g) . \quad (4)$$

En effet, si $\tilde{f}$ est un relèvement de f , alors $\tilde{f}(t+1) = \tilde{f}(t) + \deg f$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, car l'application $t \mapsto \tilde{f}(t+1) - \tilde{f}(t)$ est continue et à valeurs dans l'espace discret $\mathbb{Z}$, donc constante. Donc $\tilde{f}(t \pm k) = \tilde{f}(t) \pm k \deg f$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Notons que $\tilde{f} \circ \tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un relèvement de $f \circ g$ car $\pi \circ \tilde{f} \circ \tilde{g} = f \circ \pi \circ \tilde{g} = f \circ g \circ \pi$. Donc

$$\deg(f \circ g) = \tilde{f} \circ \tilde{g}(1) - \tilde{f} \circ \tilde{g}(0) = \tilde{f}(\tilde{g}(0) + \deg g) - \tilde{f}(\tilde{g}(0)) = (\deg f)(\deg g) .$$

Si f est un homéomorphisme, en appliquant la formule (4) à $g = f^{-1}$ et puisque $\deg \text{id} = 1$ par le rappel (2), nous obtenons que $\deg f$ est inversible dans $\mathbb{Z}$, donc $\deg f \in \{\pm 1\}$.

(4) Le groupe discret $\mathbb{Z}$ agit librement et proprement par translations sur l'espace simplement connexe séparé $\mathbb{R}$, et les fibres de l'application π sont les orbites de cette action. L'application ψ de $\pi_1(\mathbb{S}_1, 1)$ dans $\mathbb{Z}$ définie, pour tout $\gamma \in \pi_1(\mathbb{S}_1, 1)$, par $\psi(\gamma) = 0 \cdot \gamma$ (où $\cdot$ est l'action à droite de γ sur la fibre $\pi^{-1}(1) = \mathbb{Z}$) est un isomorphisme de groupes, par le corollaire 2.24.

Soient $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ une application continue telle que $f(1) = 1$, de sorte que l'application $f_* : \pi_1(\mathbb{S}_1, 1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}_1, 1)$ induite sur le groupe fondamental soit bien définie. Montrons que

l'application $\psi \circ f_* \circ \psi^{-1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ est l'application de multiplication par $\deg f$, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times \deg f} & \mathbb{Z} \\ \psi \uparrow & & \uparrow \psi \\ \pi_1(\mathbb{S}_1, 1) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(\mathbb{S}_1, 1) . \end{array} \quad (5)$$

Ceci montre en particulier que le degré de f défini dans cet exercice E.18 coïncide avec celui défini dans l'exercice E.12.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le chemin $\alpha_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_1$ défini par $t \mapsto e^{2i\pi kt}$ est un lacet dans $\mathbb{S}_1$ tel que $0 \cdot [\alpha_k] = k$. En effet, le chemin $\tilde{\alpha}_k : t \mapsto kt$ est l'unique relèvement de α par π d'origine 0. Donc $\psi([\alpha_k]) = \tilde{\alpha}_k(1) = k$. Si $\tilde{f}$ est le relèvement (total) de f tel que $\tilde{f}(0) = 0$ (ce qui est possible car $f(1) = 1$), alors le chemin $\tilde{f} \circ \tilde{\alpha}_k$ est le relèvement du lacet $f \circ \alpha_k$ d'origine 0, donc

$$\psi(f_*[\alpha_k]) = \psi([f \circ \alpha_k]) = \tilde{f} \circ \tilde{\alpha}_k(1) = \tilde{f}(k) = k \deg f$$

Par conséquent, nous obtenons bien que $\psi \circ f_* \circ \psi^{-1}(k) = k \deg f$.

Après ces rappels, supposons qu'une application continue $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ admette un relèvement $u : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ par le revêtement $p : z \mapsto z^n$. Alors $f = p \circ u$ et par les rappels (3) et (2) ci-dessus, nous avons

$$\deg f = \deg(p \circ u) = (\deg p)(\deg u) = n(\deg u) ,$$

donc n divise $\deg f$.

Réciproquement, soit $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ une application continue telle que $n = \deg p$ divise $\deg f$. Quitte à remplacer f par l'application $z \mapsto f(1)^{-1}f(z)$, puisque le degré de l'application $z \mapsto f(1)^{-1}z$ vaut 1 par le rappel (2) ci-dessus et par la formule (4), nous pouvons supposer que $f(1) = 1$.

Puisque $p(1) = 1$, nous avons un morphisme de groupes $p_* : \pi_1(\mathbb{S}_1, 1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}_1, 1)$. Les applications $\psi \circ p_* \circ \psi^{-1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ et $\psi \circ f_* \circ \psi^{-1}$ sont égales à la multiplication par $\deg p$ et par $\deg f$ respectivement par la formule (5) ci-dessus. Puisque $\deg p$ divise $\deg f$, nous avons $(\deg f)\mathbb{Z} \subset (\deg p)\mathbb{Z}$. Donc $f_*\pi_1(\mathbb{S}_1, 1) \subset p_*\pi_1(\mathbb{S}_1, 1)$. Le théorème 2.27 assure par conséquent l'existence d'un relèvement de f par le revêtement p .

Correction de l'exercice E.19. Les applications sont des homéomorphismes locaux, car en chaque sommet arrivent une demi-arête verte orientée et une demi-arête rouge orientée et de chaque sommet partent une demi-arête verte orientée et une demi-arête rouge orientée. Le cardinal des fibres est constant égal à 2, 3, 4, 5 respectivement (en prenant les exemples de la gauche vers la droite). Par la proposition 2.3, les applications sont donc des revêtements.

Par le théorème 2.39 (1), comme l'homéomorphisme échangeant les deux boucles vertes étiquetées a du premier espace total X et ses deux arêtes rouges étiquetées b (en préservant les orientations et les paramétrages) est un homéomorphisme involutif de X qui préserve les fibres, et engendre un groupe agissant transitivement sur les fibres de p , le premier revêtement est galoisien, de groupe des automorphismes de revêtement égal à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Le second revêtement n'est pas galoisien, car un des relèvements de a est un lacet, et les deux autres ne le sont pas, ce qui contredit le théorème 2.39 (4). Son groupe des automorphismes de revêtement est trivial, car tout tel automorphisme doit fixer le sommet du

bas de l'espace total, qui est le seul en lequel le lacet a se relève en un lacet, et puisque tout automorphisme de revêtement (d'espace total connexe) ayant un point fixe est l'identité (voir le corollaire 2.12 (2)).

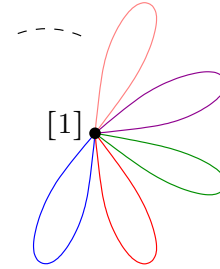
Le troisième revêtement est galoisien de groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ par le théorème 2.39 (5), car le groupe (fini et isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$) engendré par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ agit librement (et proprement car fini) sur l'espace total qui est connexe et localement connexe par arcs, d'espace des orbites qui s'identifie avec le bouquet de deux cercles.

Le quatrième revêtement n'est pas galoisien, car un des relèvements de a est un lacet, et les quatre autres ne le sont pas, ce qui contredit le théorème 2.39 (4). Son groupe des automorphismes de revêtement est trivial, car tout tel automorphisme doit fixer le sommet du haut de l'espace total, qui est le seul en lequel le lacet a se relève en un lacet, et puisque tout automorphisme de revêtement (d'espace total connexe) ayant un point fixe est l'identité (voir le corollaire 2.12 (2)).

Correction de l'exercice E.20. L'espace topologique B est compact (car fermé borné) et connexe par arcs (car tout point $x \in B$ peut être joint par un arc du cercle S_n contenant x au point $(0,0)$). Il est localement connexe par arcs, car tout point différent de $(0,0)$ a un voisinage homéomorphe à un intervalle, et tout voisinage de 0 contient un voisinage qui se rétracte par déformation forte sur une copie homothétique de B .

Montrons qu'il n'est pas semilocallement simplement connexe. Pour tout voisinage V de $(0,0)$, pour tout n assez grand, le cercle S_n est contenu dans V . Considérons pour tout n assez grand l'application continue f de B dans S_n qui vaut l'identité en restriction à S_n , et est constante valant $(0,0)$ sur tout cercle S_k avec $k \neq n$. En identifiant de manière usuelle $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, si le lacet $\gamma : t \mapsto \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} e^{2i\pi t}$ de point base $(0,0)$ était homotope à un chemin constant dans B , alors son image $f \circ \gamma$ serait homotope à un chemin constant dans S_n . Or la classe d'homotopie du lacet $f \circ \gamma$ est un générateur du groupe fondamental $\pi_1(S_n, (0,0))$, qui est isomorphe à $\mathbb{Z}$, donc est non trivial. Ceci montre que l'anneau hawaïen B n'est pas semilocallement simplement connexe, et en particulier n'admet pas de revêtement simplement connexe.

Le fait que le bouquet $B' = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{S}_1, 1)$ d'un ensemble dénombrable infini de cercles n'est pas homéomorphe à B peut se montrer de plusieurs manières. Rappelons (voir l'exemple (4) de la partie A.2.6 de l'appendice A) que B' est l'espace topologique quotient $(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{S}_1) / \mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence qui identifie les points bases 1 de toutes les copies du cercle en un point noté $[1]$. Notons que la restriction de la projection canonique $(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{S}_1) \rightarrow B'$ à $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{S}_1 \setminus \{1\})$ est un homéomorphisme sur son image.

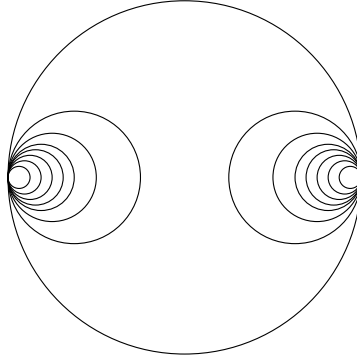


L'espace B est compact, alors que B' ne l'est pas. En effet, comme toute arête ouverte (les copies de $\mathbb{S}_1 \setminus \{1\}$) du graphe B' est un ouvert de B' , tout compact de B' ne rencontre qu'un nombre fini d'arêtes ouvertes.

L'espace B' est localement contractile, alors que B ne l'est pas. En effet, le complémentaire de la réunion des points -1 de chaque copie du cercle se rétracte par déformation forte sur le sommet de B' , par l'homotopie qui sur chaque copie de $\mathbb{S}_1 \setminus \{-1\}$ vaut

$(z, s) \mapsto z^{1-s} = e^{(1-s)\ln z}$, en utilisant la détermination principale du logarithme $\ln$ (qui est continue sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0])$.

Montrons enfin que l'espace B n'admet pas de revêtement universel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons le revêtement $p'_n : X_n \rightarrow B$ à deux feuillets construit de la manière suivante. Considérons A_n l'espace topologique $B \setminus (S_n \setminus \{(0, 0)\})$ obtenu en enlevant à B le cercle S_n sauf son point $(0, 0)$. L'espace topologique X_n est obtenu en recollant au cercle $\mathbb{S}_1$ une copie de A_n en 1 et une copie de A_n en -1 , voir la figure ci-dessous.



L'application continue $p'_n : X_n \rightarrow B$ est l'application qui vaut l'identité sur chaque copie de A_n , et qui vaut sur le cercle $\mathbb{S}_1$ le revêtement de degré 2 de $\mathbb{S}_1$ dans S_n (défini par $z \mapsto \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}z^2$, qui envoie ± 1 sur $(0, 0)$). En tant qu'homéomorphisme local dont toutes les fibres sont de cardinal 2, l'application p'_n est un revêtement à deux feuillets (voir la proposition 2.3).

Supposons par l'absurde qu'il existe un revêtement universel $\tilde{\pi} : \tilde{B} \rightarrow B$. Soit V un voisinage distingué de $(0, 0)$ pour $\tilde{\pi}$. Soit n assez grand tel que S_n soit contenu dans V . Montrons que le revêtement $\tilde{\pi}$ ne factorise pas par le revêtement p'_n , ce qui contredit la propriété universelle des revêtements universels (voir le début de la partie 2.12). En effet, tous les relèvements par $\tilde{\pi}$ du lacet $\gamma : t \mapsto \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}e^{2i\pi t}$ parcourant le cercle S_n sont des lacets, puisque V est un voisinage distingué pour $\tilde{\pi}$ contenant S_n , alors qu'aucun relèvement de γ par p_n n'est un lacet.

Correction de l'exercice E.21. Nous appliquons la méthodologie décrite dans la partie 2.13. L'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1$ définie par $t \mapsto e^{2i\pi t}$ est un revêtement universel du cercle par un espace localement compact simplement connexe (et même contractile) $\mathbb{R}$, sur lequel le groupe $\mathbb{Z}$ agit librement et proprement par translations entières. Le groupe $\mathbb{Z}$ est abélien, et la liste (exhaustive et sans répétition) de ses sous-groupes (tous distingués) sont les $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \geq 1$, l'espace topologique quotient $\mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ est homéomorphe au cercle par l'application $\psi_n : t \mapsto e^{2i\pi \frac{t}{n}}$. Le diagramme suivant, dont la première application verticale est l'application $t \bmod n \mapsto t \bmod 1$ et la deuxième l'application $z \mapsto z^n$, est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}/n\mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi_n} & \mathbb{S}_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi_1} & \mathbb{S}_1 \end{array} .$$

Par le théorème 2.46, les revêtements connexes du cercle $\mathbb{S}_1$ sont donc, à isomorphisme près, son revêtement universel $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1$ défini par $t \mapsto e^{2i\pi t}$, et ses revêtements à n feuillets $\mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ définis par $z \mapsto z^n$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ils sont tous galoisiens.

Correction de l'exercice E.22. (1) Si V est un ouvert distingué du revêtement p et si $h : V \times D \rightarrow p^{-1}(V)$ est une trivialisation locale de p au-dessus de V , alors $U \cap V$ est un ouvert distingué de $p|_{p^{-1}(U)}$ et $h|_{(U \cap V) \times D} : (U \cap V) \times D \rightarrow p^{-1}(U \cap V)$ est une trivialisation locale de $p|_{p^{-1}(U)}$ au-dessus de V .

(2) Soient V et V' des ouverts distingués de p et p' , et soient $h : V \times D \rightarrow p^{-1}(V)$ et $h' : V' \times D' \rightarrow p'^{-1}(V')$ des trivialisations locales de p et p' au-dessus de V et V' respectivement. Notons que l'espace topologique produit $D \times D'$ est encore discret. Alors $V \times V'$ est un ouvert distingué de $p \times p'$ et l'application de $(V \times V') \times (D \times D')$ dans $p^{-1}(V) \times p'^{-1}(V') = (p \times p')^{-1}(V \times V')$ définie par $((x, x'), (d, d')) \mapsto (h(x, d), h'(x', d'))$ est une trivialisation locale de $p \times p'$ au-dessus de $V \times V'$.

Montrons que l'application de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $(\mathbb{S}_1)^{\mathbb{N}}$ définie par $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (e^{2i\pi t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas un homéomorphisme local, donc n'est pas un revêtement. Nous pointons $\mathbb{S}_1$ en 1 et $(\mathbb{S}_1)^{\mathbb{N}}$ en la suite constante $(1)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit V un voisinage ouvert de cette suite constante $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $(\mathbb{S}_1)^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\gamma_n : t \mapsto (\alpha_i(t))_{i \in \mathbb{N}}$ le lacet dans $(\mathbb{S}_1)^{\mathbb{N}}$ où pour tout $t \in [0, 1]$, nous avons $\alpha_i(t) = 1$ si $i < n$ et $\alpha_i(t) = e^{2i\pi t}$ si $i \geq n$. Par la définition de la topologie quotient, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que le lacet γ_n soit contenu dans V . Le lacet γ_n n'est pas homotope au lacet constant dans $(\mathbb{S}_1)^{\mathbb{N}}$, sinon $\text{pr}_n \circ \gamma_n$ serait homotope au lacet constant dans $\mathbb{S}_1$, ce qui n'est pas le cas puisque sa classe d'homotopie engendre $\pi_1(\mathbb{S}_1, 1)$. Donc $(\mathbb{S}_1)^{\mathbb{N}}$ n'est pas localement contractile. Or l'espace vectoriel topologique produit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'est : pour tout voisinage U de la suite constante $(0)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$ tel que le voisinage ouvert contractile (car étoilé) $\prod_{i \in \mathbb{N}} U_i$ de $(0)_{n \in \mathbb{N}}$, où $U_i =]-\epsilon, +\epsilon[$ si $0 \leq i \leq N$ et $U_i = \mathbb{R}$ si $i > N$, soit contenu dans U . Donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(\mathbb{S}_1)^{\mathbb{N}}$ ne sont pas localement homéomorphes.

(3) Soit V un ouvert distingué à la fois pour p et pour p' (ce qui est possible par intersection). Soient $h : V \times D \rightarrow p^{-1}(V)$ et $h' : V \times D' \rightarrow p'^{-1}(V)$ des trivialisations locales de p et p' au-dessus de V respectivement. Notons que l'espace topologique produit $D \times D'$ est encore discret. Alors V est encore un ouvert distingué de π et l'application de $V \times (D \times D')$ dans $\pi^{-1}(V) = \{(x, x') \in p^{-1}(V) \times p'^{-1}(V) : p(x) = p(x')\}$ définie par $(y, (d, d')) \mapsto (h(y, d), h'(y, d'))$ est bien à valeurs dans $X \times_B X'$ et est une trivialisation locale de π au-dessus de V .

Correction de l'exercice E.23. (1) Soient x et x' deux points distincts de X . Si $p(x) \neq p(x')$, comme B est séparé, il existe des voisinages ouverts disjoints U et V de $p(x)$ et $p(x')$ respectivement dans B . Puisque p est continue, les parties $p^{-1}(U)$ et $p^{-1}(V)$ sont des voisinages ouverts disjoints de x et x' respectivement dans X .

Si $p(x) = p(x')$, considérons un voisinage ouvert distingué V de $p(x)$ dans B et une trivialisation locale $\theta : V \times D \rightarrow p^{-1}(V)$ de p au-dessus de V . Puisque $x \neq x'$ et comme il existe un et un seul point de la préimage de $p(x)$ dans chaque « tranche » au-dessus de V , il existe $d \neq d'$ dans D tels que $x \in \theta(V \times \{d\})$ et $x' \in \theta(V \times \{d'\})$. Alors $\theta(V \times \{d\})$ et $\theta(V \times \{d'\})$ sont des voisinages ouverts disjoints de x et x' respectivement dans X . Donc X est séparé.

(2) Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Pour tout $x \in B$, puisque les fibres de p sont finies, il existe une partie finie $I(x)$ de I telle que la fibre $p^{-1}(x)$ soit contenue

dans $\bigcup_{i \in I(x)} U_i$. Puisque p est un revêtement, il existe V_x un voisinage ouvert de X tel que $p^{-1}(V_x)$ soit contenue dans $\bigcup_{i \in I(x)} U_i$. Par la compacité de B , il existe une partie finie F de B telle que $B = \bigcup_{x \in F} V_x$. Alors $(U_i)_{i \in \bigcup_{x \in F} I(x)}$ est un sous-recouvrement fini de $(U_i)_{i \in I}$.

Correction de l'exercice E.24. Notons π la projection canonique $G \rightarrow H \backslash G$. Si $H \backslash G$ est séparé, alors le singleton $\{He\}$ dans $H \backslash G$ est fermé, et puisque l'application π est continue, sa préimage $\pi^{-1}(\{He\}) = H$ est fermée dans G .

Réciproquement, si le sous-groupe H est fermé dans G , montrons que la diagonale $\Delta = \{(x, y) \in H \backslash G \times H \backslash G : x = y\}$ de $H \backslash G \times H \backslash G$ est fermée. Par l'exercice E.A.107 (1) de la partie A.5 de l'appendice A, ceci montrera que $H \backslash G$ est séparé. Par la définition de la topologie quotient et les propriétés de la topologie produit, la partie Δ de $H \backslash G \times H \backslash G$ est fermée si et seulement si sa préimage par l'application $\pi \times \pi : G \times G \rightarrow H \backslash G \times H \backslash G$ est fermée. Or

$$(\pi \times \pi)^{-1}(\Delta) = \{(g, g') \in G \times G : Hg = Hg'\} = \{(g, g') \in G \times G : g'g^{-1} \in H\},$$

qui est fermé car H est fermé et l'application $(g, g') \mapsto g'g^{-1}$ de $G \times G$ dans G est continue.

Les fibres de la projection canonique $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z})$, qui sont les translatés du sous-groupe dense $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$, sont toutes denses. Donc le résultat découle de l'exercice E.A.108 de la partie A.2.6 de l'appendice A.

Correction de l'exercice E.25. (1) Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est fermé dans l'espace topologique usuel $\mathbb{R}^4$ donc localement compact, et son sous-groupe fini $\{\pm \mathrm{Id}\}$ (égal à son centre et distingué, par ailleurs) agit librement par translations à droite sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Donc la projection canonique $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est un revêtement à deux feuillets (voir le corollaire 2.9).

(2) De même, le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est fermé dans $\mathbb{C}^{n^2}$ donc localement compact, et son sous-groupe fini $\mathbb{U}_n \mathrm{Id}$ d'ordre n (égal à son centre et distingué, par ailleurs) agit librement par translations à droite sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Donc la projection canonique $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{PSL}_n(\mathbb{C})$ est un revêtement à n feuillets (voir le corollaire 2.9).

Correction de l'exercice E.26. (1) L'application ψ de la sphère unité $\mathbb{S}_3$ de l'espace hermitien usuel $\mathbb{C}^2$ à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par $(w, z) \mapsto A = \begin{pmatrix} w & -\bar{z} \\ z & \bar{w} \end{pmatrix}$ est continue, injective, donc un homéomorphisme sur son image, car $\mathbb{S}_3$ est compact et $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ séparé. Cette image est contenue dans $\mathrm{SU}(2)$ car nous avons $\det A = |z|^2 + |w|^2 = 1$ et les colonnes de A sont unitaires et orthogonales. Montrons que l'image de ψ est exactement $\mathrm{SU}(2)$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $\mathrm{SU}(2)$. Puisque les colonnes sont orthogonales (et que la première colonne est non nulle), il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\bar{c} \\ \bar{a} \end{pmatrix}$. Puisque les colonnes sont unitaires, nous avons $|a|^2 + |c|^2 = 1$. Puisque le déterminant de A est égal à 1, nous avons $1 = ad - bc = \lambda(|a|^2 + |c|^2) = \lambda$ donc $\lambda = 1$. Nous avons bien montré que A appartient à l'image de ψ .

(2) Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, notons $M^* = {}^t \overline{M}$ sa matrice adjointe. Pour la culture (voir par exemple [Paul1, Pau4]), l'espace vectoriel réel V est appelé l'algèbre de Lie du groupe de Lie réel $\mathrm{SU}(2)$, et noté $\mathfrak{su}(2)$.

Posons

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Toute matrice X de V , étant anti-hermitienne de trace nulle, s'écrit de manière unique

$$X = \begin{pmatrix} i x_3 & -x_2 + i x_1 \\ x_2 + i x_1 & -i x_3 \end{pmatrix} = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3$$

où x_1, x_2, x_3 sont des nombres réels. Donc V est un espace vectoriel réel, ayant pour base (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Il est immédiat que l'application $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle$ est une forme bilinéaire. Un calcul élémentaire utilisant les coordonnées ci-dessus montre que

$$\langle X, X \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire euclidien sur V , rendant la base (ξ_1, ξ_2, ξ_3) orthonormée.

Pour tous les $A \in \text{SU}(2)$ et $X \in V$, nous avons $(AXA^{-1})^* = (A^*)^{-1}X^*A^* = -AXA^{-1}$ et $\text{tr}(AXA^{-1}) = \text{tr} X = 0$. Par conséquent $AXA^{-1} \in V$. L'application $\text{Ad} A : X \mapsto AXA^{-1}$ de conjugaison par A est linéaire et inversible d'inverse $\text{Ad}(A^{-1})$. Comme nous avons $\text{Ad}(AB) = (\text{Ad} A) \circ (\text{Ad} B)$, l'application $\text{Ad} : A \mapsto \text{Ad} A$ est un morphisme de groupes de $\text{SU}(2)$ dans $\text{GL}(V)$.

Pour tous les $A \in \text{SU}(2)$ et $X, Y \in V$, puisque $A^{-1} = A^*$ et puisque $(UV)^* = V^*U^*$ et $\text{tr}(UV) = \text{tr}(VU)$ pour tous les $U, V \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, nous avons

$$\langle \text{Ad} A(X), \text{Ad} A(Y) \rangle = \frac{1}{2} \text{tr}((A^*)^{-1}X^*A^*AY A^{-1}) = \frac{1}{2} \text{tr}(X^*Y) = \langle X, Y \rangle.$$

(3) Considérons l'application Φ de $\text{SU}(2)$ dans $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ qui à A associe la matrice de $\text{Ad} A$ dans la base (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Elle est polynomiale en les coefficients, donc continue. Par la question (2) ci-dessus, l'image de Φ est contenue dans le groupe orthogonal $\text{O}(3)$. Comme $\text{SU}(2)$ est connexe (car homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_3$ par la question (1) précédente) et puisque Φ est continue, son image est en fait contenue dans la composante connexe de l'élément neutre dans $\text{O}(3)$, qui est $\text{SO}(3)$ (voir l'exercice E.15 (9)).

Le noyau Ker Ad de Ad est

$$\{g \in \text{SU}(2) : \forall X \in V, gXg^{-1} = X\}.$$

En prenant $X = \xi_3$, qui est diagonale à valeurs propres distinctes, nous obtenons que tout élément de Ker Ad est diagonal, donc de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$ avec $|a| = 1$. En prenant $X = \xi_2$, nous obtenons que $a = \bar{a}$ est réel, donc $a = \pm 1$, d'où Ker Ad est contenu dans $\{\pm \text{id}\}$. L'inclusion réciproque étant immédiate, nous avons $\text{Ker Ad} = \{\pm \text{id}\}$. Donc $\text{Ker } \Phi = \{\pm \text{id}\}$, qui est d'ordre 2.

Montrons que Φ est surjective.⁴⁴ Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, posons $A = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$, qui est un

44. Voici une démonstration qui utilise la partie 4 de ces notes. Par la proposition 4.14, les sous-espaces $\text{SU}(2)$ et $\text{SO}(3)$ sont des sous-variétés différentielles de même dimension 3 des espaces vectoriels réels de dimension finie $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. L'application Φ , étant polynomiale en les coefficients, est de classe C^∞ . Puisque Φ est un morphisme de groupes de noyau discret, sa différentielle en tout point est injective, donc bijective par égalité de dimension. Par le théorème d'inversion locale (voir le théorème C.1 de l'appendice C), l'application Φ est ouverte. Donc l'image $\Phi(\text{SU}(2))$ est un ouvert de $\text{SO}(3)$. Par la compacité de $\text{SU}(2)$ (et la séparation de $\text{SO}(3)$), cette image est compacte, donc fermée. Puisque $\text{SO}(3)$ est connexe, nous avons $\Phi(\text{SU}(2)) = \text{SO}(3)$.

élément de $SU(2)$. Un petit calcul élémentaire montre que

$$\text{Ad}(A)(\xi_3) = \xi_3, \quad \text{Ad}(A)(\xi_1) = \cos \theta \xi_1 + \sin \theta \xi_2 \quad \text{et} \quad \text{Ad}(A)(\xi_2) = -\sin \theta \xi_1 + \cos \theta \xi_2 .$$

Ainsi, $\Phi(A) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la rotation d'angle θ modulo 2π et d'axe celui des dernières coordonnées (en choisissant bien les orientations).

Par le théorème de diagonalisation en base orthonormée des matrices anti-hermitiennes (voir par exemple le corollaire 1.15 (1) de [Pau5]), pour tout $X \in V$ non nul, il existe un élément $P \in U(2)$ et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $PXP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda i & 0 \\ 0 & -\lambda i \end{pmatrix} = \lambda \xi_3$. Nous pouvons supposer que P appartienne à $SU(2)$ quitte à multiplier P par une homothétie de rapport de module 1. En particulier, pour toute rotation R d'axe $\mathbb{R}X$ dans l'espace euclidien V , il existe $P \in SU(2)$ tel que $\text{Ad}(P)R\text{Ad}(P)^{-1}$ soit une rotation d'axe $\text{Ad}(P)(\mathbb{R}X) = \mathbb{R}\xi_3$. Comme vu ci-dessus, il existe $A \in SU(2)$ tel que $\text{Ad}(P)R\text{Ad}(P)^{-1} = \text{Ad}(A)$. Donc $R = \text{Ad}(P^{-1}AP)$ appartient à l'image de Ad . Ceci montre la surjectivité de Φ .

Enfin, le groupe fini $\text{Ker } \Phi = \{\pm \text{id}\}$ agit librement par translations (à droite ou à gauche, il est central dans $SU(2)$...) sur l'espace topologique compact $SU(2)$. Nous pouvons appliquer la proposition 2.9. L'espace topologique quotient $SU(2)/\{\pm \text{id}\}$ est donc séparé, et par conséquent compact car $SU(2)$ l'est. La projection canonique $\pi : SU(2) \rightarrow SU(2)/\{\pm \text{id}\}$ est donc un revêtement à deux feuillets. Le morphisme de groupes $\Phi : SU(2) \rightarrow SO(3)$, qui est continu et surjectif, passe au quotient modulo son noyau en une bijection continue $\bar{\Phi} : SU(2)/\{\pm \text{id}\} \rightarrow SO(3)$ entre espaces compacts, qui est donc un homéomorphisme.

Par conséquent, l'application $\bar{\Phi} \circ \pi : SU(2) \rightarrow SO(3)$ est un revêtement à deux feuillets. C'est un revêtement universel par la proposition 2.41, car $SU(2)$, étant homéomorphe à $\mathbb{S}_3$ par la question (1), est simplement connexe.

(4) Le groupe fondamental de l'espace topologique $SO(3)$, qui admet un revêtement galoisien par l'espace séparé et simplement connexe $SU(2)$ de groupe $\{\pm \text{id}\}$, est donc isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par le corollaire 2.24.

Correction de l'exercice E.27. (1) Notons que le groupe G est engendré par les deux éléments b et $b^{-1}a : (x, y) \mapsto (x + 1, -y)$. Pour tout $\epsilon \in \{\pm 1\}$, nous avons

$$(b^{-1}a)b^\epsilon = b^{-\epsilon}(b^{-1}a) : (x, y) \mapsto (x + 1, -y - \epsilon)$$

et

$$(b^{-1}a)^{-1}b^\epsilon = b^{-\epsilon}(b^{-1}a)^{-1} : (x, y) \mapsto (x - 1, -y - \epsilon) .$$

Pour tous les $\epsilon = \pm 1$ et $m, n \in \mathbb{Z}$, nous avons donc $b^n(b^{-1}a)^mb^\epsilon = b^{n+\epsilon(-1)^m}(b^{-1}a)^m$. Donc par récurrence sur la longueur d'un mot en des puissances de $b^{-1}a$ et de b représentant un élément de G , tout élément de G s'écrit $b^n(b^{-1}a)^m : (x, y) \mapsto (x + m, (-1)^m y + n)$ pour $m, n \in \mathbb{Z}$. Une telle écriture est clairement unique.

Le groupe G muni de la topologie discrète, étant un sous-groupe du groupe des isométries affines du plan affine réel $\mathbb{R}^2$, agit continuellement sur $\mathbb{R}^2$. Pour tous les $x, y \in \mathbb{R}$, puisque $(x + m, (-1)^m y + n) = (x, y)$ si et seulement si $m = n = 0$, l'action est libre.

Notons $\text{pr}_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la projection canonique sur le i -ème facteur, pour $i = 1, 2$. Si C est un compact de $\mathbb{R}^2$, l'application de l'espace topologique compact $C \times C$ dans $\mathbb{R}$

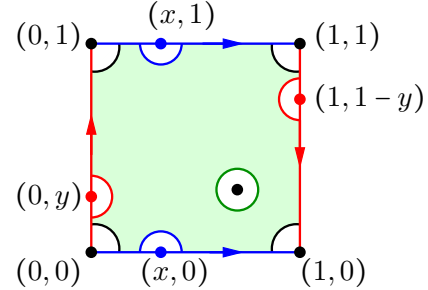
définie par $(z, z') \mapsto \text{pr}_1(z) - \text{pr}_1(z')$ est continue à valeur dans un espace séparé, donc d'image C_1 compacte. De même, l'image $C_2^\pm$ par $(z, z') \mapsto \text{pr}_2(z) \pm \text{pr}_2(z')$ est un compact de $\mathbb{R}$. S'il existe $(x, y), (x', y') \in C$ tels que $(x + m, (-1)^m y + n) = (x', y')$, alors nous avons $m = x' - x \in C_1$ et $n \in C_2^- \cup C_2^+$. Puisque $\mathbb{Z}$ est discret et puisque les parties compactes d'un espace discret sont ses parties finies, il n'existe qu'un nombre fini d'éléments $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $b^n(b^{-1}a)^m C \cap C \neq \emptyset$. Donc l'action est propre.

Par le théorème 2.8 (3), la projection canonique $\tilde{\pi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow K$ est un revêtement. Par la proposition 2.41, puisque $\mathbb{R}^2$ est contractile, donc simplement connexe, la projection canonique $\mathbb{R}^2 \rightarrow K$ est un revêtement universel. Par le corollaire 2.24, le groupe fondamental de la bouteille de Klein (pour un choix indifférent de point base $x \in K$) est isomorphe au groupe G :

$$\pi_1(K, x) \simeq G.$$

(2) Par la définition de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$, l'inclusion de $[0, 1]^2$ dans $\mathbb{R}^2$ induit par passage au quotient une bijection continue ψ de $[0, 1]^2/\mathcal{R}$ dans $G \backslash \mathbb{R}^2$.

En considérant des petits disques aux points de l'intérieur du carré $[0, 1]^2$, ou deux petits demi-disques aux paires de points du bord de $[0, 1]^2$ identifiés par $\mathcal{R}$, ou quatre quarts de petits disques aux sommets du carré $[0, 1]^2$, il est élémentaire de vérifier que deux points du carré qui ne sont pas dans la même classe d'équivalence de $\mathcal{R}$ ont des voisinages saturés disjoints.



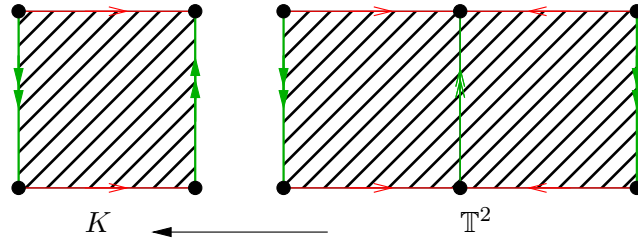
Donc l'espace topologique quotient $[0, 1]^2/\mathcal{R}$ est séparé, image du compact $[0, 1]^2$, donc compact. La bijection continue ψ entre deux espaces compacts est un homéomorphisme.

(3) Question non traitée.

(4) Soit H le sous-groupe d'indice 2 de G engendré par les deux éléments

$$a^2 = (b^{-1}a)^2 : (x, y) \mapsto (x + 2, y) \quad \text{et} \quad b : (x, y) \mapsto (x, y + 1),$$

qui est abélien libre de rang 2 et d'indice 2 dans G .



L'application canonique $\tilde{\pi}_H$ de $H \backslash \mathbb{R}^2$ dans $K = G \backslash \mathbb{R}^2$ est donc un revêtement à deux feuillets par le théorème 2.46. L'application $(x, y) \mapsto (2x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ induit un homéomorphisme f du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ sur l'espace topologique quotient $H \backslash \mathbb{R}^2$. La composition $p = \tilde{\pi}_H \circ f$ est donc un revêtement à deux feuillets. L'application p_* est par conséquent, à isomorphisme de groupes près à la source et au but, de la forme $(m, n) \mapsto b^n(b^{-1}a)^{2m}$.

(5) Le morphisme de multiplication par 2 de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ est injectif, donc la somme amalgamée $\mathbb{Z} *_\mathbb{Z} \mathbb{Z}$ est un produit amalgamé. Par la construction d'une somme amalgamée,

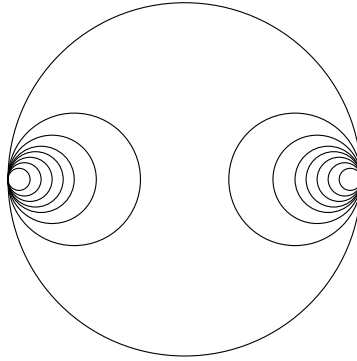
comme $A = \mathbb{Z}$ a pour présentation $(\alpha, \emptyset)$ et $B = \mathbb{Z}$ a pour présentation $(\beta, \emptyset)$ et $C = \mathbb{Z}$ a pour présentation $(c, \emptyset)$, et que les morphismes de C dans A et B sont respectivement définis par $c \mapsto \alpha^2$ et $c \mapsto \beta^2$, la somme amalgamée $A *_C B$ admet pour présentation $\langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^2 \rangle$.

En posant $\alpha = \bar{a}$ et $\beta = \bar{b}^{-1} \bar{a}$, ainsi que réciproquement $\bar{a} = \alpha$ et $\bar{b} = \alpha \beta^{-1}$, les groupes de présentation $\langle \bar{a}, \bar{b} \mid \bar{a} \bar{b}^{-1} \bar{a}^{-1} = \bar{b} \rangle$ et $\langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^2 \rangle$ sont clairement isomorphes. Enfin, considérons le morphisme canonique du groupe libre $L(\bar{a}, \bar{b})$ dans G qui à $\bar{a}$ associe a et à $\bar{b}$ associe b . Il est surjectif, puisque la partie $\{a, b\}$ engendre G . Il induit par passage au quotient un morphisme de groupes surjectif du groupe de présentation $\langle \bar{a}, \bar{b} \mid \bar{a} \bar{b}^{-1} \bar{a}^{-1} = \bar{b} \rangle$ dans G car $ab^{-1}a^{-1} = b : (x, y) \mapsto (x, y + 1)$. La forme normale dans les produits amalgamés dit que ce morphisme est injectif.

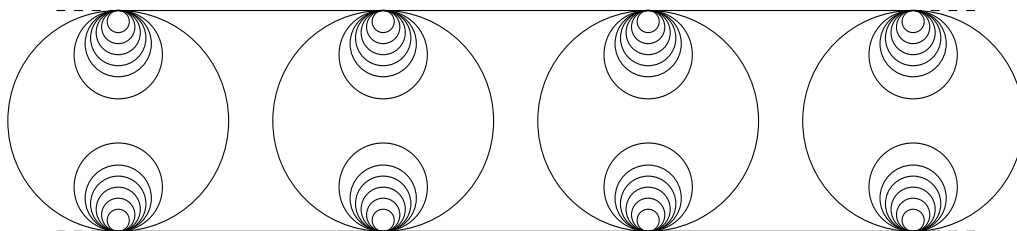
L'abélianisé de G a pour présentation $\langle \alpha, \beta \mid [\alpha, \beta] = 1, \alpha^2 = \beta^2 \rangle$, donc pour présentation $\langle \alpha, \beta \mid [\alpha, \beta] = 1, (\alpha \beta^{-1})^2 = 1 \rangle$, donc est isomorphe à $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / (\{0\} \times 2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

La bouteille de Klein n'a pas le même type d'homotopie que le tore, car ils sont tous les deux connexes par arcs, et que leurs groupes fondamentaux (pour des points bases indifférents) ne sont pas isomorphes (par exemple parce que celui du tore est abélien, alors que celui de la bouteille de Klein ne l'est pas).

Correction de l'exercice E.29. (1) Pour tous les $b \in B$ et $y \in q^{-1}(b)$, soit V_y un voisinage ouvert distingué de y pour le revêtement p . Quitte à restreindre V_y , puisque q est un revêtement, nous pouvons supposer que les V_y lorsque y parcourt $q^{-1}(b)$ sont deux à deux disjoints, que $q(V_y)$ est un ouvert de B et que $q|_{V_y} : V_y \rightarrow q(V_y)$ soit un homéomorphisme. Alors il n'est pas difficile de vérifier que l'intersection finie d'ouverts $V = \bigcap_{y \in q^{-1}(b)} q(V_y)$ est un voisinage ouvert distingué de b pour l'application $q \circ p$, car $(q \circ p)^{-1}(V) = \bigcup_{y \in q^{-1}(b)} p^{-1}(V_y \cap q^{-1}(V))$ (avec union disjointe).

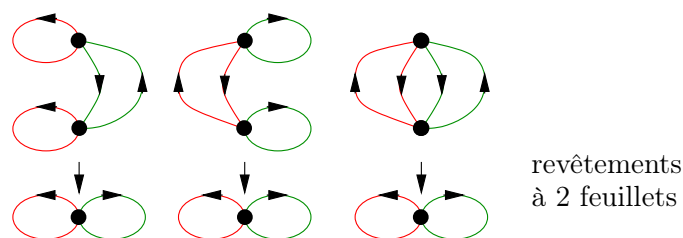


(2) Soit Z_n l'espace topologique (représenté par le dessin ci-dessus) obtenu par recollement en les deux points 1 et -1 du cercle $\mathbb{S}_1$ d'une copie de $B \setminus (S_n \cup S_0)$. De manière similaire à la construction du revêtement p_n dans l'exercice E.28 (1), pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe un revêtement p''_n de l'anneau hawaïen $\overline{B \setminus S_0}$ privé de son cercle extérieur par l'espace topologique Z_n , tel que la restriction de p''_n à chacune des deux copies de $B \setminus (S_n \cup S_0)$ soit un homéomorphisme sur son image $B \setminus (S_n \cup S_0)$, et la restriction de p''_n à $\mathbb{S}_1$ soit un revêtement à deux feuillets de S_n .

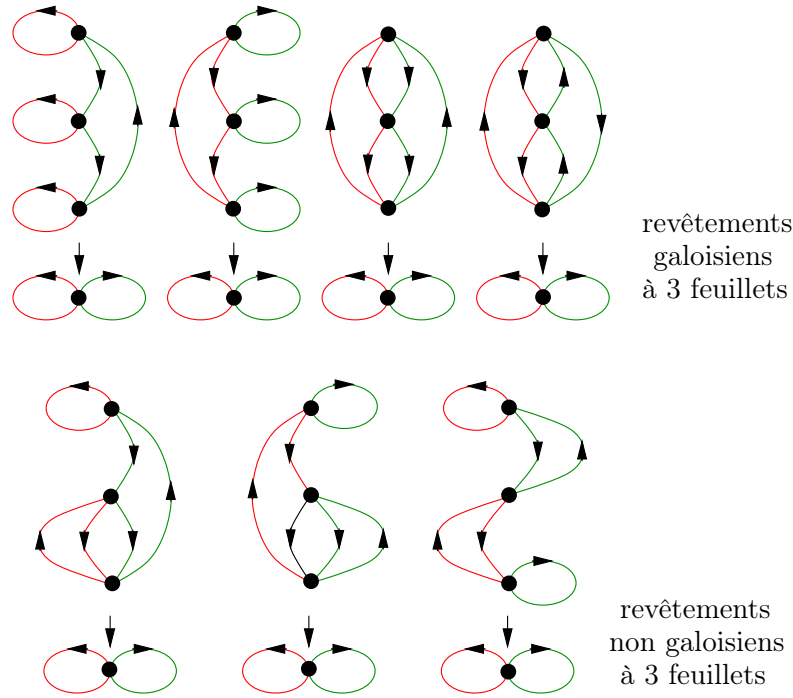


Notons $q = p_0 : Y = X_0 \rightarrow B$ le revêtement construit dans l'exercice E.28 (1) pour $n = 0$. Considérons l'espace topologique X (représenté par le dessin ci-dessus) obtenu en prenant l'espace topologique somme disjointe des espaces Z_n pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, recollée sur la somme disjointe de deux droites comme indiqué sur le dessin ci-dessus. Notons $p : X \rightarrow Y$ l'application qui sur chacune des deux copies de la droite dans X est l'identité sur la copie de la droite dans Y , et vaut p'_n sur chaque Z_n pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors p est un revêtement à deux feuillets, mais $p \circ q$ n'est pas un revêtement, car B contient des cercles arbitrairement petits qui ne se relèvent pas en des lacets, et le point commun des cercles de B n'a pas de voisinage distingué.

Correction de l'exercice E.30. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous allons montrer qu'il existe exactement $2^k - 1$ classes d'isomorphisme de revêtements connexes à deux feuillets du bouquet de k cercles, qui sont tous galoisiens (voir dessin ci-dessous lorsque $k = 2$).



Nous montrerons aussi qu'il y a exactement 7 classes d'isomorphisme de revêtements connexes à $n = 3$ feuillets du bouquet de 2 cercles, dont 4 sont galoisiens (voir dessin ci-dessous). Le calcul pour $n = 4, 5$ est laissé au lecteur.



Le bouquet de k cercles B_k est un espace connexe et localement connexe par arcs, localement contractile. Son groupe fondamental est isomorphe au groupe libre L_k à k générateurs $s_1, \dots, s_k$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, par le théorème de classification des revêtements, l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements connexes à n feuillets de B_k est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes d'indice n de L_k . De plus, les revêtements galoisiens correspondent aux sous-groupes distingués. Rappelons que tout sous-groupe d'indice 2 d'un groupe G est distingué dans G .

Les sous-groupes distingués d'indice n de L_k sont les noyaux des morphismes de groupes surjectifs de L_k à valeurs dans les groupes d'ordre n . Par la propriété universelle des groupes libres, si G est un groupe, et $g_1, \dots, g_k$ des éléments de G , il existe un et un seul morphisme de groupes $f : L_k \rightarrow G$ tel que $f(x_i) = g_i$ pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. De plus f est surjectif si et seulement si $\{g_1, \dots, g_k\}$ engendre G . Il existe en particulier exactement $\text{Card}(G)^k$ morphismes de L_k dans G , si G est fini.

Il existe, à isomorphisme près, un seul groupe d'ordre 2, qui est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et un seul groupe d'ordre 3, qui est $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Une partie de l'un de ces deux groupes l'engendre si et seulement si elle n'est pas réduite à l'élément neutre. Deux morphismes non nuls de L_k à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont distincts si et seulement s'ils ont des noyaux distincts. Deux morphismes non nuls (donc surjectifs) de L_k à valeurs dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ont même noyau si et seulement s'ils sont égaux ou si l'un est l'opposé de l'autre.

Donc, il y a exactement $2^k - 1$ classes d'isomorphisme de revêtements connexes à deux feuillets de B_k (donc 3 si $k = 2$, voir le premier dessin ci-dessus), et $\frac{3^k - 1}{2}$ (donc 4 si $k = 2$, voir le second dessin ci-dessus) classes d'isomorphisme de revêtements connexes galoisiens à trois feuillets, du bouquet de k cercles.

Remarque. Comme vu ci-dessus, les seuls groupes d'ordre 2 ou 3 sont abéliens. Tout morphisme de L_k dans un groupe abélien factorise à travers l'abélianisé de L_k , qui est le groupe abélien libre $\mathbb{Z}^k$ de rang k . Nous pouvons donc aussi nous ramener à compter le nombre de sous-groupes d'indice 2 ou 3 de $\mathbb{Z}^k$.

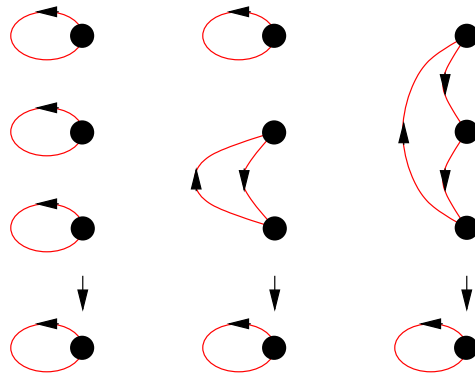
Calculons maintenant le nombre de revêtements connexes non galoisiens du bouquet de deux cercles. Fixons une fois pour toute une orientation de chaque cercle de B . Tout revêtement X d'un bouquet de cercles B est un graphe, dont chaque arête de X est naturellement munie d'une orientation (en demandant que l'application de revêtement $p : X \rightarrow B$ préserve l'orientation sur chaque arête). Si b est le point base de B , alors par relèvement des chemins, tout cercle (muni de son orientation fixée) c de B définit une permutation σ_c de $F = p^{-1}(b)$, telle que pour tout $x \in F$, le sommet $\sigma_c(x)$ soit l'extrémité de l'unique arête de X au-dessus de c d'origine x . Réciproquement, la donnée pour tout cercle c de B d'une permutation σ_c de $F = p^{-1}(x)$ définit un graphe X , d'ensemble de sommets F , en recollant une arête orientée d'origine x et d'extrémité $\sigma_c(x)$ pour tout x dans F et tout cercle c de B . Ce graphe X revêt naturellement B . Tout automorphisme de revêtements ϕ d'un revêtement $p : X \rightarrow B$ induit une bijection σ de $F = p^{-1}(x)$. Comme ϕ préserve les relèvements de chemins, il induit donc une conjugaison sur les permutations $\sigma_c \mapsto \sigma \sigma_c \sigma^{-1}$.

Comme il existe un unique homéomorphisme à homotopie près de l'intervalle $[0, 1]$ dans lui-même fixant 0 et 1, nous en déduisons que l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements (pas forcément connexes) à n feuillets du bouquet de k cercles est en bijection avec

$$\mathfrak{S}_n^k / \mathfrak{S}_n$$

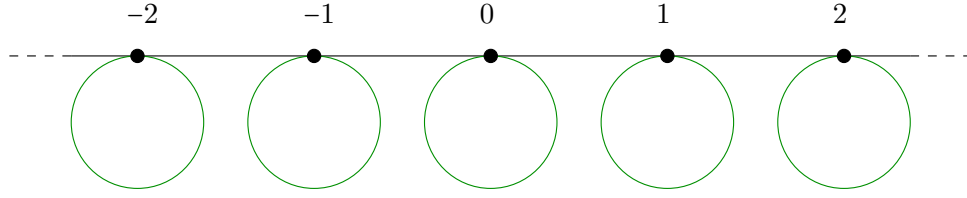
où $\mathfrak{S}_n$ est le groupe symétrique sur n lettres, le quotient étant pris pour l'action diagonale de $\mathfrak{S}_n$ par conjugaison sur chacun des facteurs de $\mathfrak{S}_n^k$.

Dans le cas particulier où $k = 2$ et $n = 3$, alors modulo conjugaison, il existe trois permutations de $\mathfrak{S}_3$, qui sont id, la transposition, et le cycle de longueur 3, correspondant aux trois possibilités suivantes de relèvement total d'un cercle de B (modulo permutations de la fibre) :



Si le revêtement est non galoisien, alors le relèvement total d'un des deux cercles orientés du bouquet de deux cercles B est du second type. Si le revêtement est de plus connexe, alors le relèvement total de l'autre cercle orienté de B est du second ou troisième type. Il est alors facile de montrer qu'il y a trois classes d'isomorphismes de revêtements non galoisiens connexes à trois feuillets du bouquet de 2 cercles, représentés sur la deuxième figure de la correction de cet exercice [E.30](#).

Correction de l'exercice E.31. Considérons l'espace topologique X (voir le dessin ci-dessous) égal à $\mathbb{R}$ où une copie du cercle $\mathbb{S}_1$ a été recollée en chaque point entier. Notons encore 0 le point de X image du point 0 de $\mathbb{R}$.

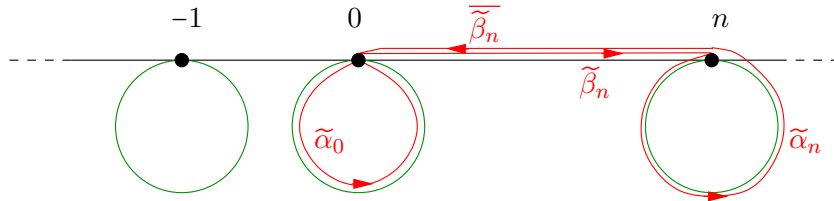


L'espace topologique X est connexe par arcs et localement compact. Le groupe discret $\mathbb{Z}$ agit librement et proprement sur X par translations entières (l'élément k de $\mathbb{Z}$ envoie le cercle recollé en $n \in \mathbb{Z}$ sur le cercle recollé en $n + k$ par l'identité). L'espace topologique quotient $B = \mathbb{Z} \backslash X$ est homéomorphe au bouquet de deux cercles, dont nous notons $*$ le sommet. Par la proposition 2.23, en notant $p : X \rightarrow B$ la projection canonique, il existe donc un morphisme de groupe surjectif de $\pi_1(B, *)$ dans $\mathbb{Z}$ dont le noyau est $p_*\pi_1(X, 0)$. En particulier, $p_*\pi_1(X, 0)$ est un sous-groupe distingué de $\pi_1(B, *)$.

L'espace topologique X a le même type d'homotopie qu'un bouquet d'une infinité dénombrable de cercles (en écrasant en un point la droite $\mathbb{R}$ sur laquelle nous avons recollés tous les cercles). Donc son groupe fondamental est isomorphe au groupe libre $L(\mathbb{Z})$ sur un ensemble infini dénombrable (voir la démonstration de la proposition 2.25). Puisque p_* est injective par le corollaire 2.16, puisque $\pi_1(B, *)$ est isomorphe au groupe libre $L(a, b)$, nous avons bien montré que $L(a, b)$ contient un sous-groupe distingué isomorphe à $L(\mathbb{Z})$.

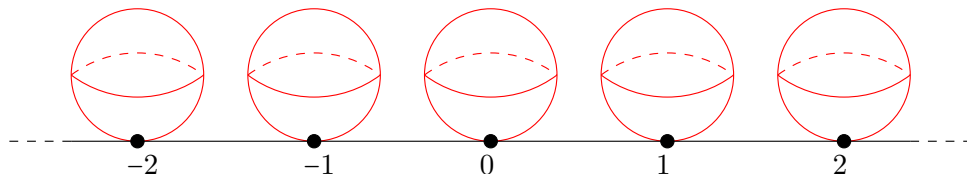
Plus précisément, soit $a = [\alpha]$ la classe d'homotopie du lacet α de B (faisant une fois le tour d'un des deux cercles de B) qui se relève en un lacet $\tilde{\alpha}_0$ d'origine 0 faisant une fois le tour du cercle de X recollé en 0, et $b = [\beta]$ celle qui ne se relève pas en un lacet. Alors par relèvement de chemins, nous avons

$$p_*\pi_1(X, 0) = \{b^n a b^{-n} : b \in \mathbb{Z}\} \subset L(a, b) = \pi_1(B, *) .$$

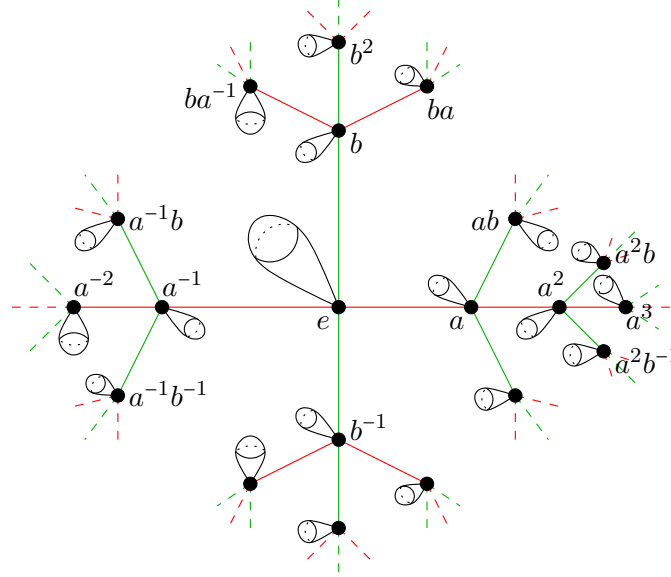


En effet, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $\tilde{\alpha}_n$ le relèvement de α d'origine n faisant une fois le tour du cercle de X recollé en n . Soit $\tilde{\beta}_n$ le relèvement d'origine 0 de la concaténation $\beta \cdot \beta \cdot \dots \cdot \beta$ de n copies de β si $n > 0$, et la concaténation $\bar{\beta} \cdot \bar{\beta} \cdot \dots \cdot \bar{\beta}$ de $-n$ copies de $\bar{\beta}$ si $n < 0$. Par convention, $\tilde{\beta}_0$ est le chemin constant en 0 dans X . Voir la figure ci-dessus. Alors nous avons $[p \circ (\tilde{\beta}_n \cdot \tilde{\alpha}_n \cdot \overline{\tilde{\beta}_n})] = b^n a b^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice E.32. Considérons l'espace topologique X (voir le dessin ci-dessous) égal à $\mathbb{R}$ où une copie de la sphère $\mathbb{S}_2$ a été recollée en chaque point entier.



Considérons l'espace topologique Y (voir dessin ci-dessous) égal au graphe de Cayley $T = \text{Cay}(L(a, b), \{a, b\})$ du groupe libre de partie génératrice standard $\{a, b\}$ où une copie de la sphère $\mathbb{S}_2$ a été recollée en chaque sommet.



Puisque $\mathbb{S}_2$ est simplement connexe, les espaces topologiques X et Y sont connexes par arcs, localement contractiles et simplement connexes. L'action par translations entières de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$, et l'action du groupe libre $L(a, b)$ sur T , étendues par l'identité entre les copies des sphères, est une action propre et libre de ces groupes sur ces espaces topologiques, dont les quotients s'identifient à $\mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_2$ et $\mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_2$. Donc X et Y sont les espaces totaux de revêtements universels de $\mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_2$ et de $\mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_2$.

Correction de l'exercice E.33. Nous appliquons la méthodologie décrite dans la partie 2.13.

Chacun des espaces topologiques $B_1 = \mathbb{T}^2$ (qui est homéomorphe à $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$), $B_2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $B_3 = L_{n,p}$, $B_4 = \mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_2$, $B_5 = K$ de cet exercice admet un revêtement universel connu. Ce sont respectivement les projections canoniques

- $\tilde{B}_1 = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2$,
- $\tilde{B}_2 = \mathbb{S}_2 \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{S}_2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (où $1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ agit par l'antipodie $x \mapsto -x$ sur $\mathbb{S}_2$),
- $\tilde{B}_3 = \mathbb{S}_{2n-1} \rightarrow \mathbb{U}_p \backslash L_{n,p}$ par la définition des espaces lenticulaires,
- $\tilde{B}_4 = X \rightarrow \mathbb{Z} \backslash X$ où X est la droite $\mathbb{R}$ sur laquelle une copie de la sphère $\mathbb{S}_2$ a été recollée en chaque point entier, muni de l'action par translations entières de $\mathbb{Z}$ (voir la correction de l'exercice E.32),
- $\tilde{B}_5 = \mathbb{R}^2 \rightarrow G \backslash \mathbb{R}^2 = K$, avec les notations de l'exercice E.27.

Ces applications sont des applications de passage au quotient par des actions propres et libres sur des espaces localement compacts de groupes discrets $G_1 = \mathbb{Z}^2$, $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $G_3 = \mathbb{U}_p \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $G_4 = \mathbb{Z}$ et $G_5 = G$ (le groupe défini dans l'exercice E.27) respectivement. Il découle de ceci que B_i est localement compact, séparé, connexe par arcs, localement connexe par arcs, et localement contractile. Sauf le dernier groupe G_5 , les groupes G_i sont tous abéliens, donc deux sous-groupes de G_i pour $i \neq 5$ sont conjugués si et seulement s'ils sont égaux.

Notons $\mathcal{H}_i$ l'ensemble des sous-groupes de G_i pour $i \neq 5$, et $\mathcal{H}_5$ l'ensemble des sous-groupes de G_5 modulo conjugaison. Pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, par le théorème 2.46, l'application

$$H \mapsto \{\tilde{\pi}_H : H \backslash \tilde{B}_i \rightarrow B_i\}$$

induit une bijection de $\mathcal{H}_i$ dans l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements connexes de B_i . Il suffit donc de décrire $\mathcal{H}_i$.

- Un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$ est ou bien trivial, ou bien infini cyclique, ou bien engendré par deux éléments de $\mathbb{Z}^2$ linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, avec liste exhaustive mais ayant des répétitions, car nous avons $\mathbb{Z}(p, q) = \mathbb{Z}(p', q')$ si et seulement si $(p', q') = \pm(p, q)$ et nous avons $\mathbb{Z}(a, b) + \mathbb{Z}(c, d) = \mathbb{Z}(a', b') + \mathbb{Z}(c', d')$ si et seulement s'il existe $A \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, nous avons

$$\mathcal{H}_1 = \{\{0\}, \mathbb{Z}(p, q), \mathbb{Z}(a, b) + \mathbb{Z}(c, d) : (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc \neq 0\}.$$

Nous laissons montrer au lecteur que les espaces topologiques quotients $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}(p, q)$ sont homéomorphes à l'anneau $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_1$, les espaces topologiques quotients $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}(a, b) + \mathbb{Z}(c, d))$ sont homéomorphes au tore $\mathbb{T}^2$, et le revêtement $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}(a, b) + \mathbb{Z}(c, d)) \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2$ est un revêtement à $|ad - bc|$ feuillets.

- Nous avons clairement $\mathcal{H}_2 = \{\{0\}, G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$.
- Nous avons clairement $\mathcal{H}_3 = \{\{0\}, \mathbb{U}_{p'} : p' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p' \mid p\}$.
- Nous avons clairement $\mathcal{H}_4 = \{a\mathbb{Z} : a \in \mathbb{N}\}$.
- Une présentation du groupe fondamental de la bouteille de Klein K est

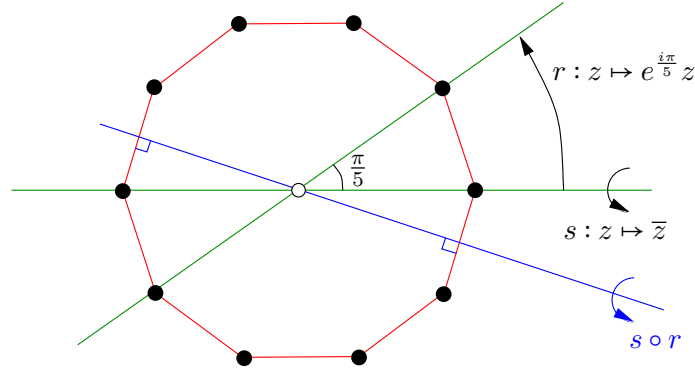
$$G = \langle a, b \mid bab = a \rangle$$

(voir l'exercice E.27 (5)). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que

- (1) Tout sous-groupe de G est de la forme $H_{m,n} = \langle \{a^m b^n\} \rangle$ pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$ (qui est le groupe trivial pour $m = n = 0$), ou $H_{m,n,p} = \langle \{a^m b^n, b^p\} \rangle$ pour $m, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $0 \leq n < p$.
- (2) Les sous-groupes $H_{m,n}$ et $H_{m,n,p}$ sont distingués si et seulement si m est pair.
- (3) Les espaces topologiques quotients $\mathbb{R}^2/H_{m,n}$ sont homéomorphes à l'anneau ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_1$ si m est pair ou au ruban de Möbius ouvert si m est impair.
- (4) Les espaces topologiques quotients $\mathbb{R}^2/H_{m,n,p}$ sont homéomorphes au tore $\mathbb{T}^2$ si m est pair ou à la bouteille de Klein si m est impair.

Correction de l'exercice E.35. Nous notons $r : z \mapsto e^{i\frac{\pi}{5}}z$, qui est une rotation d'angle $\frac{\pi}{5}$ (donc d'ordre 10) et $s : z \mapsto \bar{z}$ qui est la symétrie par rapport à l'axe réel dans $\mathbb{C}$.

(1) Le groupe G est le groupe des isométries d'un décagone régulier de $\mathbb{C}$, donc est fini. C'est le groupe diédral D_{20} d'ordre 20.



L'action de G sur X est libre, car si $g \in G$ et $g(z_1, z_2, t) = (z_1, z_2, t)$, alors $\epsilon(g)t = t$ et le fait que $t \in \mathbb{S}_2$ soit non nul implique que g est une rotation, et comme z_1 ou z_2 est non nul, g vaut l'identité. L'espace X est séparé (et même compact), et le groupe fini G agit librement sur X , donc p est un revêtement par le corollaire 2.9.

Une sphère de dimension au moins 2 est simplement connexe par le corollaire 1.12. L'espace X est donc simplement connexe, car produit d'espaces simplement connexes. Le groupe fondamental de B en un point base b indifférent est donc isomorphe au groupe d'automorphismes G du revêtement universel p :

$$\pi_1(B, b) \simeq G.$$

(2) Donnons la liste des sous-groupes de G , à conjugaison près. Comme G est d'ordre 20, ses sous-groupes sont d'ordre 1, 2, 4, 5, 10 ou 20. Soit $H_0 = G$ et $H_1 = \{1\}$ le sous-groupe trivial. Les seuls éléments d'ordre 2 sont la symétrie centrale r^5 et les symétries rs^k pour $k \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$. Les éléments rs^k et $rs^{k'}$ sont conjugués si et seulement si k et k' ont la même parité. À conjugaison près, il y a donc exactement trois sous-groupes d'ordre 2, qui sont

$$H_2 = \{1, r^5\}, H_3 = \{1, s\}, H_4 = \{1, sr\}.$$

Parmi ceux-ci, seul H_2 est distingué (c'est le centre de D_{10}).

Par le théorème de Sylow, comme $20 = 2^2 \cdot 5$, le nombre n de 2-Sylow de G vérifie $n = 1 \bmod 2$ et $n \mid 5$, donc $n = 1$ ou 5, et le nombre m de 5-Sylow vérifie $m = 1 \bmod 5$ et $m \mid 4$, donc $m = 1$.

Soit $H_5 = \{1, r^5, s, sr^5\}$, qui est un sous-groupe (car $sr^k s = r^{-k}$ pour tout k), d'ordre 4, donc un 2-Sylow. Comme il n'est pas distingué ($rsr^{-1} = sr^{-2} \notin H_5$), il y a donc cinq 2-Sylow, qui sont conjugués à H_5 .

Le seul 5-Sylow est $H_6 = \{1, r^2, r^4, r^6, r^8\}$, qui est donc distingué.

Tout sous-groupe d'ordre 10 contient l'unique 5-Sylow. S'il contient une puissance impaire de la rotation r , alors c'est $H_7 = \{r^k : 0 \leq k \leq 9\}$, qui est distingué. S'il contient un sr^{2k} , alors c'est $H_8 = \{1, r^2, r^4, r^6, r^8, s, sr^2, sr^4, sr^6, sr^8\}$, qui est distingué. S'il contient un sr^{2k+1} , alors c'est $H_9 = \{1, r^2, r^4, r^6, r^8, sr, sr^3, sr^5, sr^7, sr^9\}$, qui est distingué.⁴⁵

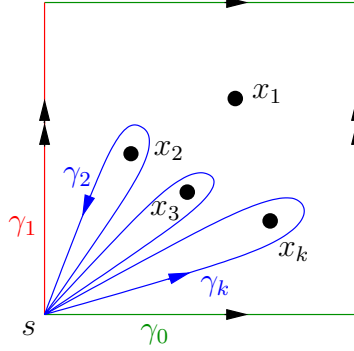
Comme $p : X \rightarrow B$ est un revêtement universel, l'application $H \mapsto (p_H : H \backslash X \rightarrow B)$, où p_H est l'application induite par passage au quotient modulo H de p , induit une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de G et l'ensemble des classes

45. Le fait que les trois sous-groupes H_7, H_8, H_9 soient distingués dans G découle aussi du fait que tout sous-groupe d'indice 2 d'un groupe G' est distingué dans G' .

d'isomorphisme de revêtements connexes de B . Donc les revêtements connexes de B sont, à isomorphisme près, les p_{H_k} pour $k \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$. Ceux qui sont galoisiens sont les p_{H_k} où H_k est distingué, c'est-à-dire

$$p_{H_0}, p_{H_1}, p_{H_2}, p_{H_6}, p_{H_7}, p_{H_8}, p_{H_9} .$$

Correction de l'exercice E.36. (1) Si $k = 0$, nous avons vu en cours que $\pi_1(T) = \mathbb{Z}^2$. Supposons donc $k \geq 1$. Quitte à faire agir deux rotations, supposons qu'aucun des $x_1, \dots, x_k$ n'est sur le cercle $\mathbb{S}_1 \times \{1\}$ ni sur $\{1\} \times \mathbb{S}_1$.



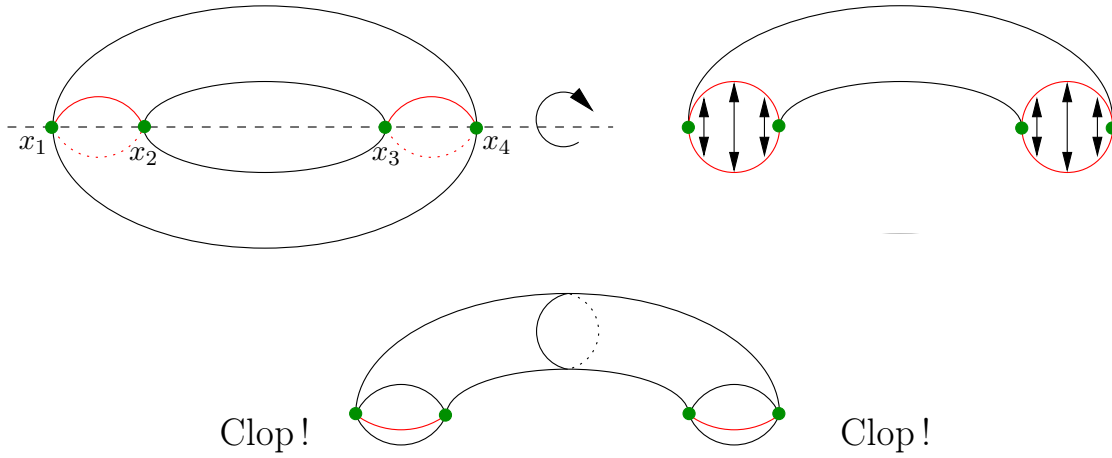
Considérons le tore comme le quotient du carré par le recollement des côtés opposés. Fixons un sommet s du carré. Pour $i \in \llbracket 2, k \rrbracket$, nous notons γ_i un lacet issu de s , et dont la composante connexe du complémentaire dans le carré ne contenant pas le bord (privé de s), contient le point x_i et seulement lui. Alors l'espace topologique $T \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ se rétracte par déformation forte sur le bouquet de $k + 1$ cercles, qui est la réunion des images des deux lacets γ_0 et γ_1 correspondant au bord du carré et des $k - 1$ lacets γ_i pour $i \in \llbracket 2, k \rrbracket$. Donc

$$\pi_1(T \setminus \{x_1, \dots, x_k\}) = L([\gamma_0], [\gamma_1], [\gamma_2], \dots, [\gamma_k])$$

est un groupe libre à $k + 1$ générateurs.

(2) Les seuls points fixes du seul élément non trivial de G sont clairement les quatre points $(\pm 1, \pm 1)$, que nous numérotions arbitrairement x_1, x_2, x_3, x_4 . Le groupe fini G agit donc librement sur le complémentaire de l'ensemble de ces points fixes, qui est un espace topologique séparé (et même localement compact). Par le corollaire 2.9, la projection canonique $T \setminus \{x_1, \dots, x_4\} \rightarrow G \backslash (T \setminus \{x_1, \dots, x_4\})$ est un revêtement. Par conséquent la restriction $\pi : T \setminus \{x_1, \dots, x_4\} \rightarrow S \setminus \{\pi(x_1), \dots, \pi(x_4)\}$ est un revêtement.

(3) En représentant le tore comme un tore de révolution autour de l'axe vertical de $\mathbb{R}^3$, l'application $(z, w) \mapsto (z^{-1} = \bar{z}, w^{-1} = \bar{w})$ est la composée des symétries orthogonales $(z, w) \mapsto (\bar{z}, w)$, et $(z, w) \mapsto (z, \bar{w})$ par rapport au plan horizontal et l'un des plans verticaux de coordonnées. C'est donc la rotation d'angle π autour d'un axe de coordonnée horizontale.



Le quotient $G \setminus T$ est donc le quotient d'un cylindre par la relation d'équivalence engendrée par l'identification d'un point et de son conjugué sur chaque cercle du bord. Il s'agit topologiquement de la sphère $\mathbb{S}_2$.

Correction de l'exercice E.37. (1) Commençons par une remarque préliminaire. Soit

$$P = \sum_{i=0}^n a_i X^i = a_n \prod_{i=1}^n (X - x_i)$$

un polynôme non constant de degré n à coefficient complexes, n'ayant que des racines simples. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\sup_i |b_i - a_i| < \delta$, alors le polynôme $Q = \sum_{i=0}^n b_i X^i$ admet n racines distinctes $y_1, \dots, y_n$ tels que $\sup_i |y_i - x_i| < \epsilon$. (En effet, si γ est le bord d'un petit disque centré en x_i , alors l'indice $\int_{\gamma} \frac{P'}{P}$ variant continuellement en les coefficients de P , et étant à valeurs entières, est localement constant en les coefficients de P . De plus, cet indice est le nombre de racines simples contenues dans l'intérieur du petit disque.)

Pour montrer que π, ρ et $\rho \circ \pi$ sont des revêtements finis, il suffit de montrer que ce sont des homéomorphismes locaux dont le cardinal des fibres est fini (non nul), et constant.

Les applications π, ρ sont continues, car polynomiales, et sont des homéomorphismes locaux par la remarque préliminaire. Donc $\rho \circ \pi$ est aussi un homéomorphisme local.

Par le rappel sur la condition pour que les racines d'un polynôme complexe de degré 3 ait trois racines distinctes, si $(p, q, x) \in B$, alors $\pi^{-1}(p, q, x)$ contient deux points distincts (x, y, z) et (x, z, y) où x, y, z sont les trois racines distinctes de $X^3 + pX + q = 0$; de même, $\rho^{-1}(p, q)$ contient exactement les trois points $(p, q, x), (p, q, y)$ et (p, q, z) . Donc π, ρ et $\rho \circ \pi$ sont des revêtements à respectivement 2, 3, 6 feuillets.

(2) L'espace A est le complémentaire de trois droites complexes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ dans le plan complexe P de $\mathbb{C}^3$ d'équation $x + y + z = 0$. Soient deux points de A et D la droite complexe passant par ces deux points. Comme D et les Δ_i sont distinctes, l'intersection $A \cap D$ est le complémentaire d'un nombre fini de points dans le plan réel D , donc est connexe par arc. Donc A est connexe par arcs.

Comme A est connexe par arcs, et puisque π et $\rho \circ \pi$ sont continues et surjectives, $B = \pi(A)$ et $C = \rho \circ \pi(A)$ sont connexes par arcs.

(3) Notons $\mathfrak{S}_3$ le groupe des bijections de l'ensemble $\rho^{-1}(a)$, qui est de cardinal trois. Soit $a = (p, q) \in C$ et $(p, q, x), (p, q, y), (p, q, z)$ les images réciproques de (p, q) par ρ . L'action à droite de $\pi_1(C, a)$ sur la fibre $\rho^{-1}(a)$ est un morphisme de groupes ϕ de $\pi_1(C, a)$ dans $\mathfrak{S}_3$. Montrons que la transposition fixant (p, q, x) et échangeant $(p, q, y), (p, q, z)$ est dans l'image de ce morphisme. Par symétrie, et comme les transpositions engendrent le groupe symétrique, ceci montrera que ϕ est surjectif.

Comme (x, y, z) appartient à A , les nombres complexes y et z sont distincts de $-2x, x$ et $-\frac{x}{2}$. Comme $\mathbb{C}$ privé de trois points est connexe par arcs, il existe un chemin γ dans $\mathbb{C}$, d'origine y , d'extrémité z , tel que $\gamma(t) \neq -2x, x, -\frac{x}{2}$ pour tout t dans $[0, 1]$. Donc $(x, \gamma(t), -x - \gamma(t))$ appartient à A pour tout t dans $[0, 1]$.

Alors $\alpha : t \mapsto (p_t, q_t) = \rho \circ \pi(x, \gamma(t), -x - \gamma(t))$ est un lacet d'origine a dans C , dont les relevés d'origines $(p, q, x), (p, q, y), (p, q, z)$ sont, par unicité, les chemins

$$\alpha_1 : t \mapsto (p_t, q_t, x), \alpha_2 : t \mapsto (p_t, q_t, \gamma(t)), \alpha_3 : t \mapsto (p_t, q_t, -x - \gamma(t))$$

respectivement. Le chemin α_1 est un lacet en (p, q, x) , le chemin α_2 a pour origine (p, q, y) et extrémité (p, q, z) , et le chemin α_3 a pour origine (p, q, z) et extrémité (p, q, y) . Donc l'action de $[\alpha] \in \pi_1(C, a)$ sur la fibre $\rho^{-1}(a)$ est la transposition voulue.

Comme l'image d'un groupe abélien par un morphisme de groupes est un groupe abélien, et que $\mathfrak{S}_3$ n'est pas abélien, on en déduit que $\pi_1(C, a)$ n'est pas abélien.

(4) Tout revêtement à deux feuillets $f : Y \rightarrow Z$ d'espace total Y connexe par arcs est galoisien : si $b \in Z$ et $f^{-1}(\{b\}) = \{u, v\}$, si β est un lacet en b , alors par unicité, le relèvement de β d'origine u est un lacet si et seulement si celui d'origine v est un lacet. (Dans le cas où B est localement connexe par arcs et semi-localement connexe par arcs, on peut aussi utiliser la classification des revêtements connexes, en disant que tout sous-groupe d'indice 2 est distingué.) Donc π est galoisien, de groupe d'automorphismes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Reprenons les notations de la question précédente. Puisque α admet un relèvement qui est un lacet et un relèvement qui ne l'est pas, le revêtement ρ n'est pas galoisien. Comme tout automorphisme de revêtements permute les relevés d'un lacet, et puisque α admet un unique relèvement qui est un lacet, tout automorphisme de revêtements de ρ fixe le point (p, q, x) , donc est trivial car B est connexe par arcs. Donc le groupe des automorphismes de revêtements de ρ est trivial.

Le groupe fini $\mathfrak{S}_3$ agit continuellement et librement par permutation des coordonnées sur A . De plus, cette action est par automorphismes de revêtements pour $\rho \circ \pi$ (permuter les racines d'un polynôme ne change pas ses coefficients). Par un résultat du cours, si $f : A \rightarrow \mathfrak{S}_3 \backslash A$ est la projection canonique, alors l'application $\rho \circ \pi$ induit une application continue $g : \mathfrak{S}_3 \backslash A \rightarrow C$ qui est un revêtement. De plus, g est un revêtement à un feuillet, car $\mathfrak{S}_3$ agit transitivement sur toute fibre de $\rho \circ \pi$, donc g est un homéomorphisme. Nous en déduisons que $\rho \circ \pi$ est un revêtement galoisien, de groupe d'automorphismes de revêtements le groupe (isomorphe à $\mathfrak{S}_3$) des permutations des coordonnées.

(5) Si $a, b > 0$, alors l'équation $at^6 + bt^4 - 2 = 0$ admet une et une seule solution $t = t(a, b)$ strictement positive. En effet, en posant $u = t^2$ et $f(u) = au^3 + bu^2 - 2$, alors les racines de f' sont $u = 0$ et $u = -\frac{2b}{3a} < 0$, donc f est strictement croissante entre 0 et $+\infty$, et $f(0) = -2 < 0$. De plus, par un argument déjà vu, $t(a, b)$ dépend continuellement de a, b .

L'application $(p, q) \mapsto (z, w) = (\frac{p}{3}, i\frac{q}{2})$ est un homéomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dans lui-même, envoyant C sur le complémentaire de la courbe complexe d'équation $z^3 = w^2$. L'application

$(z, w) \mapsto (t^2 z, t^3 w)$ où $t = t(|w|^2, |z|^2)$ induit une rétraction par déformation forte de C sur $\mathbb{S}_3 \setminus K$ (noter que $|w|^2 > 0$ et $|z|^2 > 0$ si $(p, q) \in C$). Donc C et $\mathbb{S}_3 \setminus K$ ont le même type d'homotopie.

L'application de $\mathbb{S}_1$ dans K qui à $e^{i\theta}$ associe $(e^{2i\theta}, e^{3i\theta})$ est un homéomorphisme, d'inverse $(z, w) \mapsto \frac{w}{z}$.

Par la projection stéréographique par rapport à un point de $\mathbb{S}_1$, l'espace $\mathbb{S}_3 \setminus \mathbb{S}_1$ est homéomorphe au complémentaire d'une droite dans $\mathbb{R}^3$, qui se rétracte par déformation forte sur un plan privé d'un point. Donc le groupe fondamental de $\mathbb{S}_3 \setminus \mathbb{S}_1$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, qui est abélien. Or le groupe fondamental de $\mathbb{S}_3 \setminus K$ est isomorphe au groupe fondamental de C , qui est non abélien par la question (3). Donc $\pi_1(\mathbb{S}_3 \setminus K)$ et $\pi_1(\mathbb{S}_3 \setminus \mathbb{S}_1)$ ne sont pas isomorphes, ce qui implique que $\mathbb{S}_3 \setminus K$ et $\mathbb{S}_3 \setminus \mathbb{S}_1$ ne sont pas homéomorphes.

3 Présentation de groupes fondamentaux

3.1 Propriétés universelles sur les groupes

Nous renvoyons à l'appendice B pour des rappels de théorie des groupes, dont les définitions de groupes libres (et en particulier leur propriété universelle) et de présentations de groupe.

3.1.1 Somme amalgamée de groupes

Nous appellerons *famille inductive* de groupes une famille $(G_i)_{i \in I}$ de groupes, munie pour tout couple (i, j) d'éléments de I d'un ensemble F_{ij} (éventuellement vide) de morphismes de groupes de G_i dans G_j . Nous appellerons *limite inductive* de cette famille tout groupe G muni d'une famille de morphismes de groupes $(f_i : G_i \rightarrow G)_{i \in I}$ telle que $f_j \circ f = f_i$ pour tout f dans F_{ij} , qui vérifie la *propriété universelle* suivante :

pour tout groupe H muni d'une famille de morphismes de groupes $(h_i : G_i \rightarrow H)_{i \in I}$ telle que $h_j \circ f = h_i$ pour tout f dans F_{ij} , il existe un unique morphisme de groupes $\phi : G \rightarrow H$, dit *morphisme canonique*, tel que $\phi \circ f_i = h_i$ pour tout $i \in I$.

Proposition 3.1. *Une limite inductive $(G, (f_i)_{i \in I})$ existe et est unique à isomorphisme de groupes près, et même à unique isomorphisme de paires près⁴⁶.*

Démonstration. La propriété d'unicité découle classiquement de la propriété universelle, de la même manière que pour les groupes libres,⁴⁷ de la manière suivante. Si $(G', (f'_i)_{i \in I})$ est une autre limite inductive, alors le morphisme canonique $\psi : G \rightarrow G'$ tel que $\psi \circ f_i = f'_i$ pour tout $i \in I$, donné par la partie existence de la propriété universelle de $(G, (f_i)_{i \in I})$, est un morphisme de groupes. Montrons que ψ est un isomorphisme de groupes, d'inverse le morphisme canonique $\psi' : G' \rightarrow G$ tel que $\psi' \circ f'_i = f_i$, donné par la partie existence de la propriété universelle de $(G', (f'_i)_{i \in I})$. Le fait que $\psi' \circ \psi = \text{id}_G$ découle de la partie unicité de propriété universelle de $(G, (f_i)_{i \in I})$ appliquée avec $H = G$ et $h_i = f_i$. Le fait que $\psi \circ \psi' = \text{id}_{G'}$ se démontre de même.

Si $\tilde{\psi} : G \rightarrow G'$ est un autre isomorphisme de groupes tel que $\tilde{\psi} \circ f_i = f'_i$ pour tout $i \in I$, alors $\Theta = (\tilde{\psi})^{-1} \circ \psi : G \rightarrow G$ est un morphisme de groupes tels que $\Theta \circ f_i = f_i$ pour tout $i \in I$. Donc $\Theta = \text{id}_G$ par l'unicité dans la propriété universelle ci-dessus. Par conséquent $\tilde{\psi} = \psi$, ce qui montre l'unicité de l'isomorphisme de paires ψ .

Soit $L = L(\coprod_{i \in I} G_i)$ le groupe libre sur l'ensemble somme disjointe des ensembles G_i pour $i \in I$. Par la propriété universelle du groupe libre $L(G_i)$, l'inclusion $G_i \rightarrow \coprod_{i \in I} G_i$ induit un morphisme canonique injectif $L(G_i) \rightarrow L$, par lequel nous identifions $L(G_i)$ à un sous-groupe de L . Notons $\pi_i : L(G_i) \rightarrow G_i$ le morphisme canonique surjectif (venant par la propriété universelle du groupe libre $L(G_i)$ du fait que la partie G_i engendre le groupe G_i), et $N = \langle\langle A \rangle\rangle$ le sous-groupe distingué de L engendré par la réunion A de $\bigcup_{i \in I} \text{Ker } \pi_i$ et de l'ensemble des $x^{-1}f(x)$ pour $i, j \in I$, $x \in G_i$ et $f \in F_{ij}$. Enfin, soit G le groupe quotient L/N . Pour tout $i \in I$, puisque A contient $\text{Ker } \pi_i$, l'inclusion $L(G_i) \rightarrow L$ induit par passage au quotient⁴⁸ un morphisme de groupes $f_i : G_i \rightarrow G$.

46. c'est-à-dire que si $(G', (f'_i)_{i \in I})$ est un autre tel couple, il existe un unique isomorphisme de groupes $\Theta : G \rightarrow G'$ tel que $\Theta \circ f_i = f'_i$

47. Voir la démonstration de la proposition B.2 de la partie B.2 de l'appendice B.

48. Voir la formule (65) dans la partie B.1 de l'appendice B.

Soit H un groupe muni d'un morphisme $h_i : G_i \rightarrow H$ pour tout $i \in I$, tel que $h_j \circ f = h_i$ pour tous les $i, j \in I$ et $f \in F_{ij}$. Soit $j : \coprod_{i \in I} G_i \rightarrow H$ l'application qui coïncide avec h_i sur G_i pour tout $i \in I$, soit $\tilde{\phi} : L \rightarrow H$ le morphisme canonique associé à (H, j) par la propriété universelle du groupe libre L . Pour tous les $i, j \in I$, $f \in F_{ij}$ et $x \in G_i$, puisque $f(x_i) \in G_j$, nous avons $\tilde{\phi}(x^{-1}f(x)) = h_i(x)^{-1}h_j(f(x)) = e$. De plus, si $x \in \text{Ker } \pi_i$, alors $\tilde{\phi}(x) = h_i(e) = e$. Le morphisme de groupes $\tilde{\phi}$ vaut donc l'élément neutre sur tout élément de A donc de N . Par conséquent $\tilde{\phi}$ induit par passage au quotient un morphisme de groupes $\phi : G \rightarrow H$. Celui-ci vérifie $\phi \circ f_i = h_i$ pour tout $i \in I$ par construction. Comme $\cup_{i \in I} f_i(G_i)$ engendrent G , un tel morphisme ϕ est unique. Donc $(G, (f_i)_{i \in I})$ vérifie la propriété universelle des limites inductives. $\square$

Nous noterons $(G, (f_i)_{i \in I})$ par abus

$$G = \lim_{\rightarrow} G_i .$$

Il découle de l'unicité dans la proposition 3.1 et de la démonstration ci-dessus que la réunion $\cup_{i \in I} f_i(G_i)$ engendrent G . Le morphisme canonique $\phi : G \rightarrow H$ donné par la propriété universelle des limites inductives est surjectif si $\cup_{i \in I} h_i(G_i)$ engendrent H .

Dans la suite, nous identifions deux limites inductives par l'unique isomorphisme de paires entre elles donné par la proposition 3.1, et nous nous permettrons ainsi de parler de « la » limite inductive.

Exemple. Considérons la famille inductive de groupes formée de trois groupes A, B, C et de deux morphismes de groupes $i_A : C \rightarrow A$ et $i_B : C \rightarrow B$. Sa limite inductive est appelée la *somme amalgamée de A et B au-dessus de C* , et notée $A *_C B$, lorsque les morphismes i_A et i_B sont sous-entendus.⁴⁹ Il s'agit donc d'un groupe G muni de morphismes de groupes $j_A : A \rightarrow G$ et $j_B : B \rightarrow G$ tels que $j_B \circ i_B = j_A \circ i_A$, vérifiant la *propriété universelle* suivante :

pour tout groupe H muni de morphismes de groupes $h_A : A \rightarrow H$ et $h_B : B \rightarrow H$ tels que $h_B \circ i_B = h_A \circ i_A$, il existe un unique morphisme de groupes $\phi : G \rightarrow H$, dit *morphisme canonique*, tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} C & & \xrightarrow{i_B} & & B \\ & & & \swarrow j_B & \\ i_A \downarrow & & G & & \downarrow h_B \\ & \nearrow j_A & & \searrow \phi & \\ A & & \xrightarrow{h_A} & & H . \end{array} \quad (6)$$

Exercice E.38. Soient A, B, C trois groupes, et $i_A : C \rightarrow A$ et $i_B : C \rightarrow B$ deux morphismes de groupes. Soient (S_A, R_A) et (S_B, R_B) une présentation de groupe de A et B respectivement. Soit S_C une partie génératrice de C . Nous identifions $L(S_A)$ avec son image par l'application canonique $L(S_A) \rightarrow L(S_A \amalg S_B)$ et de même pour $L(S_B)$. Pour tout $c \in S_C$, nous notons $\widetilde{i_A(c)}$ une préimage de $i_A(c)$ par la projection canonique $L(S_A) \rightarrow A$, et de même pour $i_B(c)$. Montrer que

$$(S_A \amalg S_B, R_A \cup R_B \cup \{ \widetilde{i_A(c)} (\widetilde{i_B(c)})^{-1} : c \in S_C \})$$

49. En pratique, il est recommandé de préciser qu'il s'agit d'une somme amalgamée de A et B au-dessus de C par les morphismes de groupes i_A et i_B .

est une présentation de groupe de la somme amalgamée $A *_C B$ de A et B au-dessus de C par les morphismes i_A et i_B .

Remarques. (1) Si B est le groupe trivial, alors, par l'exercice E.38 ci-dessus, la somme amalgamée $A *_C B$ est le groupe quotient $A / \langle \langle i_A(C) \rangle \rangle$ de A par le sous-groupe distingué de A engendré par $i_A(C)$.

(2) Une somme amalgamée $A *_C B$ peut être un groupe trivial, même si A et B ne sont pas triviaux. Par exemple, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} *_\mathbb{Z} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où les morphismes $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont les projections canoniques, est le groupe dont une présentation est (voir l'exercice E.38) $\langle x, y \mid x^3 = 1, y^2 = 1, x = y \rangle$, donc est le groupe trivial puisque 2 et 3 sont premiers entre eux.

(3) Si les morphismes de groupes i_A et i_B sont injectifs, nous appellerons la somme amalgamée $A *_C B$ le *produit amalgamé de A et B au-dessus de C* (par les morphismes de groupes i_A et i_B , lorsque les préciser est utile). Nous montrerons ci-dessous que les morphismes de groupes j_A et j_B sont alors aussi injectifs, et nous identifierons A et B avec leurs images par j_A et j_B dans $A *_C B$.

Exemple. Dans l'exemple précédent, si C est le groupe trivial, le produit amalgamé $A *_C B$ est noté $A * B$, et appelé le *produit libre* de A et B . Nous identifierons A et B avec leurs images dans $A * B$. Il convient de prendre garde à ne pas confondre produit libre $A * B$ et produit direct $A \times B$, qui, lorsque A et B sont non triviaux, ne sont pas isomorphes. ⁵⁰

Attention à ne pas confondre le groupe libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ et le groupe abélien libre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$!

Le produit libre $A * B$ est le groupe G muni de morphismes de groupes $j_A : A \rightarrow G$ et $j_B : B \rightarrow G$ (unique à unique isomorphisme près) vérifiant la propriété universelle suivante :

pour tout groupe H muni de morphismes de groupes $h_A : A \rightarrow H$ et $h_B : B \rightarrow H$, il existe un unique morphisme de groupes $\phi : G \rightarrow H$, dit *morphisme canonique*, tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{j_A} & G & \xleftarrow{j_B} & B \\ & h_A \searrow & \downarrow \phi & \swarrow h_B & \\ & & H & & \end{array}$$

Exercice E.39.

- (1) Montrer que le morphisme canonique de $A * B$ dans $A *_C B$ est surjectif de noyau égal à $\mathcal{N} = \langle \langle i_A(c) i_B(c)^{-1} : c \in C \rangle \rangle$, le sous-groupe distingué engendré par les éléments $i_A(c) i_B(c)^{-1}$ pour $c \in C$, et qu'il suffit de prendre les éléments c d'une partie génératrice de C . En particulier, il induit par passage au quotient un isomorphisme de groupes

$$(A * B) / \mathcal{N} \simeq A *_C B.$$

⁵⁰. Par exemple, le morphisme canonique de $A * B$ dans $A \times B$ n'est pas un isomorphisme, parce que si $a \in A \setminus \{1\}$ et $b \in B \setminus \{1\}$, alors $ab \neq ba$ dans $A * B$, mais $ab = ba$ dans $A \times B$.

- (2) Montrer à l'aide des indications suivantes que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est isomorphe au *groupe modulaire*

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \{\pm \mathrm{id}\}.$$

Pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, noter $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ son image dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Commencer par construire un morphisme de groupes $\psi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ qui envoie le générateur 1 mod 2 de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur l'élément $S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et le générateur 1 mod 3 de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sur l'élément $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Montrer que ces deux éléments engendrent $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Montrer que l'application de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ définie par $(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, x) \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ est une action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, nous avons $Sx < 0$ si et seulement si $x > 0$, et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ négatif, nous avons $Tx > 1$ et $0 < T^{-1}x < 1$. En déduire que le morphisme de groupes ψ est injectif.

Exemple. Plus généralement, si A est un groupe, si $(G_i)_{i \in I}$ est une famille de groupes et si $f_i : A \rightarrow G_i$ est un morphisme de groupes pour tout $i \in I$, la limite inductive de cette famille inductive de groupes est appelée la *somme amalgamée des G_i au-dessus de A par les f_i* , et notée $*_A(G_i, (f_i)_{i \in I})$ (et par abus, $*_A G_i$ quand les morphismes f_i sont sous-entendus).

Si A est le groupe trivial, cette somme amalgamée est appelée le *produit libre* de $(G_i)_{i \in I}$. Nous le notons $*_{i \in I} G_i$ (et $G_1 * G_2 * \dots * G_n$ si $I = \llbracket 1, n \rrbracket$). Nous identifions G_i à son image dans $*_{i \in I} G_i$ par l'*injection canonique* $g_i : G_i \rightarrow *_{i \in I} G_i$ qui à $g \in G_i$ associe l'image de $g \in L(\coprod_{i \in I} G_i)$ par la projection canonique

$$L(\coprod_{i \in I} G_i) \rightarrow *_{i \in I} G_i = L(\coprod_{i \in I} G_i) / \langle \langle \coprod_{i \in I} \mathrm{Ker} \pi_i \rangle \rangle$$

où $\pi_i : L(G_i) \rightarrow G_i$ est la projection canonique.

Exercice E.40.

- (1) Soit $(S_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Montrer que le produit libre $*_{i \in I} L(S_i)$ est isomorphe au groupe libre $L(\coprod_{i \in I} S_i)$.
- (2) Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille de groupes. Montrer que
 - le groupe $*_{i \in I} G_{\sigma(i)}$ est isomorphe au groupe $*_{i \in I} G_i$ pour toute permutation σ de I ;
 - le groupe $*_{\alpha \in A} (*_{i \in I_\alpha} G_i)$ est isomorphe au groupe $*_{i \in I} G_i$ pour toute partition $\coprod_{\alpha \in A} I_\alpha$ de I .
- (3) Soient S un ensemble, et $(S_i)_{i \in I}$ une famille de parties finies de S , recouvrant S , et stable par union finie (par exemple, mais ce n'est pas toujours la seule, la famille de toutes les parties finies de S). Soient $i, j \in I$; si $S_i \subset S_j$, posons $F_{ij} = \{f_{ij}\}$ où $f_{ij} : L(S_i) \rightarrow L(S_j)$ est le morphisme canonique induit par l'inclusion de S_i dans S_j ; sinon, posons $F_{ij} = \emptyset$. Montrer que le morphisme canonique $\varinjlim L(S_i) \rightarrow L(S)$ est un isomorphisme.
- (4) Soient (S, R) une présentation de groupes, et $G = L(S) / \langle \langle R \rangle \rangle$ le groupe associé. Soit $(R_i)_{i \in I}$ une famille de parties finies de R , recouvrant R , et stable par union finie (par exemple, mais ce n'est pas toujours la seule, la famille de toutes les parties finies de R). Notons $G_i = L(S) / \langle \langle R_i \rangle \rangle$ et $h_i : G_i \rightarrow G$ le morphisme défini par passage au quotient de l'identité de $L(S)$. Soient $i, j \in I$; si $R_i \subset R_j$, posons $F_{ij} = \{f_{ij}\}$ où $f_{ij} : G_i \rightarrow G_j$ est le morphisme défini par passage au quotient de l'identité de $L(S)$; sinon, posons $F_{ij} = \emptyset$.

Montrer que le morphisme canonique $\theta : \lim_{\rightarrow} G_i \rightarrow G$ associé à la famille $(G, (h_i)_{i \in I})$ est un isomorphisme.⁵¹

En particulier, par la question (1) de cet exercice E.40, le produit libre de n copies de $\mathbb{Z}$ est un groupe libre de rang n

$$\ast_{1 \leq i \leq n} \mathbb{Z} \simeq L(x_1, \dots, x_n) .$$

Les deux dernières propriétés de la question (2) de l'exercice E.40 sont connues sous le nom de la commutativité et de l'associativité du produit libre. En particulier, $G_1 \ast (G_2 \ast G_3)$ et $(G_1 \ast G_2) \ast G_3$ sont canoniquement isomorphes, ainsi que $G_1 \ast G_2$ et $G_2 \ast G_1$.

3.1.2 Formes normales dans les produits amalgamés

Soient A un groupe, $(G_i)_{i \in I}$ une famille de groupes et $A \rightarrow G_i$ un morphisme **injectif**⁵² de groupes pour tout i . Identifions A avec son image dans G_i pour tout $i \in I$. Notons $G = \ast_A G_i$ le produit amalgamé des G_i au-dessus de A , $f_i : G_i \rightarrow G$ le morphisme de groupes canonique, et $f = f_i|_A = f_j|_A : A \rightarrow G$ pour tous les $i, j \in I$.

Soit R_i un ensemble de représentants des classes à gauche de A dans G_i , tel que $e \in R_i$. L'application $(a, s) \mapsto as$ est donc une bijection de $A \times R_i$ sur G_i , envoyant $A \times (R_i \setminus \{e\})$ sur $G_i \setminus A$. Si $s \in \coprod_{i \in I} R_i$, notons i_s l'élément $i \in I$ tel que s appartienne à l'image de l'inclusion canonique $R_i \rightarrow \coprod_{i \in I} R_i$. Appellons *mot réduit* toute suite finie

$$(a, s_1, \dots, s_n)$$

où $n \in \mathbb{N}$, $a \in A$, $s_k \in \coprod_{i \in I} (R_i \setminus \{e\})$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $i_{s_k} \neq i_{s_{k+1}}$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Théorème 3.2. *Pour tout g dans G , il existe un unique mot réduit $(a, s_1, \dots, s_n)$ tel que $g = f(a)f_{i_{s_1}}(s_1) \dots f_{i_{s_n}}(s_n)$.*

Ce résultat implique le fait remarquable que les morphismes de groupes f_i sont aussi injectifs.⁵³ Nous identifierons G_i avec son image dans G par f_i . Tout élément g de G s'écrit donc de manière unique

$$g = as_1 \dots s_n$$

où $a \in A$, $n \in \mathbb{N}$, $s_k \in \coprod_{i \in I} (R_i \setminus \{e\})$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $i_{s_k} \neq i_{s_{k+1}}$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Cette écriture s'appelle la *forme normale* de g . En particulier, dans G , nous avons $G_i \cap G_j = A$ si $i \neq j$ et les parties $R_i \setminus \{e\}$ sont deux à deux disjointes.

Le cas des produits libres s'obtient en prenant $A = \{e\}$ et $R_i = G_i \setminus \{e\}$: un élément g de $\ast_{i \in I} G_i$ s'écrit de manière unique (après identification de G_i avec son image dans $\ast_{i \in I} G_i$ par le morphisme canonique) $g = g_1 \dots g_n$ où $n \in \mathbb{N}$ (par convention $g = e$ si $n = 0$), $g_k \in \coprod_{i \in I} (G_i \setminus \{e\})$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $i_{g_k} \neq i_{g_{k+1}}$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

En prenant $A = \{e\}$ et $G_i = \mathbb{Z}$ pour tout i , ce théorème permet facilement de redémontrer que $G = \ast_{i \in I} \mathbb{Z}$, muni de l'application $j : I \rightarrow G$ définie par $j(i) = f_i(1)$ où $f_i : \mathbb{Z} \rightarrow G$ est le

51. Ainsi, tout groupe de type fini est limite inductive de groupes de présentation finie.

52. Cette hypothèse est cruciale pour obtenir une forme normale.

53. En effet, $f_i|_A$ est injective. Tout élément $h \in G_i \setminus A$ s'écrit de manière unique $h = as$ avec $a \in A$ et $s \in R_i \setminus \{e\}$. Donc si $f_i(h) = e$, alors $f(e)$ et $f(a)f_i(s)$ sont deux formes normales distinctes d'un même élément $f_i(h)$ de G , ce qui contredit l'unicité dans le théorème 3.2.

morphisme de groupes canonique sur la i -ème copie de $\mathbb{Z}$ dans $G = \ast_{i \in I} \mathbb{Z}$, vérifie la propriété universelle des groupes libres, donc que

$$\ast_{i \in I} \mathbb{Z} = L(I) .$$

Démonstration. (D'après [Ser, page 9].) Soit X l'ensemble des mots réduits. Nous allons définir une action de G sur X , c'est-à-dire un morphisme de groupes de G dans le groupe des bijections de X . Par la propriété universelle, il suffit de définir pour tout $i \in I$ une action de G_i sur X , dont l'action induite sur A soit indépendante de i .

Soient $i \in I$ et Y_i l'ensemble des mots réduits de la forme $(e, s_1, \dots, s_n)$ tels que $i_{s_1} \neq i$. Les ensembles $A \times Y_i$ et $A \times (R_i \setminus \{e\}) \times Y_i$ s'envoient dans X par les applications

$$(a, (e, s_1, \dots, s_n)) \mapsto (a, s_1, \dots, s_n) \quad \text{et} \quad (a, s, (e, s_1, \dots, s_n)) \mapsto (a, s, s_1, \dots, s_n) .$$

Nous obtenons ainsi une bijection $(A \times Y_i) \sqcup (A \times (R_i \setminus \{e\}) \times Y_i) \rightarrow X$. Comme la réunion $A \sqcup (A \times (R_i \setminus \{e\}))$ s'identifie avec G_i , nous avons une bijection

$$\theta_i : G_i \times Y_i \rightarrow X .$$

Le groupe G_i agit sur le produit $G_i \times Y_i$ par translations à gauche sur le premier facteur $g'(g, y) = (g'g, y)$. En transportant par la bijection θ_i , nous obtenons donc une action de G_i sur X . Sa restriction à A est définie par $a'(a, s_1, \dots, s_n) = (a'a, s_1, \dots, s_n)$, qui ne dépend pas de i . Nous avons donc construit une action de G sur X , que nous noterons $\star$.

De plus, si $m = (a, s_1, \dots, s_n)$ est un mot réduit, et si $g = f(a)f_{i_{s_1}}(s_1) \dots f_{i_{s_n}}(s_n)$, alors, par récurrence sur n , l'image $g \star (e)$ par $g \in G$ du mot réduit trivial $(e) \in X$ est le mot m lui-même. L'application $\beta : X \rightarrow G$ définie par

$$(a, s_1, \dots, s_n) \mapsto f(a)f_{i_{s_1}}(s_1) \dots f_{i_{s_n}}(s_n) ,$$

composée avec l'application orbitale $G \rightarrow X$ définie par $g \mapsto g \star (e)$, est donc l'identité. Donc β est injective. Ceci montre l'unicité de l'écriture réduite d'un élément de G .

Comme G est engendré par $\bigcup_{i \in I} f_i(G_i)$, si $g \in G$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et $g_k \in G_{i_k}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $g = f_{i_1}(g_1) \dots f_{i_n}(g_n)$. Comme $g_n = a_n s_n$ où $a_n \in A$ et $s_n \in R_{i_n}$, nous avons $g = f_{i_1}(g_1) \dots f_{i_{n-1}}(g_{n-1} a_n) f_{i_n}(s_n)$ si $n \geq 2$, et $g = f(a_n) f_{i_n}(s_n)$ si $n = 1$ et $s_n \neq e$. Si $s_n = e$, nous avons $g = f_{i_1}(g_1) \dots f_{i_{n-1}}(g_{n-1} a_n)$ si $n \geq 2$, et $g = f(a_n)$ si $n = 1$. Par récurrence sur n , tout élément g admet donc au moins une écriture réduite. $\square$

Exercice E.41.

- (1) Montrer que si les injections $C \rightarrow A$ et $C \rightarrow B$ dans un produit amalgamé $A \ast_C B$ sont propres (c'est-à-dire d'image d'indice au moins 2), alors $A \ast_C B$ est infini. En particulier, montrer que le produit libre de deux groupes non triviaux est infini.
- (2) Montrer que la somme amalgamée $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \ast_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (pour les inclusions évidentes (les seuls morphismes non triviaux, qui sont injectifs) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$) est isomorphe à $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$.

3.2 Le théorème de van Kampen

Le théorème suivant est l'un des moyens les plus utilisés pour calculer des groupes fondamentaux d'espaces topologiques.

Théorème 3.3. (Théorème de van Kampen) Soient B un espace topologique, U_0, U_1, U_2 trois ouverts connexes par arcs tels que $U_0 = U_1 \cap U_2$ et $B = U_1 \cup U_2$, et $b \in U_0$. Les applications induites sur les groupes fondamentaux en b par les inclusions de U_i dans B pour $i \in \{0, 1, 2\}$ induisent un isomorphisme de groupes

$$\pi_1(U_1, b) *_{\pi_1(U_0, b)} \pi_1(U_2, b) \simeq \pi_1(B, b) .$$

L'hypothèse que U_0 est connexe par arcs est absolument cruciale, et doit être soigneusement vérifiée.

Démonstration. Première démonstration via les revêtements. Nous donnons une première démonstration, utilisant la théorie des revêtements, sous les hypothèses supplémentaires que B est séparé et que U_0, U_1, U_2 sont localement connexes par arcs et semi-localement simplement connexes. Comme la plupart des espaces topologiques rencontrés (graphes, CW-complexes (voir la partie 6.5 et [Pau3, Spa]), variétés topologiques (voir la partie 4.1), ...) seront séparés et localement contractiles, cette restriction n'est pas gênante.

Soient $i_1 : U_0 \rightarrow U_1, i_2 : U_0 \rightarrow U_2, j_1 : U_1 \rightarrow B$ et $j_2 : U_2 \rightarrow B$ les inclusions, qui sont des applications continues fixant b et rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{i_1} & U_1 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ U_2 & \xrightarrow{j_2} & B . \end{array}$$

Par fonctorialité, comme $j_2 \circ i_2 = j_1 \circ i_1$, nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_0, b) & \xrightarrow{i_{1*}} & \pi_1(U_1, b) \\ i_{2*} \downarrow & & \downarrow j_{1*} \\ \pi_1(U_2, b) & \xrightarrow{j_{2*}} & \pi_1(B, b) . \end{array} \quad (7)$$

Par unicité de la somme amalgamée, pour montrer le théorème, il suffit donc de montrer que $\pi_1(B, b)$ vérifie la propriété universelle (6) des sommes amalgamées. Soient H un groupe, $h_1 : \pi_1(U_1, b) \rightarrow H$ et $h_2 : \pi_1(U_2, b) \rightarrow H$ des morphismes de groupes tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_0, b) & \xrightarrow{i_{1*}} & \pi_1(U_1, b) \\ i_{2*} \downarrow & & \downarrow h_1 \\ \pi_1(U_2, b) & \xrightarrow{h_2} & H . \end{array}$$

Nous cherchons à construire le morphisme canonique $\phi : \pi_1(B, b) \rightarrow H$, tel que $\phi \circ j_{i*} = h_i$ pour $i \in \{1, 2\}$.

Par la proposition 1.11, la partie $j_{1*}\pi_1(U_1, b) \cup j_{2*}\pi_1(U_2, b)$ engendre $\pi_1(B, b)$. Ceci montre en particulier l'unicité du morphisme canonique.

Pour $k \in \{1, 2\}$, le groupe $\pi_1(U_k, b)$ agit à droite sur l'ensemble non vide H par l'application $(g, \gamma) \mapsto g h_k(\gamma)$, où $\gamma \in \pi_1(U_k, b)$ et $g \in H$. Soit $p_k : X_k \rightarrow U_k$ un revêtement de U_k de fibre H associé à cette action (voir la proposition 2.47, l'espace topologique U_k vérifiant les conditions topologiques requises au début de la partie 2.13).

Puisque $j_{2*} \circ i_{2*} = j_{1*} \circ i_{1*}$, les fibres des revêtements $p_{1|p_1^{-1}(U_0)}$ et $p_{2|p_2^{-1}(U_0)}$ sont en bijection $\pi_1(U_0, b)$ -équivariante, donc ces revêtements sont isomorphes (voir la proposition

2.47). Soit $\psi : p_1^{-1}(U_0) \rightarrow p_2^{-1}(U_0)$ un isomorphisme de revêtements. Soit $X = X_1 \cup_{\psi} X_2$ l'espace topologique obtenu en recollant X_1 à X_2 par ψ (voir l'exemple (5) précédant l'exercice **E.A.112** dans la partie **A.2.6** de l'appendice **A**).

Les applications $p_1 : X_1 \rightarrow B$ et $p_2 : X_2 \rightarrow B$, vérifiant l'égalité $p_2 \circ \psi = p_1$ sur $p_1^{-1}(U_0)$, induisent une application continue $p : X \rightarrow B$, qui est un revêtement. De plus, si nous notons $q : X_1 \amalg X_2 \rightarrow X_1 \cup_{\psi} X_2 = X$ la projection canonique, alors $q|_{X_k}$ est un isomorphisme de revêtements de p_k sur $p|_{X_k}$ pour $k \in \{1, 2\}$.

Le revêtement p , de fibre H au-dessus de b , définit (voir la partie **2.7**) une action à droite de $\pi_1(B, b)$ sur H , que nous noterons dans cette démonstration $(g, x) \mapsto x \cdot g$, où $x \in H$ et $g \in \pi_1(B, b)$. Par les isomorphismes précédents, pour $k \in \{1, 2\}$, nous avons

$$\forall x \in H, \forall g \in \pi_1(U_k, b), \quad x \cdot j_{k*}(g) = x h_k(g) .$$

Si e est l'élément neutre de H , considérons l'application $\phi : \pi_1(B, b) \rightarrow H$ définie par $\phi(g) = e \cdot g$. Nous avons en particulier $\phi \circ j_{k*} = h_k$ pour $k \in \{1, 2\}$.

Si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $g_\ell \in \pi_1(U_{k_\ell}, b)$ pour $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $k_1, \dots, k_n \in \{1, 2\}$, alors par récurrence sur n , nous avons

$$\begin{aligned} \phi(j_{k_1*}(g_1) \dots j_{k_n*}(g_n)) &= e h_{k_1}(g_1) \dots h_{k_n}(g_n) = (e h_{k_1}(g_1))(e h_{k_2}(g_2)) \dots (e h_{k_n}(g_n)) \\ &= \phi(j_{k_1*}(g_1)) \dots \phi(j_{k_n*}(g_n)) . \end{aligned}$$

Comme $j_{1*}\pi_1(U_1, b) \cup j_{2*}\pi_1(U_2, b)$ engendre $\pi_1(B, b)$ (voir la proposition **1.11**), ceci montre que $\phi : \pi_1(B, b) \rightarrow H$ est un morphisme de groupes. C'est le morphisme canonique cherché.

Seconde démonstration par découpages d'homotopies. Voici une démonstration complète (sous les seules hypothèses de l'énoncé) qui n'utilise pas la théorie des revêtements, voir par exemple [Olu, Gra]. Notons $G_i = \pi_1(U_i, b)$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$ et $G = \pi_1(B, b)$. Le diagramme commutatif (7), et la propriété universelle des sommes amalgamées montre l'existence d'un morphisme canonique $\bar{\theta} : G_1 *_{G_0} G_2 \rightarrow G$. La propriété universelle des produits libres donne un morphisme canonique $\theta : G_1 * G_2 \rightarrow G$, qui coïncide avec $(j_1)_*$ sur G_1 et avec $(j_2)_*$ sur G_2 . En considérant le morphisme canonique du produit libre $G_1 * G_2$ à valeurs dans la somme amalgamée $G_1 *_{G_0} G_2$, nous avons un diagramme commutatif

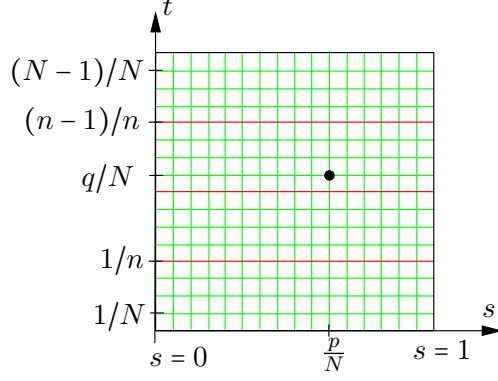
$$\begin{array}{ccc} G_1 * G_2 & \xrightarrow{\theta} & G \\ \searrow & & \nearrow \bar{\theta} \\ & G_1 *_{G_0} G_2 . & \end{array}$$

Le morphisme θ est surjectif car $j_{1*}G_1 \cup j_{2*}G_2$ engendre $\pi_1(B, b)$ (voir la proposition **1.11**). Donc $\bar{\theta}$ est surjectif. Notons $\mathcal{N}$ le noyau du morphisme canonique $G_1 * G_2 \rightarrow G_1 *_{G_0} G_2$, qui est le sous-groupe distingué engendré par l'ensemble R des éléments $((i_1)_*(c))((i_2)_*(c))^{-1}$ de $G_1 * G_2$ lorsque c parcourt G_0 (voir l'exercice **E.39 (1)**).

Montrons que $\mathcal{N} = \text{Ker } \theta$, ce qui implique que $\bar{\theta}$ est injectif, donc conclut la démonstration du théorème de van Kampen. Puisque $(j_1)_* \circ (i_1)_* = (j_2)_* \circ (i_2)_*$, il est immédiat que la partie R qui engendre $\mathcal{N}$ en tant que sous-groupe distingué est contenue dans $\text{Ker } \theta$. Nous avons donc $\mathcal{N} \subset \text{Ker } \theta$ puisque le sous-groupe $\text{Ker } \theta$ est distingué. Montrons l'inclusion réciproque.

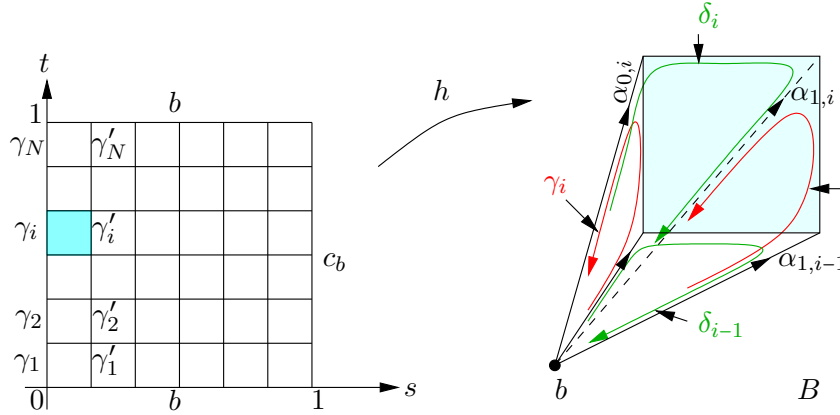
Tout élément du produit libre $G_1 * G_2$ appartenant au noyau de θ s'écrit $[\gamma_1][\gamma_2] \dots [\gamma_n]$ où $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ sont des lacets en b , chacun d'eux étant contenu dans U_1 ou dans U_2 , tel que le lacet concaténé $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_n$ (valant $\gamma_i(nt - i + 1)$ sur $t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$) soit homotope au lacet constant c_b en b . Montrons que $[\gamma_1][\gamma_2] \dots [\gamma_n]$ appartient à $\mathcal{N}$, ce qui conclut.

Soit $h : [0, 1]^2 \rightarrow B$ une homotopie de lacets entre $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_n$ et c_b . Notons $s \in [0, 1]$ le temps de l'homotopie (représenté horizontalement sur le dessin), de sorte que pour tout $t \in [0, 1]$, si $s = 0$, alors $h(s, t) = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_n(t)$, et si $s = 1$, alors $h(s, t) = c_b(t) = b$. Puisque $[0, 1]^2$ est compact et h continue, il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ multiple de n tel que chaque carré de la subdivision de $[0, 1]^2$ en N^2 carrés de même taille (voir le dessin ci-contre) soit contenu dans $h^{-1}(U_1)$ ou dans $h^{-1}(U_2)$.



Pour tout $(p, q) \in \llbracket 0, N \rrbracket^2$, fixons un chemin $\alpha_{p,q}$ de b à $h(\frac{p}{N}, \frac{q}{N})$, qui est contenu dans U_0, U_1, U_2 si $h(\frac{p}{N}, \frac{q}{N})$ appartient à U_0, U_1, U_2 respectivement, ce qui est possible par la connexité par arcs de ces ouverts. Si $q = 0$ ou $q = N$ ou $p = N$, nous supposons que $\alpha_{p,q}$ est le chemin constant en $h(\frac{p}{N}, \frac{q}{N}) = b$.

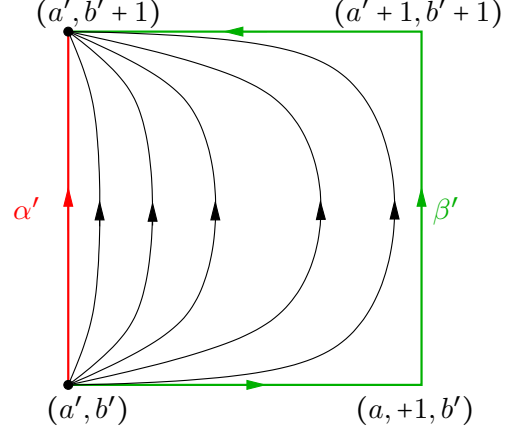
Quitte à remplacer les lacets γ_i par des concaténations de lacets obtenus en suivant γ_i sur des intervalles $[\frac{q}{N}, \frac{q+1}{N}]$ et en faisant des aller-retour le long des $\alpha_{0,q}$ pour q parcourant $\{\frac{iN}{n}, \frac{(i+1)N}{n} - 1\}$, et à faire une homotopie à la source, nous pouvons supposer que $n = N$, que le lacet concaténé $\Gamma_0 = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_N$ est paramétré par $[0, 1]$ de sorte que pour tout $q \in \llbracket 1, N \rrbracket$, pendant l'intervalle de temps $[\frac{q-1}{N}, \frac{q}{N}]$, ce lacet Γ_0 suit le lacet γ_q , et que $\alpha_{0,q}$ est le chemin constant en $h(0, \frac{q}{N}) = b$.



Pour tout $q \in \llbracket 1, N \rrbracket$, posons $\gamma_q^0 = \gamma_q$ et $\gamma_q^N = c_b$, et pour tous les $p \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, notons $\gamma_q^p = \alpha_{p,q-1} \cdot (t \mapsto h(\frac{p}{N}, \frac{q-1+t}{N})) \cdot \overline{\alpha_{p,q}}$, qui est un lacet en b . De même, pour tout $p \in \llbracket 1, N \rrbracket$, posons $\delta_0^p = \delta_N^p = c_b$ et pour tous les $q \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, notons $\delta_q^p = \alpha_{p-1,q} \cdot (t \mapsto h(\frac{p-1+t}{N}, \frac{q}{N})) \cdot \overline{\alpha_{p,q}}$, qui est aussi un lacet en b . Voir le dessin de droite ci-dessus, où nous avons posé $\gamma'_i = \gamma_i^1$ pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $\delta_i = \delta_i^1$ pour $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$. Nous supposons pour réaliser un dessin simple que h en restriction au carré bleu du dessin de gauche est un homéomorphisme sur son image, le carré bleu de droite, et nous avons dessiné comme si les chemins $\alpha_{0,q}$ n'étaient pas constants en b pour anticiper sur la récurrence qui suit.

Notons que pour tous les $p, q \in \llbracket 0, N \rrbracket$, le lacet $\overline{\alpha_{p,q}} \cdot \alpha_{p,q}$ (qui est un aller-retour) d'origine $h(p, q)$ est homotope au lacet constant en $h(p, q)$ dans l'ouvert U_0, U_1, U_2 qui contient $h(p, q)$.

De plus, pour tous les $a', b' \in \mathbb{R}$, le chemin $\alpha' : t' \mapsto (a', b' + t')$ suivant un côté du carré $[a', a' + 1] \times [b', b' + 1]$ entre deux sommets consécutifs (a', b') et $(a', b' + 1)$ est homotope (relativement extrémités) au chemin β' concaténation de $(t' \mapsto (a' + t', b'))$, $(t' \mapsto (a' + 1, b' + t'))$ et $(t' \mapsto (a' + 1 - t', b' + 1))$ suivant les trois autres côtés entre ces deux sommets. Si $h' : [a', a' + 1] \times [b', b' + 1] \rightarrow B$ est une application continue, alors les chemins $h' \circ \alpha'$ et $h' \circ \beta'$ sont aussi homotopes (relativement extrémités).



Par conséquent, pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, si le carré $C_i = [0, \frac{1}{N}] \times [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]$ est contenu dans $h^{-1}(U_1)$, alors les lacets $\gamma_i, \gamma'_i, \delta_{i-1}$ et δ_i sont des lacets dans U_1 tels que le lacet $\gamma_i = \alpha_{0,i-1} \cdot (t \mapsto h(0, \frac{i-1+t}{N})) \cdot \overline{\alpha_{0,i}}$ soit homotope dans U_1 à

$$\begin{aligned} \delta_{i-1} \cdot \gamma'_i \cdot \overline{\delta_i} &= (\alpha_{0,i-1} \cdot (s \mapsto h(\frac{s}{N}, \frac{i-1}{N}))) \cdot \overline{\alpha_{1,i-1}} \\ &\quad \cdot (\alpha_{1,i-1} \cdot (t \mapsto h(\frac{1}{N}, \frac{i-1+t}{N}))) \cdot \overline{\alpha_{1,i}} \\ &\quad \cdot (\alpha_{1,i} \cdot (s \mapsto h(\frac{1-s}{N}, \frac{i}{N}))) \cdot \overline{\alpha_{0,i}}. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$[\gamma_i] = [i_1 \circ \delta_{i-1}] [\gamma'_i] [i_1 \circ \delta_i]^{-1} \quad \text{dans } G_1.$$

Si le carré C_{i+1} au dessus du carré C_i est aussi contenu dans $h^{-1}(U_1)$, alors le lacet $\gamma_i \cdot \gamma_{i+1}$ vérifie, par simplification à homotopie près, que

$$[\gamma_i] [\gamma_{i+1}] = [i_1 \circ \delta_{i-1}] [\gamma'_i] [\gamma'_{i+1}] [i_1 \circ \delta_{i+1}]^{-1}$$

dans G_1 .

Mais si le carré C_{i+1} est contenu dans $h^{-1}(U_2)$, alors le lacet δ_i est contenu dans $U_1 \cap U_2 = U_0$ et nous avons

$$[\gamma_i] [\gamma_{i+1}] = [i_1 \circ \delta_{i-1}] [\gamma'_i] [i_1 \circ \delta_i]^{-1} [i_2 \circ \delta_i] [\gamma'_{i+1}] [i_2 \circ \delta_{i+1}]^{-1}$$

dans $G_1 * G_2$. Notons que $[i_1 \circ \delta_i]^{-1} [i_2 \circ \delta_i] = ((i_1)_*([\delta_i]))^{-1} ((i_2)_*([\delta_i]))$ est un élément du sous-groupe $\mathcal{N}$, qui est distingué. Puisque δ_0 et δ_N sont les lacets constants en b , nous avons donc en travaillant modulo le sous-groupe distingué $\mathcal{N}$, l'égalité

$$[\gamma_1] [\gamma_2] \dots [\gamma_N] = [\gamma'_1] [\gamma'_2] \dots [\gamma'_N]$$

dans $(G_1 * G_2)/\mathcal{N}$. En procédant de proche en proche vers la droite dans le carré $[0, 1]^2$, nous obtenons donc que l'élément $[\gamma_1] [\gamma_2] \dots [\gamma_N]$ est trivial dans $(G_1 * G_2)/\mathcal{N}$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Méthodologie 4 :

Uhu !

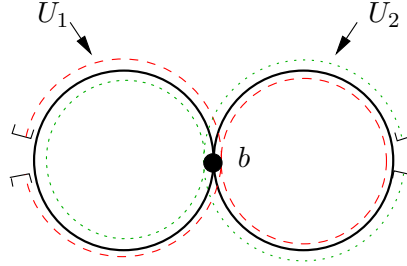
Pour calculer (à isomorphisme près) le groupe fondamental d'un espace topologique connexe par arcs B , on pourra chercher des ouverts U et V « appropriés », connexes par arcs, recouvrant X et d'intersection connexe par arc^a, et invoquer le théorème de van Kampen pour obtenir, pour tout point base b dans $U \cap V$, l'isomorphisme $\pi_1(B, b) \simeq \pi_1(U, b) *_{\pi_1(U \cap V, b)} \pi_1(V, b)$.

Ne pas oublier de simplifier cette somme amalgamée ou de l'expliciter le plus complètement possible.

Par U et V « appropriés », nous entendons que leurs groupes fondamentaux, ainsi que les applications de $\pi_1(U \cap V, b)$ dans $\pi_1(U, b)$ et $\pi_1(V, b)$ lorsque c'est nécessaire, soient calculables, par exemple en utilisant la méthodologie 1 d'équivalence d'homotopie donnée après le corollaire 1.8.

^a. Ne pas oublier de le vérifier explicitement !

Exemples. (1) Soit B le bouquet de deux cercles $\mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_1$, recollés au point b . Soit y un point du cercle différent de b , U_1 l'ouvert de B obtenu en enlevant le point y sur un des deux cercles, U_2 l'ouvert de B obtenu en enlevant le point y sur l'autre cercle, et $U_0 = U_1 \cap U_2$.



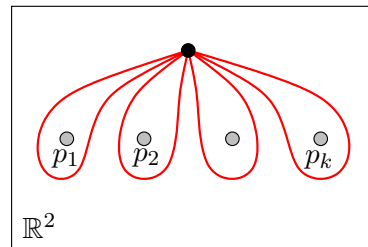
Alors U_0 est contractile, donc est connexe par arcs (il se rétracte par déformation forte sur le point commun b), U_1 et U_2 ont le type d'homotopie du cercle, donc sont connexes par arcs (ils se rétractent par déformation forte sur l'un des deux cercles de B). Donc $\pi_1(U_0, b) = 0$, $\pi_1(U_1, b) \simeq \mathbb{Z}$, $\pi_1(U_2, b) \simeq \mathbb{Z}$, et le théorème de van Kampen 3.3 donne

$$\pi_1(B, b) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

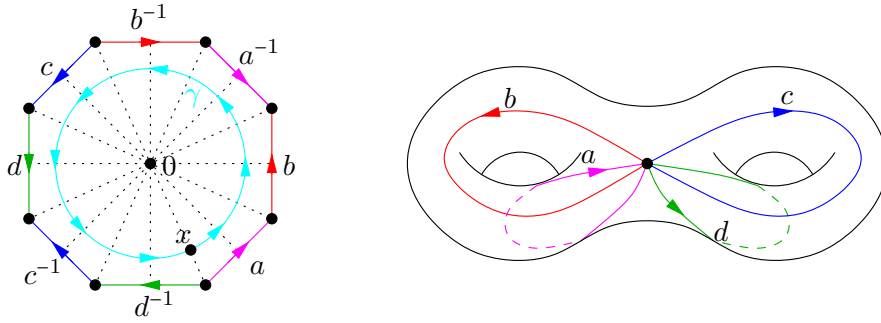
Ceci démontre de nouveau (voir la proposition 2.25) que le groupe fondamental du bouquet de deux cercles est un groupe libre de rang 2. Par récurrence, le groupe fondamental du bouquet de k cercles est un groupe libre de rang k : pour un choix indifférent de point base, nous avons

$$\pi_1\left(\bigvee_{i=1}^k \mathbb{S}_1\right) \simeq *_{i=1}^k \mathbb{Z} \simeq L(x_1, \dots, x_k).$$

Rappelons que le disque fermé privé de son centre $\mathbb{B}_2 \setminus \{0\}$ se rétracte (radialement) par déformation forte sur son bord $\mathbb{S}_1$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Le plan $\mathbb{R}^2$ privé de k points $p_1, \dots, p_k$ (deux à deux distincts) se rétracte par déformation forte sur un bouquet de k cercles plongé dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$. Donc le groupe fondamental de $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ est aussi un groupe libre de rang k .



(2) Soit P un octogone régulier de bord orienté par l'ordre trigonométrique, de côtés étiquetés par les lettres $a, b, a^{-1}, b^{-1}, c, d, c^{-1}, d^{-1}$ dans cet ordre. Notons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur P engendrée par la relation identifiant l'arête étiquetée a, b, c, d à l'arête étiquetée $a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, d^{-1}$ en renversant l'orientation induite par celle du bord de P . Notons X l'espace topologique quotient $P/\mathcal{R}$. Notons V l'image (ouverte) dans X du polygone ouvert $\overset{\circ}{P}$ et U l'ouvert complémentaire de l'image dans X du centre 0 de P . Alors V est homéomorphe à un disque ouvert, donc contractile, et U est connexe par arcs et se rétracte par déformation forte (radialement dans P , voir dessin de gauche ci-dessous) dans X sur un bouquet B de quatre cercles étiquetés a, b, c, d . De plus, $U \cap V$ est homéomorphe à un anneau ouvert $\overset{\circ}{P} \setminus \{0\}$, donc est connexe par arcs et a le même type d'homotopie qu'un cercle.



Dans la rétraction r par déformation forte de U sur B , un lacet γ de $U \cap V$ d'origine un point x se rétractant par r sur l'origine de l'arête étiquetée a , dont la classe d'homotopie engendre le groupe fondamental de $U \cap V$, s'envoie sur un lacet dans B suivant, dans l'ordre, le cercle de B étiqueté a , puis le cercle de B étiqueté b , puis le cercle de B étiqueté a mais dans le sens inverse, puis le cercle de B étiqueté b mais dans le sens inverse, puis le cercle de B étiqueté c , puis le cercle de B étiqueté d , puis le cercle de B étiqueté c mais dans le sens inverse, puis le cercle de B étiqueté d mais dans le sens inverse.

Donc par le théorème de van Kampen 3.3 et par le calcul du groupe fondamental du bouquet de 4 cercles B , le groupe fondamental de X en x est isomorphe à

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x) &= \pi_1(U, x) *_{\pi_1(U \cap V, x)} \pi_1(V, x) = \pi_1(B, x) / \langle \langle r_*([\gamma]) \rangle \rangle \\ &= \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Nous renvoyons à la partie 7 pour une généralisation de ce calcul au calcul des groupes fondamentaux de toutes les surfaces compactes connexes.

Les deux résultats suivants découlent immédiatement du théorème de van Kampen 3.3, le premier par l'invariance homotopique des groupes fondamentaux (voir la partie 1.2.5 et le corollaire 1.7), le second par récurrence.

Corollaire 3.4. *Soit B un espace topologique. Soient X_1 et X_2 deux sous-espaces connexes par arcs de B , de réunion $X_1 \cup X_2 = B$, d'intersection $X_0 = X_1 \cap X_2$ connexe par arcs, et $b \in X_0$. Supposons qu'il existe des voisinages ouverts U_1 de X_1 et U_2 de X_2 tels que $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ se rétractent par déformation forte sur X_1, X_2, X_0 respectivement. Alors en utilisant dans la somme amalgamée ci-dessous les morphismes induits sur les groupes fondamentaux en b par les inclusions de X_0 dans X_1 et X_2 , nous avons un isomorphisme de groupes*

$$\pi_1(X_1, b) *_{\pi_1(X_0, b)} \pi_1(X_2, b) \simeq \pi_1(B, b). \quad \square$$

Corollaire 3.5. Soient B un espace topologique, $U_0, U_1, \dots, U_n$ des ouverts connexes par arcs de B tels que $B = U_1 \cup \dots \cup U_n$ et $U_0 = U_i \cap U_j$ pour tous les $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts, et $b \in U_0$. Les applications induites sur les groupes fondamentaux en b par les inclusions de U_i dans B pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ induisent un isomorphisme de groupes (avec la notation de l'exemple précédant l'exercice E.40)

$$\star_{\pi_1(U_0, b)}(\pi_1(U_i, b))_{1 \leq i \leq n} \simeq \pi_1(B, b) . \quad \square$$

Le dernier résultat de cette partie dit que tout groupe est un groupe fondamental.

Proposition 3.6. Pour tout groupe G , il existe un espace topologique pointé (X, x) séparé, connexe par arcs et localement contractile tel que

$$\pi_1(X, x) \simeq G .$$

Si de plus G est de présentation finie, alors il est possible de prendre X compact.

Démonstration. Fixons une présentation (S, R) du groupe G , avec S et R finis si G est de présentation finie. Rappelons que R est une partie du groupe libre $L(S)$, donc est constituée de mots réduits sur S . Nous identifions le cercle $\mathbb{S}_1$ avec l'espace topologique écrasement⁵⁴ $[0, 1]/\langle 0 \sim 1 \rangle$ par l'application $t \in [0, 1]/\langle 0 \sim 1 \rangle \mapsto e^{2i\pi t} \in \mathbb{S}_1$.

Pour tout s dans S , soit C_s une copie du cercle $\mathbb{S}_1 = [0, 1]/\langle 0 \sim 1 \rangle$, pointé en (l'image de) 1. Soit $Y = \bigvee_{s \in S} C_s$ le bouquet de cercles correspondant. Pour tout $s \in S$, nous identifions C_s avec son image dans Y . Soit $f_s : [0, 1] \rightarrow Y$ la projection canonique de $[0, 1]$ sur $C_s \subset Y$, qui est un chemin dans Y . Pour tout mot réduit $r = s_1^{\epsilon_1} \dots s_k^{\epsilon_k}$ appartenant à R , considérons un polygone régulier P_r , de bord ∂P_r orienté, ayant k côtés, chacun d'eux étant paramétré de manière préservant l'orientation par $[0, 1]$, et étiquetés dans l'ordre cyclique par $s_1^{\epsilon_1}, s_2^{\epsilon_2}, \dots, s_k^{\epsilon_k}$. Soit $g_r : \partial P_r \rightarrow Y$ l'application continue qui en restriction au côté étiqueté $s_i^{\epsilon_i}$ vaut le chemin f_{s_i} si $\epsilon_i = 1$, et le chemin inverse $\overline{f_{s_i}} : t \mapsto f_{s_i}(1 - t)$ sinon. Soient Z l'espace topologique somme disjointe $Z = \coprod_{r \in R} P_r$ et $A = \coprod_{r \in R} \partial P_r$, qui est une partie fermée de Z . Notons $g : A \rightarrow Y$ l'application valant g_r sur ∂P_r pour tout $r \in R$. Enfin, posons $X = Z \cup_g Y$ l'espace topologique recollement⁵⁵ des polygones P_r sur le bouquet de cercle Y par les applications (dites d'attachement, voir la partie 6.5 pour une généralisation) g_r . La restriction à Y de la projection canonique $\pi : Z \coprod Y \rightarrow X$ est un homéomorphisme sur son image (voir l'exercice E.A.112 de la partie A.2.6 de l'appendice A). Nous identifions Y avec son image dans X , et nous notons $x \in X$ le sommet du bouquet de cercles Y .

L'espace X est séparé car il est élémentaire de construire des voisinages saturés disjoints de deux points non équivalents de $Z \coprod Y$. Il est connexe par arcs, car tout point de l'image dans X de l'intérieur $\overset{\circ}{P}_r$ d'un polygone P_r peut être joint à un point de Y par un chemin contenu dans l'image de P_r dans X , et car Y est connexe par arcs. La restriction à l'intérieur $\overset{\circ}{P}_r$ de chaque polygone P_r de la projection canonique π est un homéomorphisme sur son image (voir l'exercice E.A.112 de la partie A.2.6 de l'appendice A). L'espace X est localement contractile, car chaque $\overset{\circ}{P}_r$ est contractile, et le complémentaire de la réunion

54. Voir l'exemple (3) de la partie A.2.6 de l'appendice A, mais il s'agit juste d'identifier les deux extrémités d'un intervalle!

55. Voir l'exemple (5) de la partie A.2.6

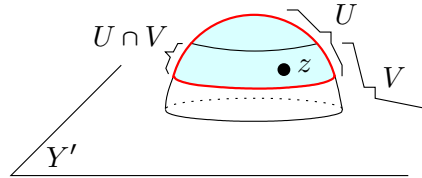
d'un point dans chaque $\overset{\circ}{P}_r$ se rétracte par déformation forte sur le sous-espace localement contractile Y .

Montrons que l'espace topologique pointé (X, x) convient. Il est appelé le 2-complexe de Cayley de la présentation (S, R) . Si R est vide, alors $X = Y$ est un bouquet de cercles, et le résultat a déjà été vu (voir la démonstration de la proposition 2.25).

Le lemme suivant traite le cas où R est réduit à un élément, et il est formulé pour permettre une récurrence. Soit Y' un espace topologique séparé, connexe par arcs et localement contractile. Soit $f : \mathbb{S}_1 = [0, 1]/\langle 0 \sim 1 \rangle \rightarrow Y'$ une application continue. L'application f définit un lacet dans Y' d'origine $x' = f(0)$, dont nous notons $[f]$ la classe d'homotopie dans $\pi_1(Y', x')$, et $N = \langle \langle [f] \rangle \rangle$ le sous-groupe distingué de $\pi_1(Y', x')$ qu'elle engendre. Soit $X' = \mathbb{B}_2 \cup_f Y'$ l'espace topologique recollement du disque unité fermé $\mathbb{B}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ sur Y' par f . Nous identifions Y' , ainsi que $\mathbb{B}_2 \setminus \mathbb{S}_1$, avec son image dans X' par la projection canonique, qui en restriction à chacun de ces sous-espaces de $\mathbb{B}_2 \amalg Y'$ est un homéomorphisme sur son image (voir l'exercice E.A.112 de la partie A.2.6 de l'appendice A). Notons ι l'inclusion de Y' dans X' , qui est une application continue. Pour les mêmes raisons que précédemment, l'espace X' est séparé, connexe par arcs et localement contractile.

Lemme 3.7. *Le morphisme de groupes $\iota_* : \pi_1(Y', x') \rightarrow \pi_1(X', x')$ induit par passage au quotient un isomorphisme $\pi_1(Y', x')/N \rightarrow \pi_1(X', x')$.*

Démonstration. Soit $U = B(0, \frac{2}{3})$ le disque ouvert de centre l'origine et de rayon $\frac{2}{3}$ dans le disque ouvert $\mathbb{B}_2 \setminus \mathbb{S}_1 \subset X'$. Soit V le complémentaire de l'adhérence de $B(0, \frac{1}{3})$ dans X' . Notons $S(0, \frac{1}{2})$ le cercle de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$ dans $\mathbb{B}_2$, et $z = \frac{1}{2} \in S(0, \frac{1}{2}) \subset U \cap V$.



Alors U , V et $U \cap V$ sont connexes par arcs, U est contractile (c'est un disque), donc $\pi_1(U, z) = \{e\}$, et $U \cap V$ est un anneau, qui a le type d'homotopie du cercle (il se rétracte radialement par déformation forte sur $S(0, \frac{1}{2})$). Soit $\alpha : t \mapsto \frac{1}{2} e^{2i\pi t}$, qui est un lacet en z dans $U \cap V$. Sa classe d'homotopie engendre $\pi_1(U \cap V, z)$ (qui est isomorphe à $\mathbb{Z}$).

Par le théorème de van Kampen et la remarque (1) suivant l'exercice E.38, l'inclusion $V \rightarrow X'$ induit un isomorphisme de groupes $\pi_1(V, z)/\langle \langle [\alpha] \rangle \rangle \simeq \pi_1(X', z)$.

Comme V se rétracte par déformation forte sur Y' , par une rétraction appropriée (radiale sur $V \cap (\mathbb{B}_2 \setminus \mathbb{S}_1)$) envoyant le lacet α sur le lacet f , nous en déduisons que l'inclusion $Y' \rightarrow X'$ induit un isomorphisme $\pi_1(Y', x')/N \rightarrow \pi_1(X', x')$. $\square$

Pour toute partie finie F de R , notons G_F le groupe quotient $L(S)/\langle \langle F \rangle \rangle$, et X_F le bouquet de cercles Y sur lequel ont été seulement recollés les polygones P_r par g_r pour $r \in F$. Par récurrence, le lemme 3.7 montre que le morphisme de groupes du groupe libre $\pi_1(Y, x) = L(S)$ dans $\pi_1(X_F, x)$ (induit en homotopie par l'inclusion $Y \hookrightarrow X_F$) induit par passage au quotient un isomorphisme de groupes $G_F \simeq \pi_1(X_F, x)$. Soit F' une partie finie de R contenant F . Alors le morphisme identité du groupe $L(S)$ induit par passage au quotient un morphisme de groupes surjectif $\varphi_{F, F'} : G_F \rightarrow G_{F'}$. L'inclusion de la somme

disjointe $Y \amalg (\coprod_{r \in F} P_r)$ dans $Y \amalg (\coprod_{r \in F'} P_r)$ induit par passage au quotient une application continue $f_{F, F'} : X_F \rightarrow X_{F'}$, qui fixe point par point Y . Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} G_F & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(X_F, x) \\ \varphi_{F, F'} \downarrow & & \downarrow (f_{F, F'})_* \\ G_{F'} & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(X_{F'}, x) . \end{array}$$

Nous avons donc un isomorphisme entre les limites inductives (voir la partie 3.1.1) sur les parties finies F de R

$$\lim_{\rightarrow} G_F \simeq \lim_{\rightarrow} \pi_1(X_F, x) .$$

L'inclusion de $Y \amalg (\coprod_{r \in F} P_r)$ dans $Y \amalg (\coprod_{r \in R} P_r)$ induit par passage au quotient une application continue $f_F : X_F \rightarrow X$. Si F' est une partie finie de R contenant F , alors nous avons $f_F = f_{F'} \circ f_{F, F'}$. Par la propriété universelle des limites inductives, les applications $(f_F)_*$ pour toutes les parties finies F de R définissent un morphisme canonique θ de $\lim_{\rightarrow} \pi_1(X_F, x)$ dans $\pi_1(X, x)$.

Proposition 3.8. *Un compact K de X ne rencontre qu'un nombre fini d'images dans X de polygones ouverts $\overset{\circ}{P}_r$ pour $r \in R$.*

Il découle de cette proposition que l'image de tout compact par une application continue à valeurs dans X est compacte car X est séparé, et donc contenue dans un X_F pour F une partie finie assez grande de R .

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe une partie infinie I de R telle que K rencontre les polygones ouverts (deux à deux distincts donc disjoints) $\overset{\circ}{P}_i \subset X$ pour tout $i \in I$. Identifions $\overset{\circ}{P}_i$ avec le disque ouvert $\mathbb{B}_2 \setminus \mathbb{S}_1$ muni de la distance euclidienne. Notons $r_i = \min_{x \in K \cap \overset{\circ}{P}_i} d(0, x)$, qui appartient à $[0, 1[$ car $K \cap \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset$. Soient

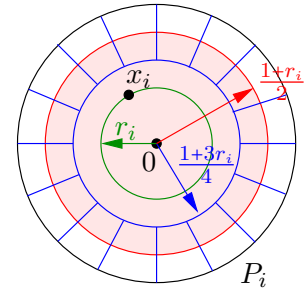
$$V_i = \{x \in \overset{\circ}{P}_i : d(0, x) < \frac{1 + r_i}{2}\}$$

le disque rouge ci-contre,

$$W_i = \{x \in \overset{\circ}{P}_i : d(0, x) \leq \frac{1 + 3r_i}{4}\}$$

de complémentaire dans $\overset{\circ}{P}_i$ en bleu ci-contre, et

$$U = X \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i .$$

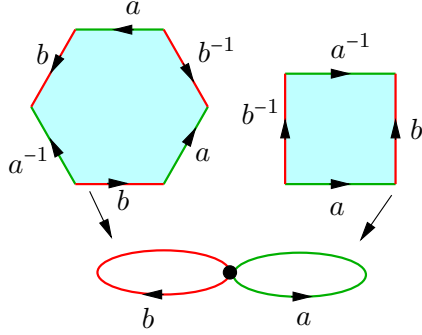


Alors U est un ouvert de X par la définition de la topologie quotient sur l'espace recollement $X = Y \cup_f (\coprod_{r \in R} P_r)$ et de la topologie somme disjointe sur l'espace $\coprod_{r \in R} P_r$. La famille $\{U\} \cup \{V_i : i \in I\}$ est un recouvrement ouvert de X car $\frac{1+3r_i}{4} < \frac{1+r_i}{2}$ donc $V_i \cup (\overset{\circ}{P}_i \setminus W_i) = \overset{\circ}{P}_i$. Aucune sous-famille finie de cette famille ne recouvre K , car les V_i sont deux à deux disjoints et chacun d'eux contient un point $x_i \in K$ à distance $r_i < \frac{1+3r_i}{4}$ de 0, donc qui n'est pas dans W_i . Ceci donne une contradiction. $\square$

Il découle de la proposition précédente que tout lacet de $\pi_1(X, x)$ est contenu dans un sous-espace X_F pour F une partie finie assez grande de R . Donc le morphisme de groupes

θ est surjectif. Il découle aussi de la proposition précédente que l'image de toute homotopie entre deux lacets de X est contenue dans un sous-espace X_F pour F une partie finie assez grande de R . Donc le morphisme de groupes θ est injectif. $\square$

Exemple.



2-complexe de Dehn
de la présentation
 $\langle a, b \mid ab^{-1}aba^{-1}b = 1, aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$
du groupe $\mathbb{Z}$

3.3 Autres exercices

Exercice E.42. (Voir aussi l'exercice E.B.129 de la partie B.4 de l'appendice B.)

(1) Pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, montrer que le groupe de présentation

$$\langle a, b \mid a^m = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$$

possède $2m$ éléments et qu'il est isomorphe au groupe des isométries du plan laissant invariant un polygone régulier à m côtés. Un groupe isomorphe à un tel groupe est appelé un *groupe diédral d'ordre $2m$* , et souvent noté D_{2m} .⁵⁶

(2) Montrer que le produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe de présentation $\langle a, b \mid b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$, au groupe des isométries de $\mathbb{Z}$ (muni de la distance induite de celle de $\mathbb{R}$), et au groupe des isométries de $\mathbb{R}$ engendré par les transformations $t \mapsto t + 1$ et $t \mapsto -t$ de $\mathbb{R}$. Un groupe isomorphe à un tel groupe est appelé un *groupe diédral infini*, et souvent noté D_∞ .

Exercice E.43. Calculer le groupe fondamental du complémentaire de la réunion de deux droites affines dans $\mathbb{R}^3$ (distinguer les cas où les droites affines sont confondues, sécantes en un point, disjointes).

Exercice E.44. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, soit $p_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit B_i une copie du disque unité fermé $\mathbb{B}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, et soit S_i une copie du cercle $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ pointée en $x_i = 1$. Identifions S_i avec son image dans le bouquet de cercles $S_1 \vee S_2$. Soit $f_i : \partial B_i \rightarrow S_i$ l'application $z \mapsto z^{p_i}$ et soit X l'espace topologique recollement suivant

$$X = (B_1 \coprod B_2) \cup_{(f_1 \amalg f_2)} (S_1 \vee S_2).$$

Calculer le groupe fondamental de X .

Exercice E.45. Cet exercice est la suite de l'exercice E.37 dont nous reprenons les notations.

(6) Donner une présentation du groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{S}_3 \setminus K, b)$ (on pourra considérer les sous-espaces $K_1 = \{(z, w) \in \mathbb{S}_3 : |z| \leq |w|\}$ et $K_2 = \{(z, w) \in \mathbb{S}_3 : |z| \geq |w|\}$).

56. Certains ouvrages le notent D_m .

Exercice E.46. Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille de groupes, et pour tout $i \in I$, soit (X_i, x_i) un espace topologique séparé, localement contractile, connexe par arc, pointé, muni d'un isomorphisme de groupes $\alpha_i : G_i \rightarrow \pi_1(X_i, x_i)$. Soit $(X, x) = \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$ la somme pointée de la famille $(X_i, x_i)_{i \in I}$. Montrer que le groupe $\pi_1(X, x)$ est isomorphe au produit libre de la famille $(G_i)_{i \in I}$.

Exercice E.47. Ce problème est un exercice de synthèse portant sur les trois premiers chapitres de ce livre. Les différentes parties de ce problème sont largement indépendantes.

Rappelons que si X et Y sont deux espaces topologiques, si A est une partie de X et si $f : A \rightarrow Y$ est une application continue, alors nous appelons *espace topologique obtenu par recollement de X sur Y par f* , et nous notons $X \cup_f Y$, l'espace topologique quotient $(X \amalg Y)/\mathcal{R}$ de l'espace topologique somme disjointe $X \amalg Y$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ engendrée par la relation $x \sim f(x)$ pour tout $x \in A$.

I Si X est un espace topologique, nous notons CX l'espace topologique quotient $CX = (X \times [0, 1])/\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x, 0) \sim (x', 0)$ pour tous les x, x' dans X . Pour $t \in [0, 1]$ et $u \in X$, nous noterons $[x, t]$ la classe de (x, t) .

(1) Montrer que CX est contractile.

(2) Montrer que l'application de X dans CX définie par $x \mapsto [x, 1]$ est un homéomorphisme sur son image. Dans la suite de ce problème, nous identifions X et son image dans CX par cette application.

(3) Si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, montrer que l'application Cf de CX dans CY , définie par $Cf([x, t]) = [f(x), t]$ est continue.

(4) Montrer que si X est compact, alors CX l'est aussi.

II Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, considérons dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ le compact R_n qui est le rectangle $[-2, 4n-2] \times [-2, 2]$ privé des disques ouverts de rayon 1 et de centre $(4k, 0)$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Notons Δ_n l'espace topologique quotient de R_n par la relation d'équivalence engendrée par $(x, -2) \sim (x, 2)$ pour tout x dans $[-2, 4n-2]$ et $(-2, y) \sim (4n-2, y)$ pour tout y dans $[-2, 2]$.

Calculer le groupe fondamental de Δ_n .

III Soit E un ensemble fini, non vide, muni de la topologie discrète. Soit $\sigma : E \rightarrow E$ une bijection. (Pour $n \in \mathbb{N}$ et f une application d'un ensemble dans lui-même, rappelons que $f^{\circ n} = f \circ f \circ \dots \circ f$ désigne la composée n -ème de f , avec $f^{\circ 0} = \text{id}$.)

(1) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times (CE \times \mathbb{R}) &\longrightarrow (CE \times \mathbb{R}) \\ (n, (x, t)) &\mapsto ((C\sigma)^{\circ n}(x), t + n) \end{aligned}$$

est une action libre et propre du groupe discret $\mathbb{Z}$ sur l'espace localement compact $CE \times \mathbb{R}$, préservant $E \times \mathbb{R}$.

(2) Si Ω est l'espace topologique quotient $\mathbb{Z} \backslash (CE \times \mathbb{R})$, calculer le groupe fondamental de Ω .

(3) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\partial\Omega = \mathbb{Z} \setminus (E \times \mathbb{R})$ possède un nombre fini de composantes connexes $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$, chacune d'entre elles étant homéomorphe à un cercle.

(4) Pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, notons D_i une copie du disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$, et choisissons un homéomorphisme $f_i : \partial D_i = \mathbb{S}_1 \rightarrow \Sigma_i$, vu à valeurs dans Ω . Notons $\widehat{\Omega}_1$ l'espace topologique

$$\left(\coprod_{i=1}^N D_i \right) \cup_{(\coprod_{i=1}^N f_i)} \Omega$$

recollement des disques D_i sur Ω par les applications f_i . Calculer le groupe fondamental de $\widehat{\Omega}_1$.

Application numérique : que vaut $\pi_1(\widehat{\Omega}_1)$ si $E = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\sigma : x \mapsto x + 1 \bmod n$?

(5) Considérons le rectangle R_N privé de N disques, défini en II. Soit $\partial_+ R_N \subset R_N$ la réunion des bords de ces N disques, et $\phi : \partial_+ R_N \rightarrow \partial\Omega$ un homéomorphisme. Notons $\widehat{\Omega}_2 = R_N \cup_\phi \Omega$ l'espace topologique obtenu par recollement de R_N sur Ω par l'application ϕ .

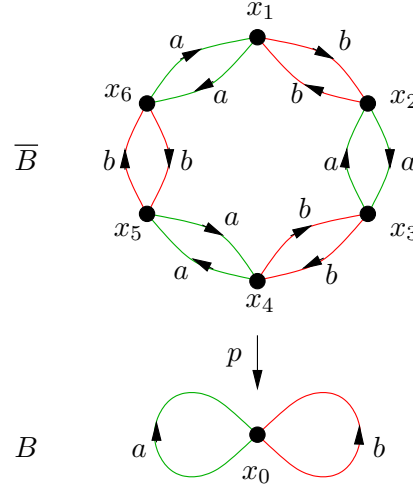
Montrer que $\widehat{\Omega}_2$ a le type d'homotopie d'un bouquet de N cercles.

(6) Considérons l'espace topologique S_N , qui est la sphère $\mathbb{S}_2$ privée de N disques ouverts, d'adhérences deux à deux disjointes. Notons $\partial S_N \subset S_N$ la réunion des bords de ces N disques, et $\varphi : \partial S_N \rightarrow \partial\Omega$ un homéomorphisme. Notons $\widehat{\Omega}_3 = S_N \cup_\varphi \Omega$ l'espace topologique obtenu par recollement de S_N sur Ω par l'application φ .

Calculer le groupe fondamental de $\widehat{\Omega}_3$.

Application numérique : Pour $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, supposons que $E = \llbracket 1, p+q \rrbracket$, et que σ est le produit de deux cycles $(1, \dots, p)(p+1, \dots, p+q)$. Montrer que le groupe $\pi_1(\widehat{\Omega}_3)$ admet pour présentation $\langle a, b \mid ab^p a^{-1} = b^q \rangle$ ou $\langle a, b \mid ab^p a^{-1} = b^{-q} \rangle$. (Un tel groupe s'appelle un *groupe de Baumslag-Solitar*.)

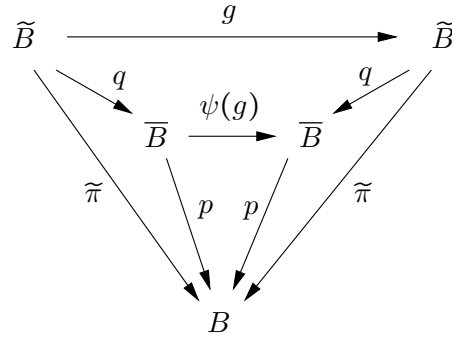
IV Considérons le graphe orienté $\overline{B}$ de sommets x_j pour $j \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ (en considérant les entiers modulo 6), ayant, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, une arête étiquetée a de x_{2i} à x_{2i+1} et de x_{2i+1} à x_{2i} , et une arête étiquetée b de x_{2i+1} à x_{2i+2} et de x_{2i+2} à x_{2i+1} . Notons B le bouquet de deux cercles, orientés et étiquetés par a, b . Fixons un paramétrage préservant l'orientation par l'intervalle $]0, 1[$ de chaque arête ouverte de B et de $\overline{B}$. Considérons l'application continue $p : \overline{B} \rightarrow B$, envoyant les sommets de $\overline{B}$ sur le sommet x_0 de B , et envoyant, par un homéomorphisme préservant les paramétrages donnés, chaque arête de $\overline{B}$ sur l'arête de B ayant même orientation et étiquette (voir le dessin ci-dessous).



(1) Montrer que $p : \overline{B} \rightarrow B$ est un revêtement. Est-il galoisien ? Quel est le groupe Γ des automorphismes de revêtement de p ?

(2) Fixons un revêtement universel $\tilde{\pi} : \tilde{B} \rightarrow B$ de B . Notons G le groupe des automorphismes de revêtements de $\tilde{\pi}$, et $\pi' : \tilde{B} \rightarrow G \backslash \tilde{B}$ la projection canonique sur l'espace topologique quotient $G \backslash \tilde{B}$. Montrer qu'il existe un unique homéomorphisme $h : G \backslash \tilde{B} \rightarrow B$ tel que $h \circ \pi' = \tilde{\pi}$. Dans la suite, nous identifions $G \backslash \tilde{B}$ et B par cet homéomorphisme, et donc π' avec $\tilde{\pi}$.

(3) Montrer qu'il existe un revêtement $q : \tilde{B} \rightarrow \overline{B}$ et un morphisme surjectif de groupes $\psi : G \rightarrow \Gamma$, uniques, tels que, pour tout g dans G , le diagramme suivant commute :



(4) Notons E l'ensemble des sommets de $\overline{B}$, et $C\psi_g : CE \rightarrow CE$ l'application induite (voir la question I.3) par la restriction $\psi_g = \psi(g)|_E : E \rightarrow E$. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} G \times (CE \times \tilde{B}) &\longrightarrow (CE \times \tilde{B}) \\ (g, (x, y)) &\mapsto (C\psi_g(x), g(y)) \end{aligned}$$

est une action libre et propre du groupe discret G sur $CE \times \tilde{B}$.

(5) Notons Θ l'espace topologique quotient $G \backslash (CE \times \tilde{B})$. Quel est le groupe fondamental de Θ ?

(6) Notons $\text{pr}_2 : E \times \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}$ la seconde projection $(x, y) \mapsto y$. Montrer que pr_2 induit un revêtement connexe $G \backslash (E \times \tilde{B}) \rightarrow B$.

(7) Montrer que $G \backslash (E \times \widetilde{B})$ et $\overline{B}$ sont homéomorphes.

(8) Soit f un homéomorphisme de la partie $\overline{B}$ de $C\overline{B}$ sur la partie $G \backslash E \times \widetilde{B}$ de Θ . Notons $\widehat{\Theta}$ l'espace topologique obtenu par recollement de $C\overline{B}$ sur Θ par f .

Calculer le groupe fondamental de $\widehat{\Theta}$.

(9) Quels sont, à isomorphisme près, les revêtements connexes de $\widehat{\Theta}$? Quels sont ceux qui sont galoisiens?

3.4 Indications pour la résolution des exercices

Correction de l'exercice E.38. Soient $I = \{A, B\}$ et $S = \coprod_{i \in I} S_i$. Soit $i \in I$, et posons $G_i = i$ pour simplifier les notations. Par la propriété universelle du groupe libre $L(S_i)$, l'inclusion $S_i \rightarrow S$ induit un morphisme canonique injectif $L(S_i) \rightarrow L(S)$, par lequel nous identifions $L(S_i)$ à un sous-groupe de $L(S)$. Notons $\pi_i : L(S_i) \rightarrow G_i$ le morphisme canonique surjectif, dont le noyau est le sous-groupe distingué engendré par R_i (venant du fait que (S_i, R_i) est une présentation du groupe G_i). Soit $N = \langle\langle R \rangle\rangle$ le sous-groupe distingué de $L(S)$ engendré par la réunion R de R_A , de R_B et de l'ensemble des $\widetilde{i_A(c)} (\widetilde{i_B(c)})^{-1}$ pour tout $c \in S_C$. Enfin, soit G le groupe quotient $L(S)/N$, dont une présentation est par construction celle cherchée (S, R) . Puisque (S_i, R_i) est une présentation de groupe de G_i et comme R_i est contenu dans R , l'inclusion $L(S_i) \rightarrow L(S)$ induit par passage au quotient⁵⁷ un morphisme de groupes $f_i : G_i \rightarrow G$. Nous avons $f_A \circ i_A = f_B \circ i_B$, car cette égalité entre morphismes de C dans G se vérifie sur la partie génératrice S_c de C , et puisque R contient les $\widetilde{i_A(c)} (\widetilde{i_B(c)})^{-1}$ pour tout $c \in S_C$.

Soit H un groupe muni d'un morphisme $h_i : G_i \rightarrow H$ pour tout $i \in I$, tel que nous ayons $h_A \circ i_A = h_B \circ i_B$. Soit $j : S \rightarrow H$ l'application qui coïncide avec $h_i \circ \pi_i$ sur S_i pour tout $i \in I$. Soit $\widetilde{\phi} : L(S) \rightarrow H$ le morphisme canonique associé à (H, j) par la propriété universelle du groupe libre $L(S)$. Le morphisme de groupes $\widetilde{\phi}$ vaut l'élément neutre sur tout élément de R donc de N , donc induit par passage au quotient un morphisme de groupes $\phi : G \rightarrow H$. Celui-ci vérifie $\phi \circ f_i = h_i$ pour tout $i \in I$ par construction. Comme $\bigcup_{i \in I} f_i \circ \pi_i(S_i)$ engendre G , un tel morphisme ϕ est unique. Donc $(G, (f_i)_{i \in I})$ vérifie la propriété universelle de la somme amalgamée $A *_C B$. Par conséquent, le couple (S, R) est bien une présentation du groupe $A *_C B$.

Correction de l'exercice E.39. (1) Soient (S_A, R_A) et (S_B, R_B) une présentation de groupe de A et B respectivement, de sorte que les morphismes canoniques $L(S_A) \rightarrow A$ et $L(S_B) \rightarrow B$ induisent des isomorphismes $L(S_A)/\langle\langle R_A \rangle\rangle \simeq A$ et $L(S_B)/\langle\langle R_B \rangle\rangle \simeq B$. Soit S_C une partie génératrice de C (par exemple $S_C = C$). Par l'exercice E.38, la somme amalgamée $A *_C B$ a pour présentation $(S_A \amalg S_B, R_A \cup R_B \cup \{ \widetilde{i_A(c)} (\widetilde{i_B(c)})^{-1} : c \in S_C \})$. Le morphisme canonique $L(S_A) * L(S_B) \rightarrow L(S_A \amalg S_B)$ est un isomorphisme de groupes. Donc le morphisme canonique du produit libre $L(S_A)/\langle\langle R_A \rangle\rangle * L(S_B)/\langle\langle R_B \rangle\rangle$ dans $A *_C B$ est surjectif, et son noyau est exactement le sous-groupe distingué engendré par les éléments $i_A(c) i_B(c)^{-1}$ pour $c \in S_C$. Ceci montre le résultat.

(2) Notons $\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, qui sont des éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Ils vérifient $\widetilde{S}^2 = -\mathrm{id}$ et $\widetilde{T}^3 = -\mathrm{id}$, donc leurs images $S = \pm \widetilde{S}$ et $T = \pm \widetilde{T}$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sont respectivement d'ordre 2 et d'ordre 3, comme le montre un petit calcul. Donc nous avons des morphismes

57. Voir la formule (65) dans la partie B.1 de l'appendice B.

de groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ qui envoient respectivement le générateur $\bar{S} = 1 \bmod 2$ de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $S = \pm \tilde{S}$ et le générateur $\bar{T} = 1 \bmod 3$ de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sur $T = \pm \tilde{T}$. La propriété universelle des produits libres donne un morphisme de groupes ψ de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ comme voulu dans la première indication.

Pour montrer que ce morphisme de groupes ψ est surjectif, puisque les éléments $S = \psi(\bar{S})$ et $T = \psi(\bar{T})$ sont dans l'image de ψ , il suffit de montrer que le sous-groupe H de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par S et T est égal à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Soit $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Montrons par récurrence sur $|a| + |c|$ que $g \in H$, ce qui montre la surjectivité. Comme $Sg = \begin{bmatrix} -c & -d \\ a & b \end{bmatrix}$, nous pouvons supposer que $|a| \geq |c|$. Nous pouvons supposer que $a \geq 0$ quitte à changer tous les signes. Si $c = 0$, alors $ad = 1$ donc $a = d = 1$ et $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^b$ appartient à H , car $ST = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ donc $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (ST)^{-1} \in H$. Sinon notons $\epsilon \in \{\pm 1\}$ le signe de c . Alors $\begin{bmatrix} 1 & -\epsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} a-\epsilon c & b-\epsilon d \\ c & d \end{bmatrix}$ et nous avons $|a - \epsilon c| + |c| = a < |a| + |c|$. Donc par récurrence, nous avons $g \in H$.

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, alors $cx + d \neq 0$. De plus, $x' = \frac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ car si $x' \in \mathbb{Q}$, comme $x' \neq \frac{a}{c}$ puisque $ad - bc = 1 \neq 0$, nous aurions $x = \frac{b-x'd}{cx'-a} \in \mathbb{Q}$. Puisque x' est inchangé par un changement de tous les signes de a, b, c, d , l'application $(g, x) \mapsto gx = x'$ est bien définie. Un petit calcul immédiat montre que c'est une action de groupe. Comme $Sx = \frac{-1}{x}$, si $x > 0$ alors $Sx < 0$, et si $x < 0$ alors $Sx > 0$. Comme $Tx = \frac{1}{1-x}$, nous avons bien que si $x < 0$, alors $0 < Tx < 1$. Comme $T^{-1}x = 1 - \frac{1}{x}$, nous avons bien que si $x < 0$, alors $T^{-1}x > 1$. En particulier si $x < 0$, alors $T^\epsilon x > 0$ pour tout $\epsilon \in \{\pm 1\}$.

Montrons que pour tout élément g du produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ différent de l'élément neutre, nous avons $\psi(g) \neq \mathrm{id}$, ce qui montre que ψ est injective. Par la forme normale des éléments d'un produit libre (et puisque S est d'ordre 2), g s'écrit de l'une des 4 formes possibles suivantes de mots réduits non triviaux, en discutant sur le fait que la première et la dernière lettre soient S ou pas, avec $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$:

$$g = \begin{cases} \bar{S} \bar{T}^{\epsilon_1} \bar{S} \bar{T}^{\epsilon_2} \dots \bar{T}^{\epsilon_k} \bar{S} \\ \bar{T}^{\epsilon_1} \bar{S} \bar{T}^{\epsilon_2} \dots \bar{T}^{\epsilon_k} \bar{S} \\ \bar{S} \bar{T}^{\epsilon_1} \bar{S} \dots \bar{S} \bar{T}^{\epsilon_k} \\ \bar{T}^{\epsilon_1} \bar{S} \bar{T}^{\epsilon_2} \dots \bar{S} \bar{T}^{\epsilon_k} \end{cases}$$

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dans le premier cas, si $y > 0$, alors $Sy < 0$, donc $T^{\epsilon_k} Sy > 0$, puis $ST^{\epsilon_k} Sy < 0$, et par récurrence $\psi(g)y = ST^{\epsilon_1} \dots ST^{\epsilon_k} Sy < 0$, donc $\psi(g) \neq \mathrm{id}$.

Dans le second cas, si $\epsilon_1 = +1$, si $y > 1$, nous avons $ST^{\epsilon_2} \dots ST^{\epsilon_k} Sy < 0$ par l'argument précédent, donc $\psi(g)y = TST^{\epsilon_2} \dots ST^{\epsilon_k} Sy \in]0, 1[$, et de même $\psi(g) \neq \mathrm{id}$. Si $\epsilon_1 = -1$, si $y \in]0, 1[$, nous avons toujours $ST^{\epsilon_2} \dots ST^{\epsilon_k} Sy < 0$ mais maintenant $\psi(g)y = T^{-1}ST^{\epsilon_2} \dots ST^{\epsilon_k} Sy > 1$, donc de même $\psi(g) \neq \mathrm{id}$.

Dans le troisième (respectivement quatrième) cas, l'élément g est conjugué à un élément du deuxième (respectivement premier) cas par $\bar{S}$. Comme un morphisme de groupes préserve les classes de conjugaison, et que la classe de conjugaison de l'élément neutre est réduite à l'élément neutre, ceci montre que $\psi(g) \neq \mathrm{id}$.

Correction de l'exercice E.40. (1) Soient $G = *_{i \in I} L(S_i)$ et $H = L(\coprod_{i \in I} S_i)$. Rappelons que nous identifions $L(S_i)$ avec son image par l'injection canonique dans le produit libre G . En particulier, nous avons une application $j : \coprod_{i \in I} S_i \rightarrow G$, qui envoie $s \in S_i$ sur l'image de s dans $L(S_i)$. Soit $\phi : H \rightarrow G$ le morphisme canonique donné par la propriété universelle du groupe libre H appliquée à (G, j) . De même, la propriété universelle du groupe libre $L(S_i)$ appliquée à l'injection composée $S_i \hookrightarrow \coprod_{i \in I} S_i \hookrightarrow H$ donne un morphisme canonique

$f_i : L(S_i) \rightarrow H$. La propriété universelle des produits libres pour la famille $(L(S_i), f_i)_{i \in I}$ donne un morphisme canonique $\psi : G \rightarrow H$. L'unicité dans les propriétés universelles des produits libres et des groupes libres respectivement donne que $\phi \circ \psi$ et $\psi \circ \phi$ valent l'identité de G et H respectivement.

(2) En prenant une présentation (S_i, R_i) du groupe G_i pour tout $i \in I$, ceci découle du fait qu'une présentation du produit libre $*_{i \in I} G_i$ est $(\coprod_{i \in I} S_i, \coprod_{i \in I} R_i)$ par l'exemple précédant l'énoncé de l'exercice E.40, et de l'associativité et la commutativité de la somme disjointe.

(3) Les inclusions de S_i dans S fournissent des morphismes canoniques $L(S_i) \rightarrow L(S)$ par la propriété universelle des groupes libres. Ces morphismes de groupes sont compatibles avec les éventuelles inclusions de S_i dans S_j . Ils fournissent donc un morphisme canonique $\theta : G = \varinjlim L(S_i) \rightarrow L(S)$ par la propriété universelle des limites inductives. Ce morphisme θ est surjectif car les S_i recouvrent S . L'injectivité de θ vient du fait que tout élément de G est dans l'image de $L(S_j)$ pour une partie finie S_j assez grande de S (car pour toute partie finie F de S , il existe $i \in I$ tel que $F \subset S_i$ car la famille $(S_i)_{i \in I}$ est stable par union finie et recouvre S), et que la restriction de θ à l'image de $L(S_j)$ est injective, et reste injective quand on passe à une partie de S contenant S_j .

(4) La démonstration est analogue. Tout d'abord, il est immédiat de vérifier que si $R_i \subset R_j$, alors $h_j \circ f_{ij} = f_i$, donc la famille $(G, (h_i)_{i \in I})$ vérifie les propriétés demandées pour appliquer la propriété universelle des limites inductives, et par conséquent le morphisme canonique θ est bien défini. Puisque les h_i sont surjectifs, le morphisme θ est surjectif. L'injectivité de θ vient du fait qu'un mot réduit de $L(S)$ qui est trivial dans $G = L(S)/\langle\langle R \rangle\rangle$ appartient à $\langle\langle F \rangle\rangle$ pour une partie finie assez grande F de R , et que pour toute partie finie F de R , il existe $i \in I$ tel que $F \subset R_i$ car la famille $(R_i)_{i \in I}$ est stable par union finie et recouvre R .

Correction de l'exercice E.41. (1) Identifions, comme convenu pour les produits amalgamés, les groupes A et B avec leur image dans $A *_C B$, ce qui identifie C avec un sous-groupe de A et un sous-groupe de B .

Soient $a \in A \setminus C$ et $b \in B \setminus C$, que nous pouvons choisir comme étant des représentants de leur classe à gauche (non triviale) modulo C dans A et B respectivement. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les éléments $(ab)^n = abab \dots ab$ sont des mots réduits deux à deux distincts par le théorème 3.2 de forme normale, donc $A *_C B$ est infini.

Comme un produit libre est un produit amalgamé au-dessus du groupe trivial, la dernière affirmation de cet exercice découle de la première.

(2) Par l'exercice E.38, la somme amalgamée $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (qui est un produit amalgamé) admet pour présentation $\langle x, y \mid x^4 = y^6 = 1, x^2 = y^3 \rangle$. Reprenons les notations de l'exercice E.39. Nous avons vu dans la correction de la question (2) de cet exercice E.39 que $S^4 = \text{id}$ et $T^6 = \text{id}$ et que $S^2 = T^3 = -\text{id}$. Donc la propriété universelle des produits libres donne un morphisme de groupes $\psi' : G \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Notons que $\{S, T\}$ engendre $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ car $-\text{id} = S^2$ et $\{\pm S, \pm T\}$ engendre $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Donc ψ' est surjectif.

Nosons $p : G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ le morphisme de groupes qui envoie x sur $\bar{S}$ et y sur $\bar{T}$, ce

qui est possible car $\overline{S}^2 = 1 = \overline{T}^3$ (donc $\overline{S}^4 = \overline{T}^6 = 1$). Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\psi'} & \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ p \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) . \end{array}$$

Si $g \in G$ est un élément du noyau de ψ' , alors par la commutativité du diagramme et le fait que ψ soit un isomorphisme de groupes, nous avons que $p(g) = e$.

Le sous-groupe Z de G engendré par x^2 est central (donc distingué), car x^2 commute avec toutes les puissances de x et puisque $x^2 = y^3$, il commute aussi avec toutes les puissances de y . Le sous-groupe Z est de plus d'ordre 2, car $x^4 = 1$. Montrons que Z est égal au noyau de p . Comme $\psi'(x^2) = S^2 = -\mathrm{id} \neq \mathrm{id}$, ceci montrera que ψ' est injective.

Le groupe Z est contenu dans $\mathrm{Ker} p$ car $p(x^2) = \overline{S}^2 = 1$. Comme x^2 engendre l'image du sous-groupe au-dessus duquel G est un produit amalgamé, et par le théorème 3.2 de forme normale des produits amalgamés, un élément de G qui n'est pas dans Z s'écrit $zx^\alpha y^{\beta_1} x y^{\beta_2} \dots x y^{\beta_k} x^{\alpha'}$ avec $z \in Z$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha, \alpha' \in \{0, 1\}$ tels que $\alpha \neq \alpha'$ si $k = 0$, et $\beta_i \in \{1, 2\}$ pour $i \in \{1, \dots, k\}$. L'image de cet élément par p est alors le mot réduit non trivial $\overline{S}^\alpha \overline{T}^{\beta_1} \overline{S} \overline{T}^{\beta_2} \dots \overline{S} \overline{T}^{\beta_k} \overline{S}^{\alpha'}$ dans le produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, qui n'est donc pas l'identité. Donc $Z = \mathrm{Ker} p$.

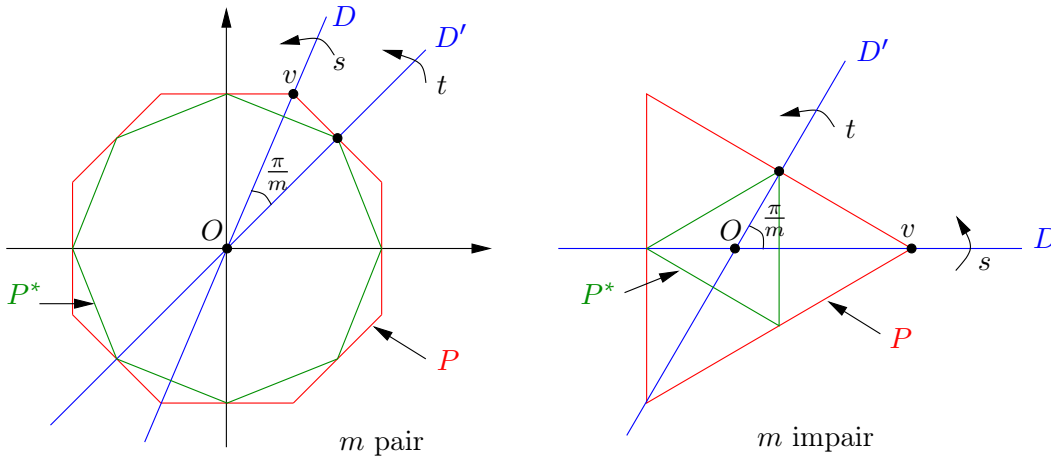
Correction de l'exercice E.42. (1) Notons

$$G_1 = L(\{a, b\}) / \langle\langle \{a^m, b^2, bab^{-1}a\} \rangle\rangle$$

le groupe quotient défini par la présentation $\langle a, b \mid a^m = b^2 = bab^{-1}a = 1 \rangle$, et

$$G_2 = L(\{s, t\}) / \langle\langle \{s^2, t^2, (st)^m\} \rangle\rangle$$

le groupe quotient défini par la présentation $\langle s, t \mid s^2 = t^2 = (st)^m = 1 \rangle$. Le morphisme canonique $L(\{a, b\}) \rightarrow L(\{s, t\})$ induit par $a \mapsto st$ et $b \mapsto t$ passe au quotient en un morphisme de groupes ϕ de G_1 dans G_2 car dans G_2 , nous avons $t = t^{-1}$ et $s^2 = 1$ donc $(t)(st)(t)^{-1}(st) = ts^2t = 1$. De même, le morphisme canonique $L(\{s, t\}) \rightarrow L(\{a, b\})$ induit par $s \mapsto ab^{-1}$ et $t \mapsto b$ passe au quotient en un morphisme de groupes ψ de G_2 dans G_1 car dans G_1 , nous avons $ab^{-1}a = b^{-1}$ et $b^{-2} = 1$ donc $(ab^{-1})^2 = ab^{-1}ab^{-1} = b^{-2} = 1$. Il est immédiat que $\psi \circ \phi$ et $\phi \circ \psi$ valent l'identité, car ce sont des morphismes de groupes valant l'identité sur une partie génératrice de G_1 et de G_2 respectivement.

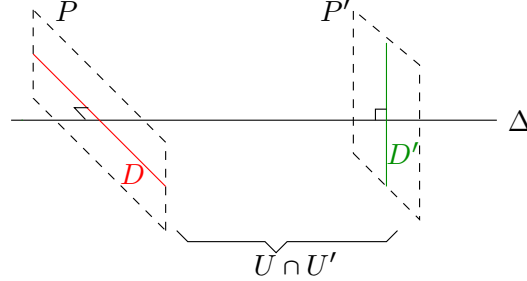


Pour toutes les droites vectorielles D et D' d'un plan vectoriel euclidien P faisant un angle $\pm \frac{\pi}{m}$ entre elles (voir le dessin ci-dessus), notons $R_{D,D'}$ le sous-groupe du groupe orthogonal de P engendré par les deux réflexions orthogonales σ_D et $\sigma_{D'}$ d'ensemble de points fixes D et D' respectivement. Ce groupe est le groupe des symétries de deux classes d'homothétie de polygones réguliers à m sommets P et P^* . Le morphisme canonique de $L(s, t)$ dans $R_{D,D'}$ défini par $t \mapsto \sigma_D$ et $s \mapsto \sigma_{D'}$ passe au quotient en un morphisme $\theta : G_2 \rightarrow R_{D,D'}$ car $\sigma_{D'} \circ \sigma_D$ est une rotation d'ordre m . Ce morphisme est surjectif car $\sigma_D = \theta(t)$ et $\sigma_{D'} = \theta(s)$ engendrent $R_{D,D'}$. Tout élément de G_2 s'écrit de manière unique comme un mot de longueur au plus m alternant s et t , donc est de cardinal $2m$. Puisque $R_{D,D'}$ est aussi d'ordre $2m$, le morphisme θ est un isomorphisme.

(2) Le groupe des isométries H de $\mathbb{Z}$ est engendré par les applications $r_0 : n \mapsto -n$ et $r_1 : n \mapsto 1 - n$. Le morphisme canonique de $L(s, t)$ dans H défini par $t \mapsto r_0$ et $s \mapsto r_1$ passe au quotient en un morphisme $\theta' : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow H$ car r_0 et r_1 sont d'ordre 2. Ce morphisme est surjectif car $r_0 = \theta'(t)$ et $r_1 = \theta'(s)$ engendrent H . Comme $r_1 \circ r_0$ est la translation $n \mapsto n + 1$, qui est d'ordre infini, le morphisme θ' est un isomorphisme.

Correction de l'exercice E.43. Soient D et D' deux droites affines de $\mathbb{R}^3$. Nous notons $X = \mathbb{R}^3 \setminus (D \cup D')$, qui est un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^3$.

(1) Supposons d'abord D et D' disjointes, et calculons $\pi_1 X$ par deux méthodes, notées a) et b) ci-dessous.



a) L'espace X , étant un ouvert de $\mathbb{R}^3$, est localement connexe par arcs et localement contractile. Soit Δ une perpendiculaire commune à D et à D' . Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ contenant D et orthogonal à Δ et P' le plan de $\mathbb{R}^3$ contenant D' et orthogonal à Δ . Soit C la composante connexe de $\mathbb{R}^3 \setminus P$ contenant D' et C' la composante connexe de $\mathbb{R}^3 \setminus P'$ contenant D . Soient $U = C \setminus D'$ et $U' = C' \setminus D$. Alors U et U' sont des ouverts connexes (donc connexes par arcs) de X . Comme P et P' sont parallèles, l'intersection $U \cap U'$ est convexe, donc contractile, donc $\pi_1(U \cap U') = \{1\}$ pour un point base indifférent dans $U \cap U'$. Comme U se rétracte par déformation forte (parallèlement à D') sur un demi-plan ouvert privé d'un point (l'intersection avec U d'un plan perpendiculaire à D'), qui lui-même se rétracte par déformation forte sur un cercle, nous avons $\pi_1 U \simeq \mathbb{Z}$. De même $\pi_1 U' \simeq \mathbb{Z}$. Par le théorème de van Kampen 3.3, nous avons donc

$$\pi_1 X \simeq \pi_1 U *_{\pi_1(U \cap U')} \pi_1 U' \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

(un groupe libre de rang deux).

b) Si D et D' sont parallèles, alors X se rétracte par déformation forte (parallèlement à D) sur un plan P perpendiculaire à D privé des deux points x et y d'intersection avec D et D' . Le groupe fondamental de $P \setminus \{x, y\}$ est un groupe libre de rang 2, donc

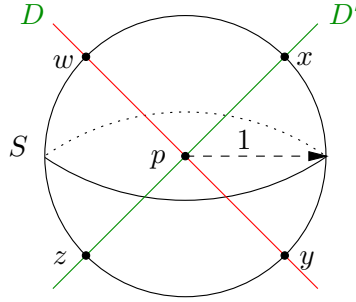
$$\pi_1 X \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Si D et D' ne sont pas parallèles, il existe un homéomorphisme entre $X = \mathbb{R}^3 \setminus (D \cup D')$ et $Y = \mathbb{R}^3 \setminus (D \cup D'')$ avec D'' une droite disjointe et parallèle à D . Donc

$$\pi_1 X \simeq \pi_1 Y \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

(Par changement de coordonnées, on se ramène au cas où, en notant (z, t) un point de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, la droite D a pour équations $\text{Im } z = t = 0$ et D' pour équations $\text{Re } z = 0, t = 1$. Alors $(z, t) \mapsto (ze^{\frac{\pi t}{2}}, t)$ est un tel homéomorphisme.)

(2) Supposons maintenant D et D' sécantes en un point p . Considérons la sphère euclidienne S de centre p et de rayon 1, qui possède quatre points d'intersection w, x, y, z avec $D \cup D'$. Alors X se rétracte (radialement) par déformation forte sur $S \setminus \{w, x, y, z\}$.



Par projection stéréographique, une sphère privée de quatre points est homéomorphe au plan euclidien $\mathbb{R}^2$ privé de trois points t, u, v . Nous avons donc (voir l'exemple (1) suivant la démonstration du théorème de van Kampen 3.3)

$$\pi_1 X \simeq \pi_1 (S \setminus \{w, x, y, z\}) \simeq \pi_1 (\mathbb{R}^2 \setminus \{t, u, v\}) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

(un groupe libre de rang trois).

Correction de l'exercice E.44. Notons $Y = S_1 \vee S_2$ le bouquet de deux cercles, pointé au point commun aux deux cercles. Posons $X' = B_2 \cup_{f_2} Y$, de sorte que $X = B_1 \cup_{f_1} X'$ (à homéomorphisme canonique près), munis du point base de Y , identifié avec son image dans X' et dans X . Notons c un générateur de $\pi_1(\partial B_1) = \pi_1(\partial B_2) \simeq \mathbb{Z}$. Par le lemme 3.7, nous avons

$$\pi_1 X' \simeq \pi_1 Y / \langle\langle (f_2)_*(c) \rangle\rangle \quad \text{et} \quad \pi_1 X \simeq \pi_1 X' / \langle\langle (f_1)_*(c) \rangle\rangle$$

Donc

$$\pi_1 X \simeq \pi_1 Y / \langle\langle (f_1)_*(c), (f_2)_*(c) \rangle\rangle.$$

Comme $\pi_1 Y$ est un groupe libre à deux générateurs x, y , et puisque $(f_1)_*(c) = x^{p_1}$ et $(f_2)_*(c) = y^{p_2}$, le groupe $\pi_1 X$ admet pour présentation $\langle x, y \mid x^{p_1} = 1, y^{p_2} = 1 \rangle$. Donc

$$\pi_1 X \simeq \mathbb{Z}/p_1 \mathbb{Z} * \mathbb{Z}/p_2 \mathbb{Z}.$$

Correction de l'exercice E.45. (6) L'espace $K_1 = \{(z, w) \in \mathbb{S}_3 : |z| \leq |w|\}$ est homéomorphe à $\mathbb{B}_2 \times \mathbb{S}_1$ par l'application $(z, w) \mapsto (\frac{z}{w}, \frac{w}{|w|})$. En effet, si $(z, w) \in K_1$, alors w est non nul ; de plus, l'inverse est

$$(u, v) \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}uv}{\sqrt{1+|u|^2}}, \frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{1+|u|^2}} \right)$$

qui est continu. La rétraction par déformation forte $r : \mathbb{B}_2 \times \mathbb{S}_1 \rightarrow \{0\} \times \mathbb{S}_1$, induite par la rétraction radiale du disque $\mathbb{B}_2$ sur son centre, induit une rétraction par déformation forte $(z, w) \mapsto (0, \frac{w}{|w|})$ de $K'_1 = K_1 \cap (\mathbb{S}_3 \setminus K)$ sur le cercle $\{0\} \times \mathbb{S}_1$. En particulier $\pi_1(K'_1) = \mathbb{Z}$.

De même, l'application $K'_2 = K_2 \cap (\mathbb{S}_3 \setminus K) \rightarrow \mathbb{S}_1 \times \{0\}$ définie par $(z, w) \mapsto (\frac{z}{|z|}, 0)$ est une rétraction par déformation forte sur un cercle. En particulier $\pi_1(K'_2) = \mathbb{Z}$.

L'intersection $K_1 \cap K_2$ est l'ensemble des (z, w) tels que $|z| = |w| = 1$. L'application $(z, w) \mapsto (\frac{z^3}{w^2}, \frac{w}{z})$ est un homéomorphisme de $K_1 \cap K_2$ sur $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ qui envoie K sur le cercle $\{1\} \times \mathbb{S}_1$. Donc $K'_1 \cap K'_2$ est homéomorphe au tore $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ privé du cercle $\{1\} \times \mathbb{S}_1$. En particulier $\pi_1(K'_1 \cap K'_2) = \mathbb{Z}$, l'inclusion $K'_1 \cap K'_2 \rightarrow K'_1$ induit sur les groupes fondamentaux l'application $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ qui est la multiplication par 3, et l'inclusion $K'_1 \cap K'_2 \rightarrow K'_2$ induit sur les groupes fondamentaux l'application $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ qui est la multiplication par 2.

Comme $K'_1, K'_2, K'_1 \cap K'_2$ sont connexes par arcs, avec $K'_1 \cup K'_2 = \mathbb{S}_3 \setminus K$ et puisque K'_1, K'_2 sont des rétractes par déformation forte de voisinages dans $\mathbb{S}_3 \setminus K$, nous en déduisons par le théorème de van Kampen (voir le corollaire 3.4), pour tout b dans $K'_1 \cap K'_2$, par exemple $b = (-1, 1)$, que

$$\pi_1(\mathbb{S}_3 \setminus K, b) \simeq \pi_1(K'_1, b) *_{\pi_1(K'_1 \cap K'_2, b)} \pi_1(K'_2, b) \simeq \langle x, y \mid x^3 = y^2 \rangle.$$

Correction de l'exercice E.46. Notons $\pi : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow \bigvee_{i \in I} X_i$ la projection canonique pour la relation d'équivalence qui identifie les points base. Pour tout $i \in I$, notons V_i un voisinage ouvert contractile de x_i dans X_i . Montrons tout d'abord deux lemmes.

Lemme 3.9. *Pour tout $i \in I$, les restrictions $\pi|_{X_i \setminus \{x_i\}}$ et $\pi|_{X_i}$ sont des homéomorphismes sur leur image.*

Démonstration. Ces applications sont des bijections continues sur leurs images. Comme X_i est séparé, le singleton $\{x_i\}$ est fermé dans X_i . Pour tout fermé F de X_i , son image $\pi(F)$ est fermée dans X car $\pi^{-1}(\pi(F)) = F \sqcup \coprod_{j \in I \setminus \{i\}} \{x_j\}$ est un fermé dans $\coprod_{i \in I} X_i$ (par la définition de la topologie somme disjointe). De même, pour tout ouvert U de $X_i \setminus \{x_i\}$, alors son image $\pi(U)$ est ouverte dans X , car $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$ est un ouvert de $X_i \setminus \{x_i\}$, donc de X_i car $\{x_i\}$ est fermé, donc de $\coprod_{i \in I} X_i$ (par la définition de la topologie somme disjointe). $\square$

Dans la suite, nous identifions X_i avec son image dans X par π .

Lemme 3.10. *Pour tout espace topologique compact K et pour toute application continue $f : K \rightarrow X$, l'image de f ne rencontre qu'un nombre fini de $\pi(X_i \setminus \{x_i\})$ pour $i \in I$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que l'espace topologique X est séparé. En effet, soient $\pi(y) \neq \pi(z)$ dans X , et soient $i, j \in I$ tels que $y \in X_i$ et $z \in X_j$. Supposons d'abord que $y \neq x_i$ et $z \neq x_j$. Soient respectivement U et V des voisinages ouverts disjoints de y et z , ne contenant pas x_i et x_j , dans X_i et X_j , qui existent si $i = j$ car X_i est séparé, et si $i \neq j$

en prenant $U = X_i \setminus \{x_i\}$ et $V = X_j \setminus \{x_j\}$. Les images $\pi(U)$ et $\pi(V)$, qui sont disjointes, sont ouvertes comme image par la projection canonique d'ouverts saturés, et contiennent respectivement $\pi(y)$ et $\pi(z)$.

Supposons quitte à permuter que $y = x_i$ et $z \neq x_j$. Soient U et W_j des voisinages ouverts disjoints de z et x_j dans X_j respectivement. Notons $V = W_j \coprod \left(\coprod_{k \in I \setminus \{j\}} X_k \right)$, qui est un ouvert saturé de $\coprod_{k \in I} X_k$. Alors comme ci-dessus, les images $\pi(U)$ et $\pi(V)$ sont des voisinages ouverts disjoints de $\pi(y)$ et $\pi(z)$ respectivement.

Puisque X est séparé, f continue et K compact, l'image $f(K)$ est compacte dans X . Par le lemme 3.9, les parties $Z_i = \pi(X_i \setminus \{x_i\})$ sont ouvertes dans X . Notons J l'ensemble des éléments $j \in I$ tels que $K \cap Z_j \neq \emptyset$. Pour tout $j \in J$, soit $x'_j \in K \cap Z_j$ et soit Z'_j un voisinage ouvert de x'_j dans X_j ne contenant pas x_j (qui existe par la séparation de X_j). Posons

$$U = \pi \left(\left(\coprod_{k \in I \setminus J} X_k \right) \coprod \left(\coprod_{k \in J} Z'_k \right) \right),$$

qui est un ouvert de X , comme image par la projection canonique d'un ouvert saturé. Alors la famille infinie $\{U, Z_j : j \in J\}$ est une famille d'ouverts recouvrant $f(K)$. Par la compacité de $f(K)$, puisqu'elle contient une sous-famille finie recouvrant $f(K)$ et par la définition de J , nous obtenons que l'ensemble J est fini. $\square$

Pour toute partie finie F de I , notons $(X_F, x_F) = \vee_{i \in F} (X_i, x_i)$ la somme pointée des (X_i, x_i) pour $i \in F$ et $\pi_F : \coprod_{i \in F} X_i \rightarrow X_F$ la projection canonique, qui est connexe par arcs. Montrons par récurrence sur le cardinal de F que

$$\pi_1(X_F, x_F) \simeq *_{i \in F} \pi_1(X_i, x_i). \quad (8)$$

Le résultat est vrai si F est vide. Supposons qu'il soit vrai pour toutes les parties finies de I de cardinal n . Soit F une partie finie de I de cardinal $n + 1$, soit $i_0 \in F$ et soit $F' = F \setminus \{i_0\}$. Soient $U = \pi_F(V_{i_0} \coprod \coprod_{i \in F'} X_i)$ et $V = \pi_F(X_{i_0} \coprod \coprod_{i \in F'} V_i)$. Puisque V_i est un voisinage ouvert contractile de X_i contenant x_i , les parties U et V sont des ouverts de X_F (car images par la projection canonique π_F d'ouverts (par la définition de la topologie somme disjointe) saturés). Par le lemme 3.9 et par récurrence, ils se rétractent par déformation forte respectivement sur $\pi_F(\coprod_{i \in F'} X_i)$ qui est homéomorphe à $\vee_{i \in F'} (X_i, x_i)$, donc est connexe par arcs, et sur $\pi_F(X_{i_0})$ qui est homéomorphe à X_{i_0} , donc est connexe par arcs. L'intersection $U \cap V = \pi_F(\coprod_{i \in F'} V_i)$ est contractile (donc connexe par arcs). Par le théorème de van Kampen 3.3, nous avons donc

$$\pi_1(X_F, x_F) \simeq \pi_1(X_{i_0}, x_{i_0}) * \left(*_{i \in F'} \pi_1(X_i, x_i) \right) \simeq *_{i \in F} \pi_1(X_i, x_i),$$

ce qui conclut la récurrence.

Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble (partiellement ordonné par l'inclusion) des parties finies de I . Si $F \subset F'$, nous avons une injection évidente $X_F \rightarrow X_{F'}$, qui est un homéomorphisme sur son image par le même argument que pour le lemme 3.9. Elle induit un morphisme de groupes $\pi_1(X_F, x_F) \rightarrow \pi_1(X_{F'}, x_{F'})$. Par le lemme 3.10, tout lacet et toute homotopie de lacet ne rencontre qu'un nombre fini de $X_i \setminus \{x_i\}$ pour $i \in I$. Donc

$$\pi_1(X, x) = \lim_{\rightarrow} \pi_1(X_F, x_F).$$

Comme

$$*_{i \in I} \pi_1(X_i, x_i) = \lim_{\rightarrow} *_{i \in F} \pi_1(X_i, x_i),$$

le résultat découle alors de la formule (8) et du fait que si $F \subset F'$, alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_F, x_F) & \simeq & *_{i \in F} \pi_1(X_i, x_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X'_F, x'_F) & \simeq & *_{i \in F'} \pi_1(X_i, x_i) . \end{array}$$

Correction de l'exercice E.47. [I] (1) Soit $u_0 = [x, 0]$ (qui ne dépend pas du choix de $x \in X$). Soit $\tilde{h} : (X \times [0, 1]) \times [0, 1] \rightarrow (X \times [0, 1])$ l'application $\tilde{h}((x, t), s) = (x, st)$. Elle est continue, et envoie pour s fixé classes d'équivalences sur classes d'équivalences, donc passe au quotient en une application continue $h : CX \times [0, 1] \rightarrow CX$ telle que $h(y, 0) = u_0$ et $h(y, 1) = y$ pour tout $y \in CX$. Donc CX est contractile.

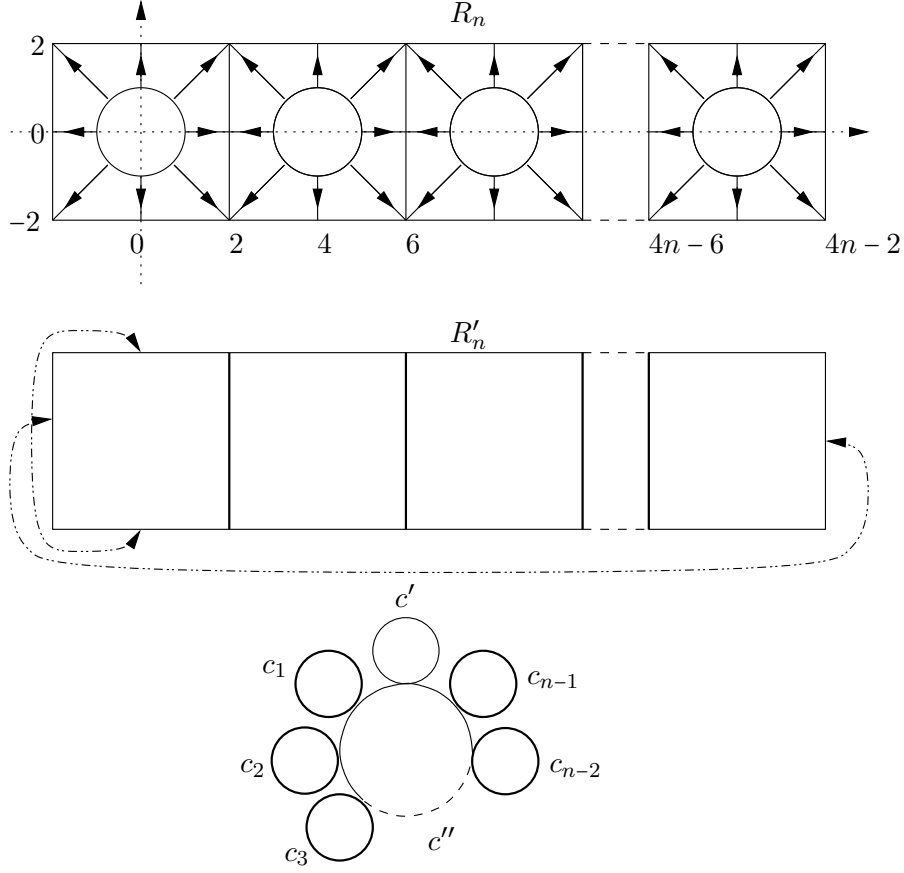
Dans la suite, nous appellerons CX le *cône* de base X , et u_0 son *sommet*.

(2) L'application $x \mapsto [x, 1]$ est continue, comme composée de deux applications continues. Elle est injective par définition de la relation d'équivalence. Son application réciproque $[x, 1] \mapsto x$ est continue, car elle est obtenue par passage au quotient de l'application continue $(x, 1) \mapsto x$.

(3) L'application $(x, t) \mapsto (f(x), t)$ est continue et envoie classes d'équivalence sur classes d'équivalence, donc passe au quotient en une application continue, qui est Cf .

(4) Si X est séparé, alors CX l'est aussi. En effet, soient $[x, t], [x', t']$ deux points distincts de CX . Si $t < t'$, soit u tel que $t < u < t'$. Alors $\{(y, s) \in X \times [0, 1] \mid s < u\}$ et $\{(y, s) \in X \times [0, 1] \mid s > u\}$ sont deux ouverts saturés disjoints de $X \times [0, 1]$, contenant respectivement (x, t) et (x', t') . Si $t = t'$, alors $t \neq 0$ et $x \neq x'$; si U, U' sont deux ouverts de X disjoints contenant x, x' respectivement, et si $\epsilon \in]0, t[$, alors $U \times (]t - \epsilon, t + \epsilon[\cap [0, 1])$ et $U' \times (]t - \epsilon, t + \epsilon[\cap [0, 1])$ sont deux ouverts saturés disjoints, contenant $(x, t), (x', t)$ respectivement. Donc CX est séparé.

Si X est compact, alors CX est séparé et $X \times [0, 1]$ est compact. Comme la projection canonique est continue, CX est compact.



[II] Considérons le sous-espace R'_n de R_n , réunion de $[-2, 4n-2] \times \{-2, +2\}$, de $\{-2, 4n-2\} \times [-2, +2]$, et de $\{4k-2\} \times [-2, +2]$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Un carré privé d'un disque ouvert de centre le centre du carré, et contenu dans ce carré, se rétracte par déformation forte (radialement) sur le bord du carré. Donc R_n se rétracte par déformation forte sur R'_n .

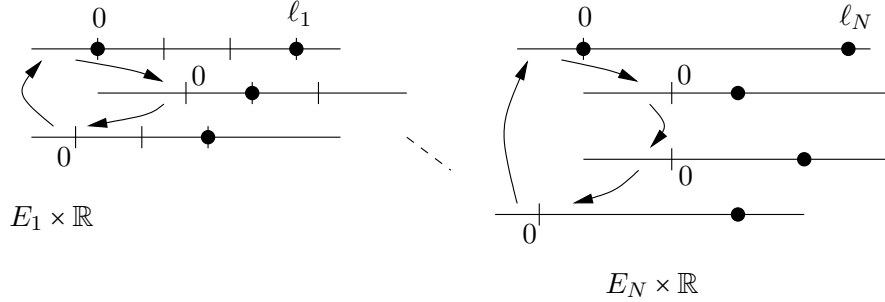
Notons Δ'_n l'espace topologique quotient de R'_n par la relation d'équivalence engendrée par $(x, -2) \sim (x, 2)$ pour tout x dans $[-2, 4n-2]$ et $(-2, y) \sim (4n-2, y)$ pour tout y dans $[-2, 2]$. Comme la rétraction de R_n sur R'_n est compatible avec les relations d'équivalences, l'espace Δ_n se rétracte par déformation forte sur Δ'_n . Or Δ'_n est homéomorphe à un graphe, composé d'un bouquet de deux cercles c' , c'' correspondant aux segments verticaux $\{-2, 4n-2\} \times [-2, +2]$ et horizontaux $[-2, 4n-2] \times \{-2, +2\}$ respectivement de R'_n , et de $n-1$ cercles $c_1, \dots, c_{n-1}$ (correspondant aux segments verticaux $\{4k-2\} \times [-2, +2]$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$), qui sont recollés en un point sur c'' . Donc Δ'_n a le même type d'homotopie qu'un bouquet de $n+1$ cercles. Par conséquent, $\pi_1(\Delta_n) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ est un groupe libre de rang $n+1$.

[III] (1) Comme E est discret et fini, il est compact. Donc CE est compact, donc $CE \times \mathbb{R}$ est localement compact. Si $n(x, t) = (x, t)$, alors en regardant les deuxièmes composantes, on a $t = t + n$, donc $n = 0$. Donc l'action est libre. Si K est un compact de $CE \times \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset CE \times [-N, N]$. Si $|n| \geq 2N + 1$, alors $nK \cap K$ est vide. Donc l'action est propre.

(2) Les espaces CE et $\mathbb{R}$ sont contractiles, donc leur produit $CE \times \mathbb{R}$ aussi. Comme $CE \times \mathbb{R}$ est localement compact et $\mathbb{Z}$ agit librement et proprement sur $CE \times \mathbb{R}$, le groupe fondamental du quotient Ω est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Voici autre manière de voir cela, qui sera utile pour la suite. En considérant la rétraction par déformation forte du cône CE sur son sommet u_0 construite en I.1, l'espace $CE \times \mathbb{R}$ se rétracte par déformation forte sur $\{u_0\} \times \mathbb{R}$, de manière équivariante pour l'action de $\mathbb{Z}$. L'espace Ω se rétracte donc par déformation forte sur le cercle $\alpha_0 = \mathbb{Z} \backslash (\{u_0\} \times \mathbb{R})$.

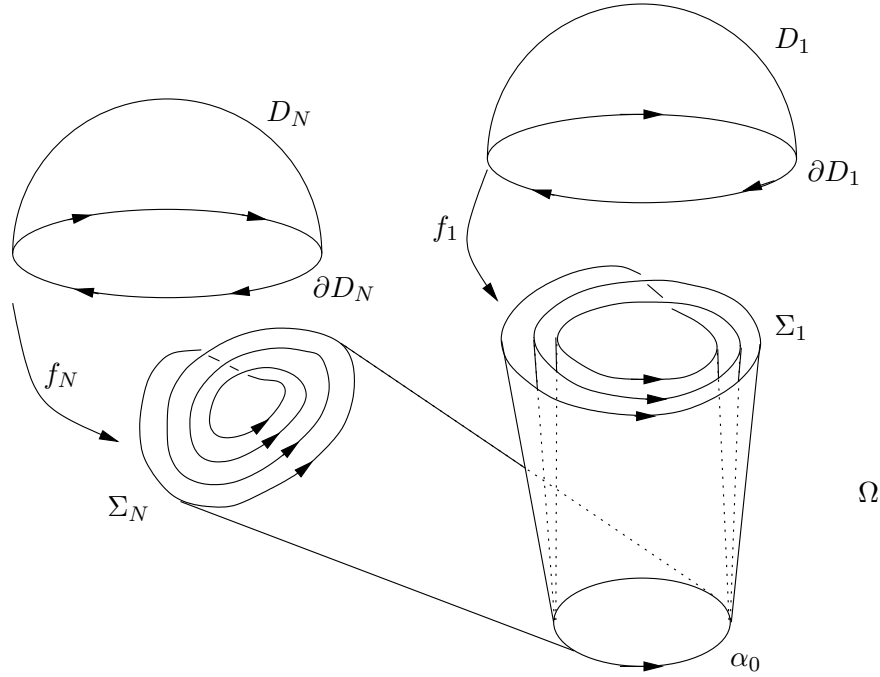
(3) Comme E est discret, l'espace $E \times \mathbb{R}$ possède $\text{Card}(E)$ composantes connexes, qui sont homéomorphes à $\mathbb{R}$. Comme l'image par une application continue d'un espace connexe est connexe, l'espace $\partial\Omega$ possède un nombre fini de composantes connexes.



Plus précisément, la permutation σ de E est un produit de cycles $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ de longueur $\ell_1, \dots, \ell_N \in \llbracket 1, \text{Card}(E) \rrbracket$ dont les supports $E_1, \dots, E_N$ sont deux à deux disjoints. Chaque partie $E_i \times \mathbb{R}$ est préservée par l'action de $\mathbb{Z}$, et son quotient est un cercle Σ_i de longueur ℓ_i . De plus, comme E est une partie finie discrète de CE , les cercles Σ_i ont des voisinages deux à deux disjoints. Donc les Σ_i sont les composantes connexes de $\partial\Omega$.

(4) L'espace Ω est compact. En effet, il est séparé, car quotient d'un espace localement compact par une action propre et libre d'un groupe discret, et c'est l'image du compact $CE \times [0, 1]$ par la projection canonique $(CE \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega$, qui est continue. Les espaces Ω et $\coprod_{i=1}^N D_i$ sont compacts, donc normaux. Le sous-espace $\coprod_{i=1}^N \partial D_i$ est fermé dans $\coprod_{i=1}^N D_i$. Par un exercice bien connu, le recollement $\widehat{\Omega_1}$ est normal, donc séparé.

Comme les f_i sont des homéomorphismes, la restriction de la projection canonique à D_i est continue, injective, donc est un homéomorphisme sur son image, car D_i est compact et $\widehat{\Omega_1}$ est séparé. Dans la suite, nous identifions donc D_i avec son image dans $\widehat{\Omega_1}$.



En particulier, l'intérieur U_1 de D_1 est un ouvert connexe par arcs de $\widehat{\Omega}_1$. Le complémentaire V dans $\widehat{\Omega}_1$ de l'origine de D_i est aussi un ouvert connexe par arcs de $\widehat{\Omega}_1$. L'intersection $U \cap V$, qui est D_i privé de son origine, est aussi connexe par arcs. On fixe un point base dans $U \cap V$. Par le théorème de van Kampen, on a donc $\pi_1(\widehat{\Omega}_1) = \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$. Or U est contractile, et V se rétracte par déformation forte sur $\widehat{\Omega}_1$ privé de l'intérieur de D_1 .

Notons $E' = E \setminus E_1$. Le sous-espace $CE' \times \mathbb{R}$ de $CE \times \mathbb{R}$ est préservé par l'action de $\mathbb{Z}$. Notons Ω' son image dans Ω , et $\widehat{\Omega}'_1$ l'espace obtenu par recollement sur Ω' des disques D_i par les applications f_i pour $i \in \llbracket 2, N \rrbracket$. En utilisant la rétraction par déformation forte du cône CE_1 sur son sommet, on voit que V se rétracte par déformation forte sur $\widehat{\Omega}'_1$.

Supposons par récurrence (sur N , avec conventions évidentes pour $N = 0$) que le groupe $\pi_1(\widehat{\Omega}'_1)$ admette pour présentation $\langle x \mid x^{\ell_2} = x^{\ell_3} = \dots = x^{\ell_N} = 1 \rangle$, de sorte que x soit la classe d'homotopie du lacet image du cercle α_0 dans $\widehat{\Omega}'_1$ (comme $\pi_1(\widehat{\Omega}'_1)$ est abélien, il n'y a pas de problème de point base). Comme la classe d'homotopie du lacet Σ_1 est $\pm \ell_1$ fois celle de α_0 , le théorème de van Kampen nous dit que $\pi_1(\widehat{\Omega}_1)$ admet pour présentation $\langle x \mid x^{\ell_1} = x^{\ell_2} = x^{\ell_3} = \dots = x^{\ell_N} = 1 \rangle$. Notons $\ell = \text{pgcd}\{\ell_1, \dots, \ell_N\}$. Alors $\pi_1(\widehat{\Omega}_1) = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$.

Pour l'application numérique, on a $N = 1$, $\ell = \ell_1 = n$, donc $\pi_1(\widehat{\Omega}_1) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Les questions (5) et (6) ne sont pas corrigées.

[IV] (1) Par construction, p est un homéomorphisme local et la préimage de chaque point est de cardinal 6. Donc p est un revêtement.

Le groupe diédral D_6 d'ordre 6 est isomorphe au groupe défini par la présentation $\langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^2 = (\alpha\beta)^3 = 1 \rangle$. Nous notons encore α, β les éléments de D_6 correspondants. Considérons l'action (par homéomorphismes) du groupe libre engendré par α, β avec α permutant chacun des couples de sommets $\{x_1, x_6\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_4, x_5\}$, ainsi que le couple d'arêtes entre chacun de ces couples de sommets, et β permutant chacun des couples de sommets $\{x_1, x_2\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_5, x_6\}$, ainsi que le couple d'arêtes entre chacun de ces couples

de sommets, (de manière à préserver les paramétrages des arêtes.) Alors par construction, cette action passe au quotient en une action de D_6 , de sorte que l'homéomorphisme f de $\bar{B}$ correspondant à chaque élément de D_6 vérifie $p \circ f = p$. Donc le groupe des automorphismes du revêtement $p : \bar{B} \rightarrow B$ contient le groupe D_6 . Comme celui-ci agit transitivement sur la fibre au-dessus du point commun b_0 aux deux cercles de B , nous en déduisons que le revêtement est galoisien.

Comme tout automorphisme de revêtement qui fixe un point est l'identité (car $\bar{B}$ est connexe), nous en déduisons que le groupe des automorphismes de p est égal à D_6 .

(2) Puisque G préserve les fibres de p , l'homéomorphisme local $p : \tilde{B} \rightarrow B$ passe au quotient en un homéomorphisme local $h : G \backslash \tilde{B} \rightarrow B$ (vérifiant donc $h \circ \pi' = \pi$). Comme tout revêtement universel est galoisien, G agit transitivement sur les fibres, donc la préimage de chaque point est 1. Comme les espaces sont séparés et par un résultat du cours, tout homéomorphisme local à un feuillet est un homéomorphisme.

(3) L'espace B est connexe par arcs, séparé et localement contractile (donc en particulier admet bien un revêtement universel). Nous avons identifié B et $G \backslash \tilde{B}$, de sorte que l'application $\pi : \tilde{B} \rightarrow B = G \backslash \tilde{B}$ soit la projection canonique. Par le théorème de classification des revêtements, il existe un sous-groupe H de G , tel que le revêtement $H \backslash \tilde{B} \rightarrow B$ soit isomorphe au revêtement $p : \bar{B} \rightarrow B$. En identifiant ces deux revêtements par un tel isomorphisme, et en notant $q : \tilde{B} \rightarrow H \backslash \tilde{B}$ la projection canonique, nous avons alors $p \circ q = \pi$. Comme p est galoisien, le sous-groupe H est distingué.

De plus, pour tout $g \in G$, il existe une unique application

$$\psi(g) : H \backslash \tilde{B} = \bar{B} \rightarrow H \backslash \tilde{B} = \bar{B}$$

telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B} & \xrightarrow{g} & \tilde{B} \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ H \backslash \tilde{B} & \xrightarrow{\psi(g)} & H \backslash \tilde{B} \end{array} .$$

Il suffit de poser $\psi(Hx) = Hgx$, ce qui ne dépend pas du choix de x , car H est distingué. Il est immédiat que $\psi(g)$ est un automorphisme de revêtement de p , et que $g \mapsto \psi(g)$ est un morphisme de groupes (car $\psi(g) \circ \psi(h)$ et $\psi(g \circ h)$ coïncident sur $H \backslash \tilde{B}$).

Soit $h : \bar{B} \rightarrow \bar{B}$ un automorphisme de revêtement de p . Soit $x \in \tilde{B}$ et $x' \in q^{-1}(h \circ q(x))$. Comme $\tilde{B}$ est localement connexe par arcs et simplement connexe, le théorème du relèvement dit qu'il existe une unique application continue $g : \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}$ telle que $g(x) = x'$ et que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{B} \\ g \nearrow & & \downarrow q \\ \tilde{B} & \xrightarrow{h \circ q} & \bar{B} \end{array} .$$

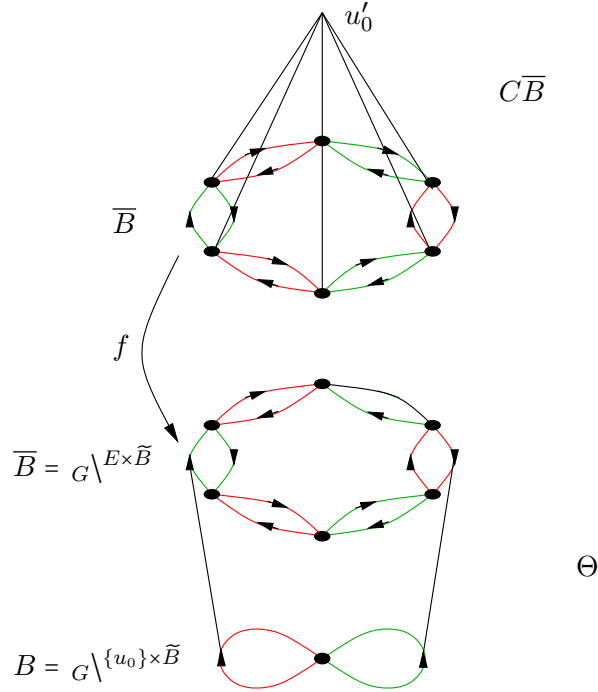
En considérant le relevé g' de $h^{-1} \circ q$ par le revêtement q tel que $g'(x') = x$, comme gg' est un morphisme de revêtement fixant un point, et que $\tilde{B}$ est connexe, on en déduit que g est un automorphisme de revêtement de π .

(4) Comme G agit librement et proprement $\tilde{B}$, et comme CE est compact, les mêmes arguments qu'en III.1 montrent que G agit librement et proprement sur $CE \times \tilde{B}$.

(5) Comme en III.2, les espaces CE et $\tilde{B}$ sont simplement connexes, donc leur produit $CE \times \tilde{B}$ aussi. Comme $CE \times \tilde{B}$ est localement compact et G agit librement et proprement sur $CE \times \tilde{B}$, le groupe fondamental du quotient Θ est donc isomorphe à G .

(6) Comme G agit par $y \mapsto g(y)$ sur la seconde composante, l'application continue pr_2 passe au quotient en une application continue $G \backslash (E \times \tilde{B}) \rightarrow B$. Comme E est discret, cette application est un homéomorphisme local. Comme ψ est surjective, et Γ agit transitivement sur E , l'espace $G \backslash (E \times \tilde{B})$ est connexe. Le cardinal de chaque fibre est égal au cardinal de E , donc est constant non vide. Donc l'application $G \backslash (E \times \tilde{B}) \rightarrow B$ est un revêtement.

(7) Les revêtements $G \backslash (E \times \tilde{B}) \rightarrow B$ et $\bar{B} \rightarrow B$ sont connexes et localement connexes par arcs, et les fibres au-dessus de x_0 sont $\pi_1(B, x_0)$ -équivairement isomorphes. Donc ces revêtements sont isomorphes.



(8) Reprenons des arguments similaires à ceux de III.4. Notons U l'image dans $\widehat{\Theta}$ de $C\bar{B} \setminus B$, qui est ouverte, et connexe par arcs. Notons V le complémentaire dans $\widehat{\Theta}$ de l'image du sommet u'_0 du cône $C\bar{B}$, qui est ouvert et connexe par arcs. Par le théorème de van Kampen, comme U est contractile et $U \cap V$ connexe par arcs, si b est un point base dans $U \cap V$, alors $\pi_1(\widehat{\Theta}, b)$ est isomorphe au quotient de $\pi_1(V, b)$ par le sous-groupe distingué engendré par l'image de $\pi_1(U \cap V, b)$. L'espace V se rétracte par déformation forte sur le bouquet de deux cercles $G \backslash (\{u_0\} \times \tilde{B}) \simeq B$ (avec u_0 le sommet du cône CE). Une petite inspection des lacets tués montre que $\pi_1(\widehat{\Theta})$ admet pour présentation de groupe $\langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^2 = (\alpha\beta)^3 = 1 \rangle$, donc $\pi_1(\widehat{\Theta})$ est isomorphe au groupe diédral D_6 .

(9) Non corrigé.

4 Sous-variétés différentielles

Pour des explications historiques sur l'invention de la notion de variété et ses motivations, nous renvoyons aux textes originaux de Riemann [Rie, Spi], H. Poincaré [Poi], E. Cartan [Car], ainsi qu'aux ouvrages d'histoire des mathématiques comme l'excellent [Die1].

4.1 Variétés topologiques

Avant de définir les variétés topologiques, donnons deux résultats de topologie générale. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{R}^n$ est muni de sa topologie usuelle.

Théorème 4.1. (Théorème d'invariance du domaine de Brouwer) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et injective. Alors $f(U)$ est ouvert, et $f : U \rightarrow f(U)$ est un homéomorphisme.* $\square$

En particulier, un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ n'est pas homéomorphe à un ouvert non vide de $\mathbb{R}^m$ si n et m sont distincts. Notons que si nous remplaçons « homéomorphe » par « C^1 -difféomorphe », alors cette dernière assertion est évidente. Dans le cadre différentiel de ce cours, le théorème d'inversion locale (voir le théorème C.1 de l'appendice C) est en général un outil suffisant pour remplacer le théorème d'invariance du domaine de Brouwer.

Nous admettons le théorème 4.1. Les démonstrations les plus naturelles utilisent des outils élémentaires de topologie algébrique (et plus précisément d'homologie), ce qui constituerait une diversion un peu longue (voir [God1, Spa, Hat, Pau3]).

La proposition suivante servira à comprendre les propriétés topologiques globales (qui sont minimales) que nous demanderons aux variétés topologiques. Nous renvoyons à l'appendice A (éventuellement via l'index final) pour les définitions des notions topologiques utilisées.

Proposition 4.2. *Soit X un espace topologique, dont tout point admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert d'un espace $\mathbb{R}^n$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) X est séparé et à base dénombrable,
- (2) X est σ -compact,
- (3) X est dénombrable à l'infini,
- (4) X est métrisable séparable,
- (5) *il existe un plongement topologique (c'est-à-dire un homéomorphisme sur son image) de X dans l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{R})$.*⁵⁸

Démonstration. Un espace topologique séparé dans lequel tout point admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert d'un $\mathbb{R}^n$ est localement compact. En particulier, tout point d'un tel espace admet un système fondamental de voisinages fermés métrisables (pour la topologie induite).

58. Cet espace de Hilbert est l'espace vectoriel

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\|_2 = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^2 \right)^{1/2} < +\infty \right\}$$

des suites de réels de carrés sommables muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle_2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n$.

Puisque tout point d'un espace localement compact admet un voisinage ouvert d'adhérence compacte, et puisque tout fermé d'un compact est compact, toute base d'ouverts (respectivement base dénombrable d'ouverts) d'un espace localement compact contient une base (respectivement base dénombrable d'ouverts) d'ouverts d'adhérences compactes.⁵⁹ Donc un espace localement compact à base dénombrable est σ -compact. De plus, un espace σ -compact, dans lequel tout point admet un voisinage ouvert qui est à base dénombrable (pour la topologie induite), est à base dénombrable.⁶⁰ Donc les assertions (1) et (2) sont équivalentes.

Il est immédiat qu'un espace dénombrable à l'infini est σ -compact, et qu'un espace localement compact et σ -compact est dénombrable à l'infini. Donc les assertions (2) et (3) sont équivalentes.

L'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{R})$ est métrisable et à base dénombrable (l'ensemble des boules ouvertes de rayons rationnels centrées aux suites presque nulles de rationnels est une base dénombrable d'ouverts). Tout sous-espace d'un espace métrisable et à base dénombrable l'est encore. Un espace topologique à base dénombrable est séparable, car si $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base d'ouverts non vides, et si x_i est un point de U_i , alors la suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est dense. Donc l'assertion (5) implique l'assertion (4).

Un espace métrique séparable est séparé et à base dénombrable (en prenant les boules ouvertes de rayons rationnels centrées aux points d'une partie dénombrable dense). Donc l'assertion (4) implique l'assertion (1).

Montrons qu'un espace topologique X , séparé, à base dénombrable, et dont tout point admet un système fondamental de voisinages fermés métrisables, se plonge dans $\ell^2(\mathbb{R})$. En effet, soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts de X . Nous pouvons supposer que $\overline{U_i}$ est métrisable (pour la topologie induite), car si J est l'ensemble des $i \in \mathbb{N}$ tels que $\overline{U_i}$ est métrisable, alors $(U_j)_{j \in J}$ est encore une base d'ouverts. Notons d_i une distance sur l'espace $\overline{U_i}$ compatible avec sa topologie. Considérons la fonction $\varphi_i : X \rightarrow [0, 1]$ définie par $\varphi_i(x) = \min\{1, d_i(x, \partial U_i)\}$ si x appartient à U_i et $\varphi_i(x) = 0$ sinon. Il est facile de vérifier que φ_i est continue et non nulle exactement sur U_i . Alors l'application $f : x \mapsto (\frac{1}{i+1} \varphi_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$ (qui est bien définie car les φ_i sont bornés par 1 et car la suite réelle $(\frac{1}{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ est de carré sommable) est un homéomorphisme de X sur son image dans $\ell^2(\mathbb{R})$. En effet, l'injectivité de f découle du fait que X soit séparé et que $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ soit une base d'ouverts. La continuité de f vient du fait que les φ_i soient continues et bornées en valeur absolue par 1. Enfin, l'application $f : X \rightarrow f(X)$ est fermée, car si F est un fermé de X et si x n'est pas dans F , alors il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $x \subset U_i \subset (X \setminus F)$, et donc $d(f(x), f(F)) \geq \varphi_i(x)/(i+1) > 0$. Donc l'assertion (1) implique l'assertion (5). $\square$

Une *variété topologique* (ou par abus *variété*) est un espace topologique M tel que

- l'espace M soit séparé et à base dénombrable,

59. Soit $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de la topologie d'un espace localement compact X . Pour tout $x \in X$, soit U_x un voisinage ouvert de x d'adhérence compacte, et soit $\mathcal{V}_x$ un système fondamental de voisinages ouverts de x contenus dans U_x (donc d'adhérences compactes car fermées dans le compact $\overline{U_x}$) et formé d'éléments de $\mathcal{B}$. Alors $\bigcup_{x \in X} \mathcal{V}_x$ est une base d'ouverts d'adhérences compactes, qui est contenue dans $\mathcal{B}$ (donc est dénombrable si $\mathcal{B}$ l'est).

60. Soit $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de compacts de X de réunion égale à X . Pour tout $x \in X$, soit U_x un voisinage ouvert de x et $\mathcal{B}_x$ une base d'ouverts dénombrable de la topologie de U_x . Puisque U_x est ouvert dans X , tout élément de $\mathcal{B}_x$ est aussi ouvert dans X . Pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit F_i une partie finie de K_i telle que la famille finie $(U_x)_{x \in F_i}$ recouvre K_i . Alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{x \in F_i} \mathcal{B}_x$ est une base d'ouverts dénombrable de la topologie de X .

- tout point de M admette un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert d'un espace $\mathbb{R}^n$.

En particulier, par la proposition 4.2, une variété topologique est un espace localement compact, métrisable, séparable, dénombrable à l'infini. Au lieu de demander que M soit séparé et à base dénombrable, nous pourrions demander, de manière équivalente par la proposition 4.2, que M soit métrisable séparable. Il est souvent plus facile de vérifier les conditions séparé à base dénombrable que les conditions métrisable séparable (lorsque nous voulons montrer qu'un objet est une variété), et c'est pour cela que nous mettons en avant les premières. Par contre, les secondes sont souvent plus utiles lorsque nous travaillons sur une variété donnée.

Ces propriétés globales des variétés topologiques sont minimales, et en pratique faciles à vérifier (cette vérification étant parfois omise). Ce qui est important est qu'une variété topologique admette les mêmes propriétés topologiques locales qu'un espace $\mathbb{R}^n$. Par exemple, elle est, entre autres, (voir l'appendice A et la partie 1.1 pour des définitions)

- localement compacte (ce qui n'est pas uniquement une condition locale à cause de l'hypothèse de séparation),
- localement connexe par arcs (donc elle est connexe par arcs si et seulement si elle est connexe),
- localement contractile.

Soit M une variété topologique. Pour tout x dans M , l'entier n tel qu'il existe un voisinage ouvert de x homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est uniquement défini, par le théorème d'invariance du domaine de Brouwer 4.1, et il est localement constant (donc constant sur toute composante connexe de M). Pour tout n dans $\mathbb{N}$, une variété topologique est dite *de dimension n* si tout point admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Toute composante connexe de M possède donc une dimension bien définie. Dans la littérature comme dans ce cours, nous ne considérons en général que des variétés topologiques dont les dimensions des composantes connexes sont égales. Nous appellerons *courbe* une variété topologique de dimension 1, et *surface* une variété topologique de dimension 2.

Par exemple, les variétés topologiques de dimension 0 sont les espaces discrets dénombrables.

L'outil principal qui permet le passage du local au global dans les variétés topologiques est celui des partitions de l'unité, que nous introduisons maintenant. Nous renvoyons à l'appendice A (éventuellement via l'index final) pour les définitions de topologie générale utilisées, en particulier celle de famille localement finie de parties.

Soit X un espace topologique. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, nous appellerons *support* de f l'adhérence de $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$, et nous le noterons $\text{Supp}(f)$. C'est le plus petit fermé en dehors duquel f est nulle.

Une *partition de l'unité* de X est une famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$

- de fonctions continues φ_α de X dans $[0, 1]$,
- dont la famille des supports $(\text{Supp}(\varphi_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{A}}$ est localement finie, et
- qui vérifie $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \varphi_\alpha = 1$.

La seconde condition ci-dessus implique que la somme $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \varphi_\alpha(x)$ ne possède qu'un nombre fini de termes non nuls pour tout x dans X (donc est bien définie), et que l'application $x \mapsto \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \varphi_\alpha(x)$ est continue. Remarquons qu'alors $(\varphi_\alpha^{-1}([0, 1]))_{\alpha \in \mathcal{A}}$ est un recouvrement ouvert de X . Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Une *partition*

de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$ est une partition de l'unité $(\varphi_i)_{i \in I}$ de X , telle que, pour tout $i \in I$, le support de φ_i soit contenu dans U_i .

Remarque. Supposons que nous ayons une partition de l'unité $(\varphi'_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de X , telle que, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, il existe un élément de $\mathcal{U}$ contenant le support de φ'_α . Il est alors facile de modifier cette partition de l'unité pour la rendre subordonnée à $\mathcal{U}$. En effet, si $f : \mathcal{A} \rightarrow I$ est n'importe quelle application telle que le support de φ'_α soit contenu dans $U_{f(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, posons

$$\varphi_i : x \mapsto \sum_{\alpha \in f^{-1}(i)} \varphi'_\alpha(x),$$

avec la convention usuelle $\sum_\emptyset = 0$. Alors $(\varphi_i)_{i \in I}$ est une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$. En effet,

- (1) l'application φ_i est bien définie et continue, car sur un voisinage de tout point, φ_i est somme d'un nombre fini de φ'_α ;
- (2) nous avons $\sum_i \varphi_i = \sum_\alpha \varphi'_\alpha = 1$;
- (3) la famille de fermés $(\text{Supp } \varphi_i)_{i \in I}$ est localement finie, car pour tout ouvert U de X ,

$$\{i \in I : (\text{Supp } \varphi_i) \cap U \neq \emptyset\} \subset f(\{\alpha \in \mathcal{A} : (\text{Supp } \varphi'_\alpha) \cap U \neq \emptyset\}),$$

et l'image d'un ensemble fini par une application est finie ;

- (4) puisqu'une union localement finie de fermés est fermée, nous avons

$$\text{Supp } \varphi_i \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in f^{-1}(i)} \text{Supp } \varphi'_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in f^{-1}(i)} \text{Supp } \varphi'_\alpha \subset U_i.$$

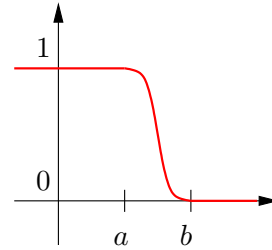
Proposition 4.3. *Une variété topologique M est paracompacte, et tout recouvrement ouvert de M admet une partition de l'unité qui lui est subordonnée. Si de plus M est compacte, alors tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini et une partition de l'unité finie qui est subordonnée à ce sous-recouvrement.*

En fait, tout recouvrement ouvert d'un espace topologique paracompact admet une partition de l'unité subordonnée (voir [Dug, page 170]), mais nous ne montrerons ce résultat que dans les cas des variétés, et nous en donnerons une version différentiable dans la proposition 4.17.

Lemme 4.4. *Pour tout x_0 dans $\mathbb{R}^n$ et tout voisinage U de x_0 , il existe une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de support contenu dans U , constante égale à 1 sur un voisinage de x_0 , et à valeurs dans $[0, 1]$.*

Démonstration. Rappelons que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^n} e^{-\frac{1}{t}} = 0$ pour tout n dans $\mathbb{R}$. Il est alors facile de vérifier que, pour tous les $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_{a,b} : t \mapsto \begin{cases} \left(1 + e^{\frac{2t-(a+b)}{(b-t)(t-a)}}\right)^{-1} & \text{si } a < t < b \\ 1 & \text{si } t \leq a \\ 0 & \text{si } t \geq b \end{cases}$$



est C^∞ . Alors, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, l'application $x \mapsto f_{\epsilon/2, \epsilon}(\|x - x_0\|)$ convient, pour $\|\cdot\|$ la norme usuelle sur $\mathbb{R}^n$. □

Démonstration de la proposition 4.3. Comme M est dénombrable à l'infini, il existe par définition une suite exhaustive de compacts $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans M (voir la partie A.4.4 de l'appendice A). Posons $K_{-1} = \emptyset$, et $K'_n = K_{n+1} \setminus \overset{\circ}{K}_n$, qui est un sous-espace compact de M .

Soit $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un recouvrement ouvert de M . Posons

$$V_{n,\alpha} = U_\alpha \cap \left(K_{n+2} \setminus \overset{\circ}{K}_{n-1} \right).$$

Alors $(V_{n,\alpha})_{\alpha \in \mathcal{A}}$ est un recouvrement ouvert de K'_n , donc admet un sous-recouvrement fini $(V_{n,\alpha})_{\alpha \in A_n}$. Alors $(V_{n,\alpha})_{n \in \mathbb{N}, \alpha \in A_n}$ est un recouvrement ouvert de M , plus fin que $\mathcal{U}$, et localement fini. Donc M est paracompact.

Pour tout x dans K'_n , soit W_x un voisinage ouvert de x , contenu dans $V_{n,\alpha}$ pour un α dans $\mathcal{A}$, et homéomorphe à un ouvert d'un espace $\mathbb{R}^k$. Par le lemme précédent, il existe donc (en prolongeant par 0 en dehors de W_x) une application continue φ_x de M dans $[0, 1]$, de support contenu dans W_x , constante égale à 1 sur un voisinage W'_x de x . Comme $(W'_x)_{x \in K'_n}$ recouvre K'_n , il existe une partie finie B_n de K'_n telle que $(W'_x)_{x \in B_n}$ recouvre K'_n . Posons

$$\varphi : y \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}, x \in B_n} \varphi_x(y),$$

qui est une somme n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls (car pour x dans B_n , l'application φ_x est nulle sur K_{n-1} , donc en y si n est assez grand), et qui est strictement positive (en fait supérieure ou égale à 1) pour tout y dans M . Posons $\varphi'_x = \varphi_x / \varphi$. Alors $(\varphi'_x)_{n \in \mathbb{N}, x \in B_n}$ est une partition de l'unité que l'on peut rendre subordonnée à $\mathcal{U}$ en utilisant la remarque précédant la proposition 4.3.

La dernière assertion découle immédiatement de la première. $\square$

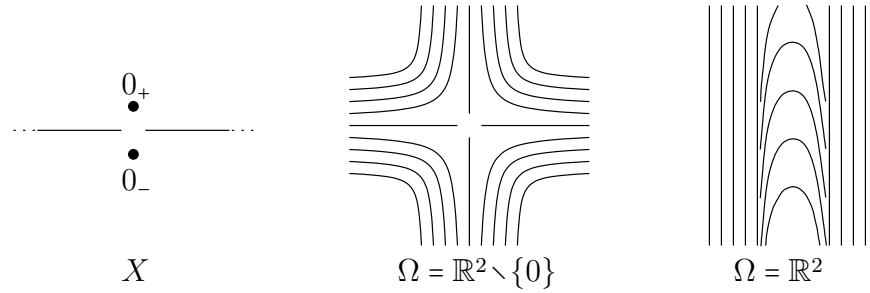
Exercice E.48. Soit M un espace topologique paracompact, dont tout point admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que M est métrisable.

Il découle de la proposition 4.3 et de l'exercice ci-dessus que l'on peut rajouter la condition « X est paracompact séparable » dans la liste des conditions équivalentes de la proposition 4.2.

Il existe des espaces topologiques localement homéomorphes à $\mathbb{R}^n$, mais non séparés, que nous appellerons *variétés topologiques non séparées* (de dimension n). De tels exemples apparaissent assez naturellement quand on considère des quotients de variétés topologiques (il est donc important de ne pas oublier d'étudier la propriété de séparation des quotients, lorsque l'on veut construire des variétés topologiques comme espaces quotients d'espaces topologiques!). Voir des exemples dans l'exercice E.49 ci-dessous. Il existe des espaces topologiques localement homéomorphes à $\mathbb{R}^n$, mais non paracompacts, que nous appellerons *variétés topologiques non paracompactes* (de dimension n). Mais de tels exemples sont la plupart du temps très artificiels, voir ceux dans l'exercice E.50 ci-dessous.

Exercice E.49.

- (1) Soit X l'ensemble $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \coprod \{0_-, 0_+\}$. Montrer qu'il existe une unique structure d'espace topologique sur X telle que les deux applications $\varphi_\pm : \mathbb{R} \rightarrow X$ définies par $\varphi_\pm(t) = t$ si $t \neq 0$, et $\varphi_\pm(0) = 0_\pm$ soient des homéomorphismes sur leurs images. Montrer que X est une variété topologique non séparée (au sens ci-dessus).



- (2) Considérons Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs (voir la section 6.3 et utiliser le théorème 6.14) de classe C^1 sur Ω , ne s'annulant pas sur Ω , dont toute courbe intégrale est fermée dans Ω . Notons $\sim$ la relation d'équivalence sur Ω définie par $x \sim y$ si et seulement s'il existe une courbe intégrale de X passant par x et par y . Montrer que l'espace topologique quotient $\Omega/\sim$ est localement homéomorphe à $\mathbb{R}$. Plus généralement (voir par exemple [God2, Pau1] pour les définitions), si $\mathcal{F}$ est un feuilletage C^1 de codimension k à feuilles fermées dans une variété différentielle Ω de classe C^1 , alors l'espace des feuilles de $(\Omega, \mathcal{F})$ (c'est-à-dire l'espace topologique quotient de Ω par la relation d'équivalence « être dans la même feuille ») est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^k$. Dans les deux exemples de la figure ci-dessus, montrer que $\Omega/\sim$ est une variété topologique non séparée de dimension 1 (mais séparable).

Exercice E.50. (Voir la partie A.2.7 de l'appendice A pour des rappels sur les ordres.) Soit β un ordinal, et β_- l'ensemble ordonné des ordinaux strictement inférieurs à β . On considère l'ensemble $X = (\beta_- \times [0, 1[) \setminus \{(0, 0)\}$ muni de la topologie de l'ordre induite par l'ordre lexicographique. Montrer que si β est l'ordinal de l'ordre usuel sur $\mathbb{N}$, alors X est homéomorphe à $]0, +\infty[$. Montrer que si β est le plus petit ordinal non dénombrable, alors X est une variété topologique non paracompacte (mais séparée), appelée la longue (demi-)droite.

4.2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Nous renvoyons par exemple à [Ave, Car, Die2] pour des rappels de calcul différentiel, ainsi qu'à l'appendice C. Sauf mention explicite du contraire, pour tous les $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq p \leq n$ (avec convention immédiate pour $p = 0$ ou $p = n$), nous identifions dans ces notes les espaces vectoriels euclidiens $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, de manière usuelle, par l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto ((x_1, \dots, x_p), (x_{p+1}, \dots, x_n))$.

Dans tout ce qui suit, pour tout $r \in \mathbb{N}$, nous pouvons remplacer $\mathbb{R}^r$ par un espace vectoriel réel normé de dimension r , muni d'une base lorsqu'il est question de coordonnées, et décomposé en somme directe appropriée lorsqu'il y a besoin de travailler dans une écriture en produit. Par ailleurs, tout espace vectoriel réel de dimension finie sera supposé muni d'une norme (souvent indifférente, mais que nous préciserons lorsque c'est utile), ainsi que de la topologie définie par cette norme, qui ne dépend pas du choix de la norme.

Le premier exemple, et celui qu'il faut garder en tête, de sous-variété d'un espace vectoriel de dimension finie est un sous-espace vectoriel, par exemple $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ contenu dans $\mathbb{R}^n$. Nous allons définir une sous-variété générale comme obtenue par difféomorphismes locaux ambiants à partir d'un tel exemple, et donner des caractérisations équivalentes. Rappelons que le *graphe* d'une application $f : A \rightarrow B$ est la partie de l'ensemble produit $A \times B$ formée

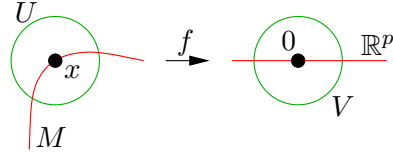
des couples $(x, f(x))$ pour x dans A :

$$\text{graphe}(f) = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}.$$

Théorème 4.5. Soient $n \geq p$ dans $\mathbb{N}$ et k dans $(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$. Les propriétés suivantes d'une partie M de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

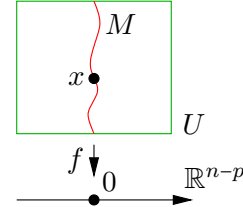
(1) **(Définition locale par redressement)**

Pour tout x dans M , il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et un C^k -difféomorphisme $f : U \rightarrow V$, tels que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$.



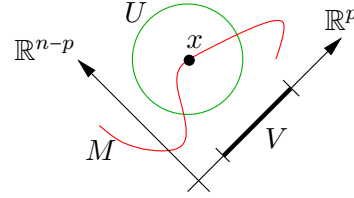
(2) **(Définition locale par fonction implicite)**

Pour tout élément x dans M , il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ de classe C^k qui est une submersion en x , tels que $U \cap M = f^{-1}(0)$.



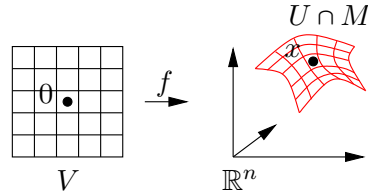
(3) **(Définition locale par graphe)**

Pour tout x dans M , il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$, une identification par un automorphisme linéaire $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ et une application $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ de classe C^k tels que $U \cap M = \text{graphe}(f)$.



(4) **(Définition locale par paramétrage)**

Pour tout x dans M , il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et une application $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k tels que $f(0) = x$, f soit une immersion en 0 , et f soit un homéomorphisme de V sur $U \cap M$.



Démonstration. Montrons que (1) implique (2). Si x, U, f sont comme dans (1), alors nous pouvons supposer que $f(x) = 0$ quitte à effectuer une translation au but, et en notant $f_1, \dots, f_n$ les composantes de f , et $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ l'application de composantes $f_{p+1}, \dots, f_n$, alors g est une submersion⁶¹ de classe C^k telle que $g^{-1}(0) = U \cap M$.

Montrons que (1) implique (4). Si x, U, V, f sont comme dans (1), alors nous pouvons supposer que $f(x) = 0$, et la restriction de f^{-1} à l'ouvert $W = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ de $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ est une application de classe C^k envoyant 0 sur x , qui est une immersion⁶² en 0 , et qui est un homéomorphisme de W sur $U \cap M$.

61. parce que g est la composée de deux submersions, le difféomorphisme f et la submersion linéaire $(y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_{p+1}, \dots, y_n)$, ou car la matrice jacobienne de g est la matrice des $n - p$ dernières lignes de la matrice jacobienne de f (invertible), donc est de rang $n - p$

62. comme composée de deux immersions, l'immersion linéaire $(x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$ et le difféomorphisme f^{-1} , ou car la matrice jacobienne de $(f^{-1})|_W$ est la matrice des p premières colonnes de la matrice jacobienne de f^{-1} (invertible), donc est de rang p

Montrons que (4) implique (1) (cette implication est parfois utilisée sous le nom de théorème des immersions dans les exercices, voir aussi la proposition 4.11). Si x, U, V, f sont comme dans (4), alors par le théorème C.4 (voir l'appendice C) de forme normale locale des immersions, quitte à restreindre les ouverts U et V , il existe un C^k -difféomorphisme ψ de U sur un voisinage ouvert W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que, sur V , nous ayons l'égalité

$$\psi \circ f(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0),$$

et donc en particulier $\psi(U \cap M) = \psi \circ f(V) = W \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$.

Le fait que (2) implique (1) (cette implication est parfois utilisée sous le nom de théorème des submersions dans les exercices, voir aussi la proposition 4.9) se montre de même, en utilisant le théorème C.5 (voir l'appendice C) de forme normale locale des submersions.

Le fait que (3) implique (4) est immédiat, car si x, U, V, f sont comme dans (3), alors nous pouvons supposer que $0 \in V$ et que $x = (0, f(0))$ quitte à effectuer une translation à la source, et l'application $F : y \mapsto (y, f(y))$ est alors un homéomorphisme de V sur $U \cap M$, qui est une immersion C^k en 0 avec $F(0) = x$.

Montrons pour terminer que (2) implique (3). Soient x, U, f comme dans (2), et notons $f_1, \dots, f_{n-p}$ les composantes de f . Nous pouvons supposer que $x = 0$ quitte à effectuer une translation à la source. Quitte à permuter les coordonnées de $\mathbb{R}^n$, comme f est une submersion en x (donc est de rang $n - p$ en x), nous pouvons supposer que la matrice $B = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{j+p}}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n-p}$ (extraite de la matrice jacobienne de f en x) soit inversible. Notons pr_1 la projection sur le premier facteur de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. La différentielle en x de l'application $F : y \mapsto (\text{pr}_1(y), f(y))$ est inversible, car sa matrice est de la forme $\begin{pmatrix} I_p & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Donc par le théorème d'inversion locale C.1 (voir l'appendice C), F est un difféomorphisme local en 0. L'inverse de F est de la forme $y \mapsto (\text{pr}_1(y), G(y))$ avec G une application d'un voisinage ouvert W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-p}$. Donc, quitte à restreindre U , la partie $U \cap M = f^{-1}(0) = F^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$ est le graphe de la fonction G restreinte à $W \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$. $\square$

Nous dirons qu'une partie M de $\mathbb{R}^n$ est une *sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe C^k* (et tout simplement *sous-variété* par abus, par exemple quand k est sous-entendu) si elle vérifie l'une des propriétés du théorème 4.5. Nous dirons alors que la *codimension* de M dans $\mathbb{R}^n$ est $n - p$. Si $k = \infty$, nous dirons que M est une sous-variété *lisse*. Si $p = 1, 2, n - 1$, nous dirons que M est une *courbe*, *surface*, *hypersurface* (différentielle) de $\mathbb{R}^n$ respectivement.

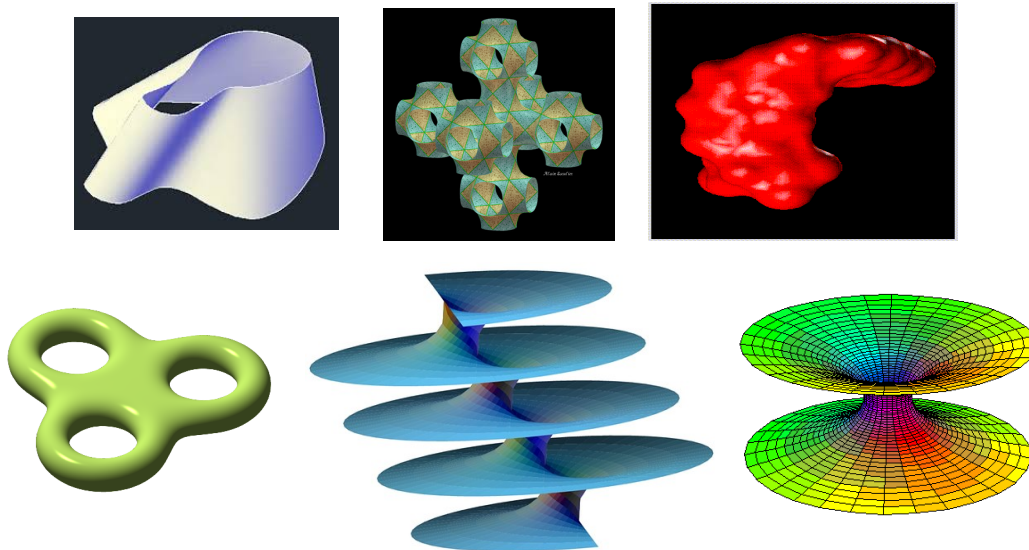
Si $x \in M$, un *paramétrage local* de classe C^k de M en x est une application $f : V \rightarrow M$, où ⁶³ V est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^p$, telle que $f(0) = x$, f soit une immersion C^k sur V , et f soit un homéomorphisme de V sur un voisinage ouvert de x dans M (voir la définition locale par paramétrage (4)). Il est crucial de ne pas oublier la seconde hypothèse, qui traduit une dissymétrie entre les immersions et les submersions (voir la partie 4.3 pour des développements sur cette dissymétrie et la partie 4.5 pour des contre-exemples).

Exemples. (1) Les sous-variétés C^∞ de $\mathbb{R}^n$, de dimension n et de codimension 0, sont exactement les ouverts U non vide de $\mathbb{R}^n$. L'inclusion de U dans $\mathbb{R}^n$ est un paramétrage

63. Pour simplifier les notations ultérieures, nous supposons dans cette définition que 0 est le point de $\mathbb{R}^p$ qui est envoyé sur x par le paramétrage local en x de M . Mais en pratique, et quitte à effectuer une translation à la source, nous pouvons prendre n'importe quel point de $\mathbb{R}^p$.

local de U . L'application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^0 = \{0\}$ est de classe C^r et une submersion telle que $f^{-1}(0) = U$.

(2) Le dessin ci-dessous représente quelques (morceaux de) surfaces de $\mathbb{R}^3$.



Exercice E.51. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ une application de classe C^k et de rang constant r . Montrer que pour tout y_0 dans $f(U)$, l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = y_0$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k et de dimension $n - r$.

Remarque 4.6.

- (1) Une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ est une partie *localement fermée* dans $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire tout point de M admet un voisinage ouvert U dans $\mathbb{R}^n$ tel que $M \cap U$ soit fermé dans U , voir l'exercice E.A.127 dans l'appendice A).
- (2) Si M est une sous-variété de dimension p et de classe C^k de $\mathbb{R}^n$, si $x \in M$, si $f : U \rightarrow M$ et $g : V \rightarrow M$ sont deux paramétrages locaux de M en x , alors l'application $f^{-1} \circ g$ (définie sur l'ouvert $V \cap g^{-1}(f(U))$) est un C^k -difféomorphisme local de $\mathbb{R}^p$ en 0.

Notons que la propriété d'être localement fermée est invariante par homéomorphismes (et même par homéomorphismes locaux). Par contre, une sous-variété n'est en général pas fermée (penser à un intervalle ouvert borné non vide dans $\mathbb{R}$).

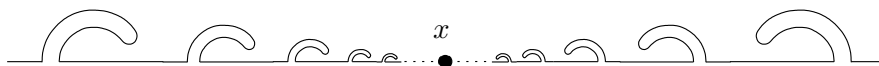
Démonstration. (1) Un singleton est fermé dans $\mathbb{R}^{n-p}$, donc cette remarque est immédiate avec la définition locale par fonctions implicites (voir le théorème 4.5 (2)). Ceci découle aussi de la définition locale par redressement (voir le théorème 4.5 (1)) et du fait qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est localement fermé.

(2) Par la définition locale par redressement des sous-variétés (voir le théorème 4.5 (1)), soient W et W' un voisinage ouvert de x et 0 respectivement dans $\mathbb{R}^n$ et soit $\phi : W \rightarrow W'$ un difféomorphisme tel que $\phi(x) = 0$ et $\phi(W \cap M) = W' \cap \mathbb{R}^p$ (où nous identifions $\mathbb{R}^p$ avec le sous-espace vectoriel des p premières coordonnées de $\mathbb{R}^n$). Quitte à réduire U et V , nous pouvons supposer que $f(U) = g(V) \subset W$. Les applications $\phi \circ f$ et $\phi \circ g$ définies sur les ouverts U et V de $\mathbb{R}^p$ respectivement, à valeurs dans l'ouvert $W' \cap \mathbb{R}^p$ de $\mathbb{R}^p$, sont des

immersions en 0 (comme composées d'immersions) de classe C^k . Donc, par le théorème d'inversion locale, ce sont des C^k -difféomorphismes locaux en 0, envoyant 0 sur 0. D'où quitte à réduire U, V, W, W' de manière appropriée, nous avons $f^{-1} \circ g = (\phi \circ f)^{-1} \circ (\phi \circ g)$, qui est un difféomorphisme local en 0, comme composition de difféomorphismes locaux. $\square$

Remarques. (1) Comme toute partie d'un espace topologique séparé à base dénombrable, munie de la topologie induite, est encore séparée à base dénombrable, une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ de dimension p est en particulier une variété topologique de dimension p (voir la partie 4.1), donc hérite des propriétés locales de $\mathbb{R}^p$. Puisque tout point de M admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^p$, toute sous-variété est localement compacte, localement connexe par arcs, et localement contractile, par exemple.

(2) La définition locale par redressement du théorème 4.5 (1) fait encore sens lorsque $k = 0$. Nous parlons alors de *sous-variété topologique* (ou de classe C^0). La définition du théorème 4.5 (3) fait encore sens aussi, mais elle est strictement plus forte que la première, car l'exemple ci-dessous est une sous-variété topologique de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire qu'elle vérifie la définition du théorème 4.5 (1)), mais ne peut pas s'écrire localement comme le graphe d'une fonction continue (c'est-à-dire qu'elle ne vérifie pas la définition du théorème 4.5 (3)).



(3) L'exercice suivant peut permettre de comprendre les différences de régularité des sous-variétés. Il est important en pratique, par exemple pour des problèmes de recollement de morceaux de rail de chemin de fer pour éviter de secouer les passagers : plus le recollement est lisse, moins cela secoue !

Exercice E.52. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit M le sous-espace de $\mathbb{R}^2$ réunion de la demi-droite horizontale $] -\infty, 0] \times \{0\}$ et du graphe $\{(x, x^n) : x \in [0, +\infty[\}$ de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0, +\infty[$. Montrer que M est une sous-variété de classe C^{n-1} de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas une sous-variété de classe C^n .

4.3 Applications différentiables

Donnons une motivation heuristique préliminaire. Si $\varphi : W \rightarrow M$ est un paramétrage local d'une sous-variété différentielle M de dimension m , alors l'application

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mapsto \varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

est un système de coordonnées locales sur M qui permet localement de se ramener dans un ouvert de $\mathbb{R}^m$ afin d'y effectuer du calcul différentiel de manière usuelle. En particulier, nous pouvons demander qu'une application entre deux sous-variétés soit de classe C^k si elle l'est quand nous la ramenons à une application entre deux ouverts d'espaces euclidiens usuels par de tels systèmes de coordonnées.

Plus précisément, soit $r \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ un exposant de régularité. Soient M et N deux sous-variétés de classe C^r et de dimension m et n respectivement (dans des espaces vectoriels réels normés de dimension finie qu'il n'est pas nécessaire de préciser, mais nous considérerons souvent les espaces euclidiens $\mathbb{R}^{m'}$ et $\mathbb{R}^{n'}$ avec $m' \geq m$ et $n' \geq n$). Soit $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ tel que $k \leq r$. Soit $f : M \rightarrow N$ une application.

Si $x \in M$, nous dirons que f est de classe C^k en x si et seulement s'il existe des paramétrages locaux $\varphi : U \rightarrow M$ de M en x et $\psi : V \rightarrow N$ de N en $f(x)$, tels que $f(\varphi(U)) \subset \psi(V)$ et $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \rightarrow V$ soit de classe C^k . L'application $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \rightarrow V$ est appelée *l'application f lue dans ces paramétrages locaux*. Si $k = \infty$, nous dirons que f est *lisse* en x . Si f est de classe C^k en tout point de M , nous dirons que f est de classe C^k de M dans N . Nous noterons $C^k(M, N)$ l'ensemble des applications de classe C^k de M dans N .

Remarques. (1) Par la remarque 4.6 (2), la définition ci-dessus ne dépend pas des choix des paramétrages locaux. Donc si f est de classe C^k en x , alors **pour tous** les paramétrages locaux $\varphi : U \rightarrow M$ de M en x et $\psi : V \rightarrow N$ de N en $f(x)$, tels que $f(\varphi(U)) \subset \psi(V)$, l'application f lue dans ces paramétrages locaux $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \rightarrow V$ est de classe C^k .

(2) La définition ci-dessus implique que si f est de classe C^k en x , alors f est continue en x . En particulier, si f est de classe C^k , alors f est continue.

(3) Si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^{m'}$, alors l'inclusion $i : M \rightarrow \mathbb{R}^{m'}$ de M dans $\mathbb{R}^{m'}$ est une application de classe C^r . En effet, il suffit de prendre pour paramétrage local ψ de $\mathbb{R}^{m'}$ l'application identité et pour ϕ n'importe quel paramétrage local de M . L'application i lue dans ces paramétrages locaux est alors juste l'application ϕ elle-même, qui est de classe C^r .

Proposition 4.7. Avec les notations du début de la partie 4.3, l'application f est de classe C^k si et seulement s'il existe une application $\tilde{f}$ d'un voisinage ouvert U de M dans son espace euclidien ambiant $\mathbb{R}^{m'}$ à valeurs dans un voisinage ouvert V de N dans son espace euclidien ambiant $\mathbb{R}^{n'}$, telle que $\tilde{f}$ envoie M dans N , soit de classe C^k , et ait pour restriction à M l'application f .

Il peut être tentant de prendre cette caractérisation comme une définition d'une application de classe C^k entre une partie quelconque de $\mathbb{R}^{m'}$ à valeurs dans une partie quelconque de $\mathbb{R}^{n'}$. C'est ce que nous ferons dans la partie 5.2 dans un cas particulier afin de pouvoir définir les sous-variétés à bord. Mais cette définition n'est pas forcément la mieux adaptée pour traiter les parties fractales quelconques, comme nous le mentionnerons dans la partie susnommée.

Démonstration. Le fait que s'il existe une telle application $\tilde{f}$, alors l'application f est de classe C^k est élémentaire. En effet, montrer que f est de classe C^k est un problème local. Par redressement, nous pouvons donc supposer que M est un ouvert de l'espace $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ des m premières coordonnées de $\mathbb{R}^{m'}$ contenant 0, que N est un ouvert de l'espace $\mathbb{R}^n$ des n premières coordonnées de $\mathbb{R}^{n'}$ contenant 0 et que $f(0) = 0$. Nous pouvons alors prendre pour paramétrages locaux ϕ et ψ les restrictions des applications $u \mapsto (u, 0)$ d'un voisinage de 0 de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m \times \{0\}$, et d'un voisinage de 0 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Alors, en notant $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ les composantes de $\tilde{f}$, l'application f lue dans les paramétrages locaux, c'est-à-dire l'application $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$, est l'application

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (\tilde{f}_1(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0), \dots, \tilde{f}_n(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0), 0, \dots, 0),$$

qui est bien de classe C^k .

Nous montrerons la réciproque juste avant la partie 4.7 constituée d'exercices. Il s'agit en effet d'un problème de passage du local au global, et nous aurons besoin pour ceci des

partitions de l'unité de classe C^k , pour lesquelles nous renvoyons à la proposition 4.17 de la fin de la partie 4.6. $\square$

Reprenons notre série de définitions concernant les applications différentiables. Un C^k -difféomorphisme de M dans N est une bijection de classe C^k de M dans N dont l'inverse est encore de classe C^k . Deux sous-variétés différentielles de classe C^k sont dites C^k -difféomorphes (ou *isomorphes* lorsque k est sous-entendu) s'il existe un C^k -difféomorphisme de l'une dans l'autre. La relation « être C^k -difféomorphe à » est une relation d'équivalence sur tout ensemble de sous-variétés de classe C^k , par exemple sur l'ensemble de toutes les sous-variétés de classe C^k des espaces euclidiens $\mathbb{R}^q$ pour $q \in \mathbb{N}$.

Si $x_0 \in M$, un C^k -difféomorphisme local en x_0 entre M et N est une application de classe C^k de M dans N telle qu'il existe des voisinages ouverts U de x_0 et V de $f(x_0)$ tels que $f(U) = V$ et la restriction $f|_U: U \rightarrow V$ soit un C^k -difféomorphisme.

Si $x \in M$, nous dirons que f est une *immersion* en x s'il existe des paramétrages locaux en x et en $f(x)$ tels que l'application f lue dans ces paramétrages locaux soit une immersion en 0 (qui est le point qui s'envoie sur x par le paramétrage local). Ceci ne dépend pas des paramétrages locaux choisis en x et $f(x)$. Nous dirons que f est une *immersion* si f est une immersion en tout point de M . Nous définissons de même une *submersion en un point*, une *submersion*, une *application de rang constant* au voisinage d'un point, et une *application de rang constant* (aussi appelée *subimmersion*). Remarquons que la composée de deux immersions est une immersion, que la composée de deux submersions est une submersion, mais que la composée de deux applications de rang constant n'est pas forcément de rang constant (voir l'exercice E.C.134 dans l'appendice C et l'exercice E.62).

Exemple : Un paramétrage local $\varphi: W \rightarrow V$ de classe C^r d'un ouvert V de M par un ouvert W de $\mathbb{R}^m$ est un C^r -difféomorphisme de W dans V , car l'application φ lue dans ce paramétrage local de V (et dans le paramétrage local $x \mapsto x$ de W) est l'application identité de W , qui est de classe C^r .

Les corollaires C.4, C.5 et C.6 de l'appendice C, donnant des formes normales locales des immersions, submersions et applications de rang constant, sont des résultats locaux, donc nous obtenons immédiatement leurs extensions pour les sous-variétés, énoncées dans le théorème 4.8 ci-dessous.

Soit x un point de M , supposons à partir de maintenant que $f: M \rightarrow N$ soit de classe C^k .

Théorème 4.8. (Forme normale locale des immersions) *Si f est une immersion en x , alors pour tout paramétrage local φ de M en x tel que $\varphi(0) = x$, il existe un paramétrage local ψ de N en $f(x)$ tel que $\psi(0) = f(x)$ et, au voisinage de 0, nous ayons*

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

(Forme normale locale des submersions) *Si f est une submersion en x , alors pour tout paramétrage local ψ de N en $f(x)$ tel que $\psi(0) = f(x)$, il existe un paramétrage local φ de M en x , tel que $\varphi(0) = x$ et, au voisinage de 0, nous ayons*

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n).$$

(Forme normale locale des applications de rang constant) *Si f est une application de rang constant $s \leq \min\{m, n\}$ sur un voisinage de x , alors il existe un paramétrage*

local ψ de N en $f(x)$ et un paramétrage local φ de M en x tels que $\varphi(0) = x$, $\psi(0) = f(x)$ et, au voisinage de 0, nous ayons

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi (x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_s, 0, \dots, 0) . \quad \square$$

Nous avons aussi un résultat généralisant la construction de sous-variété par le théorème 4.5 (2).

Proposition 4.9.

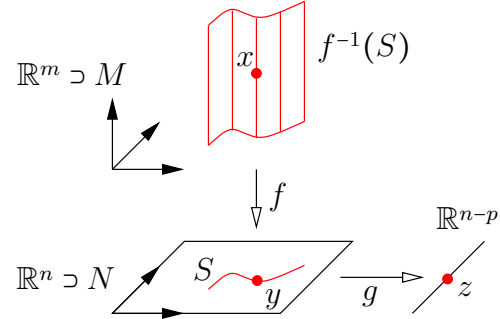
- (1) Soit $y \in f(M)$. Si f est de rang constant s sur un voisinage de $f^{-1}(y)$, et en particulier si f est une submersion en tout point de $f^{-1}(y)$, alors $f^{-1}(y)$ est une sous-variété C^k de M , de dimension $m - s$, qui est fermée.
- (2) Si $f : M \rightarrow N$ est une submersion C^k , si S est une sous-variété C^k de N de dimension p , alors $f^{-1}(S)$ est une sous-variété C^k de M , de dimension $m - n + p$, qui est fermée si S est fermée.

Démonstration. (1) Comme le fait d'être une sous-variété est un problème local, par le théorème 4.8 de forme normale des applications de rang constant, en prenant des paramétrages locaux, nous nous ramenons au cas où M et N sont des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement, contenant 0, où $f(0) = 0$ et $y = 0$, et où f est une restriction de l'application linéaire $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_s, 0, \dots, 0)$ dont la préimage de 0 est $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-s}$. Le résultat en découle, puisque les singletons de N sont fermés et f est continue.

(2) Soient x dans $f^{-1}(S)$ et $y = f(x)$. En utilisant la définition 4.5 (2) des sous-variétés appliquée à N , soient U un voisinage ouvert de y dans N et $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ une submersion C^k telle que si $z = g(y)$, nous ayons $S \cap U = g^{-1}(z)$. Alors $g \circ f$ est une submersion en x , et

$$f^{-1}(S) \cap f^{-1}(U) = (g \circ f)^{-1}(z) ,$$

ce qui montre le résultat (par la continuité de f pour la dernière affirmation). $\square$



Une application f de M dans N est un C^k -plongement⁶⁴ si

- $f : M \rightarrow f(M)$ est un homéomorphisme (où $f(M)$ est muni de la topologie induite) et,
- l'application f est une immersion C^k .

Attention, il y a bien deux conditions dans cette définition, et les exemples dans la partie 4.5 montrent qu'une immersion injective n'est en général pas un plongement : la demande que f soit un homéomorphisme sur son image est cruciale.

Attention, l'image d'un plongement n'est pas toujours fermée. Par exemple, l'application d'inclusion d'un intervalle ouvert borné non vide dans $\mathbb{R}$ est un plongement d'image non fermée.

Nous renvoyons à la partie A.4.5 de l'appendice A pour la définition d'une application propre et ses propriétés (dont la proposition A.25). Le résultat suivant en découle immédiatement.

64. ou plongement tout court quand le degré de différentiabilité est sous-entendu

Proposition 4.10. *Soient M et N deux sous-variétés de classe C^k . Toute immersion de classe C^k injective et propre de M dans N est un homéomorphisme sur son image, donc un C^k -plongement, d'image fermée. En particulier, si M est compacte, alors toute immersion C^k injective de M dans N est un C^k -plongement. $\square$*

La proposition 4.11 suivante dit en particulier que l'image d'une sous-variété par un C^k -plongement est une sous-variété.

Proposition 4.11. *Soient M et N deux sous-variétés de classe C^k . Une application f de M dans N est un C^k -plongement si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- (1) $f(M)$ est une sous-variété C^k de N , et
- (2) $f : M \rightarrow f(M)$ est un C^k -difféomorphisme.

Démonstration. Comme l'injection d'une sous-variété C^k de N dans N est une immersion C^k , il est immédiat que si ces deux conditions sont vérifiées, alors f est un C^k -plongement. Réciproquement, soit $f : M \rightarrow N$ un C^k -plongement.

Comme f est un homéomorphisme sur son image, il suffit de vérifier que $f(M)$ est une sous-variété C^k de N , et que, pour tout point x de M , l'application f est un C^k -difféomorphisme d'un voisinage ouvert de x dans M sur un voisinage ouvert de $f(x)$ dans $f(M)$. Mais ces deux propriétés sont des propriétés locales, et il suffit donc de les vérifier au voisinage des points x et $f(x)$. Soient U un voisinage ouvert de x dans M et V un voisinage ouvert de $f(x)$ dans N , qui sont images de paramétrages locaux. Comme f est un homéomorphisme sur son image, nous pouvons supposer que $f(U) \subset f(M) \cap V$. En remplaçant f par son application lue dans les paramétrages locaux, nous nous ramenons au cas où M et N sont des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement. Le résultat découle alors du théorème 4.5. $\square$

4.4 Espaces tangents et applications tangentes

La notion de vecteur tangent (et, si ce vecteur tangent est non nul, de droite tangente) en un point d'une courbe de classe C^1 dans $\mathbb{R}^n$ est bien connue. Elle va nous permettre de définir, de manière élémentaire, la notion de vecteur tangent en un point d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, et partant, de sous-espace tangent en ce point de cette sous-variété.

Soient $p \leq n$ dans $\mathbb{N}$ et M une sous-variété de classe C^1 et de dimension p de $\mathbb{R}^n$ (qui peut être remplacé par n'importe quel espace vectoriel réel normé de dimension n). Soit x un point de M .

4.4.1 Sous-espace tangent en un point

Un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ est dit *tangent* à M en x s'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une courbe $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tracée sur M (c'est-à-dire à valeurs dans M), telle que

$$c(0) = x \quad \text{et} \quad \dot{c}(0) = v.$$

Notons $T_x M$ l'ensemble des vecteurs tangents à M en x .

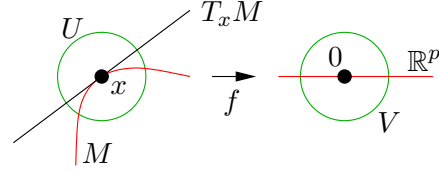
Le résultat suivant donne le calcul de $T_x M$, en fonction des différentes caractérisations locales des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ (voir le théorème 4.5).

Proposition 4.12.

(1) **(Définition par redressement)**

Si U est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$, si V est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et si $f : U \rightarrow V$ est un C^1 -difféomorphisme, tels que $f(x) = 0$ et $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$, alors

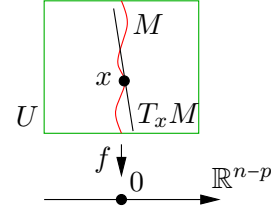
$$T_x M = df_x^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\}) .$$



(2) **(Définition par fonction implicite)**

Si U est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$ et si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ est une application de classe C^1 qui est une submersion en x , tels que $f(x) = 0$ et $U \cap M = f^{-1}(0)$, alors

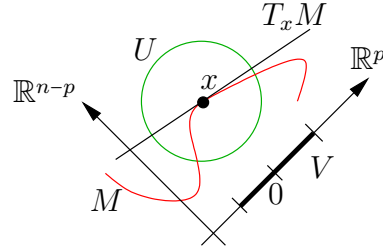
$$T_x M = \text{Ker } df_x .$$



(3) **(Définition par graphe)**

Si U est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, si V est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et si $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ est une application de classe C^1 , tels que $U \cap M = \text{graphe}(f)$ et $x = (0, f(0))$, alors

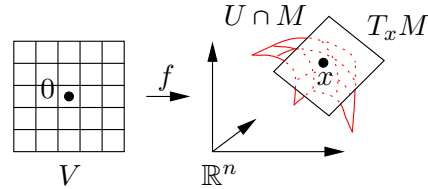
$$T_x M = \text{Im } \{v \mapsto (v, df_0(v))\} .$$



(4) **(Définition par paramétrage)**

Si U est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$, si V est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et si $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un paramétrage local C^1 de $U \cap M$ en x tel que $f(0) = x$, alors

$$T_x M = \text{Im } df_0 .$$



Démonstration. (1) Puisque f est un difféomorphisme C^1 tel que $f(x) = 0$, une courbe c est tracée sur $U \cap M$ avec $c(0) = x$ et $\dot{c}(0) = v$ si et seulement si la courbe $f \circ c$ est tracée sur $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ avec $f \circ c(0) = 0$ et $(f \circ c)'(0) = df_x(v)$. Puisque l'ensemble des vecteurs tangents en 0 à $V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ est $\mathbb{R}^p \times \{0\}$, le résultat en découle. En particulier, $T_x M$ est un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{R}^n$.

(2) Si c est une courbe tracée sur M telle que $c(0) = x$, alors nous avons $f \circ c(t) = 0$ pour tout t assez petit. Donc en dérivant, nous obtenons l'égalité $df_x(\dot{c}(0)) = 0$ et le sous-espace vectoriel $T_x M$ est contenu dans le sous-espace vectoriel $\text{Ker } df_x$. Comme df_x est surjective, les dimensions de $T_x M$ et de $\text{Ker } df_x$ sont toutes les deux égales à p , et le résultat en découle.

(4) Pour tout v dans $\mathbb{R}^p$, soit c une courbe dans V telle que $c(0) = 0$ et $\dot{c}(0) = v$. Alors $f \circ c$ est une courbe C^1 tracée sur $f(V) = U \cap M$ telle que $f \circ c(0) = x$ et $(f \circ c)'(0) = df_x(v)$. Donc le sous-espace vectoriel $T_x M$ contient le sous-espace vectoriel $\text{Im } df_x$. Par l'injectivité de df_x , les dimensions de $T_x M$ et de $\text{Im } df_x$ sont toutes les deux égales à p , et le résultat en découle. L'assertion (3) découle immédiatement de l'assertion (4). $\square$

Comme montré dans la démonstration, l'ensemble $T_x M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p , appelé le *sous-espace vectoriel tangent* à M en x . Nous appellerons $x + T_x M$ le *sous-espace affine tangent* à M en x .

4.4.2 Fibré tangent

La réunion disjointe des sous-espaces affines tangents aux points d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est naturellement munie d'une structure de (sous-)variété.

Proposition 4.13. *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de classe C^{r+1} et de dimension p , où $r \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$. Soit TM le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ formé des couples (x, v) de $M \times \mathbb{R}^n$ tels que $v \in T_x M$. Alors TM est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, de classe C^r et de dimension $2p$, et l'application $\pi : TM \rightarrow M$ définie par $(x, v) \mapsto x$ est de classe C^r .*

Sauf quand $r = \infty$, notons la perte d'un degré de régularité quand nous passons de M à TM . Le résultat est encore valable si $r = 0$, en définissant une sous-variété de classe C^0 comme un sous-espace topologique qui est une variété topologique. Muni de l'application $\pi : (x, v) \mapsto x$ de TM dans M , dite de *projection canonique*, la sous-variété TM est appelée le *fibré tangent* à M .

Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que $k \leq r$, un *champ de vecteurs* de classe C^k sur M est une application X de classe C^k de M dans TM telle que $\pi \circ X = \text{id}_M$. C'est donc une application $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ définie par $x \mapsto (x, v(x))$ où $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application de classe C^k telle que pour tout $x \in M$, le vecteur $v(x) \in T_x M$ soit un vecteur tangent à M en x . Nous reviendrons sur les champs de vecteurs dans la partie 6.3.

Démonstration. Soient (y_0, w_0) dans TM et (W, φ) un paramétrage local C^{r+1} de M au voisinage ouvert de y_0 , d'image $U \cap M$, où U est un voisinage ouvert de $y_0 = \varphi(0)$ dans $\mathbb{R}^n$. Puisque $T_{y_0} M = \text{Im } d\varphi_0$ par la proposition 4.12 (4), soit $v_0 \in \mathbb{R}^p$ tel que $d\varphi_0(v_0) = w_0$. Montrons que l'application

$$\psi : (x, v) \mapsto (\varphi(x), d\varphi_x(v + v_0)) , \quad (9)$$

définie sur l'ouvert $W \times \mathbb{R}^p$ de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$, est un paramétrage local C^r de TM au voisinage de (y_0, w_0) .

Comme nous avons $T_{\varphi(x)} M = \text{Im } d\varphi_x$ pour tout $x \in W$ par la proposition 4.12 (4), l'application ψ paramètre un voisinage de (y_0, w_0) dans TM . Elle envoie $(0, 0)$ sur $(\varphi(0), d\varphi_0(v_0)) = (y_0, w_0)$. Elle est de classe C^r . Montrons que ψ est une immersion en tout point de son domaine. En effet, φ est une immersion et $d\varphi_x$ est linéaire et injective. La matrice jacobienne de ψ en (x, v) est triangulaire supérieure par blocs dans les décompositions $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ de l'espace de départ et $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de l'espace d'arrivée, de blocs diagonaux injectifs, respectivement égaux à la matrice jacobienne de φ en x et à la matrice de l'application linéaire $d\varphi_x$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$. Donc ψ est une immersion en (x, v) . Enfin, c'est une application propre et bijective de $W \times \mathbb{R}^p$ sur $(U \times \mathbb{R}^n) \cap TM$, donc un homéomorphisme entre ces espaces.⁶⁵

La dernière affirmation découle du fait que la restriction à une sous-variété C^r d'une application C^r (car linéaire) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est encore de classe C^r . $\square$

65. En fait, l'application inverse de la bijection $\psi : W \times \mathbb{R}^p \rightarrow \psi(W \times \mathbb{R}^p)$ est l'application définie par $(y, w) \mapsto (\varphi^{-1}(y), (d\varphi_{\varphi^{-1}(y)})^{-1}(w - v_0))$, qui est clairement continue.

Remarque. Lorsque la sous-variété M est de classe C^{r+1} , nous venons de voir que la projection $\pi : TM \rightarrow M$ définie par $(x, v) \mapsto x$ est de classe C^r . Chaque fibre $F_x = \pi^{-1}(x)$ de cette application est égale à $\{x\} \times T_x M$, donc est munie d'une structure d'espace vectoriel. Cette structure d'espace vectoriel « dépend de manière C^r » de x , au sens suivant. Les applications

$$T\phi : (x, v) \mapsto (\varphi(x), d\varphi_x(v))$$

sont des C^r -difféomorphismes sur leur image (comme vu ci-dessus à translation près), chaque fibre $\{x\} \times \mathbb{R}^p$ de la première projection $U \times \mathbb{R}^p \rightarrow U$ est naturellement munie d'une structure d'espace vectoriel, et $T\phi : \{x\} \times \mathbb{R}^p \rightarrow F_x$ est un isomorphisme linéaire. Cette remarque est à la base de la définition des fibrés vectoriels, pour lesquels nous renvoyons aux apprentissages de seconde année de Master (voir par exemple [Spi, Pau1]).

4.4.3 Applications tangentes

Soient N une sous-variété de classe C^1 d'un espace vectoriel réel normé de dimension finie et $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^1 . Notons

$$T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

l'application qui à un vecteur $v \in T_x M$, tangent en $t = 0$ à une courbe c tracée sur M , associe le vecteur vitesse en $t = 0$ de la courbe $f \circ c$: celle-ci est en effet de classe C^1 , tracée sur N et passe à l'instant $t = 0$ par $f(x)$. En prenant des paramétrages locaux, nous pouvons montrer que l'application $T_x f$ ne dépend pas du choix de la courbe c , et qu'elle est linéaire. Elle est appelée *l'application tangente* à f en x .

L'application de TM dans TN définie par $(x, v) \mapsto (f(x), T_x f(v))$ est appelée *l'application tangente* à f , et elle est notée Tf . En prenant des paramétrages locaux, nous obtenons que si M et N sont de classe C^{r+1} et si f est de classe C^k avec $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ et $k \leq r + 1$, alors Tf est de classe C^{k-1} . Nous supposons toujours, par la suite, que la régularité d'une application entre deux sous-variétés est inférieure ou égale à la régularité de ces sous-variétés.

Propriétés. (1) Par exemple, supposons que f soit la restriction à M d'une application de classe C^k notée $\tilde{f}$, définie sur un voisinage ouvert de M dans l'espace vectoriel réel normé E de dimension finie qui le contient, et à valeurs dans un voisinage ouvert de N dans l'espace vectoriel réel normé F de dimension finie qui le contient. Alors f est de classe C^k (voir le sens élémentaire de la proposition 4.7) et pour tout $x \in M$, l'application tangente $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ est la restriction, au sous-espace vectoriel $T_x M$ de E , de la différentielle $d\tilde{f}_x : E \rightarrow F$ de $\tilde{f}$ en x .

(2) Toujours en prenant des paramétrages locaux, il est élémentaire de montrer que le *théorème de dérivation des fonctions composées* s'étend : pour tout $x \in M$, si $f : M \rightarrow M'$ et $g : M' \rightarrow M''$ sont de classe C^k en x et $f(x)$ respectivement, alors $g \circ f : M \rightarrow M''$ est de classe C^k en x , et nous avons

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)}g \circ T_x f .$$

Donc si $f : M \rightarrow M'$ et $g : M' \rightarrow M''$ sont de classe C^1 , alors $g \circ f$ est de classe C^1 et nous avons

$$T(g \circ f) = (Tg) \circ (Tf) .$$

(3) Soit $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^k où $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$. Alors f est une immersion (resp. submersion) en un point x de M si et seulement si son application tangente en x , c'est-à-dire l'application linéaire $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$, est injective (resp. surjective). De même, f est une application de rang constant au voisinage d'un point x de M si et seulement si le rang de l'application linéaire $T_y f : T_y M \rightarrow T_{f(y)} N$ est constant pour y dans un voisinage de x . Ceci découle, en prenant des paramétrages locaux, du cas où M et N sont des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement.

4.5 Exemples

Soit $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Exemples. (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout ouvert non vide U de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété lisse de dimension n de $\mathbb{R}^n$, et pour tout $x \in U$, nous avons

$$T_x U = \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad T U = U \times \mathbb{R}^n .$$

Si M et N sont des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement, si $f : M \rightarrow N$ est une application de classe C^1 , alors en rappelant que $T M = M \times \mathbb{R}^m$ et $T N = N \times \mathbb{R}^n$, l'application tangente $T f : T M \rightarrow T N$ est

$$(x, v) \mapsto (f(x), df_x(v)) .$$

(2) Plus généralement, tout ouvert non vide U d'une sous-variété M , de dimension p et de classe C^{r+1} , d'un espace vectoriel réel normé E de dimension finie est une sous-variété, de dimension p et de classe C^{r+1} , de E et $T_x U = T_x M$ pour tout $x \in U$.

(3) Le *produit* de deux sous-variétés M et N , de classe C^{r+1} et de dimension p et q , de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement, est une sous-variété de classe C^{r+1} et de dimension $p + q$, de $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.⁶⁶ De plus, pour tous les $x \in M$ et $y \in N$, nous avons

$$T_{(x,y)}(M \times N) = T_x M \times T_y N .$$

L'application canonique de $T M \times T N$ dans $T(M \times N)$, définie par

$$((x, v), (y, w)) \mapsto ((x, y), (v, w)) ,$$

est un C^r -difféomorphisme. Nous identifierons dans la suite $T M \times T N$ et $T(M \times N)$ par cette application.

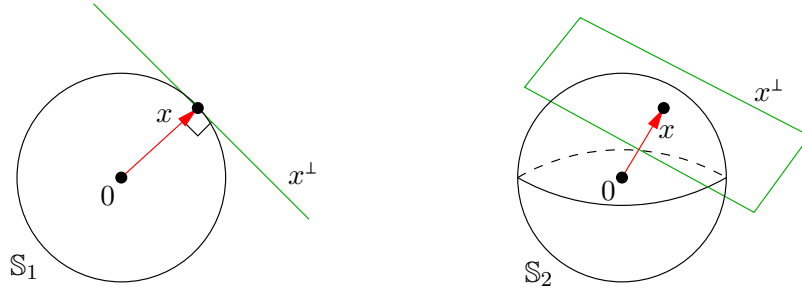
(4) Remarquons que la propriété d'être une sous-variété de classe C^{r+1} et de dimension n d'un espace vectoriel réel normé E de dimension finie est invariante par C^{r+1} -difféomorphismes ambiants : si f est un C^{r+1} -difféomorphisme d'un voisinage ouvert dans E d'une partie M de E , à valeurs dans un ouvert d'un espace vectoriel réel normé F de dimension finie, alors M est une sous-variété de classe C^{r+1} de dimension n de E si et seulement si $f(M)$ est une sous-variété de classe C^{r+1} de dimension n de F , et alors $T f : T M \rightarrow T(f(M))$ est un C^r -difféomorphisme.

66. En effet, il est élémentaire de vérifier que pour tout $(x, y) \in M \times N$, si $\phi : U \rightarrow M$ et $\psi : V \rightarrow N$ sont des paramétrages locaux de M en x et de N en y respectivement, alors l'application de $U \times V$ (qui est un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{p+q}$) dans $M \times N$ (qui est une partie de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$) définie par $(u, v) \mapsto (\phi(u), \psi(v))$ est un paramétrage local de $M \times N$ en (x, y) .

(5) **(Sphères)** Soit n dans $\mathbb{N}$. La *sphère de dimension n* est le sous-espace topologique compact $\mathbb{S}_n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$\mathbb{S}_n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0\}.$$

Certains ouvrages, voire la plupart, notent $\mathbb{S}^n$ la sphère de dimension n , mais nous préférons la notation en indice plutôt qu'en exposant, pour ne pas confondre avec les produits (que penser de $(\mathbb{S}^1)^n \neq \mathbb{S}^n$?). Rappelons que la sphère $\mathbb{S}_n$ possède deux composantes connexes si $n = 0$, qu'elle est connexe par arcs non simplement connexe si $n = 1$, et qu'elle est simplement connexe si $n \geq 2$.



L'application $f : x = (x_0, \dots, x_n) \mapsto \|x\|^2 - 1 = x_0^2 + \dots + x_n^2 - 1$ est ⁶⁷ une submersion lisse en tout point de $\mathbb{S}_n = f^{-1}(0)$. Donc la sphère est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^{n+1}$, de codimension 1 et de dimension n . De plus, par la proposition 4.12 (2), le sous-espace tangent $T_x \mathbb{S}_n$ à $\mathbb{S}_n$ en un point $x \in \mathbb{S}_n$ est le noyau de l'application linéaire $v \mapsto \langle v, x \rangle$, c'est-à-dire l'orthogonal $x^\perp$ de x (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^{n+1}$).

Le fibré tangent de $\mathbb{S}_n$ est la sous-variété lisse

$$T\mathbb{S}_n = \{(x, v) \in \mathbb{S}_n \times \mathbb{R}^{n+1} : v \in x^\perp\},$$

munie de la projection évidente sur $\mathbb{S}_n$.

Exercice E.53. Montrer que la sphère $\mathbb{S}_n$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^{n+1}$ en utilisant chacune des autres définitions du théorème 4.5.

Remarque. Plus généralement, si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ est une submersion C^1 , où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, pour tous les $y \in f(U)$ et $x \in M = f^{-1}(y)$, avec $Jf_x = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}}$ la matrice jacobienne de f en x , il découle de la proposition 4.12 (2) que le sous-espace vectoriel $T_x M$ tangent en x à la sous-variété $M = f^{-1}(y)$ de $\mathbb{R}^p$ admet le système d'équations linéaires suivant :

$$(X_1, \dots, X_p) \in T_x M \iff \forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket, \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) X_j = 0.$$

(6) **(Tores)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'un des avatars du *tore* de dimension n est le sous-espace topologique compact de $\mathbb{C}^n$ défini par

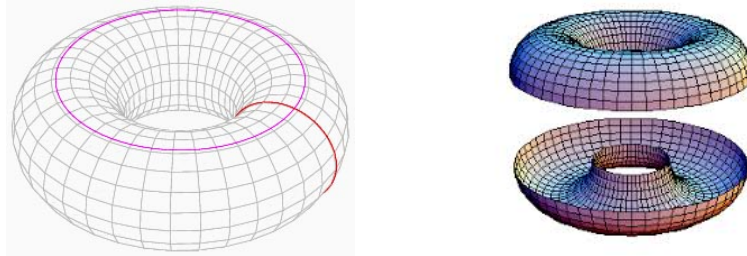
$$\mathbb{T}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1| = \dots = |z_n| = 1\}.$$

67. En effet, sa différentielle en $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}_n$ est la forme linéaire

$$df_x : h = (h_0, \dots, h_n) \mapsto 2x_0 h_0 + \dots + x_n h_n = 2\langle h, x \rangle$$

sur $\mathbb{R}^{n+1}$, qui n'est pas la forme linéaire nulle car $x \neq 0$, et toute forme linéaire non nulle est surjective.

L'application $f : (z_1, \dots, z_n) \mapsto (|z_1|^2 - 1, \dots, |z_n|^2 - 1)$ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est une submersion⁶⁸ lisse en tout point de $\mathbb{T}^n$. Donc le tore $\mathbb{T}^n$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{C}^n$, de codimension n et de dimension n .



Exercice E.54.

- (1) Montrer que $\mathbb{T}^n$ est C^∞ -difféomorphe à la variété produit de n copies du cercle $\mathbb{S}_1$.
- (2) Notons x, y, z les coordonnées usuelles de $\mathbb{R}^3$. Nous appellerons *tore de révolution* le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ obtenu en faisant tourner autour de l'axe des z le cercle d'équations $y = 0, (x - 2)^2 + z^2 = 1$ (ou plus généralement n'importe quel cercle contenu dans un plan vertical et disjoint de l'axe vertical). Montrer que le tore de révolution est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$, qui est C^∞ -difféomorphe à $\mathbb{T}^2$.

Comme dit dans la partie 4.3, alors que la préimage d'une sous-variété par une submersion est une sous-variété (voir la proposition 4.9), il n'est pas toujours vrai que l'image d'une immersion (même injective) est une sous-variété. Chaque dessin ci-dessous représente une *sous-variété immergée*, c'est-à-dire l'image d'une sous-variété par une immersion injective dans un espace vectoriel réel normé de dimension finie.⁶⁹ La démonstration du fait qu'aucune d'entre elles n'est une sous-variété différentielle C^1 est laissée au lecteur. Remarquons toutefois qu'une sous-variété différentielle est en particulier localement fermée (voir la remarque 4.6 (1)). Ainsi, dans l'exemple de droite ci-dessous, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{T}^2 = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = |z_2| = 1\}$ définie par $g : t \mapsto (e^{it}, e^{i\sqrt{2}t})$ est une immersion injective lisse qui n'est pas un plongement. En effet, par la densité de $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ et puisque $g(t + 2k\pi) = (e^{it}, e^{i\sqrt{2}t + 2k\pi\sqrt{2} + 2k'\pi})$ pour tous les $k, k' \in \mathbb{Z}$, l'image de g est dense dans $\mathbb{T}^2$, et en particulier n'est pas localement fermée.

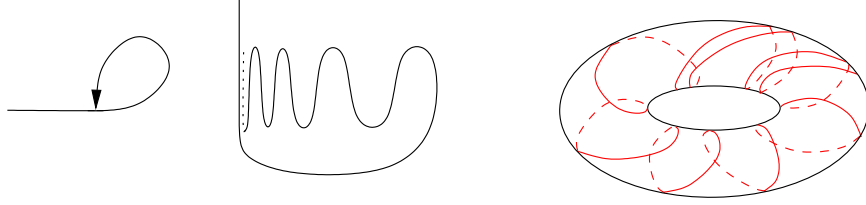
68. En effet, pour tout $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{T}^n$, l'application linéaire

$$df_z : (Z_1, \dots, Z_n) \mapsto (2 \operatorname{Re}(\overline{z_1} Z_1), \dots, 2 \operatorname{Re}(\overline{z_n} Z_n))$$

est surjective car $z_i \neq 0$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En particulier, en notant $w^\perp$ la droite vectorielle réelle orthogonale à un vecteur non nul w dans le plan euclidien réel $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$, nous avons

$$T_z \mathbb{T}^n = z_1^\perp \times \dots \times z_n^\perp.$$

69. Attention à la terminologie, une sous-variété immergée n'est pas toujours une sous-variété.



$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1 : \exists t \in \mathbb{R}, \\ z_1 = e^{it}, z_2 = e^{i\sqrt{2}t}\}$$

(7) (**Groupes matriciels classiques**) Nous renvoyons à [Pau4, page 14-15], ainsi qu'à [Die3, Hel], pour une liste complète des groupes matriciels dits classiques.

Soient n, p, q des éléments de $\mathbb{N}$ non nuls. Notons I_n la matrice identité $n \times n$, et

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}.$$

Pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, notons ${}^tX$ sa matrice transposée et $X^* = \overline{{}^tX}$ sa matrice adjointe. Nous définissons alors les groupes (pour la multiplication matricielle) suivants.

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) &= \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det x = 1\} \\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) &= \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : \det x = 1\} \\ \mathrm{O}(n) &= \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : {}^tx x = I_n\} \\ \mathrm{SO}(n) &= \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{O}(p, q) &= \{x \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R}) : {}^tx I_{p,q} x = I_{p,q}\} \\ \mathrm{SO}(p, q) &= \mathrm{O}(p, q) \cap \mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{R}) \\ \mathrm{U}(n) &= \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : x^* x = I_n\} \\ \mathrm{SU}(n) &= \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \end{aligned} \tag{10}$$

Le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est appelé le *groupe spécial linéaire* réel. Le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est appelé le *groupe spécial linéaire* complexe.

Le groupe $\mathrm{O}(n)$ est appelé le *groupe orthogonal* : c'est le groupe des matrices (dans la base canonique) des bijections linéaires préservant le produit scalaire de l'*espace euclidien standard* $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, où

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$. Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ est appelé le *groupe spécial orthogonal*, ou aussi le *groupe des rotations*.

Le groupe $\mathrm{U}(n)$ est appelé le *groupe unitaire* : c'est le groupe des matrices (dans la base canonique) des bijections linéaires préservant le produit scalaire de l'*espace hermitien standard* $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, où le produit scalaire hermitien standard⁷⁰ est défini par

$$\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i}$$

70. La convention concernant le côté linéaire et celui anti-linéaire d'un produit hermitien varie suivant les références.

si $z = (z_1, \dots, z_n)$ et $w = (w_1, \dots, w_n)$. Le groupe $SU(n)$ est appelé le *groupe spécial unitaire*.

Notons $\mathbb{R}^{p,q}$ l'espace *pseudo-euclidien* standard de signature (p, q) , c'est-à-dire l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^{p+q}$ muni de la forme quadratique standard⁷¹ de signature (p, q)

$$Q = -(x_1)^2 - \dots - (x_p)^2 + (x_{p+1})^2 + \dots + (x_{p+q})^2.$$

Alors $O(p, q)$ est exactement l'ensemble des matrices (dans la base canonique) des bijections linéaires $f : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{R}^{p+q}$ qui préservent la forme quadratique Q , c'est-à-dire qui vérifient

$$Q \circ f = Q.$$

En utilisant le fait que le déterminant $\det : GL_N(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^\times$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}$, est un morphisme de groupes, et les propriétés⁷² de la transposée et de l'adjoint (outre celles de l'inverse) des matrices

$$\begin{aligned} \forall x, y \in GL_N(\mathbb{C}), \quad {}^t(xy) &= {}^t y {}^t x \quad \text{et} \quad {}^t(x^{-1}) = ({}^t x)^{-1}, \\ (xy)^* &= y^* x^* \quad \text{et} \quad (x^{-1})^* = (x^*)^{-1}, \end{aligned}$$

il est facile de montrer que les ensembles définis dans le tableau (10) sont bien des sous-groupes des groupes $GL_N(\mathbb{K})$ qui les contiennent. Ils sont aussi fermés dans $GL_n(\mathbb{C})$, car intersections avec $GL_n(\mathbb{C})$ de parties définies par l'annulation de fonctions continues (car polynomiales). Remarquons de plus que $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ sont ouverts dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ respectivement.

De plus, les groupes $O(n)$ et $U(n)$ sont bornés dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ respectivement : tout élément de $O(n)$ et $U(n)$ préservant la norme des vecteurs (dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ respectivement), ses vecteurs colonnes sont de norme 1, donc les valeurs absolues de ses coefficients sont au plus 1. Par conséquent les groupes $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ sont compacts, car fermés et bornés dans des espaces vectoriels réels normés de dimension finie. Notons que

$$O(n) = U(n) \cap GL_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad SO(n) = SU(n) \cap GL_n(\mathbb{R}).$$

Proposition 4.14. *Soient $n, p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Les parties $GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $O(n)$, $SO(n)$, $O(p, q)$, $SO(p, q)$, $U(n)$ et $SU(n)$ de respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, $\mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{(p+q)^2}$, $\mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{(p+q)^2}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$ sont des sous-variétés lisses, fermées sauf $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{C})$, dont l'espace tangent en l'élément neutre, la dimension, le nombre de composante connexe (par arcs) et le groupe fondamental en l'élément neutre (à isomorphisme de groupes près) sont les suivants.*

71. La convention concernant la position des signes + et - varie dans les références.

72. On dit que la transposition et l'adjoint sont des *anti-morphismes* de groupes de $GL_N(\mathbb{C})$.

G	$T_e G$	dimension	$ \pi_0 G $	$\pi_1(G, e)$
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$	$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	n^2	2	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n = 2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}$
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$	$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	$2n^2$	1	$\mathbb{Z}$
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	$\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{tr} X = 0\}$	$n^2 - 1$	1	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n = 2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}$
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$	$\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \mathrm{tr} X = 0\}$	$2n^2 - 2$	1	$\{1\}$
$\mathrm{O}(n)$	$\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : {}^t X = -X\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	2	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n = 2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}$
$\mathrm{SO}(n)$	$T_{I_n} \mathrm{O}(n)$	$\frac{n(n-1)}{2}$	1	$\pi_1(\mathrm{O}(n), e)$
$\mathrm{O}(p, q)$	$\{X \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}) : {}^t X I_{p,q} + I_{p,q} X = 0\}$	$\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}$	4	$\pi_1(\mathrm{O}(p), e) \times \pi_1(\mathrm{O}(q), e)$
$\mathrm{SO}(p, q)$	$T_{I_{p+q}} \mathrm{O}(p, q)$	$\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}$	2	$\pi_1(\mathrm{O}(p), e) \times \pi_1(\mathrm{O}(q), e)$
$\mathrm{U}(n)$	$\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : X^* = -X\}$	n^2	1	$\mathbb{Z}$
$\mathrm{SU}(n)$	$\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : X^* = -X, \mathrm{tr} X = 0\}$	$n^2 - 1$	1	$\{1\}$

(11)

Ainsi, l'espace tangent en l'élément neutre de $\mathrm{SO}(n)$ est le sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices *antisymétriques*,⁷³ et celui de $\mathrm{SU}(n)$ est le sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices *antihermitiennes*⁷⁴ de trace nulle.

Démonstration. Nous renvoyons par exemple à [MnT, Pau4] pour les deux dernières colonnes. Voir l'exercice E.26 (4) pour le calcul de $\pi_1(\mathrm{SO}(3), e)$.

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour tout $g \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$, l'application de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ définie par $x \mapsto gx$ est un C^∞ -difféomorphisme, qui, si $g \in G$, préserve le sous-groupe G considéré dans la colonne de gauche ci-dessus. Donc pour montrer que les sous-groupes en question sont des sous-variétés, il suffit de montrer (voir l'exemple (4) ci-dessus) qu'ils sont des sous-variétés au voisinage de leur élément neutre. La démonstration donnera l'expression de l'espace tangent en l'identité.

Les deux premières lignes du tableau ci-dessus sont immédiates, puisque $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'application $F = \det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est C^∞ (car polynomiale en les coefficients), et sa différentielle en I_n est l'application $dF_{I_n} = \mathrm{tr}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, qui est clairement surjective. Donc $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = F^{-1}(1)$ est un fermé (car F est continue), et une sous-variété lisse au voisinage de I_n par le théorème 4.5 (2), dont l'espace tangent en I_n est $\mathrm{Ker} \mathrm{tr}$ par la proposition 4.12 (2). Toujours par le théorème 4.5 (2), la dimension de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est égale à la différence entre la dimension de l'espace de départ et celle de l'espace d'arrivée, donc $n^2 - 1$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $2n^2 - 2$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ceci montre les troisième et quatrième lignes du tableau ci-dessus.

73. Rappelons que toute matrice antisymétrique est de diagonale nulle, donc de trace nulle.

74. Rappelons que toute matrice antihermitienne est à coefficients diagonaux imaginaires purs, donc de trace imaginaire pure.

Pour $O(n)$, $O(p, q)$, $U(n)$ et $SU(n)$, nous appliquons la méthode ci-dessus avec F valant respectivement les applications suivantes.

- Notons Sym_n l'espace vectoriel réel des matrices symétriques réelles de taille n . L'application $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}_n$ définie par $x \mapsto {}^t x x$ (dont la différentielle en I_n , qui est $X \mapsto {}^t X + X$, est surjective, puisque tout élément Y de Sym_n s'écrit ${}^t X + X$ avec $X = \frac{1}{2}Y$). Elle est lisse (car polynomiale en les coefficients). Nous avons $F(I_n) = I_n$ et $F^{-1}(I_n) = O(n)$. De plus $\text{Ker } dF_{I_n}$ est le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

- L'application $F : \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}_{p+q}$ définie par $x \mapsto {}^t x I_{p,q} x$ (dont la différentielle en I_{p+q} , qui est $X \mapsto {}^t X I_{p,q} + I_{p,q} X$, est surjective, puisque tout élément Y de Sym_{p+q} s'écrit ${}^t X I_{p,q} + I_{p,q} X$ avec $X = \frac{1}{2} I_{p,q} Y$). Elle est lisse (car polynomiale en les coefficients). Nous avons $F(I_{p+q}) = I_{p,q}$ et $F^{-1}(I_{p,q}) = O(p, q)$. De plus $\text{Ker } dF_{I_{p+q}}$ est égal au sous-espace vectoriel $\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : {}^t X I_{p,q} = -I_{p,q} X\}$.

- L'application $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Herm}_n$ définie par $x \mapsto x^* x$ (dont la différentielle en I_n , qui est $X \mapsto X^* + X$, est surjective, car tout élément Y de Herm_n s'écrit $X^* + X$ où $X = \frac{1}{2}Y$). Elle est lisse (car polynomiale en les coefficients). Nous avons $F(I_n) = I_n$ et $F^{-1}(I_n) = U(n)$. De plus $\text{Ker } dF_{I_n}$ est le sous-espace vectoriel des matrices antihermitiennes.

- L'application F de l'ouvert $U = \{x \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \det x \neq -1\}$ à valeurs dans $\text{Herm}_n \times \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto (x^* x, \text{Im } \det x)$ (dont la différentielle en I_n , qui est $X \mapsto (X^* + X, \text{Im } \text{tr } X)$, est surjective, puisque tout élément Y de Herm_n s'écrit $X^* + X$ avec $X = \frac{1}{2}Y + Z$ où Z est n'importe quelle matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont imaginaires purs). Elle est lisse (car polynomiale en les coefficients). Nous avons $F(I_n) = (I_n, 0)$ et $F^{-1}(I_n, 0) = U \cap SU(n)$, puisque que le déterminant de tout élément x de $SU(n)$ est de module 1, donc de partie imaginaire nulle si et seulement si $\det x$ est égal à -1 (exclu si x appartient à U) ou 1. De plus $\text{Ker } dF_{I_n}$ est le sous-espace vectoriel des matrices antihermitiennes de trace de partie imaginaire nulle, donc de trace nulle puisque que la partie réelle de la trace d'une matrice antihermitienne est nulle.

Si x appartient à $G = O(n)$ ou à $G = O(p, q)$, alors $(\det x)^2 = 1$. Donc l'application $\det : G \rightarrow \{-1, 1\}$ est continue. Or $\{1\}$ est un ouvert du sous-espace topologique $\{-1, 1\}$ de $\mathbb{R}$. Par conséquent, $SO(n)$ et $SO(p, q)$ sont ouverts dans $O(n)$ et $O(p, q)$ respectivement, comme image réciproque d'ouvert par une application continue. Ceci montre la véracité des lignes restantes du tableau ci-dessus. $\square$

4.6 Variétés différentielles

L'abstraction de la notion de paramétrage local au voisinage de chaque point d'une sous-variété va nous permettre de définir des structures différentielles (permettant aussi d'effectuer du calcul différentiel localement comme dans des ouverts des $\mathbb{R}^n$) sur des objets naturels, mais qui ne sont pas naturellement contenus dans des $\mathbb{R}^n$, par exemples des espaces topologiques construits par des procédures de quotient.



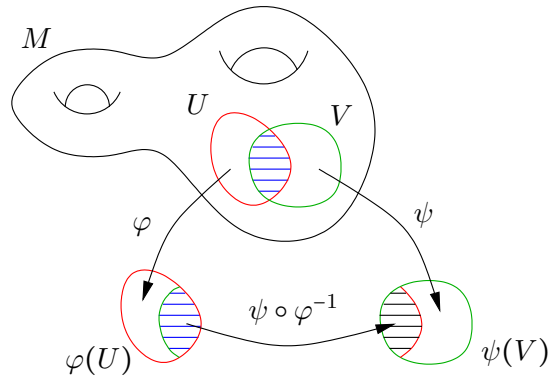
Disques de Newton. Étude pour Fugue à deux couleurs. Par František Kupka.

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (muni de l'unique extension de l'ordre de $\mathbb{N}$ telle que $p \leq \infty$ pour tout p dans $\mathbb{N}$), et n dans $\mathbb{N}$.

Un *atlas de cartes* C^k à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ sur un espace topologique M est un ensemble $\mathcal{A}$ de couples (U, φ) où $\varphi : U \rightarrow W = \varphi(U)$ est un homéomorphisme d'un ouvert U de M sur un ouvert W de $\mathbb{R}^n$, tel que les ouverts U des éléments (U, φ) de $\mathcal{A}$ recouvrent M , et que pour tous les couples (U, φ) et (V, ψ) dans $\mathcal{A}$, l'application

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

soit un C^k -difféomorphisme d'un ouvert de $\varphi(U)$ sur un ouvert de $\psi(V)$.



Dans la définition ci-dessus, nous pouvons remplacer $\mathbb{R}^n$ par n'importe quel espace vectoriel réel normé de dimension n . Nous ferons souvent l'abus de noter de la même manière une application et sa restriction à une partie de son domaine de définition. Nous

utiliserons souvent par abus des familles indexées $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$, quitte à indexer les atlas par eux-mêmes.

Un tel couple (U_i, φ_i) (et l'application φ_i) est appelé une *carte* (ou *carte locale*) de $\mathcal{A}$ (ou de M par abus lorsque l'atlas $\mathcal{A}$ est sous-entendu), et une *carte (locale) en x* si $x \in U_i$; l'ouvert U_i est appelé le *domaine* de cette carte. L'application

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

est appelée une *application de transition*, ou un *changement de carte*, de $\mathcal{A}$ (ou de M par abus lorsque l'atlas $\mathcal{A}$ est sous-entendu).

Lemme 4.15. *Soit M un espace topologique. Tout atlas de cartes C^k de M est contenu dans un unique atlas de cartes C^k maximal (pour l'inclusion).*

Démonstration. Deux atlas de cartes C^k sont dit C^k -compatibles si leur réunion est encore un atlas de cartes C^k (ou de manière équivalente si l'application de transition entre toute carte de l'un et toute carte de l'autre est un C^k -difféomorphisme). La relation « être C^k -compatible à » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas de cartes C^k . La réunion de tous les atlas de cartes C^k qui sont C^k -compatibles à un atlas de cartes C^k donné est alors l'unique atlas maximal cherché contenant ce dernier. $\square$

Par définition, une *variété différentielle* de classe C^k et de dimension n est un espace topologique

- séparé à base dénombrable,
- muni d'un atlas maximal de cartes C^k .

Lorsque k et n sont sous-entendus, nous parlerons de variété différentielle, voire même par abus de *variété*. Nous dirons une *variété lisse* lorsque $k = \infty$. Lorsque $n = 1$ (respectivement $n = 2$), nous parlerons de *courbe* (respectivement *surface*) différentielle (lisse si $k = \infty$), et par abus lorsque le contexte est clair, de courbe (respectivement surface) tout court, mais il vaut mieux préciser, il y a de nombreuses sortes de courbes et de surfaces.

Remarques. (1) Puisque, par le lemme précédent, tout atlas de cartes est contenu dans un unique atlas de cartes maximal, nous définirons souvent des variétés en donnant un atlas de cartes le plus simple possible, étant sous-entendu que nous prenons alors l'atlas de cartes maximal le contenant.

(2) Une variété différentielle de dimension n , si nous oublions qu'elle est munie d'un atlas maximal, est en particulier une variété topologique de dimension n , donc est localement homéomorphe à des ouverts de $\mathbb{R}^n$ (et donc possède les mêmes propriétés locales que $\mathbb{R}^n$, comme être localement connexe par arc et localement contractile). Nous pouvons remplacer « séparé à base dénombrable » par « métrisable séparable », ou « dénombrable à l'infini », ou « paracompact séparable » dans la définition de variété différentielle, par la proposition 4.2 et l'alinéa suivant l'exercice E.48.

(3) Soit $k' \in \mathbb{N}$ tel que $k' \leq k$. Tout atlas de cartes C^k d'un espace topologique est aussi un atlas de cartes $C^{k'}$. Si M est une variété différentielle C^k , d'atlas maximal $\mathcal{A}$, alors l'espace topologique M peut être, et sera, muni d'une structure de variété différentielle $C^{k'}$ (dite obtenue par *appauvrissement de structure*, et notée par abus de la même manière), en munissant M de l'unique atlas maximal de cartes $C^{k'}$ contenant $\mathcal{A}$.

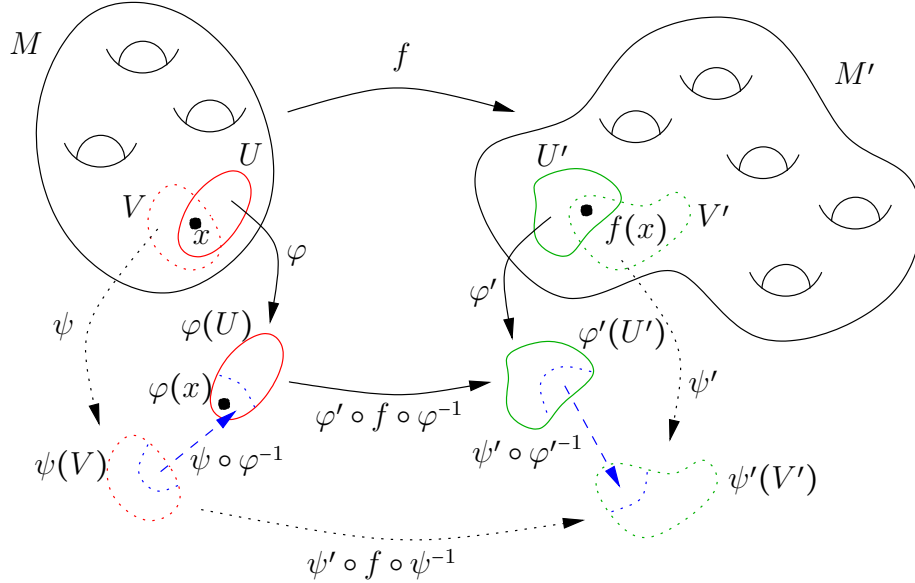
Soient M et M' deux variétés C^k et $f: M \rightarrow M'$ une application.

Soient (U, φ) et (U', φ') des cartes de M et M' respectivement ; l'application

$$\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(U')) \rightarrow \varphi'(U')$$

s'appelle *l'application f lue dans les cartes (U, φ) et (U', φ')* .

L'application f est dite *de classe C^k* en un point x de M s'il existe des cartes locales (U, φ) et (U', φ') de M et M' en x et $f(x)$ respectivement, telles que $f(U) \subset U'$ et que l'application f lue dans les cartes (U, φ) et (U', φ') soit de classe C^k en $\varphi(x)$.



Par le théorème de composition des applications différentiables (voir le dessin ci-dessus), ceci ne dépend pas du choix des cartes locales (U, φ) en x et (U', φ') en $f(x)$ telles que $f(U) \subset U'$.

L'application f est une *immersion* (respectivement *submersion*, *application de rang constant* de classe C^k en x s'il existe des (ou de manière équivalente si pour toutes les) cartes locales (U, φ) et (U', φ') de M et M' en x et $f(x)$ respectivement, telles que $f(U) \subset U'$ et que l'application f lue dans les cartes (U, φ) et (U', φ') soit une immersion (respectivement submersion, application de rang constant) de classe C^k en $\varphi(x)$.

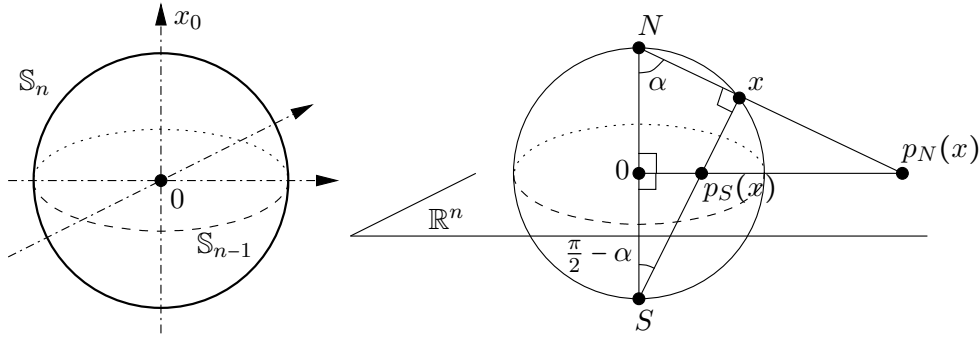
L'application f est dite *de classe C^k* (respectivement une *immersion*, une *submersion*, une *application de rang constant* de classe C^k) si elle l'est en tout point de M . L'application f est un C^k -*difféomorphisme* (ou difféomorphisme tout court lorsque k est sous-entendu) si f est de classe C^k , bijective et d'inverse aussi de classe C^k .

Exemples. (1) **(Structure standard de variété d'une sous-variété)** Si M est une sous-variété de classe C^k et de dimension n , alors M est un espace topologique séparé et à base dénombrable (car $\mathbb{R}^N$ l'est, et ces propriétés sont préservées par passage à des sous-espaces topologiques). L'ensemble des couples (U, φ) où U est un ouvert de M et $\varphi^{-1} : W \rightarrow U$ est un paramétrage local de M par un ouvert W de $\mathbb{R}^n$, est un atlas de cartes C^k , par la remarque 4.6 (2). Donc M , muni de l'atlas de cartes maximal contenant cet atlas, est une variété de classe C^k . Sauf mention explicite du contraire, nous munirons toujours une sous-variété de cette structure de variété, dite *structure standard de variété des sous-variétés*.

(2) **(Sphères)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $N = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}_n$ et $S = (-1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}_n$, appelés respectivement le *pôle Nord* et le *pôle Sud* de la sphère

$$\mathbb{S}_n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

de dimension n . Notons $p_N : (\mathbb{S}_n \setminus \{N\}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $p_S : (\mathbb{S}_n \setminus \{S\}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ les applications, appelées *projection stéréographique* de pôle Nord et Sud respectivement, qui à un point x de la sphère, différent du pôle concerné, associent le point d'intersection, avec l'hyperplan d'équation $x_0 = 0$ (identifié avec $\mathbb{R}^n$), de la droite passant par le pôle concerné et x . Il est immédiat géométriquement que ces applications sont continues, bijectives, et d'inverses continus, et un lecteur incrédule pourra écrire des formules (voir aussi la correction de l'exercice E.A.117 (8) de la partie A.4.4 de l'appendice A).



Les projections stéréographiques sont donc des homéomorphismes d'un ouvert de $\mathbb{S}_n$ sur $\mathbb{R}^n$. Il est facile de voir géométriquement ⁷⁵ que l'application de transition est

$$\begin{aligned} p_S \circ p_N^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ x &\mapsto \frac{x}{\|x\|^2} \end{aligned}$$

(qui est l'inversion par rapport à la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$), donc est un C^∞ -difféomorphisme (involutif). Les ouverts $\mathbb{S}_n \setminus \{N\}$ et $\mathbb{S}_n \setminus \{S\}$ recouvrent $\mathbb{S}_n$. Donc $\{(\mathbb{S}_n \setminus \{i\}, p_i)\}_{i \in \{S, N\}}$ est un atlas de cartes C^∞ sur $\mathbb{S}_n$. La *structure standard de variété* sur $\mathbb{S}_n$ est l'espace topologique $\mathbb{S}_n$ (métrisable séparable comme toute partie de $\mathbb{R}^{n+1}$) muni de l'atlas de cartes maximal contenant $\{(\mathbb{S}_n \setminus \{i\}, p_i)\}_{i \in \{S, N\}}$.

Pour la culture (et pour justifier le terme « standard » ci-dessus), des résultats de Kervaire et Milnor [KM] montrent que nombre $\kappa(n)$ de classes d'isomorphisme de structures de variété lisse sur l'espace topologique $\mathbb{S}_n$ pour $n \leq 18$ est donné par le tableau suivant.

n	≤ 6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\kappa(n)$	1	28	2	9	6	992	1	3	2	16256	2	16	16

Exercice E.55. Vérifier que la structure de variété lisse sur l'espace topologique $\mathbb{S}_n$ définie par cet atlas et celle définie par la structure de sous-variété lisse de $\mathbb{R}^{n+1}$ sont égales.

⁷⁵. Avec les notations de la figure ci-dessus, si α est l'angle en N entre le segment $[N, 0]$ et le segment $[N, p_N(x)]$, alors $\|p_N(x)\| = \tan \alpha$ et $\|p_S(x)\| = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, donc $\|p_N(x)\| = 1/\|p_S(x)\|$. Le résultat découle du fait que les points 0 , $p_S(x)$ et $p_N(x)$ sont alignés.

(3) **(Espaces projectifs réels)** Voici le premier exemple naturel de structure de variété lisse, qui n'est pas naturellement une structure de sous-variété lisse (même s'il existe de telles structures par le théorème de plongement de Whitney, voir le théorème 4.18).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que l'espace projectif réel de dimension n est l'espace topologique quotient $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times \backslash (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'action par homothéties du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^\times$, c'est-à-dire l'espace topologique quotient $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ de l'ensemble des vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^{n+1}$ par l'action par homothétie de $\mathbb{R}^\times$, c'est-à-dire par la relation d'équivalence « être colinéaire à »

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times, x = \lambda y.$$

L'ensemble $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ s'identifie avec l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$ (et avec le quotient par antipodie de la sphère $\mathbb{S}_n$, voir l'exercice E.A.121 (1) de la partie A.5 de l'appendice A).

Si $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, notons $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ l'image de x dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, et appelons $x_0, x_1, \dots, x_n$ les *coordonnées homogènes* de x . Elles doivent ne pas être simultanément nulles. Elles sont bien définies modulo multiplication simultanée par un scalaire non nul. En particulier, pour tout t dans $\mathbb{R}^\times$, nous avons

$$[tx_0 : tx_1 : \dots : tx_n] = [x_0 : x_1 : \dots : x_n].$$

Posons

$$U_i = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) : x_i \neq 0\}.$$

Les parties U_i de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ sont bien définies, elles sont ouvertes (car de préimage ouvertes par la projection canonique $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$) et elles recouvrent $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. L'application $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

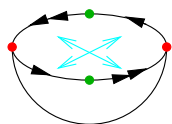
$$[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

est un homéomorphisme, d'inverse $(t_0, \dots, \widehat{t_i}, \dots, t_n) \mapsto [t_0 : \dots : t_{i-1} : 1 : t_{i+1} : \dots : t_n]$, où la notation $\widehat{t_i}$ signifie que nous omettons t_i . Pour $i \neq j$, l'application de transition

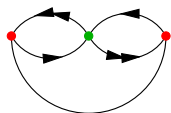
$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \{(t_0, \dots, \widehat{t_i}, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : t_j \neq 0\} \rightarrow \{(u_0, \dots, \widehat{u_j}, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n : u_i \neq 0\}$$

est définie par $u_k = \frac{t_k}{t_j}$ si $k \neq i, j$, et $u_i = \frac{1}{t_j}$. Chacune de ses composantes est une application rationnelle, de dénominateur ne s'annulant pas, donc d'une application lisse. Par conséquent, $(U_i, \varphi_i)_{0 \leq i \leq n}$ est un atlas de cartes C^∞ sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Nous munirons l'espace topologique $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ (qui est séparé (voir l'exercice E.A.121 (1) de la partie A.5 de l'appendice A), à base dénombrable car la projection canonique est ouverte, par exemple par la remarque 2.4) de l'atlas de cartes maximal contenant cet atlas, et le couple ainsi construit est appelé la *structure standard de variété sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$* . Sa dimension est n .

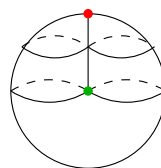
La même construction en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ munit l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ d'une structure de variété différentielle lisse de dimension $2n$.



hémisphère sud
avec antipodie
sur l'équateur



hémisphère sud
avec deux points équatoriaux
et antipodaux identifiés



non-immersion
du plan projectif dans $\mathbb{R}^3$

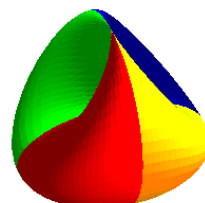
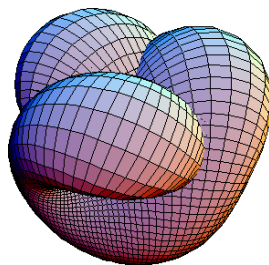
Voir la vidéo de Henri Paul de Saint-Gervais (images de Jos Leys, voix d'Etienne Ghys) sur YouTube

<https://www.youtube.com/watch?v=jrFOZHW2Dbc>

pour une visualisation de la non-immersion ci-dessus (appelée le *chapeau croisé*), ainsi que le dessin de droite ci-dessous.



Immersion du plan projectif dans $\mathbb{R}^3$



Le chapeau croisé

Voir la vidéo de Henri Paul de Saint-Gervais sur YouTube

<https://www.youtube.com/watch?v=lEvJqGvY24c>

pour une explication du plan projectif comme recollement d'un disque et d'un ruban de Möbius, et la vidéo sur YouTube

https://www.youtube.com/watch?v=-SZgV_Iiq1Y

pour une explication de l'immersion du plan projectif correspondant aux deux dessins de gauche ci-dessus (appelée la *surface de Boy*, elle a un unique point triple, et le lieu des points au moins double est un bouquet de trois cercles), ainsi que le site

<https://mathcurve.com/surfaces/boy/boy.shtml>.

Travaux manuels : réaliser en origami une immersion du plan projectif réel !

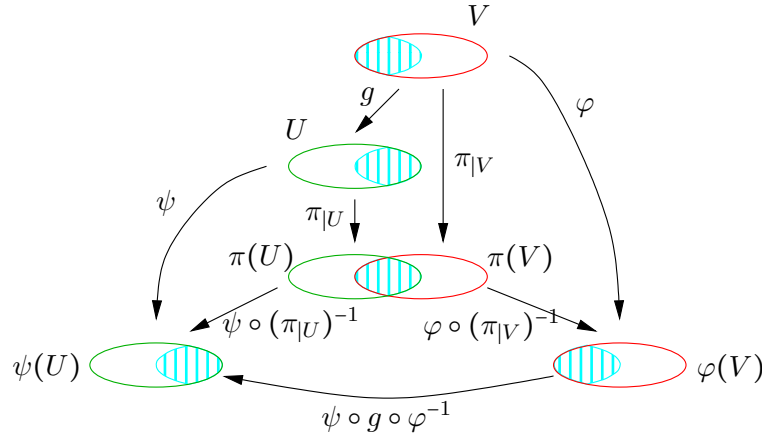
(4) (**Variétés quotients**) Soit G un groupe discret agissant, par C^k -difféomorphismes, librement et proprement sur une variété différentielle X de classe C^k .

Proposition 4.16. *L'espace topologique quotient $G \backslash X$ admet une unique structure de variété différentielle de classe C^k , telle que la projection canonique $\pi : X \rightarrow G \backslash X$ soit un C^k -difféomorphisme local.*

De plus, pour tout $k' \in \llbracket 1, k \rrbracket$, si $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ est une application de classe $C^{k'}$ (respectivement un $C^{k'}$ -difféomorphisme local) constante sur les orbites de G , alors l'application $f : G \backslash X \rightarrow Y$ induite par passage au quotient est de classe $C^{k'}$ (respectivement un $C^{k'}$ -difféomorphisme local).

Sauf mention explicite du contraire, tout tel quotient $G \backslash X$ sera muni de cette structure de variété C^k , dite de *variété quotient*.

Démonstration. Nous savons (voir la proposition 2.6) que l'espace topologique $G \backslash X$ est séparé. Il est immédiat que $G \backslash X$ est à base dénombrable, car X l'est et la projection canonique π est continue, ouverte (voir la remarque 2.4) et surjective. Considérons l'ensemble $\mathcal{A}$ des couples $(\pi(V), \varphi \circ (\pi|_V)^{-1})$ avec (V, φ) une carte locale d'un atlas de cartes⁷⁶ $\tilde{\mathcal{A}}$ de X , telle que l'application $\pi|_V : V \rightarrow \pi(V)$ soit un homéomorphisme, et que $gV \cap V = \emptyset$, pour tout g dans $G \setminus \{e\}$. Montrons que $\mathcal{A}$ est un atlas de cartes C^k sur $G \backslash X$, appelé *l'atlas quotient* de $\tilde{\mathcal{A}}$.



En effet, d'une part, il existe bien de telles cartes dont les domaines de cartes recouvrent $G \backslash X$, par le théorème 2.8. D'autre part, si $(\pi(U), \psi \circ (\pi|_U)^{-1})$ est un autre tel couple, alors pour tout x dans l'intersection $V \cap \pi^{-1}(\pi(U))$, il existe un (unique) élément g dans G tel que, pour tout y suffisamment proche de x , nous ayons $gy = (\pi|_U)^{-1} \circ \pi|_V(y)$. L'application de transition entre $(\pi(V), \varphi \circ (\pi|_V)^{-1})$ et $(\pi(U), \psi \circ (\pi|_U)^{-1})$ est donc, au voisinage de $\varphi(x)$, l'application

$$(\psi \circ g \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(V \cap \pi^{-1}(\pi(U)))},$$

qui est de classe C^k par composition.

La structure de variété C^k définie par cet atlas (en prenant l'atlas de cartes maximal qui le contient) sur $G \backslash X$ convient. L'unicité est immédiate par la propriété demandée sur la projection canonique, car être une variété se vérifie localement (mis à part les petites conditions topologiques globales).

La dernière affirmation de la proposition 4.16 est une propriété locale. Comme π est un C^k -difféomorphisme local surjectif, tout point de $G \backslash X$ admet un voisinage ouvert V dans $G \backslash X$ tel qu'il existe un ouvert U de X tel que $\pi : U \rightarrow V$ soit un C^k -difféomorphisme. L'application f , qui coïncide sur V avec $\tilde{f} \circ \pi^{-1}$, est donc de classe $C^{k'}$ sur V , comme composition d'applications de classe $C^{k'}$ (et c'est un $C^{k'}$ -difféomorphisme local sur V si $\tilde{f}$ l'est). $\square$

Exercice E.56.

76. pas forcément le maximal donné, nous aurons besoin de cette généralité plus tard

- (1) Montrer que la structure de variété quotient du tore

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$$

définie par l'exemple (4) ci-dessus est C^∞ -difféomorphe avec la structure de variété définie dans l'exemple (1) ci-dessus à partir de la structure de sous-variété lisse des tores définie dans l'exercice E.54.

- (2) Montrer que la structure de variété lisse quotient de l'espace projectif

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{S}_n$$

définie par l'exemple (4) ci-dessus coïncide avec la structure de variété lisse définie dans l'exemple (3) ci-dessus.

Pour tout k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, un théorème de Whitney (voir par exemple [Hir]) montre que toute variété C^k de dimension $n > 0$ admet un C^k -difféomorphisme sur une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n}$, et admet une immersion C^k dans $\mathbb{R}^{2n-1}$. Comme tout sous-espace d'un espace séparé et à base dénombrable l'est aussi, la condition imposée aux variétés différentielles d'être séparées et à base dénombrable est donc nécessaire pour la validité du théorème de Whitney. En appliquant le résultat ci-dessus aux espaces projectifs réels $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, nous obtenons donc des réalisations de ces espaces comme des sous-variétés de $\mathbb{R}^{2n}$. Ce résultat de Whitney est optimal, car le plan projectif réel $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ (qui est de dimension 2) ne se plonge pas dans $\mathbb{R}^3$ (et l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ ne se plonge pas dans $\mathbb{R}^{2n-1}$ pour $n \geq 1$), voir par exemple [Hir, page 108].

Dans ces notes, nous ne démontrerons que le théorème 4.18 de plongement, qui utilise le résultat préliminaire suivant permettant le passage du local au global en classe C^k .

Comme tout recouvrement ouvert d'une variété différentielle admet un recouvrement plus fin formé de domaines de cartes, et par une démonstration analogue, la proposition 4.3 d'existence de partition de l'unité s'étend pour donner des partitions de l'unité de classe C^k (c'est-à-dire dont chaque application est de classe C^k), pour k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Proposition 4.17. *Soient k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et M une variété de classe C^k . Tout recouvrement ouvert de M admet une partition de l'unité de classe C^k qui lui est subordonnée.*

□

Théorème 4.18. *Pour tout k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et toute variété compacte M de classe C^k , il existe un entier m dans $\mathbb{N}$ et un C^k -difféomorphisme entre M et une sous-variété de classe C^k de $\mathbb{R}^m$.*

Démonstration. Soit n la dimension de M . Par compacité, M admet un atlas de cartes C^k fini $(U_i, \varphi_i)_{1 \leq i \leq p}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Par la proposition 4.17 et sa démonstration, il existe une partition de l'unité $(f_j)_{1 \leq j \leq q}$ de classe C^k , avec f_j constante non nulle sur un ouvert V_j , et de support contenu dans U_{i_j} , de sorte que la famille $(V_j)_{1 \leq j \leq q}$ recouvre M . L'application $f_j \varphi_{i_j}$, prolongée par 0 en dehors de U_{i_j} , est de classe C^k . L'application

$$\psi = (f_1 \varphi_{i_1}, \dots, f_q \varphi_{i_q}, f_1, \dots, f_q)$$

de M dans $\mathbb{R}^{(n+1)q}$ est une immersion C^k (car tout point x appartient à l'un des ouverts V_j sur lequel f_j est constante non nulle et φ_{i_j} est une immersion). Elle est injective (car si

$\psi(x) = \psi(y)$, et si $x \in V_j \subset U_{i_j}$, alors $f_j(y) = f_j(x) > 0$, donc $y \in U_{i_j}$, et φ_{i_j} étant injective sur U_{i_j} , nous avons par conséquent $x = y$). Donc ψ est un C^k -plongement par la proposition 4.10, dont l'énoncé et la démonstration s'étendent lorsque la source est une variété. $\square$

Fin de la démonstration de la proposition 4.7 de la partie 4.3. Il s'agit de montrer que si M est une sous-variété C^k de dimension m de $\mathbb{R}^{m'}$, si N est une sous-variété C^k de dimension n de $\mathbb{R}^{n'}$ et si $f : M \rightarrow N$ est une application de classe $C^{k'}$ avec $k' \leq k$, alors existe une application $\tilde{f}$ de classe $C^{k'}$ d'un voisinage ouvert U de M dans $\mathbb{R}^{m'}$ à valeurs dans un voisinage ouvert V de N dans $\mathbb{R}^{n'}$, telle que $\tilde{f}|_M = f$.

Par la définition par redressement des sous-variétés (voir le théorème 4.5 (1)), pour tout point x de M , soient U_x un voisinage ouvert x dans $\mathbb{R}^{m'}$ et ϕ_x un C^k -difféomorphisme de U_x sur un voisinage ouvert V_x de 0 dans $\mathbb{R}^{m'}$ tels que $\phi_x(x) = 0$ et $\phi_x(U_x \cap M) = V_x \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Notons $s : (y_1, \dots, y_{m'}) \mapsto (y_1, \dots, y_m)$ la submersion canonique de $\mathbb{R}^{m'}$ sur $\mathbb{R}^m$, qui est de classe C^∞ . Quitte à rétrécir U_x , nous pouvons supposer que V_x est une boule ouverte euclidienne de centre 0, de sorte que $s(V_x) = V_x \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \subset V_x$. Posons $U = \bigcup_{x \in M} U_x$ et $V = \mathbb{R}^{n'}$, qui sont des voisinages ouverts de M et N dans $\mathbb{R}^{m'}$ et $\mathbb{R}^{n'}$ respectivement.

Soit $(\varphi_x)_{x \in M}$ une partition de l'unité de classe C^k de U subordonnée au recouvrement ouvert $(U_x)_{x \in M}$ de U . L'application $\varphi_x f \circ \phi_x^{-1} \circ s \circ \phi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$, est de classe $C^{k'}$ par produit et composition de telles applications. Nous notons de même son extension sur tout U prenant la valeur 0 en dehors de U_x , qui est encore de classe $C^{k'}$. Posons

$$\tilde{f} = \sum_{x \in M} \varphi_x f \circ \phi_x^{-1} \circ s \circ \phi_x : U \rightarrow \mathbb{R}^{n'}.$$

C'est une application de classe $C^{k'}$ sur U , comme somme localement finie de telles applications. Comme s vaut l'identité sur $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ et puisque $\sum_{x \in M} \varphi_x = 1$, nous avons $\tilde{f}|_M = f$. $\square$

Remarque. Attention, si M est une sous-variété C^k de dimension m de $\mathbb{R}^{m'}$, si N est une sous-variété C^k de dimension n de $\mathbb{R}^{n'}$ et si $f : M \rightarrow N$ est une application de classe $C^{k'}$ avec $k' \leq k$, alors il n'est pas toujours possible de prolonger f en une application $\tilde{f} : \mathbb{R}^{m'} \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$ de classe $C^{k'}$ définie sur tout $\mathbb{R}^{m'}$. Il suffit de considérer par exemple l'application logarithme définie sur l'ouvert $]0, +\infty[$ de $\mathbb{R}$.

4.7 Autres exercices

Exercice E.57. Considérons l'application $f : \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(x, y, z) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, notons $M_t = f^{-1}(t)$, appelée l'*hypersurface de niveau t* de f .

- (1) Montrer que l'application f est lisse et calculer la différentielle de f en tout point de $\mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R})$.
- (2) Déterminer les points critiques de f (c'est-à-dire les points de $\mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R})$ en lesquels f n'est pas une submersion, c'est-à-dire en lesquels la différentielle de f n'est pas surjective, voir la partie 5 pour des développements). Calculer les valeurs critiques de f (c'est-à-dire les valeurs de f en ses points critiques).
- (3) Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ l'hypersurface de niveau M_t est-elle une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$?

- (4) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que M_t soit une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$, déterminer l'espace tangent à M_t en tout point de M_t .
- (5) Dessiner $M_{\frac{1}{4}}$.

Exercice E.58.

- (1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une application de classe C^∞ . Notons

$$X = \{x(z, \theta) = (f(z) \cos \theta, f(z) \sin \theta, z) : z \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}\}$$

la *surface de révolution* autour de l'axe Oz engendrée par f (voir la partie 8.4 pour des développements). Pour tout $x = x(z, \theta)$ dans X , montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de x dans X et un voisinage ouvert V de $(0, 0, z)$ dans le plan $\mathbb{R}(-\sin \theta, \cos \theta, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1)$ tels que la projection orthogonale sur V soit un homéomorphisme de U dans V , dont la réciproque soit une immersion.

- (2) Soient $p, n \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe C^∞ . Notons

$$X = \{(f(z)x_1, \dots, f(z)x_p, z) : x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^p x_i^2 = 1, z \in \mathbb{R}^n\}$$

(une « surface de révolution en dimension $n + p$ »). Énoncer et démontrer un résultat analogue à celui de la première question.

Exercice E.59.

- (1) Notons $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application lisse définie par

$$x \mapsto (\cos x, \sin x) .$$

Montrer que f_1 est une immersion lisse et un paramétrage local lisse du cercle $\mathbb{S}_1$ en restriction à tout intervalle ouvert de longueur strictement inférieure à 2π .

- (2) (**Coordonnées sphériques de $\mathbb{S}_2$**) Notons $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application lisse définie par

$$(x, y) \mapsto (\cos x \cos y, \sin x \cos y, \sin y) .$$

Montrer que l'image de f_2 est la sphère $\mathbb{S}_2$. Déterminer le rang de la différentielle $d(f_2)_{(x,y)}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En quels points de $\mathbb{R}^2$ l'application f_2 est-elle une immersion ? Aux voisinages de quels points de $\mathbb{S}_2$ l'application f_2 est-elle un paramétrage local de $\mathbb{S}_2$?

- (3) (**Paramétrage de Hopf de $\mathbb{S}_3$**)⁷⁷ Notons $f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application lisse définie par

$$(x, y, z) \mapsto (\cos x \cos z, \sin x \cos z, \cos y \sin z, \sin y \sin z) .$$

Montrer que l'image de f_3 est la sphère $\mathbb{S}_3$. En quels points de $\mathbb{R}^3$ l'application f_3 est-elle une immersion ? Aux voisinages de quels points l'application f_3 est-elle un paramétrage local de $\mathbb{S}_3$?

Exercice E.60. Pour tous les $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$, notons $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel de dimension finie des matrices réelles de taille $n \times k$, et I_n la matrice identité $n \times n$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

⁷⁷. Voir les articles de Wikipedia sur les angles d'Euler et la fibration de Hopf.

- (1) Soient $J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \{x \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) : {}^t x J_n x = J_n\}$. Montrer que $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ et une sous-variété lisse de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Calculer sa dimension et l'espace tangent en son élément neutre.⁷⁸
- (2) Montrer que la *variété de Stiefel*

$$V_{n,k} = \{x \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}) : {}^t x x = I_k\},$$

est constituée des matrices de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont orthonormées. Montrer que $V_{n,k}$ est une sous-variété lisse de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$, calculer sa dimension et son espace tangent en $\begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}$. Identifier $V_{n,1}$ et $V_{n,n}$.

- (3) Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\ell \leq k$, considérons l'application $\pi_{k,\ell} : V_{n,k} \rightarrow V_{n,\ell}$ qui à une matrice $n \times k$ associe la matrice de ses ℓ premières colonnes. Montrer que pour tout $y \in V_{n,\ell}$, la partie $\pi_{k,\ell}^{-1}(y)$ est une sous-variété lisse de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ homéomorphe à $V_{n,k-\ell}$.

Exercice E.61. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, posons

$$H(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3 + ax + b\},$$

appelée une *courbe elliptique* réelle. Définissons le *discriminant* de $H(a, b)$ comme étant la quantité $\Delta(a, b) = -16(4a^3 + 27b^2)$.

- (1) Montrer que si $\Delta(a, b) \neq 0$, alors $H(a, b)$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^2$.
- (2) Supposons que $\Delta(a, b) = 0$. Pour quelles valeurs de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la courbe elliptique $H(a, b)$ est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^2$? Quel est sa régularité?
- (3) Pour quelles valeurs de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la courbe elliptique $H(a, b)$ est-elle connexe?
- (4) Dessiner l'allure de $H(-1, b)$ en fonction de b .

Exercice E.62. Soient k dans $(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$, M et N deux variétés C^k , $f : M \rightarrow N$ une application C^k , et x un point de M .

- (1) Montrer que f est de rang constant au voisinage de x si et seulement si l'application f s'écrit $i \circ s$ au voisinage de x , où s est une submersion C^k en x et i une immersion C^k en $s(x)$. En déduire que la troisième affirmation du théorème 4.8 découle des deux premières.
- (2) Montrer que si f est de rang constant au voisinage de x , alors f s'écrit $s \circ i$ au voisinage de x , où i est une immersion C^k en x et s est une submersion C^k en $i(x)$.
- (3) Montrer que si f est de rang constant, si g est une immersion et si g' est une submersion, alors $g \circ f \circ g'$ est de rang constant.
- (4) La composée de deux applications de rang constant est-elle de rang constant?

Exercice E.63. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit M une hypersurface lisse⁷⁹ compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$. Considérons l'application $\psi : M \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ qui à $x \in M$ associe la droite vectorielle $T_x M^\perp$ orthogonale à l'espace tangent $T_x M$ à M en x , appelée *l'application de Gauss* de l'hypersurface M .

78. Ce groupe $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, parfois noté $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ dans la littérature, est appelé le *groupe symplectique* de $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ muni de la forme symplectique $f((x, y), (x', y')) = {}^t y x' - {}^t x y'$ en identifiant tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec le vecteur colonne de ses composantes.

79. c'est-à-dire une sous-variété C^∞ de codimension 1

- (1) Montrer que l'application de Gauss ψ est lisse.
- (2) Pour tout $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, calculer l'application tangente en tout point de M de l'application de M dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \langle x, v \rangle$.
- (3) En déduire que pour tout hyperplan vectoriel H de $\mathbb{R}^{n+1}$, il existe au moins un point $x \in M$ tel que $T_x M = H$.

Exercice E.64. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\pi_n : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ la projection canonique. Considérons l'application $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^6 \setminus \{0\}$ définie par

$$(x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, yz, xz, xy) .$$

- (1) Montrer que l'application f est une immersion.
- (2) Montrer que pour tout polynôme réel homogène⁸⁰ P de degré $k \in \mathbb{N}$ en $n+1$ variables, nous avons $dP_u(u) = k P(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^{n+1}$.
- (3) Montrer que la projection canonique π_n est lisse. Pour tout $u \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, calculer le noyau de l'application tangente $T_u(\pi_n)$ de π_n en u . Pour tout $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, calculer le noyau de l'application tangente $T_u(\pi_5 \circ f)$ de $\pi_5 \circ f$ en u .
- (4) En déduire que la restriction $\pi_5 \circ f|_{\mathbb{S}_2}$ de l'application $\pi_5 \circ f$ à la sphère $\mathbb{S}_2$ est une immersion.
- (5) Montrer que l'application $\pi_5 \circ f|_{\mathbb{S}_2}$ induit par passage au quotient un plongement lisse⁸¹ $V : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_5(\mathbb{R})$, appelé le *plongement de Veronese* du plan projectif réel.

Exercice E.65. (Classification des variétés de dimension 1)

- (1) Montrer qu'une variété topologique compacte connexe de dimension 1 est homéomorphe au cercle $\mathbb{S}_1$. Montrer qu'une variété topologique connexe non compacte de dimension 1 est homéomorphe à $\mathbb{R}$. En déduire qu'une variété topologique de dimension 1 est somme disjointe d'un ensemble dénombrable d'espaces homéomorphes à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{S}_1$.
- (2) Soit $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$. Montrer qu'une variété C^k compacte connexe de dimension 1 est C^k -difféomorphe au cercle $\mathbb{S}_1$. Montrer qu'une variété C^k connexe non compacte de dimension 1 est C^k -difféomorphe à $\mathbb{R}$. En déduire qu'une variété C^k de dimension 1 est somme disjointe d'un ensemble dénombrable de variétés C^k -difféomorphes à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{S}_1$.⁸²
- (3) Montrer qu'il n'existe, à C^∞ -difféomorphisme près, qu'une et une seule structure de variété C^∞ sur une variété topologique de dimension 1.

4.8 Indications pour la résolution des exercices

Correction de l'exercice E.49. (1) Par le critère pratique (63) de la partie A.1.1 de l'appendice A, il existe une et une seule topologie sur X telle que pour tout élément $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la famille des intervalles $]t - \epsilon, t + \epsilon[$ pour $\epsilon \in]0, |t|[$, ainsi que les deux familles

80. c'est-à-dire somme finie de monômes de même degré total k , ou de manière équivalente vérifiant $P(\lambda u) = \lambda^k P(u)$ pour tous les $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^{n+1}$

81. c'est-à-dire une immersion lisse qui est un homéomorphisme sur son image

82. Voir le théorème 5.7 lorsque $k = \infty$, dont la démonstration s'adapte pour tout $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$, après avoir utilisé le théorème de plongement de Whitney pour passer des variétés aux sous-variétés.

des $] - \epsilon, 0[\cup \{0^\pm\} \cup] 0, +\epsilon[$ pour $\epsilon > 0$, soient des systèmes fondamentaux de voisinages de respectivement $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $0^\pm$ dans X . Pour cette topologie, les deux applications $\varphi_\pm : \mathbb{R} \rightarrow X$ sont clairement des homéomorphismes sur leur image, puisqu'elles envoient systèmes fondamentaux de voisinages sur systèmes fondamentaux de voisinages.

Réciproquement, pour toute topologie sur X telle que les deux applications $\varphi_\pm : \mathbb{R} \rightarrow X$ soient des homéomorphismes, les familles ci-dessus sont des systèmes fondamentaux de voisinages de respectivement t et $0^\pm$ dans X . Comme une topologie est déterminée par la donnée d'un système fondamental de voisinages de chacun de ses points, ceci montre l'unicité.

L'espace topologique X n'est pas séparé pour la même raison que celle pour l'exercice E.A.99 de la partie A.1.4 de l'appendice A : tout voisinage de 0^+ rencontre tout voisinage de 0^- (et $0^+ \neq 0^-$). Le fait que tout point admette un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}$ vient de l'existence des homéomorphismes $\varphi_\pm$, dont les deux images recouvrent X .

(2) Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et (ϕ_t) le flot local du champ de vecteurs X sur Ω . Pour tout $x \in \Omega$, notons I_x l'intervalle ouvert de définition de l'application $t \mapsto \phi_t(x)$. Soient $x \in \Omega$ et v un vecteur linéairement indépendant de $X(x)$. Montrons que si $\epsilon > 0$ est assez petit, alors l'application de $[-\epsilon, +\epsilon]$ dans $\Omega/\sim$ définie par $t \mapsto \phi_{I_{x+vt}}(x + vt)$ est un homéomorphisme sur un voisinage de la courbe intégrale $\phi_{I_x}(x)$ de x . Par le théorème 6.14, à translation et difféomorphisme local près, nous pouvons supposer que $x = 0$, que dans un voisinage U de x , le champ de vecteurs soit le champ de vecteurs constant e_1 et que $v = e_2$. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que pour tous les $t, y \in [-\epsilon, +\epsilon]$, nous ayons $\phi_t(0, y) = (t, y)$.

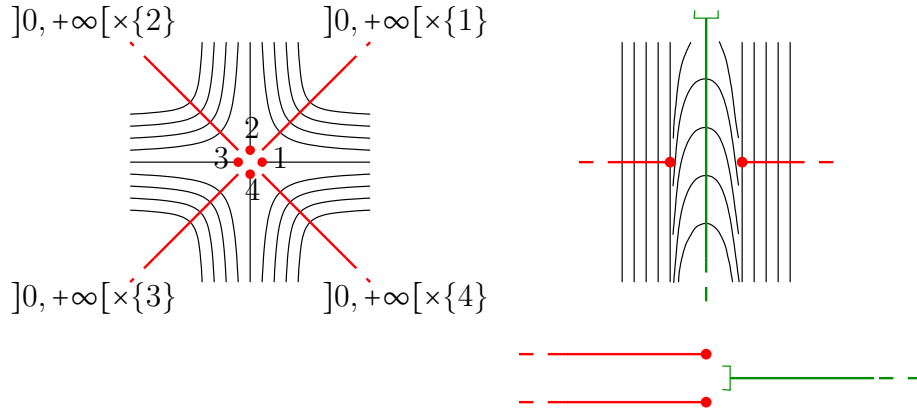
Notons $\bar{y} = \phi_{I_{(0,y)}}(0, y)$ la courbe intégrale de X passant par $(0, y)$ et I le segment compact $\{0\} \times [-\epsilon, +\epsilon]$. Puisque toute courbe intégrale est fermée, l'intersection $\bar{y} \cap I$ est compacte. Supposons par l'absurde que cette intersection ne soit pas finie. Alors elle s'accumule non trivialement sur elle-même, et par la continuité du flot, aucun point de $\bar{y} \cap I$ n'est isolé. Rappelons qu'un compact non vide sans point isolé d'un intervalle est non dénombrable, donc $\bar{y} \cap I$ est non dénombrable. La courbe intégrale $\bar{y}$ contient un ensemble non dénombrable d'ouverts deux à deux disjoints $] - \epsilon, +\epsilon[\times \{y'\}$ pour $y' \in \bar{y} \cap I$. Ceci contredit le fait que $\bar{y}$ est séparable, car $\mathbb{R}$ l'est et le flot ϕ est continu.

Donc quitte à diminuer ϵ , nous pouvons supposer que toute courbe intégrale passant par un point de I ne rencontre I qu'en ce point. Un argument analogue montre que si x et y sont deux points distincts de I , alors les saturés par le flot des orbites de voisinages ouverts disjoints U_x et U_y de x et y respectivement dans I sont ouverts et disjoints.

La restriction à I de la projection canonique $\Omega \rightarrow \Omega/\sim$ est donc continue et injective, de source compacte et de but séparé, donc un homéomorphisme sur son image. Ceci montre que l'espace topologique quotient $\Omega/\sim$ est localement homéomorphe à $\mathbb{R}$.

L'espace des feuilles du premier feuilletage donné⁸³ est homéomorphe à l'ensemble somme disjointe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} (]0, +\infty[\times \{i\})$ muni de l'unique topologie qui coïncide avec la topologie usuelle sur $]0, +\infty[\times \{i\}$ et dont un système fondamental de voisinages de $i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est l'ensemble des parties $\{U_\epsilon : \epsilon > 0\}$ où $U_\epsilon = (]0, \epsilon[\times \{i\}) \cup \{i\} \cup (]0, \epsilon[\times \{i+1\})$. Il est non séparé pour la même raison que celle pour l'exercice E.A.99 de la partie A.1.4 de l'appendice A : tout voisinage de i rencontre tout voisinage de $i+1$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

⁸³. que nous pouvons par exemple voir comme l'espace des courbes intégrales du champ de vecteurs $X : re^{i\theta} \mapsto e^{-i\theta}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$



L'espace des feuilles du second feuilletage donné est homéomorphe à l'ensemble somme disjointe $(]-\infty, 0] \times \{+\}) \cup (]-\infty, 0] \times \{-}) \cup]0, +\infty[$ (deux demi-droites fermées en rouge sur le dessin et une demi-droite ouverte en vert sur le dessin) muni de l'unique topologie qui coïncide avec la topologie usuelle sur $]-\infty, 0] \times \{\pm\}$ et $]0, +\infty[$, et dont un système fondamental de voisinages de $(0, \pm)$ est l'ensemble des parties $\{U_\epsilon^\pm : \epsilon > 0\}$ où $U_\epsilon^\pm = (]-\epsilon, 0] \times \{\pm\}) \cup]0, \epsilon[$. Il est non séparé pour la même raison que celle pour l'exercice E.A.99 de la partie A.1.4 de l'appendice A : tout voisinage de $(0, +)$ rencontre tout voisinage de $(0, -)$.

Correction de l'exercice E.51. Puisque le problème est local et invariant par difféomorphismes ambiants, nous pouvons supposer par le théorème C.6 (voir l'appendice C) de forme normale locale des applications de rang constant r que $y_0 = 0$ et que f est l'application de rang constant r linéaire définie par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$, auquel cas l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = y_0$ est le sous-espace vectoriel $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-r}$ de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$, qui est bien une sous-variété de dimension $n - r$.

Correction de l'exercice E.52. Le sous-espace M du plan est le graphe de l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto 0$ si $x \leq 0$ et $x \mapsto x^n$ si $x \geq 0$. Cette application est de classe C^{n-1} , donc M est une sous-variété de classe C^{n-1} par la définition locale par graphe 4.5 (3) des sous-variétés.

La pente de la droite tangente $T_{(x,y)}M$ en un point (x, y) de M est égale à 0 si $x \leq 0$ et à $n x^{n-1}$ si $x \geq 0$. Si M était de classe C^n , cette pente serait de classe C^{n-1} , ce qui n'est pas le cas.

Correction de l'exercice E.53. Le groupe des rotations $SO(n)$ agit de manière linéaire donc de manière lisse sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Il préserve la sphère $\mathbb{S}_n$, et agit transitivement dessus. Il suffit donc de montrer que $\mathbb{S}_n$ est une sous-variété lisse de codimension 1 au voisinage de son pôle Nord $N = (1, 0, \dots, 0)$ en utilisant chacune des caractérisations (1), (3) et (4) du théorème 4.5.

L'application de la boule ouverte $\mathbb{B}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}, x_1, \dots, x_n)$ est une application lisse car l'application $t \mapsto \sqrt{t}$ est lisse sur $]0, +\infty[$. Elle envoie le point 0 de $\mathbb{B}_n$ sur N et $\mathbb{B}_n$ sur l'hémisphère nord ouvert $H_N = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}_n : x_0 > 0\}$ de $\mathbb{S}_n$, qui est un ouvert de $\mathbb{S}_n$. C'est un homéomorphisme sur son image (d'inverse la projection sur les n dernières coordonnées, qui est continue). C'est une immersion car les n dernières colonnes de sa

matrice jacobienne sont les colonnes de la matrice identité $n \times n$. C'est donc un paramétrage local de $\mathbb{S}_n$ en N , ce qui montre qu'elle vérifie la définition (4) du théorème 4.5.

Par ce qui précède, sur cet hémisphère ouvert H_N , la sphère est (à permutation de coordonnées près) le graphe de l'application lisse de l'ouvert $\mathbb{B}_n$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}$. Ceci montre qu'elle vérifie la définition (3) du théorème 4.5.

Enfin, l'application ψ de l'ouvert $\mathbb{B}_n \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$((x_1, \dots, x_n), r) \mapsto (r+1)(\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}, x_1, \dots, x_n)$$

est une application lisse à valeurs dans le voisinage ouvert de l'hémisphère nord constitué des points à distance radiale strictement inférieure à $\frac{1}{2}$ de cet hémisphère. Elle est bijective de bijection réciproque l'application lisse

$$(y_0, y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\left(\frac{y_1}{\sqrt{y_0^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2}}, \dots, \frac{y_n}{\sqrt{y_0^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2}} \right), \sqrt{y_0^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2} - 1 \right).$$

Donc ψ est un difféomorphisme lisse, dont l'inverse est une application de redressement de l'hémisphère nord ouvert sur la boule ouverte $\mathbb{B}_n \times \{0\}$. Ceci montre que la sphère $\mathbb{S}_n$ vérifie la définition (1) du théorème 4.5.

Correction de l'exercice E.54. (1) Rappelons que $\mathbb{S}_1 = \mathbb{T}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, et que pour tout $w \in \mathbb{S}_1$, l'application de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{S}_1$ définie par $t \mapsto w e^{it}$ est un paramétrage local de $\mathbb{S}_1$ en w (paramétrant le demi-cercle ouvert centré en w). Par la définition de la topologie produit, l'application de $(\mathbb{S}_1)^n$ dans $\mathbb{T}^n$ définie par $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_n)$ est clairement un homéomorphisme, d'inverse l'application $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_n)$. Par définition de la structure de sous-variété produit, pour tout $(w_1, \dots, w_n)$ fixé dans $(\mathbb{S}_1)^n$, l'application ψ de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^n$ dans $(\mathbb{S}_1)^n$ définie par $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (w_1 e^{it_1}, \dots, w_n e^{it_n})$ est un paramétrage local lisse de $(\mathbb{S}_1)^n$. Or ψ est aussi une immersion lisse de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^n$ dans $\mathbb{C}^n$, car sa différentielle en $(t_1, \dots, t_n)$, qui se calcule composante par composante, est l'application linéaire injective

$$d\psi_{(t_1, \dots, t_n)} : (T_1, \dots, T_n) \mapsto (i w_1 e^{it_1} T_1, \dots, i w_n e^{it_n} T_n).$$

L'application ψ est un homéomorphisme sur son image, qui est un ouvert de $\mathbb{T}^n$ contenant $(w_1, \dots, w_n)$. Donc ψ est aussi un paramétrage local en $(w_1, \dots, w_n)$ de la sous-variété $\mathbb{T}^n$. Ceci montre que les deux structures de sous-variétés coïncident.

(2) Notons T le tore de révolution. Considérons l'application f de $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \mapsto (x = (2 + \cos \varphi) \cos \theta, y = (2 + \cos \varphi) \sin \theta, z = \sin \varphi).$$

Par construction, son image est égale à T . Puisque les applications $(\theta, \varphi) \mapsto (e^{i\theta}, e^{i\varphi})$ définies sur des ouverts U de diamètre au plus π de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ sont des paramétrages locaux de $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$, l'application f est une application lisse. C'est un homéomorphisme sur son image, car son inverse est donné par

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (\sqrt{x^2 + y^2} - 2) + iz \right).$$

De plus, l'application f est une immersion, car la différentielle au point (θ, φ) de l'application $(\theta', \varphi') \mapsto f(e^{i\theta'}, e^{i\varphi'})$ est l'application linéaire

$$(\Theta, \Phi) \mapsto \begin{pmatrix} -(\sin \varphi)(\cos \theta) \Phi - (2 + \cos \varphi)(\sin \theta) \Theta, \\ -(\sin \varphi)(\sin \theta) \Phi + (2 + \cos \varphi)(\cos \theta) \Theta, (\cos \varphi) \Phi \end{pmatrix},$$

que l'on vérifie aisément être injective, en discutant suivant que $\cos \varphi = 0$ ou pas. Donc f est un plongement lisse de $\mathbb{T}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ d'image T . Il découle alors de la proposition 4.10 que T est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$ et que l'application f est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{T}^2$ sur T .

Correction de l'exercice E.55. Puisque $\{(\mathbb{S}_n \setminus \{i\}, p_i)\}_{i \in \{S, N\}}$ est un atlas de cartes de la structure standard de variété sur $\mathbb{S}_n$, il suffit de montrer que pour tout $i \in \{S, N\}$ l'application $p_i^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}_n \setminus \{i\}$ est un paramétrage local de la structure de sous-variété lisse de $\mathbb{S}_n$. Nous le montrons pour le pôle Nord, l'argument pour le pôle Sud est le même (nous pourrions aussi utiliser le fait que l'antipodie est un difféomorphisme à la fois pour la structure de variété standard et celle de sous-variété de $\mathbb{S}_n$).

Un calcul élémentaire (voir la correction de l'exercice E.A.117 (8) dans la partie A.6 de l'appendice A) montre que $f = p_N^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est l'application

$$y = (y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(f_0(y) = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2 - 1}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}, f_1(y) = \frac{2y_1}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}, \dots, f_n(y) = \frac{2y_n}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2} \right).$$

En tant qu'application à coordonnées des fractions rationnelles de dénominateur ne s'annulant pas, cette application est lisse. Nous savons déjà que c'est un homéomorphisme sur son image (qui est un ouvert de $\mathbb{S}_n$), puisque son inverse est la projection stéréographique p_N . En identifiant le groupe des rotations $\text{SO}(n)$ avec son image dans $\text{SO}(n+1)$ par $A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, pour tous les $A \in \text{SO}(n)$ et $y \in \mathbb{R}^n$, nous avons $f(Ay) = Af(y)$. Puisque les rotations sont des difféomorphismes et puisqu'elles agissent transitivement sur les demi-droites vectorielles, pour montrer que f est une immersion, il suffit de le faire en un point $y' = (y_1, y_2 = 0, \dots, y_n = 0)$ où $y_1 \geq 0$.

Notons $f_0, f_1, \dots, f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ les composantes de f et $r^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = y_1^2$. La matrice jacobienne $Jf_{y'} \in \mathcal{M}_{n+1, n}(\mathbb{R})$ de f en y' se calcule aisément, et nous avons

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(y') = \begin{cases} -\frac{4y_i y_j}{(1+r^2)^2} = 0 & \text{si } i \neq 0 \text{ et } i \neq j \\ \frac{2(1+r^2-2y_i^2)}{(1+r^2)^2} = \frac{2}{1+y_1^2} & \text{si } i \neq 0, 1 \text{ et } i = j \\ \frac{2(1+r^2-2y_i^2)}{(1+r^2)^2} = \frac{2(1-y_1^2)}{(1+y_1^2)^2} & \text{si } i = j = 1. \end{cases}$$

Si $y_1 \neq 1$, la sous-matrice carrée $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(y')\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ de la matrice $Jf_{y'}$ est diagonale à coefficients diagonaux non nuls. Elle est donc inversible et f est une immersion en y' . Si $y_1 = 1$, nous avons

$$\frac{\partial f_0}{\partial y_1}(y') = \frac{2y_1}{1+r^2} - \frac{(r^2-1)(2y_1)}{(1+r^2)^2} = 1.$$

La sous-matrice carrée $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(y')\right)_{0 \leq i \leq n, i \neq 1, 1 \leq j \leq n}$ est donc triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls. Par conséquent, l'application f est encore une immersion en y' . Nous avons donc bien montré que f est un paramétrage local de la sous-variété $\mathbb{S}_n$.

Correction de l'exercice E.56. (1) Considérons l'application $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{S}_1)^n$ définie par $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (e^{2i\pi t_1}, \dots, e^{2i\pi t_n})$. C'est un C^∞ -difféomorphisme local, qui passe au quotient en une bijection continue entre espaces compacts, donc un homéomorphisme, $f : \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \rightarrow (\mathbb{S}_1)^n$. Cet homéomorphisme f , qui est un C^∞ -difféomorphisme local par la dernière affirmation de la proposition 4.16, est donc un C^∞ -difféomorphisme entre la structure de variété quotient de $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ et la structure de variété produit de $(\mathbb{S}_1)^n$.

(2) Montrons que la projection canonique $\tilde{f} : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est un C^∞ -difféomorphisme local entre la structure de sous-variété de $\mathbb{S}_n$ et la structure de variété de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ définie par les coordonnées homogènes. L'application $\tilde{f}$ est équivariante pour les actions de $SO(n)$ par rotations sur $\mathbb{S}_n$ et par transformations projectives sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Ces deux actions sont des actions par C^∞ -difféomorphismes, comme cela se vérifie en cartes locales. Il suffit donc par transitivité de montrer que $\tilde{f}$ est un C^∞ -difféomorphisme local au voisinage du point $(1, 0, \dots, 0)$. L'application $\tilde{f}$ lue dans les paramétrages locaux $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\sqrt{1 - \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^2}, x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{S}_n$ et $(t_1, \dots, t_n) \mapsto [1 : t_1 : \dots : t_n]$ de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{\sqrt{1 - \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^2}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{1 - \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^2}} \right)$, qui est un C^∞ -difféomorphisme local au voisinage de 0. Le résultat en découle.

Maintenant, comme dans la question (1), la projection canonique $\tilde{f}$ passe au quotient en un homéomorphisme $f : ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{S}_n) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, qui est un C^∞ -difféomorphisme local par la dernière affirmation de la proposition 4.16. Donc f est C^∞ -difféomorphisme entre la structure de variété quotient de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{S}_n$ et la structure de variété de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ définie par les coordonnées homogènes.

Correction de l'exercice E.57. (1) Par le théorème de dérivation des fonctions composées, l'application f est différentiable sauf aux points $(0, 0, z)$ pour $z \in \mathbb{R}$. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, la différentielle $df_{(x,y,z)}$ est alors la forme linéaire

$$(X, Y, Z) \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} (\sqrt{x^2 + y^2} - 1) X + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} (\sqrt{x^2 + y^2} - 1) Y + 2zZ$$

(2) Cette différentielle est surjective en tout point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R})$ sauf si $x^2 + y^2 = 1$ et $z = 0$, c'est-à-dire sauf si $t = f(x, y, z)$ vaut 0.

(3) Par le théorème des submersions (voir la définition (2) du théorème 4.5), l'hyper-surface de niveau M_t est une sous-variété lisse (de codimension 1 donc de dimension 2) si $t \neq 0$.

Montrons que l'hyper-surface de niveau $M_0 = f^{-1}(0)$ n'est pas une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$. Le cercle $\mathbb{S}_1 \times \{0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ est contenu dans M_0 . Si $\epsilon > 0$ est assez petit, alors l'intersection avec M_0 de la boule de centre $(1, 0, 0)$ et de rayon ϵ privée de son intersection avec $\mathbb{S}_1 \times \{0\}$ admet quatre composantes connexes (obtenues en variant le signe de z et le signe de $\sqrt{x^2 + y^2} - 1$). Or cette intersection ne devrait avoir que deux composantes connexes si M_0 était une sous-variété au voisinage de 0.

(4) Par la proposition 4.12 (2), pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x^2 + y^2 \neq 1$ et $z \neq 0$, l'espace tangent à M_t en $f(x, y, z)$ vaut le plan vectoriel $\text{Ker } df_{(x,y,z)}$, égal à

$$\{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} (\sqrt{x^2 + y^2} - 1) X + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} (\sqrt{x^2 + y^2} - 1) Y + 2zZ = 0\}.$$

Correction de l'exercice E.58. (1) L'application $x : (z, \theta) \mapsto x(z, \theta)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ est clairement lisse (chacune de ses trois composantes l'est). Sa matrice jacobienne en (z, θ) est

$$\begin{pmatrix} f'(z) \cos \theta & -f(z) \sin \theta \\ f'(z) \sin \theta & f(z) \cos \theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme f ne s'annule pas et comme $\sin \theta$ et $\cos \theta$ ne s'annulent pas simultanément, les deux colonnes sont linéairement indépendantes. Donc l'application x est de rang 2 et x est une immersion en tout point de $\mathbb{R}^2$. L'application x passe au quotient en une application $\bar{x}$ continue et injective de l'espace localement compact $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ dans l'espace localement compact $\mathbb{R}^3$. De plus, l'application $\bar{x}$ est propre en regardant la dernière coordonnée. C'est donc un homéomorphisme sur son image. L'application $\bar{x}$ est donc un C^∞ -plongement.

(2) La même démonstration (en prenant des paramétrages locaux de la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$ pour montrer le caractère immersif) montre que l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_{n-1}$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $(z, (x_1, \dots, x_n)) \mapsto (f(z)x_1, \dots, f(z)x_n, z)$ un C^∞ -plongement, donc que son image est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ qui est C^∞ -difféomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_{n-1}$.

Correction de l'exercice E.59. (1) L'application f_1 est clairement lisse (chacune de ses composantes l'est) et à valeurs dans $\mathbb{S}_1$. Sa différentielle en tout $x \in \mathbb{R}$ est l'application $d_x f_1 : h \mapsto (-(\sin x)h, (\cos x)h)$, qui est injective car $\sin x$ et $\cos x$ ne s'annulent pas simultanément. Donc f est une immersion en tout point. Si $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert avec $0 < b - a < 2\pi$, alors l'application $f : \bar{I} \rightarrow \mathbb{S}_1$ est continue et injective, d'espace de départ compact, à valeurs dans un espace séparé, donc un homéomorphisme sur son image. Donc $f : I \rightarrow \mathbb{S}_1$ est un homéomorphisme sur son image, et par conséquent est un paramétrage local de $\mathbb{S}_1$.

(2) L'application f_2 est clairement lisse (chacune de ses composantes l'est) et à valeurs dans $\mathbb{S}_2$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{S}_2$, montrons qu'il appartient à l'image de f_2 . Si $a = b = 0$, alors $c = \pm 1$ et nous pouvons prendre $y = \pm \frac{\pi}{2}$ (et n'importe quel x). Supposons $(a, b) \neq 0$. Puisque $c \in [-1, 1]$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $c = \sin y$. Alors $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \cos y$, quitte à remplacer y par $\pi - y$ ce qui ne change pas $\sin y$. Par l'existence des coordonnées polaires, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $(a, b) = (\rho \cos x, \rho \sin x)$, ce qui montre la surjectivité de f_2 .

La matrice jacobienne de f_2 en (x, y) est $J = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ \cos x \cos y & -\sin x \sin y \\ 0 & \cos y \end{pmatrix}.$

Si $y \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ (ce qui équivaut à $\cos y = 0$), alors cette matrice vaut $\begin{pmatrix} 0 & \pm \cos x \\ 0 & \pm \sin x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$ Elle

est alors de rang 1 car $\sin x$ et $\cos x$ ne s'annulent pas simultanément. En particulier f_2 n'est alors pas une immersion en (x, y) , donc n'est pas un paramétrage local en $f_2(x, y)$.

Si $y \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, alors la seconde colonne de J est non nulle. La première colonne de J n'est pas un multiple non nul de la seconde, et est un multiple non nul d'un vecteur colonne non nul, toujours car $\sin x$ et $\cos x$ ne s'annulent pas simultanément. Donc J est de rang 2. Par le théorème d'inversion locale appliqué à l'application f lue (au but) dans un paramétrage local de la sphère, l'application f_2 est donc une immersion en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, et un paramétrage local au voisinage de l'image de ce point par f_2 .

(3) L'application f_3 est clairement lisse (chacune de ses composantes l'est) et à valeurs dans $\mathbb{S}_3$. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{S}_3$, montrons que ce point appartient à l'image de f_3 . Posons

$\sigma = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\rho = \sqrt{c^2 + d^2}$. Puisque $\sigma^2 + \rho^2 = 1$, il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $\sigma = \cos z$ et $\rho = \sin z$. Par coordonnées polaires, il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $(a, b) = (\sigma \cos x, \sigma \sin x)$ et $(c, d) = (\rho \cos y, \rho \sin y)$, ce qui montre la surjectivité de f_3 .

La matrice jacobienne de f_3 en (x, y, z) est $J = \begin{pmatrix} -\sin x \cos z & 0 & -\cos x \sin z \\ \cos x \cos z & 0 & -\sin x \sin z \\ 0 & -\sin y \sin z & \cos y \cos z \\ 0 & \cos y \sin z & \sin y \cos z \end{pmatrix}$.

Si $z \in \pi\mathbb{Z}$, alors cette matrice vaut $\begin{pmatrix} -\pm \sin x & 0 & 0 \\ \pm \cos x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm \cos y \\ 0 & 0 & \pm \sin y \end{pmatrix}$, donc est de rang 2, d'où f_3 n'est

pas une immersion en (x, y, z) . De même, si $z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, alors $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\pm \cos x \\ 0 & 0 & -\pm \sin x \\ 0 & -\pm \sin y & 0 \\ 0 & \pm \cos y & 0 \end{pmatrix}$

est de rang 2, donc f_3 n'est pas une immersion en (x, y, z) .

Si $z \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, alors J a le même rang que la matrice $\begin{pmatrix} -\sin x & 0 & -\cos x \sin z \\ \cos x & 0 & -\sin x \sin z \\ 0 & -\sin y & \cos y \cos z \\ 0 & \cos y & \sin y \cos z \end{pmatrix}$, dont

les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes. Montrons que la troisième colonne n'est pas combinaison linéaire des deux premières. Sinon il existerait $a \in \mathbb{R}$ tel que $-\cos x \sin z = -a \sin x$ et $-\sin x \sin z = a \cos x$. Donc en prenant des carrés et en sommant, nous aurions $\sin^2 z = a^2$, et en particulier $a \neq 0$. Si par exemple $\sin z = a$, en simplifiant, nous aurions $\cos x = -\sin x = -\cos x$, ce qui contredit le fait que $\sin x$ et $\cos x$ ne s'annulent pas simultanément. Donc J est de rang 3. Comme dans la question (2), l'application f_3 est une immersion en tout point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $z \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Par le théorème d'inversion locale, f_3 est donc un paramétrage local au voisinage de l'image de ce point par f_3 .

Correction de l'exercice E.60. (1) Pour tout $g \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, l'application de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par $x \mapsto gx$ est un C^∞ -difféomorphisme (car linéaire d'inverse $x \mapsto g^{-1}x$), qui préserve $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ puisque $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est un groupe, et qui envoie I_{2n} sur g . Donc pour montrer que $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est une sous-variété au voisinage de g , il suffit de montrer que $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est une sous-variété au voisinage de I_{2n} .

Notons $\mathrm{Asym}_{2n} = \{x \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) : {}^t x = -x\}$, et remarquons que J_n appartient à Asym_{2n} . L'application $F : \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Asym}_{2n}$ définie par $x \mapsto {}^t x J_n x$ (qui est bien définie car ${}^t({}^t x J_n x) = {}^t x {}^t J_n x = -{}^t x J_n x$) est C^∞ (car polynomiale en les coefficients). Elle envoie I_{2n} sur J_n . Sa différentielle en I_{2n} est l'application $dF_{I_{2n}} : X \mapsto {}^t X J_n + J_n X$ de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dans Asym_{2n} . Cette différentielle est surjective. En effet, pour tout élément Y de Asym_{2n} , si $X = -\frac{1}{2}J_n Y$, alors puisque ${}^t Y = -Y$, ${}^t J_n = -J_n$ et $J_n^2 = -I_{2n}$, nous avons

$${}^t X J_n + J_n X = -\frac{1}{2} {}^t Y {}^t J_n J_n - \frac{1}{2} J_n J_n Y = -\frac{1}{2} Y J_n J_n - \frac{1}{2} J_n J_n Y = Y.$$

Donc $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = F^{-1}(J_n)$ est un fermé (car F est continue), et une sous-variété lisse au voisinage de I_{2n} par le théorème 4.5 (2). Son espace tangent en I_{2n} est

$$T_{I_{2n}} \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} dF_{I_{2n}} = \{X \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) : {}^t X J_n = -J_n X\}$$

par la proposition 4.12 (2). Toujours par le théorème 4.5 (2), la dimension de $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est égale à la différence entre la dimension de l'espace de départ et celle de l'espace d'arrivée, donc $(2n)^2 - \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$.

(2) La première affirmation est évidente par la définition du produit matriciel, car une matrice colonne x est de norme 1 si et seulement si ${}^t x x = 1$ et deux matrices colonnes x et y sont orthogonales si et seulement si ${}^t x y = 0$.

Nous allons utiliser comme dans la question (1) la méthode des surfaces de niveau régulières/des submersions/des fonctions implicites, voir le théorème 4.5 (2). Considérons l'application $f : \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Sym}_k$, que nous noterons $f^{(k)}$ dans la question (3) où il conviendra de préciser l'entier k , définie par $x \mapsto {}^t x x$, de sorte que $f^{-1}(I_k) = V_{n,k}$. Elle est lisse car polynomiale en les coefficients. La différentielle de f en $x \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ est l'application

$$df_x = d(f^{(k)})_x : X \mapsto {}^t x X + {}^t X x .$$

Si $f(x) = I_k$, montrons que df_x est surjective. Pour tout $y \in \mathrm{Sym}_k$, posons $X = \frac{1}{2} x y$ (qui est bien définie, car x possède k colonnes et y possède k lignes, et qui appartient à $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$). Puisque ${}^t x x = I_k$ et comme y est symétrique, nous avons

$$df_x(X) = \frac{1}{2} {}^t x x y + \frac{1}{2} {}^t y {}^t x x = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} y = y .$$

Donc f est une submersion en tout point de $V_{n,k}$. Par le théorème 4.5 (2), le sous-espace $V_{n,k}$ de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ dont la dimension est

$$\dim \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}) - \dim \mathrm{Sym}_k = n k - \frac{k(k+1)}{2} .$$

Pour tous les $A \in \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{R})$, nous avons $({}^t I_k \ 0) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + ({}^t A \ {}^t B) \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ si et seulement si A est antisymétrique. Donc si $x = \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}$, alors

$$T_x V_{n,k} = \mathrm{Ker} df_x = \left\{ \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} : A \in \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{R}), {}^t A = -A \right\} . \quad (12)$$

L'application $x \mapsto {}^t x$ est un homéomorphisme de $V_{n,1}$ sur la sphère unité $\mathbb{S}_{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$. Par définition, nous avons $V_{n,n} = \mathrm{O}(n)$ (voir la liste des groupes matriciels classiques dans la partie 4.5).

(3) Représentons les éléments de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ comme des matrices par blocs $(C_1 \ \dots \ C_k)$ de leurs colonnes ou comme des matrices par blocs $\begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix}$ de deux matrices y et z à ℓ colonnes et à $k - \ell$ colonnes respectivement.

L'application $\pi_{k,\ell} : V_{n,k} \rightarrow V_{n,\ell}$ est la restriction aux sous-variétés $V_{n,k}$ et $V_{n,\ell}$ (bien définie car les ℓ premières colonnes d'une matrice à k colonnes orthonormées sont encore orthonormées) de l'application $(C_1 \ \dots \ C_k) \mapsto (C_1 \ \dots \ C_\ell)$ de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{R})$. Celle-ci est linéaire, donc de classe C^∞ et de différentielle en tout point égale à elle-même. Par conséquent, pour tout élément $x \in V_{n,k}$, en notant $y = \pi_{k,\ell}(x)$, l'application tangente $T_x \pi_{k,\ell} : T_x V_{n,k} \rightarrow T_y V_{n,\ell}$ de $\pi_{k,\ell}$ en x est la restriction de cette application linéaire. Montrons que $T_x \pi_{k,\ell}$ est surjective, ce qui montrera que $\pi_{k,\ell}$ est une submersion en x , donc que $\pi_{k,\ell}^{-1}(y)$ est une sous-variété lisse de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ par le théorème 4.5 (2).

Soit $Y \in T_y V_{n,\ell} \subset \mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{R})$. Par la question précédente (2) et puisque nous avons $T_x V_{n,\ell} = \mathrm{Ker} d(f^{(\ell)})_x$ (voir la proposition 4.12 (2) pour la justification de cette égalité,

ou la formule (12) ci-dessus avec $k = \ell$), nous avons ${}^tYy + {}^tyY = 0$. Soit $z \in \mathcal{M}_{n,k-\ell}(\mathbb{R})$ telle que $x = \begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix}$. Posons $Z = -y {}^tYz$, qui appartient à $\mathcal{M}_{n,k-\ell}(\mathbb{R})$ car $y \in \mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{R})$, ${}^tY \in \mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{R})$ et $z \in \mathcal{M}_{n,k-\ell}(\mathbb{R})$, et $X = \begin{pmatrix} Y & Z \end{pmatrix}$, qui appartient à $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$. Par la définition de X , puisque ${}^tYy + {}^tyY = 0$, par la définition de Z , puisque ${}^tyy = 1$ car $y \in V_{n,\ell}$, et enfin puisque ${}^tyz = 0$ et ${}^tzY = 0$ car $x = \begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix} \in V_{n,k}$ donc les colonnes de y sont orthogonales aux colonnes de z (et réciproquement!), nous avons

$$\begin{aligned} {}^tXx + {}^tXx &= \begin{pmatrix} {}^tY \\ {}^tZ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^ty \\ {}^tz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tYy + {}^tyY & {}^tYz + {}^tyZ \\ {}^tZy + {}^tzY & {}^tZz + {}^tzZ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & {}^tYz - {}^tyy {}^tYz \\ -{}^tzY {}^tyy + {}^tzY & -{}^tzY {}^tyz - {}^tzY {}^tYz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $X \in \text{Ker } d(f^{(k)})_x = T_x V_{n,k}$ et par construction $T_x \pi_{k,\ell}(X) = Y$, ce qui montre que $T_x \pi_{k,\ell}$ est surjective.

De plus, nous avons $\pi_{k,\ell}^{-1}(0) = \{(y, z) \in V_{n,k} : y = 0\}$ et l'application $(0, z) \mapsto z$ de $\pi_{k,\ell}^{-1}(0)$ dans $V_{n,k-\ell}$ (qui est bien à valeur dans $V_{n,k-\ell}$ car les colonnes de z sont orthonormées), est un C^∞ -difféomorphisme, comme restriction à deux sous-variétés d'une application linéaire d'inverse aussi restriction à deux sous-variétés de l'application linéaire $z \mapsto (0, z)$.

Correction de l'exercice E.61. (1) Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(x, y) \mapsto y^2 - x^3 - ax - b,$$

qui est de classe C^∞ (car polynomiale) et vérifie $f^{-1}(0) = H(a, b)$. Pour tout élément $(x, y) \in H(a, b)$, la différentielle de f en (x, y) est la forme linéaire

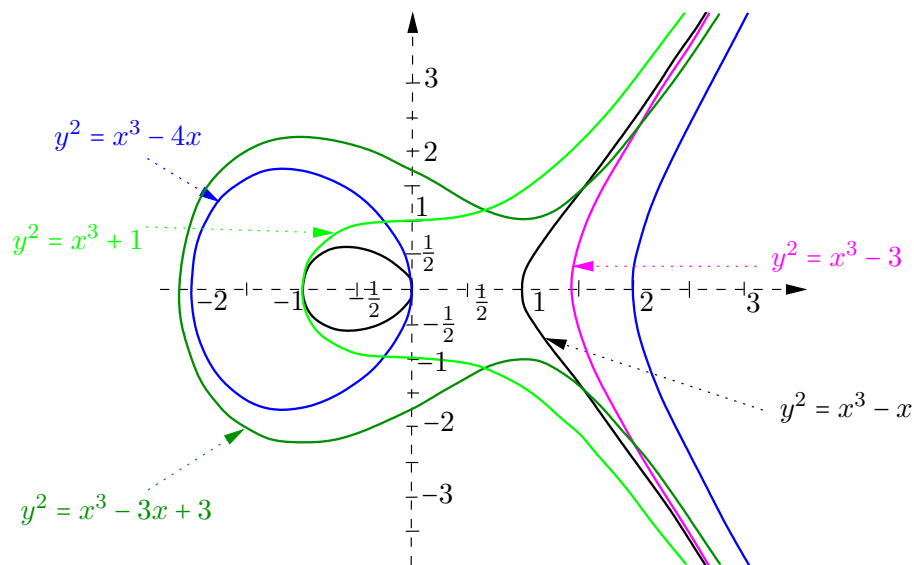
$$(X, Y) \mapsto (-3x^2 - a)X + (2y)Y.$$

Elle n'est passurjective si et seulement si elle est nulle, c'est-à-dire si et seulement si le système d'équations $\mathcal{S} : \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = -\frac{a}{3} \end{cases}$ est vérifié. Comme $(x, y) \in H(a, b)$, ce système $\mathcal{S}$ implique que $0 = -\frac{a}{3}x + ax + b$. Si $a = 0$, alors $\mathcal{S}$ est équivalent à $x = y = 0$ et implique que $b = 0$, donc que $\Delta(a, b) = 0$, ce qui n'est pas possible sous les hypothèses de cette

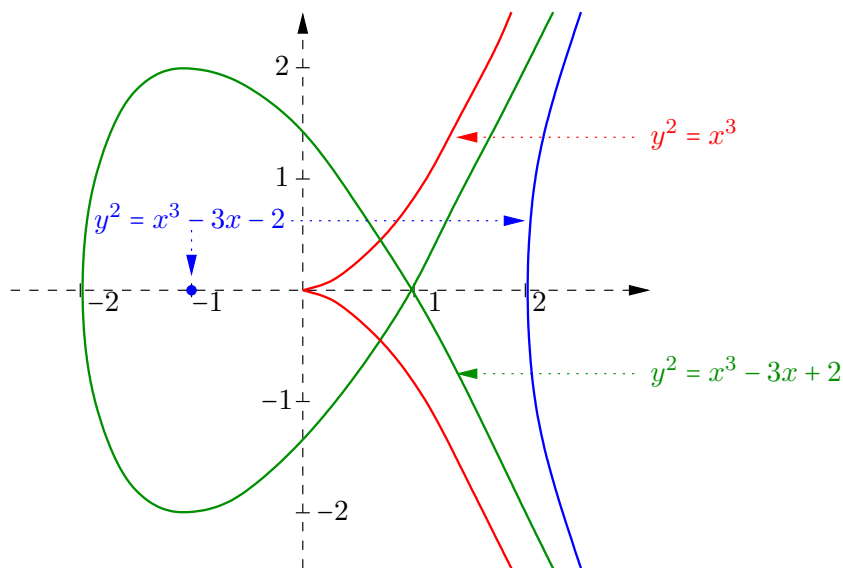
question (1). Si $a \neq 0$, le système $\mathcal{S}$ est équivalent au système $\begin{cases} y = 0 \\ x = -\frac{3b}{2a} \\ \left(\frac{3b}{2a}\right)^2 = -\frac{a}{3} \end{cases}$. La dernière

équation de ce dernier système est équivalente à $\Delta(a, b) = 0$, ce qui est exclu dans cette question (1). Donc f est une submersion en tout point de $H(a, b)$, qui est par conséquent une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^2$ par le théorème 4.5 (2), de dimension $2 - 1 = 1$ (en particulier $H(a, b)$ est une courbe lisse).

Dans le dessin ci-dessous, le discriminant $\Delta(a, b)$ de la courbe elliptique réelle $H(a, b)$ ne s'annule pas pour les valeurs $(a, b) = (-4, 0)$ en bleu foncé, $(a, b) = (0, 1)$ en vert clair, $(a, b) = (-3, 3)$ en vert foncé, $(a, b) = (0, -3)$ en rose et $(a, b) = (-1, 0)$ en noir.



(2) Supposons que $\Delta(a, b) = 0$. Si $a = 0$, alors $b = 0$ et $H(0, 0)$ est le graphe (en échangeant les deux axes de coordonnées) de l'application $y \mapsto x = y^{2/3}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui est lisse sauf en 0. L'application $y \mapsto (y^{2/3}, y)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $H(0, 0)$ (d'inverse la seconde projection), donc $H(0, 0)$ est une variété topologique. Elle est lisse en dehors de $(0, 0)$. La courbe topologique $H(0, 0)$ (dessinée en rouge ci-dessous) a un *point de rebroussement* en $(0, 0)$, en laquelle elle n'est pas une variété de classe C^1 . Par exemple, si elle était de classe C^1 , sa droite tangente en $(0, 0)$ serait par continuité l'axe horizontal. Mais la courbe $H(0, 0)$ n'est pas localement le graphe d'une fonction au dessus de l'axe horizontal, car la projection orthogonale sur cet axe n'est pas injective.



Rappelons (voir par exemple [Lan, V, §10], avec une convention de notation différente) que

- le *résultant* de deux polynômes complexes non constants P de degré m et Q de degré n est le déterminant $\text{Res}(P, Q)$ de l'application linéaire de $\mathbb{C}_{n-1}[X] \times \mathbb{C}_{m-1}[X] \rightarrow \mathbb{C}_{m+n-1}[X]$

définie par $(x, y) \mapsto Px + Qy$ dans les bases canoniques

$$((1, 0), (X, 0), \dots, (X^{n-1}, 0), (0, 1), (0, X), \dots, (0, X^{m-1})) \quad \text{et} \quad (1, X, \dots, X^{m-n-1});$$

- si $m = 3$ et $n = 2$, si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$, alors

$$\text{Res}(P, Q) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & b_0 \\ a_3 & a_2 & 0 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & b_2 \end{vmatrix}.$$

- Les deux polynômes complexes P et Q ont une racine commune si et seulement si $\text{Res}(P, Q) = 0$. En particulier, P a une racine multiple si et seulement si $\text{Res}(P, P') = 0$ où P' est le polynôme dérivé de P .

Considérons le polynôme complexe $P(X) = X^3 + aX + b$. Un petit calcul montre que

$$\text{Res}(P, P') = 4a^3 + 27b^2.$$

Donc dire que le discriminant $\Delta(a, b)$ est nul est équivalent à dire que le polynôme complexe P a une racine multiple α_1 . Puisque P est à coefficients réels, ses racines complexes non réelles viennent par paires conjuguées. Comme P n'est que de degré 3, ceci force α_1 à être réelle et la dernière racine α_2 à être aussi réelle. Nous avons alors deux possibilités.

- Ou bien $\alpha_2 = \alpha_1$ et $P = (X - \alpha_1)^3$ puisque P est unitaire. Comme le coefficient de X^2 dans P est nul, ceci force $\alpha_1 = 0$, et donc $a = b = 0$, cas déjà traité.
- Ou bien $\alpha_2 \neq \alpha_1$ et

$$P = (X - \alpha_1)^2(X - \alpha_2) = X^3 - (\alpha_2 + 2\alpha_1)X^2 + (\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2)X - \alpha_1^2\alpha_2.$$

Par identification de coefficients, nous avons donc $\alpha_2 = -2\alpha_1$, $a = -3\alpha_1^2$ et $b = 2\alpha_1^3$. Nous avons $a, b \neq 0$ sinon $(a, b) = (0, 0)$ puisque le discriminant est nul et nous serions dans la possibilité précédente. En particulier, $\alpha_1 = \pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$, sachant que $a^3 = -\frac{27b^2}{4} < 0$. Comme vu dans la question (1), le seul point de $H(a, b)$ qui pourrait ne pas être un point lisse serait un point (x_0, y_0) où $y_0 = 0$ et $x_0 = -\frac{3b}{2a} = -\frac{6\alpha_1^3}{-6\alpha_1^2} = \alpha_1$.

Supposons tout d'abord que $\alpha_1 = -\sqrt{-\frac{a}{3}}$, ce qui implique que $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$. Comme nous avons $y^2 = P(x) = (x - \alpha_1)^2(x - \alpha_2)$ pour tout $(x, y) \in H(a, b)$, le seul point de la courbe $H(a, b)$ dans le demi-plan ouvert $H_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < \alpha_2\}$ est le point (x_0, y_0) . Donc $H(a, b) \cap H_-$ est une sous-variété lisse de dimension 0 (réduite à un point!). Dans le demi-plan ouvert $H_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > \alpha_1\}$, la question (1) montre que $H(a, b) \cap H_+$ est une sous-variété lisse de dimension 1. Avec la définition du cours, le sous-espace $H(a, b)$ n'est donc pas une sous-variété, car il a une composante connexe qui est une sous-variété de dimension 0 et une composante connexe qui est une sous-variété de dimension 1 $\neq 0$. Voir la figure en bleu foncé ci-dessus, où $\alpha_1 = -1$.

Supposons maintenant que $\alpha_1 = \sqrt{-\frac{a}{3}}$, ce qui implique que $\alpha_1 > 0 > \alpha_2$. Alors si x est proche de α_1 , nous avons $x - \alpha_2$ proche de $\alpha_1 - \alpha_2 = 3\alpha_1 = \sqrt{-3a} > 0$. La courbe $H(a, b)$ est donc, au voisinage du point (x_0, y_0) , réunion des graphes des deux fonctions continues $f_{\pm} : x \mapsto \pm|x - \alpha_1|\sqrt{x - \alpha_2}$ pour x proche de α_1 . Or les dérivées à droites et à gauche de f_+ en $x = \alpha_1$ sont de signes opposés et le graphe de f_- est le symétrique de celui de f_+ par

rapport à l'axe horizontal, cet axe contenant le point (x_0, y_0) . Donc la courbe $H(a, b)$ a un *point de croisement* en (x_0, y_0) . Voir la courbe en vert foncé du dessin ci-dessus, où $\alpha_1 = 1$. Elle n'est donc pas une sous-variété (par exemple parce qu'elle devrait être de dimension 1 par connexité, et que le point (x_0, y_0) sépare un voisinage connexe par arcs de ce point dans $H(a, b)$ en quatre composantes connexes par arcs au lieu de 2 pour les sous-variétés de dimension 1).

En conclusion, si le discriminant $\Delta(a, b)$ est nul, alors le sous-espace $H(a, b)$ n'est pas une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^2$.

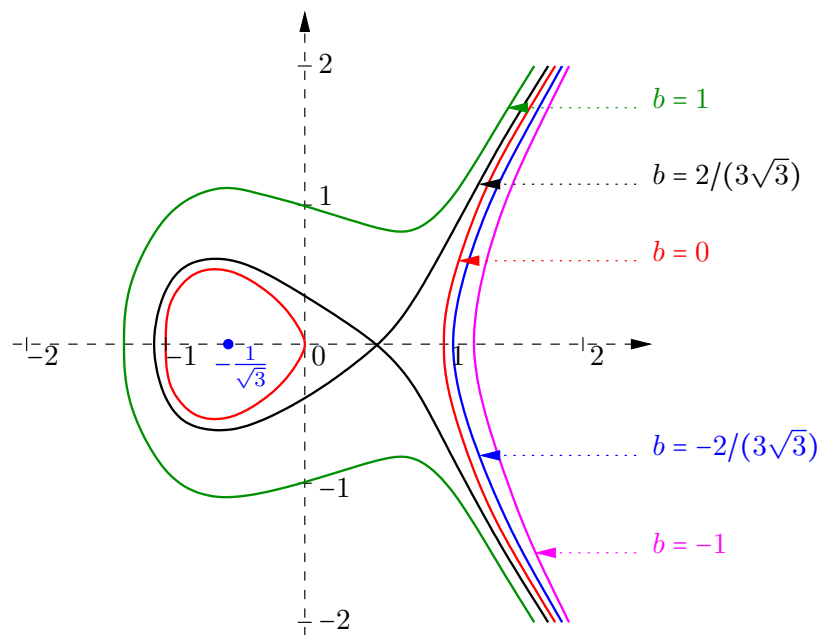
(3) Nous venons de voir que si $\Delta(a, b) = 0$, alors $H(a, b)$ est connexe si $b \geq 0$ et n'est pas connexe si $b < 0$, puisque $b = 2\alpha_1^3$ est du même signe que α_1 .

Supposons maintenant que $\Delta(a, b) \neq 0$. Comme P est un polynôme à coefficients réels de degré 3 (impair), il a nécessairement une racine réelle. Ses deux autres racines complexes sont ou bien non réelles et complexes conjuguées, ou bien réelles et alors les trois racines réelles sont deux à deux distinctes puisque $\text{Res}(P, P') \neq 0$.

Comme le coefficient dominant de P est positif, si $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ sont les trois racines réelles deux à deux distinctes de P , alors $H(a, b)$ possède deux composantes connexes, la première réunion du graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{P(x)}$ sur l'intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ et de son symétrique par rapport à l'axe horizontal, la seconde celle sur l'intervalle $[\alpha_3, +\infty[$.

Si P admet une racine complexe non réelle et si α_1 est sa racine réelle, alors $H(a, b)$ possède une seule composante connexe, réunion du graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{P(x)}$ sur l'intervalle $[\alpha_1, +\infty[$ (sur lequel $P(x)$ est positif) et de son symétrique par rapport à l'axe horizontal.

(4)



Correction de l'exercice E.62. (1) Supposons que f soit de rang constant au voisinage de x . Pré-composer une submersion s' en x par un C^k -difféomorphisme local en x' envoyant x' sur x est une submersion en x' envoyant x' sur $s'(x)$. Post-composer une immersion i'

en y par un C^k -difféomorphisme local en $i'(y)$ envoyant $i'(y)$ sur 0 est une immersion en y envoyant y sur 0. En appliquant le théorème de forme normale locale des applications de rang constant (voir le corollaire C.4 de l'appendice C) à l'application f lue dans des paramétrages locaux en x et en $f(x)$, il suffit donc de supposer que $M = \mathbb{R}^m$, que $N = \mathbb{R}^n$ et que f est l'application linéaire $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ pour $r \leq \min\{m, n\}$. Or cette application est la composition $i \circ s$ de la submersion linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^r$ définie par $s : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_r)$ et de l'immersion linéaire de $\mathbb{R}^r$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $i : (x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$.

Réciproquement, supposons que f s'écrive $i \circ s$ au voisinage de x , où s est une submersion C^k en x et i une immersion C^k en $s(x)$. Notons Θ un paramétrage local en $s(x)$, quelconque. Alors par le théorème 4.8 de forme normale locale des submersions (en vérifiant bien l'ordre des quantificateurs), il existe $r \in \mathbb{N}$ et un paramétrage local φ en 0 tel que, au voisinage de 0, nous ayons

$$\Theta^{-1} \circ s \circ \varphi (x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r) .$$

De même, par le théorème 4.8 de forme normale locale des immersions (en vérifiant bien l'ordre des quantificateurs), il existe un paramétrage local ψ en $i(s(x)) = f(x)$ tel que $\psi(0) = f(x)$ et, au voisinage de 0, nous ayons

$$\psi^{-1} \circ i \circ \Theta (x_1, \dots, x_r) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) .$$

Alors, au voisinage de 0, nous avons

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi = (\psi^{-1} \circ i \circ \Theta) \circ (\Theta^{-1} \circ s \circ \varphi) : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) .$$

Donc f est de rang constant au voisinage de x , et nous avons montré par la même occasion que la troisième affirmation du théorème 4.8 découle des deux premières.

(2) Ceci découle, par des réductions analogues à celles de la question (1), du fait que l'application linéaire $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, qui est de rang constant r où $r \leq \min\{m, n\}$, est la composition $s \circ i$ de l'immersion linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^{m+n-r}$ définie par $i : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ et de la submersion linéaire $s : (y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_{m+n-r}) \mapsto (y_1, \dots, y_r, y_{m+1}, \dots, y_{m+n-r})$ de $\mathbb{R}^{m+n-r}$ dans $\mathbb{R}^n$.

(3) Soient m la dimension de M et n la dimension de N . Soient $g : N \rightarrow P$ une immersion C^k et $g' : P' \rightarrow M$ une submersion C^k . Fixons $y \in P'$ et notons p' la dimension de P' , qui vérifie $p' \geq m$ puisque $g' : P' \rightarrow M$ est une submersion. Supposons que $f : M \rightarrow N$ soit une application C^k de rang constant $r \leq \min\{m, n\}$ au voisinage de $x = g'(y)$. Par le théorème 4.8 de forme normale locale des applications de rang constant, il existe des paramétrages locaux φ de M en x et ψ de N en $f(x)$ tels que $\varphi(0) = x$, $\psi(0) = f(x)$ et, au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{mx}$, nous ayons

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi (x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) .$$

Puisque g est une immersion en $f(x)$, par le théorème 4.8 de forme normale locale des immersions (en vérifiant bien l'ordre des quantificateurs), il existe un paramétrage local ψ' de P en $g(f(x))$ tel que $\psi'(0) = g(f(x))$ et, au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, nous ayons

$$(\psi')^{-1} \circ g \circ \psi (x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) .$$

Puisque g' est une submersion en y , par le théorème 4.8 de forme normale locale des submersions (en vérifiant bien l'ordre des quantificateurs), il existe un paramétrage local φ' de M en x , tel que $\varphi'(0) = y$ et, au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{p'}$, nous avons

$$\varphi^{-1} \circ g' \circ \varphi' (x_1, \dots, x_{p'}) = (x_1, \dots, x_m).$$

Alors au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{p'}$, nous avons

$$\begin{aligned} (\psi')^{-1} \circ (g \circ f \circ g') \circ \varphi' &= ((\psi')^{-1} \circ g \circ \psi) \circ (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ g' \circ \varphi') \\ &: (x_1, \dots, x_{p'}) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Ceci montre que l'application $g \circ f \circ g' : P' \rightarrow P$ est de rang constant r au voisinage de y , puisqu'elle admet une application lue dans des paramétrages locaux en y et en $g \circ f \circ g'(y) = g(f(x))$ qui est l'application linéaire standard de rang constant r . C'est ce que nous voulions démontrer.

(4) La réponse à la question est « Pas toujours ». Par exemple, prenons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'immersion lisse $t \mapsto (t, t^2)$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la submersion lisse (car linéaire) $(x, y) \mapsto y$. Alors $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'application $t \mapsto t^2$, qui n'est pas de rang constant au voisinage de 0, car elle est de rang 1 en tout $t \neq 0$ et de rang nul en $t = 0$.

Correction de l'exercice E.64. (1) L'application f est définie entre deux ouverts d'espaces euclidiens, et est lisse (car polynomiale). Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, la matrice

$$\text{jacobienne de } f \text{ en } (x, y, z) \text{ est } J = Jf_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}. \text{ Si } x \neq 0, \text{ alors les première,}$$

cinquième et sixième lignes de J sont linéairement indépendantes. Donc J est de rang au moins 3, donc de rang 3 car elle a trois colonnes. Par le théorème du rang, la différentielle $df_{(x,y,z)}$, dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^6$ est J , est donc injective. Donc f est une immersion en (x, y, z) .

Si $y \neq 0$, la même méthode montre le même résultat, car alors les deuxième, quatrième et sixième lignes de J sont linéairement indépendantes.

Puisque $(x, y, z) \neq 0$, le dernier cas $z \neq 0$ se traite de même, car alors les troisième, quatrième et cinquième lignes de J sont linéairement indépendantes.

(2) Soit $k \in \mathbb{N}$. Puisque P est homogène de degré k , nous avons $P(tu) = t^k P(u)$ pour tous les $t \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^{n+1}$. Par le théorème de dérivation des applications composées, en dérivant en $t = 1$, nous avons donc $dP_{tu}(tu) = k t^{k-1} P(u)$ (avec la convention usuelle $k t^{k-1} = 0$ si $k = 0$). En prenant $t = 1$, le résultat en découle.

(3) Pour montrer que π_n est lisse, il suffit de montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, l'application π_n est lisse au voisinage de tout point $u = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ où $x_k \neq 0$. Par la définition de la structure de variété sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, une carte locale de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ en u est $\varphi : [y_0 : \dots : y_n] \mapsto (\frac{y_0}{y_k}, \dots, \frac{y_{k-1}}{y_k}, \frac{y_{k+1}}{y_k}, \dots, \frac{y_n}{y_k})$. L'application π_n lue dans cette carte locale est

$$\varphi \circ \pi_n : (y_0, \dots, y_n) \mapsto (\frac{y_0}{y_k}, \dots, \frac{y_{k-1}}{y_k}, \frac{y_{k+1}}{y_k}, \dots, \frac{y_n}{y_k}).$$

Elle est lisse dans un voisinage de u , car rationnelle de dénominateur ne s'annulant pas. Donc π_n est lisse dans un voisinage de u .

En un tel point u , le noyau de l'application tangente $T_u(\pi_n)$ est égal au noyau de la différentielle $d(\varphi \circ \pi_n)_u$. Or par la formule centrée ci-dessus, nous avons

$$d(\varphi \circ \pi_n)_u(X_0, \dots, X_n) = \left(\frac{1}{x_k} X_0 - \frac{x_0}{x_k^2} X_k, \dots, \frac{1}{x_k} X_{k-1} - \frac{x_{k-1}}{x_k^2} X_k, \right. \\ \left. \frac{1}{x_k} X_{k+1} - \frac{x_{k+1}}{x_k^2} X_k, \dots, \frac{1}{x_k} X_n - \frac{x_n}{x_k^2} X_k \right).$$

Donc le noyau de l'application linéaire $d(\varphi \circ \pi_n)_u$ est la droite vectorielle

$$\mathbb{R} \left(\frac{x_0}{x_k}, \dots, \frac{x_{k-1}}{x_k}, 1, \frac{x_{k+1}}{x_k}, \dots, \frac{x_n}{x_k} \right) = \mathbb{R}(x_0, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

En rappelant que les points de l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ sont les droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$, nous avons donc $\text{Ker } T_u(\pi_n) = \mathbb{R} u = \pi_n(u)$.

Par le théorème de dérivation des fonctions composées, pour tout $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, nous avons donc

$$\text{Ker } T_u(\pi_5 \circ f) = \text{Ker } (T_{f(u)} \pi_5) \circ (T_u f) = (T_u f)^{-1}(\text{Ker } T_{f(u)} \pi_5) \\ = (df_u)^{-1}(\mathbb{R} f(u)).$$

Par la question (2), comme les composantes de f sont des polynômes homogènes de degré 2, nous avons $df_u(u) = 2f(u)$. Donc $(df_u)^{-1}(f(u)) = \frac{1}{2}u$ puisque df_u est injective par la question (1). D'où $\text{Ker } T_u(\pi_5 \circ f) = \mathbb{R} u$.

(4) L'espace tangent à $\mathbb{S}_2$ en $u \in \mathbb{S}_2$ est le supplémentaire orthogonal $u^\perp$ de la droite vectorielle $\mathbb{R} u$. Notons $i : \mathbb{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ l'inclusion, qui est une restriction de l'application linéaire id . L'application tangente $T_u i : T_u \mathbb{S}_2 \rightarrow T_u \mathbb{R}^3$ est donc l'application $X \mapsto X$ de $u^\perp$ dans $\mathbb{R}^3$. Par le théorème de dérivation des fonctions composées, nous avons $T_u(\pi_5 \circ f|_{\mathbb{S}_2}) = T_u(\pi_5 \circ f) \circ (T_u i)$. Comme l'image de $T_u i$ ne rencontre la droite vectorielle $\mathbb{R} u$ qu'en 0, l'application $T_u(\pi_5 \circ f|_{\mathbb{S}_2})$ est donc injective. Donc la restriction $\pi_5 \circ f|_{\mathbb{S}_2}$ est une immersion.

(5) Puisque $f(-u) = f(u)$, il est facile de vérifier que l'application $\pi_5 \circ f|_{\mathbb{S}_2}$ passe au quotient en une application injective V de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \{\pm 1\} \backslash \mathbb{S}_2$ dans $\mathbb{P}_5(\mathbb{R})$. Cette application V est une immersion lisse par la question (4) et puisque la projection canonique $\mathbb{S}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est une immersion lisse. Comme $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est compact, l'immersion lisse injective V est donc un C^∞ -plongement.

5 Théorème de Sard et théorie du degré

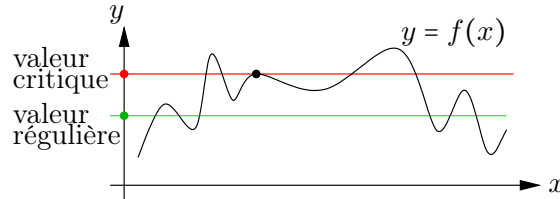
Fixons un élément k dans $(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$, deux variétés M et N de classe C^k et de dimension m et n respectivement, et une application $f : M \rightarrow N$ de classe C^k .

Un point x de M est un *point critique* de f si f n'est pas une submersion en x . Un point y de N est une *valeur critique* de f s'il existe un point critique x tel que $f(x) = y$. Un point de N qui n'est pas une valeur critique de f est une *valeur régulière* de f . (Attention, une valeur régulière n'est pas forcément une valeur, en fait tout point de N n'appartenant pas à l'image de f est une valeur régulière!)

Notons que l'ensemble des points critiques est fermé, car si f est une submersion en x , alors f est aussi une submersion sur tout point assez proche de x par la semi-continuité du rang. Mais l'ensemble des valeurs critiques n'est pas forcément fermé. Par exemple, l'ensemble des valeurs critiques de l'application lisse $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $t \mapsto (t, 0)$ est $]0, 1[\times \{0\}$, qui n'est pas fermé dans $\mathbb{R}^2$. Par contre, si f est fermée (par exemple si M est compacte), alors l'ensemble des valeurs critiques est aussi fermé.

L'abondance des valeurs régulières vient du théorème de Sard (ou Sard-Brown ou Morse-Sard) que nous montrerons dans la partie 5.1.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Si une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 , ses points critiques sont les réels $x \in U$ tels que $f'(x) = 0$, c'est-à-dire dont le graphe possède une tangence horizontale en ce point. Donc y est une valeur critique si et seulement si la droite horizontale $\mathbb{R} \times \{y\}$ est tangente au graphe de f dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Le théorème de Sard impliquera que presque toute droite horizontale n'est pas tangente au graphe d'une fonction C^1 donnée d'un ouvert de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.



Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^2$. De même, les points critiques d'une application $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sont les couples $(a, b) \in V$ tels que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$, c'est-à-dire dont le graphe possède une tangence horizontale en ce point. Le théorème de Sard impliquera que presque tout plan horizontal $\mathbb{R}^2 \times \{y\}$ n'est pas tangent au graphe d'une fonction C^2 donnée d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

L'intérêt des valeurs régulières est qu'elles permettent de construire des sous-variétés par images réciproques, comme indiqué dans le résultat suivant qui découle de la partie 4.3.

Corollaire 5.1. *Si y est une valeur régulière de f et si $y \in f(M)$, alors $f^{-1}(y)$ est une sous-variété C^k de M , de dimension $m-n$. En particulier, si $f : M \rightarrow N$ est une submersion C^k , alors $f^{-1}(y)$ est une sous-variété C^k de M pour tout y dans N .*

Démonstration. Comme l'ensemble des points de M en lesquels f est une submersion est un ouvert, et qu'une submersion à valeurs dans N est une application de rang constant n , le résultat découle de la proposition 4.9. $\square$

5.1 Le théorème de Sard

L'un des buts de cette partie est de donner un lien entre la théorie de la mesure et l'étude des sous-variétés, étendant le fait que les C^1 -difféomorphismes entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ sont absolument continus⁸⁴ par rapport à la mesure de Lebesgue, et donc permettent des changements de variables.⁸⁵ Il n'y a en fait pas que les C^1 -difféomorphismes qui préservent les ensembles de mesure nulle, les applications localement lipschitziennes entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ sont absolument continues, comme le montre la démonstration du résultat suivant.

Lemme 5.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application C^1 . Alors l'image par f d'une partie A de U de mesure de Lebesgue nulle est encore de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. Puisqu'une union dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle, et puisque tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est réunion dénombrable de cubes fermés, il suffit de montrer le résultat lorsque A est contenu dans un cube fermé C . Posons $K = \max_{x \in C} \|df_x\|$. Par le théorème des accroissements finis, l'application f est K -lipschitzienne sur C . Donc l'image par f d'un cube contenu dans C de longueur de côté $\delta > 0$ (de mesure $\delta' = \delta^n$) est contenue dans un cube de longueur de côté $K\delta$ (de mesure $(K\delta)^n = K^n\delta'$). Donc si B est une réunion de m cubes contenus dans C et contenant A , de mesure au plus $\epsilon = m\delta^n > 0$, alors la mesure de $f(B)$ est au plus $mK^n\delta' = K^n\epsilon$. Donc $f(A)$ est de mesure nulle. $\square$

Soit N' une variété de classe au moins C^1 et de dimension n . Une partie A de N' est dite *de mesure nulle* si pour toute carte locale (U, φ) de N' , la partie $\varphi(A \cap U)$ de $\mathbb{R}^n$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$.

Remarques. (1) Il n'est pas besoin de vérifier cette propriété pour toutes les cartes locales de N' . Tout C^1 -difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ préserve les ensembles de mesure nulle (comme déjà mentionné), par le théorème de changement de variable pour la mesure de Lebesgue. Donc une partie A de N' est de mesure nulle si et seulement si pour tout x dans A , il existe une carte locale (U, φ) de N' en x telle que la partie $\varphi(A \cap U)$ de $\mathbb{R}^n$ soit de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$.

84. c'est-à-dire préservent les ensembles de mesure nulle

85. Soient $\varphi : U \rightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ de jacobien $j\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ (voir l'appendice C), et λ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. Alors, par le théorème de Radon-Nikodym (voir par exemple [Coh, Theo. 4.2.2]), la mesure image $\varphi_*\lambda$ sur V est absolument continue par rapport à la mesure λ sur V , de dérivée de Radon-Nykodym donnée, pour λ -presque tout $y \in V$, par

$$\frac{d\varphi_*\lambda}{d\lambda}(y) = |j(\varphi^{-1})_y|.$$

La mention « λ -presque tout » vient du fait que les dérivées de Radon-Nikodym, lorsqu'elles existent, ne sont définies que presque partout modulo les mesures concernées (rappelons qu'elles doivent être σ -finies). Puisque $y \mapsto j(\varphi^{-1})_y$ est continue, la formule centrée précédente dit en particulier que dans notre cas, il existe un représentant (de la classe d'égalité presque partout) qui est continu, donc pour lequel la formule est vraie pour tout $y \in V$. Cette formule est équivalente à la propriété suivante : pour toute application $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ continue à support compact, nous avons

$$\int_V f d\lambda = \int_U f \circ \varphi |j\varphi| d\lambda.$$

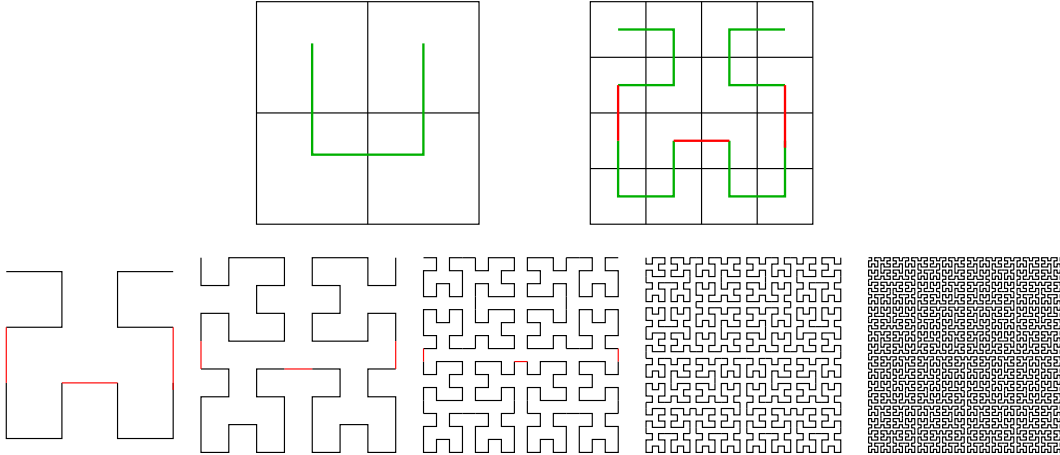
De même, si $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ est un atlas⁸⁶ de cartes locales de la variété N' , alors une partie A de N' est de mesure nulle si et seulement si pour tout i dans I , la partie $\varphi_i(A \cap U_i)$ de $\mathbb{R}^n$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$.

(2) Notons qu'une sous-variété de classe au moins C^1 et de codimension au moins 1 de N' est de mesure nulle dans N' , par la définition 4.5 (1) des sous-variétés par redressement.

(3) Notons que le complémentaire d'une partie de $\mathbb{R}^n$, de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$, est dense dans $\mathbb{R}^n$. Puisque la densité d'une partie d'un espace topologique se vérifie localement, le complémentaire de toute partie de mesure nulle de N' est donc dense dans N' .

Théorème 5.3. (Théorème de Sard) Soient M et N deux variétés de classe C^k de dimensions m et n , et $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^k , où $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$. Si nous avons $k > \max\{0, m - n\}$, alors l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure nulle dans N , et en particulier l'ensemble des valeurs régulières est dense dans N .

Nous ne traiterons que le cas où $k = \infty$ (comme d'ailleurs l'ouvrage [Hir, page 69], ainsi que le très joli petit livre [Mil1] dont nous suivrons la démonstration). Le cas où $m < n$ particulièrement,⁸⁷ ainsi que le cas $m = n$, admet une démonstration plus élémentaire. La condition sur la régularité est nécessaire (voir par exemple [Whi] pour un contre-exemple avec $m = 2, n = 1, r = 1$). Le résultat dit en particulier qu'il n'existe pas de courbe de Peano de classe C^1 . Une *courbe de Peano* est une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^2$ dont l'image est d'intérieur non vide (voir par exemple [Sag]). Des courbes de Peano remplissant le carré unité peuvent être construites explicitement en utilisant des développements p -adiques des éléments de $[0, 1]$ ou par des processus de passage à la limite de courbes, comme décrit par les dessins suivants, où le k -ème segment parmi les $N(n)$ segments de l'étape n est paramétré de manière affine par l'intervalle $[\frac{k-1}{N(n)}, \frac{k}{N(n)}]$, pour $1 \leq k \leq N(n)$.



86. pas forcément l'atlas maximal de N' , et qu'en pratique on tâchera de prendre le plus simple possible, en particulier dénombrable (ce qui est toujours possible car toute variété est à base dénombrable d'ouverts), et même fini lorsque N' est compacte

87. Si $m < n$, tous les points de M sont critiques pour f , puisqu'il n'existe pas d'application linéaire surjective d'un espace vectoriel réel de dimension m dans un espace vectoriel réel de dimension n . Fixons des atlas de cartes dénombrables $(U_i, \phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de M et $(V_j, \psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de N tels que pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe $j_i \in \mathbb{N}$ tel que $f(U_i) \subset V_{j_i}$. Le lemme 5.2 appliqué aux applications de $\mathbb{R}^{n-m} \times \phi_i(U_i)$ dans $\psi_{j_i}(V_{j_i})$ définies par $(t, x) \mapsto \psi_{j_i} \circ f \circ \phi_i^{-1}(x)$ et à l'ensemble de mesure nulle $A = \{0\} \times \phi_i(U_i)$, dit que l'image de f est de mesure nulle.

Démonstration. ($k = \infty$) Comme les variétés sont à base dénombrable, toute variété admet un atlas de cartes dénombrable, donc M et N peuvent être recouvertes par une famille dénombrable d'ouverts difféomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement. Puisqu'une union dénombrable d'ensembles de mesure nulle dans N est encore de mesure nulle, le résultat découle du lemme suivant.

Lemme 5.4. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ des entiers, U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application lisse. Alors l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure nulle.

Démonstration. Le résultat est immédiat si $n = 0$, donc nous supposons que $n \geq 1$. Montrons le résultat par récurrence sur m . Le résultat est vrai si $m = 0$, car tout singleton dans $\mathbb{R}^n$ est de mesure de Lebesgue nulle. Supposons que $m \geq 1$ et que le résultat soit vrai pour $m - 1$.

Notons C l'ensemble des points critiques de f , et pour tout $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, notons C_i l'ensemble des points de U où toutes les dérivées partielles de f d'ordre au plus i s'annulent. Nous avons une suite décroissante $C \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \dots$.

Étape 1. Montrons que $f(C \setminus C_1)$ est de mesure nulle.

Si $n = 1$, alors $C = C_1$. Supposons donc que $n \geq 2$. Montrons que pour tout $x \in C \setminus C_1$, il existe un voisinage ouvert V de x dans $\mathbb{R}^m$ tel que $f(V \cap C)$ soit de mesure nulle. Puisque $C \setminus C_1$ est contenu dans la réunion d'une famille dénombrable de tels voisinages par séparabilité, ceci montrera le résultat.

Notons $f_1, \dots, f_n$ les composantes de f . Puisque $x \notin C_1$, il existe une dérivée partielle, disons $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$, qui ne s'annule pas en x . Considérons l'application lisse $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie par

$$x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m) \mapsto (f_1(x'), x'_2, \dots, x'_m),$$

qui est donc une immersion au point x (car le jacobien de g en x est non nul). Par le théorème d'inversion locale, il existe des voisinages ouverts V de x et W de $g(x)$ tels que l'application $g : V \rightarrow W$ soit un difféomorphisme. Donc $h = f \circ g^{-1}$ envoie W dans $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des points critiques de h dans W est exactement $g(V \cap C)$, donc l'ensemble des valeurs critiques de h est exactement $f(V \cap C)$.

Par construction, l'image par h de tout $(t, x'_2, \dots, x'_m) \in W$ appartient à l'hyperplan $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Notons $h_t : (\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap W \rightarrow (\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ la restriction de h à $\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}$. Un point de $(\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap W$ est critique pour h_t si et seulement s'il est critique pour h .

Par l'hypothèse de récurrence, l'ensemble des valeurs critiques de h_t est de mesure nulle dans $\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}$. Donc l'intersection avec tout hyperplan $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ de l'ensemble des valeurs critiques de h est de mesure nulle. Donc par le théorème de Fubini, $f(V \cap C)$ est de mesure nulle. Ceci montre l'étape 1.

Étape 2. Montrons que $f(C_i \setminus C_{i+1})$ est de mesure nulle pour tout $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Pour tout $x \in C_i \setminus C_{i+1}$, quitte à permuter les variables, il existe une i -ème dérivée partielle $w = \frac{\partial^i f_r}{\partial x_{s_1} \dots \partial x_{s_i}}$ d'une composante f_r de f qui s'annule sur C_i , mais dont la dérivée partielle $\frac{\partial w}{\partial x_1}$ ne s'annule pas en x . Comme ci-dessus, l'application $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie par

$$x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m) \mapsto (w(x'), x'_2, \dots, x'_m)$$

est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert V de x sur un voisinage ouvert W de $g(x)$. De plus, g envoie $C_i \cap V$ dans l'hyperplan $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$. Considérons comme ci-dessus l'application

$h = f \circ g^{-1} : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, et sa restriction $h_0 : (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap W \rightarrow \mathbb{R}^n$ à l'hyperplan $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$. Par récurrence, l'ensemble des valeurs critiques de h_0 est de mesure nulle. Or tout élément de $g(C_i \cap V)$ (qui est contenu dans $(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap W$) est un point critique de h_0 (car $dh_y = df_{g^{-1}(y)} \circ d(g^{-1})_y$ pour tout $y \in W$ et $df_{x'} = 0$ si $x' \in C_i$). Donc $f(C_i \cap V) = h_0(g(C_i \cap V))$ est de mesure nulle.

Comme l'ensemble $C_i \setminus C_{i-1}$ est contenu dans la réunion d'un ensemble dénombrable de tels ouverts V , ceci montre l'étape 2.

Étape 3. Montrons que $f(C_k)$ est de mesure nulle si k est assez grand.

Soit Q un cube (fermé) de $\mathbb{R}^m$ contenu dans U . Montrons que si $k > \frac{m}{n} - 1$, alors $f(C_k \cap Q)$ est de mesure nulle. Comme C_k est contenu dans la réunion d'un ensemble dénombrable de tels cubes, ceci montrera le résultat.

Notons $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la borne supérieure⁸⁸ sur $\mathbb{R}^m$. Par un développement de Taylor et par la compacité de Q , il existe $c > 0$ tel que pour tous les $x \in C_k \cap Q$ et $h \in -x + Q$, nous avons

$$\|f(x+h) - f(x)\|_\infty \leq c \|h\|_\infty^{k+1}. \quad (13)$$

Soit δ la longueur des côtés de Q . Pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, subdivisons le cube Q en N^m sous-cubes (de longueur des côtés δ/N). Soit Q' un cube de la subdivision qui contient un point $x \in C_k$. Alors tout élément de Q' s'écrit $x+h$ avec $\|h\|_\infty \leq \delta/N$. Donc par la formule (13) ci-dessus, l'image $f(Q')$ est contenue dans un cube de longueur de côtés c'/N^{k+1} où $c' = 2c\delta^{k+1}$ est une constante. Par conséquent, $f(C_k \cap Q)$ est contenu dans une réunion d'au plus N^m cubes dont chacun est de volume au plus $(c'/N^{k+1})^n$. Donc $f(C_k \cap Q)$ est de volume au plus $(c')^n N^{m-(k+1)n}$, qui tend vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$ si k est assez grand (et $k > \frac{m}{n} - 1$ suffit). Donc $f(C_k \cap Q)$ est de mesure nulle, ce qui montre l'étape 3, et conclut la démonstration du lemme 5.4, car si k est assez grand, alors

$$f(C) \subset f(C \setminus C_1) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} f(C_i \setminus C_{i+1}) \right) \cup f(C_k)$$

est de mesure nulle. □

Ceci conclut la démonstration du théorème de Sard 5.3. □

Corollaire 5.5. Soient M et N deux variétés différentielles lisses de dimension m et n respectivement, et $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^1 . Si $m < n$, alors la partie $f(M)$ est de mesure nulle dans N .

Démonstration. Pour tout $x \in M$, l'application linéaire $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ n'est pas surjective, car la dimension m de son espace de départ est strictement inférieure à la dimension n de son espace d'arrivée. Donc tout point de M est un point critique, et par conséquent tout point de $f(M)$ est une valeur critique de f . Par le théorème de Sard 5.3, que nous pouvons appliquer car $1 > \max\{0, m-n\} = 0$, la partie $f(M)$ est de mesure nulle. □

5.2 Sous-variétés différentielles à bord

Soient $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$ et soit $r \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$.

88. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, nous avons $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|$.

De la même manière que les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ de dimension p sont localement modelées sur des ouverts de $\mathbb{R}^p$, nous allons définir les « sous-variétés à bord » de $\mathbb{R}^n$ de dimension p comme étant localement modelées sur le *demi-espace standard de dimension* p

$$\mathbb{R}_+^p = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p : x_p \geq 0\}.$$

Nous définissons le *bord* de $\mathbb{R}_+^p$ comme la partie de $\mathbb{R}_+^p$ définie par

$$\partial \mathbb{R}_+^p = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p : x_p = 0\}.$$

La notion de sous-variété à bord est en particulier très utile pour des arguments de découpage de sous-variétés le long de sous-variétés de codimension 1 ou de recollement de sous-variétés à bord (recoller deux sous-variétés le long de leur bord, lorsque c'est possible, peut permettre d'obtenir des sous-variétés sans bord). Voir par exemple la partie 7.3 pour le cas des surfaces. Une notion aussi très utile en pratique, mais traditionnellement oubliée des enseignements, est celle des *sous-variétés à coins* de $\mathbb{R}^n$, définies, de la manière analogue à celle qui suit pour les sous-variétés à bord, comme étant localement modelées sur le *cube standard de dimension* p

$$\text{Cub}^p = [0, 1]^p$$

(ou, de manière équivalente, sur le *quartier d'espace standard de dimension* p

$$[0, +\infty[^p = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p : x_1 \geq 0, \dots, x_p \geq 0\}.$$

Voir [Dou] pour un traitement complet. Si du point de vue des homéomorphismes, il n'y a pas de différence entre boule et cube, du point de vue des difféomorphismes, il y a une différence importante : le bord du cube présente une stratification (en fonction de la dimension de la face minimale (pour l'inclusion) du cube contenant un point considéré) dont il est important de tenir compte. Alors que la notion de sous-variété à bord n'est pas stable par produit (penser aux produits de deux intervalles compacts d'intérieur non vide), celle de sous-variété à coin l'est. Mais surtout, les sous-variétés à coin permettent des opérations (différentiables) de découpage/recollement par processus itératifs, alors que les sous-variétés à bord s'arrêtent à la première étape.

Nous avons besoin d'étendre la notion d'application différentiable entre des parties des espaces $\mathbb{R}^n$ (ou de n'importe quel espace vectoriel réel de dimension finie munie d'une norme quelconque) qui ne sont pas forcément ouvertes. Une des possibilités est la suivante, mais elle n'est pas forcément la mieux adaptée au cas de toutes les parties fractales des $\mathbb{R}^n$ (voir par exemple [Fed] et les développements récents importants de l'analyse sur les espaces singuliers [Hei]).

Soient A et B des parties de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ (ou plus généralement d'espaces vectoriels normés réels de dimension p et q) respectivement. Une application $f : A \rightarrow B$ est de *classe* C^r s'il existe des voisinages ouverts U de A dans $\mathbb{R}^p$ et V de B de $\mathbb{R}^q$, et une application $\tilde{f} : U \rightarrow V$ de classe C^r , tels que $\tilde{f}(A) \subset B$ et $f = \tilde{f}|_A$. La composition de deux applications de classe C^r est encore une application de classe C^r . Une application $f : A \rightarrow B$ est un *C^r -difféomorphisme* si elle est bijective et si f et f^{-1} sont de classe C^r .

Notons que si nous avons $A = \mathbb{R}_+^p$ et $x \in \partial \mathbb{R}_+^p$, alors pour toute application $f : A \rightarrow B$ de classe C^r , l'application $d_x \tilde{f} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ ne dépend pas du choix d'une extension $\tilde{f}$ de f comme ci-dessus, par continuité et par unicité dans l'intérieur $\mathbb{R}_+^p \setminus \partial \mathbb{R}_+^p$ de $\mathbb{R}_+^p$. Elle est

appelée la *différentielle* de f , et elle est notée $d_x f$. Notons que l'espace tangent⁸⁹ $T_x \mathbb{R}_+^p$ de $\mathbb{R}_+^p$ en x est égal à $\mathbb{R}^p$, et que $T_x(\partial \mathbb{R}_+^p)$ est un hyperplan de $T_x \mathbb{R}_+^p$.

Remarques. (1) Pour tous les ouverts⁹⁰ V et W de $\mathbb{R}_+^p$, si $f : V \rightarrow W$ est un C^r -difféomorphisme, alors

$$f(V \cap \partial \mathbb{R}_+^p) = W \cap \partial \mathbb{R}_+^p.$$

(2) Par la proposition 4.7, si $A = M$ et $B = N$ sont des sous-variétés de classe C^r de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement, alors une application $f : M \rightarrow N$ est différentiable de classe C^r au sens ci-dessus si et seulement si elle est différentiable de classe C^r au sens défini dans la partie 4.3.

Une *sous-variété à bord* de $\mathbb{R}^n$, de classe C^r et de dimension p , est une partie M de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$, un ouvert V de $\mathbb{R}_+^p$, et un C^r -difféomorphisme $f : V \rightarrow U \cap M$. Une telle application f est appelé un *paramétrage local* de M en x .

L'ensemble des points x de M image d'un point de $\partial \mathbb{R}_+^p$ par un paramétrage local en x est noté ∂M , et appelé le *bord* de M . Par la remarque (1) précédente, cette définition ne dépend pas du choix d'un paramétrage local en x .

Notons que pour toute sous-variété à bord M de $\mathbb{R}^n$ de classe C^r et de dimension p , si $\partial M \neq \emptyset$, alors les parties ∂M et $M \setminus \partial M$ de $\mathbb{R}^n$ sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ de classe C^r et de dimension $p - 1$ et p respectivement.

Nous définissons comme pour le cas sans bord la notion d'application f de classe C^k entre sous-variétés à bord M et N de classe C^r pour $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ et $k \leq r$, d'espace tangent TM (en notant que pour tout $x \in \partial M$, l'espace tangent $T_x(\partial M)$ est un hyperplan de $T_x M$), d'application tangente $Tf : TM \rightarrow TN$, de submersion, immersion, point critique, valeur critique, valeur régulière. Le théorème de Sard 5.3 s'étend au cas des sous-variétés à bord.

Exemples. • Toute sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété à bord de $\mathbb{R}^n$, et une sous-variété à bord de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si son bord est vide.

- Notons que $\mathbb{R}_+^p$ est une sous-variété à bord de $\mathbb{R}^p$, de bord égal à $\partial \mathbb{R}_+^p$.
- Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est une sous-variété à bord de $\mathbb{R}$, et pour tous les $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, le bord de l'intervalle $[a, b]$ est $\{a, b\}$. Mais attention, le bord de la sous-variété à bord $[a, b[$ est réduit à $\{a\}$. On ne confondra pas le bord ∂M de M en tant que sous-variété à bord avec la frontière ∂M de M dans $\mathbb{R}^n$ en tant que sous-espace topologique (voir la partie A.1.3 de l'appendice A) : les deux notations ∂M sont en conflit.
- La boule unité fermée $\mathbb{B}_{n+1}$ est une sous-variété à bord de $\mathbb{R}^{n+1}$, lisse et de dimension $n + 1$, dont le bord est la sphère $\mathbb{S}_n$.

Soient $m', n' \in \mathbb{N}$. Soit M une sous-variété à bord de $\mathbb{R}^{m'}$. Si N est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n'}$, alors $M \times N$ est une sous-variété à bord de $\mathbb{R}^{m'+n'}$. Mais si N est une sous-variété à bord de $\mathbb{R}^{n'}$, et si les bords de M et de N sont tous les deux non vides, alors $M \times N$ n'est pas une sous-variété à bord de $\mathbb{R}^{m'+n'}$ (c'est une « sous-variété à coins », voir ci-dessus).

89. qui se définit, conformément à la définition des applications différentielles sur des ouverts de demi-espaces, comme l'ensemble des vecteurs tangents $\dot{c}(0)$ des courbes $c : I \rightarrow U$ de classe C^1 , où U est un voisinage ouvert de $\mathbb{R}_+^p$ dans $\mathbb{R}^p$, telles que $c(0) = x$

90. Une partie V de $\mathbb{R}_+^p$ est ouverte dans $\mathbb{R}_+^p$ si et seulement s'il existe un ouvert V' de $\mathbb{R}^p$ tel que $V = V' \cap \mathbb{R}_+^p$. Il convient de faire attention : un ouvert de $\mathbb{R}_+^p$ n'est pas forcément ouvert dans $\mathbb{R}^p$, en commençant par $\mathbb{R}_+^p$ lui-même.

Exercice E.66. Montrer, par une démonstration similaire à celle de la proposition 4.9 (1), que si M est une sous-variété C^r de $\mathbb{R}^n$ de dimension p , si $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une application C^r et si t est une valeur régulière de g , alors $\{x \in M : g(x) \geq t\}$ est une sous-variété à bord de $\mathbb{R}^n$, de classe C^r et de dimension p , dont le bord est l'hypersurface $g^{-1}(t)$ de M .

Proposition 5.6. Soient M et N des sous-variétés à bord de classe C^r , de dimension m et n respectivement, avec $\partial N = \emptyset$, et $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^r . Soit $y \in N$ une valeur régulière de f et de $f|_{\partial M} : \partial M \rightarrow N$. Alors $f^{-1}(y)$ est une sous-variété à bord de classe C^r , de dimension $m - n$ et

$$\partial(f^{-1}(y)) = \partial M \cap (f^{-1}(y)) .$$

Démonstration. Puisque le problème est local, nous pouvons supposer que $M = \mathbb{R}_+^m$ et $N = \mathbb{R}^n$. Le résultat est immédiat si $n = 0$, nous supposons donc $n \geq 1$. Soit $x \in f^{-1}(y)$. Si x appartient à l'intérieur de $\mathbb{R}_+^m$, alors nous savons⁹¹ que $f^{-1}(y)$ est, au voisinage de x , une sous-variété de classe C^r et de dimension $m - n$.

Supposons que $x \in \partial M$. Soient U un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^m$ et $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^r qui coïncide avec f sur $U \cap M$. Quitte à réduire U (et par la semi-continuité inférieure du rang), nous pouvons supposer que $\tilde{f}$ n'a pas de point critique sur U . Donc $\tilde{f}^{-1}(y)$ est, au voisinage de x , une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ de classe C^r et de dimension $m - n$.

Notons $p : \tilde{f}^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application restriction à la sous-variété $\tilde{f}^{-1}(y)$ de l'application linéaire $\tilde{p} : (x_1, \dots, x_m) \mapsto x_m$ de dernière coordonnée, qui est de classe C^r . Montrons que 0 est une valeur régulière de p . Sinon, il existe un élément $z \in p^{-1}(0) = \partial M \cap \tilde{f}^{-1}(y)$ tel que la forme linéaire $T_z p = \tilde{p} : T_z(\tilde{f}^{-1}(y)) \rightarrow T_0 \mathbb{R} = \mathbb{R}$ définie sur l'espace tangent $T_z(\tilde{f}^{-1}(y))$ à $\tilde{f}^{-1}(y)$ en z est nulle, c'est-à-dire tel que $T_z(\tilde{f}^{-1}(y))$ est contenu dans $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$. Or $T_z(\tilde{f}^{-1}(y))$ est égal au noyau $\ker d\tilde{f}_z$ de $d\tilde{f}_z : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, par la proposition 4.12 (2). Puisque $\partial M = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ et puisque $y = f(z)$ est une valeur régulière de $f|_{\partial M}$ par une des hypothèses de la proposition 5.6, nous avons

$$(d\tilde{f}_z)(\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}) = (T_z(f|_{\partial M}))(T_z(\partial M)) = T_y N \neq \{0\}$$

car $n \geq 1$. Donc le noyau de $d\tilde{f}_z$ n'est pas contenu dans $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$, une contradiction au fait que $\ker d\tilde{f}_z = T_z(\tilde{f}^{-1}(y)) \subset \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$.

Par conséquent,

$$f^{-1}(y) \cap U = \tilde{f}^{-1}(y) \cap \mathbb{R}_+^m = \{x \in \tilde{f}^{-1}(y) : p(x) \geq 0\}$$

est, par l'exercice E.66 appliqué à $g = p : \tilde{f}^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{R}$ et $t = 0$, une sous-variété à bord de classe C^r , de bord égal à $p^{-1}(0)$, ce qui montre le résultat. $\square$

Le résultat suivant est un résultat de classification des sous-variétés lisses à bord de dimension 1. À difféomorphisme près, exactement quatre d'entre elles sont connexes, $[0, 1]$, $[0, 1[$, $]0, 1[$ et $\mathbb{S}_1$. Nous donnerons un résultat de classification des surfaces compactes lisses dans la partie 7.3.

Théorème 5.7. Toute sous-variété à bord, de dimension 1 et lisse, est C^∞ -difféomorphe à une somme disjointe dénombrable de copies d'intervalles de $\mathbb{R}$ et de cercles.

91. Voir le corollaire 5.1.

Démonstration. Par la séparabilité des sous-variétés à bord, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, toute sous-variété à bord M de $\mathbb{R}^n$, de dimension 1, connexe et lisse, est C^∞ -difféomorphe à un intervalle de $\mathbb{R}$ ou au cercle $\mathbb{S}_1$.

Nous munissons $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne usuelle. Soient I un intervalle non trivial (non vide, non réduit à un point) de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 . Nous dirons que f est une courbe *paramétrée par longueur d'arc* si $\|\dot{f}(s)\| = 1$.

Lemme 5.8. *Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une immersion de classe C^1 , alors f admet un reparamétrage par longueur d'arc, unique à isométrie près à la source.*

Ceci signifie qu'il existe un intervalle J de $\mathbb{R}$ et un C^1 -difféomorphisme $\varphi : I \rightarrow J$ tels que l'application $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit une courbe paramétrée par longueur d'arc, et que si (J', φ') est un autre tel couple, alors il existe une isométrie ι de $\mathbb{R}$ telle que $J' = \iota(J)$ et $\varphi' = \iota \circ \varphi$.

Démonstration. Notons $a < b$ les deux extrémités de I (qui chacune peut appartenir ou pas à I , et peut valoir respectivement $-\infty$ et $+\infty$). Soit $s_0 \in I$. Notons $a' = \int_{s_0}^a \|\dot{f}(s)\| ds$ et $b' = \int_{s_0}^b \|\dot{f}(s)\| ds$, qui vérifient $a' < b'$ (car $a' \leq 0 \leq b'$ et $b' - a' = \int_a^b \|\dot{f}(s)\| ds > 0$) et peuvent valoir $-\infty$ et $+\infty$ respectivement. Notons J l'intervalle d'extrémités a' et b' , contenant a' (respectivement b') si et seulement si a (respectivement b) appartient à I . L'application φ de I dans J définie par $t \mapsto \int_{s_0}^t \|\dot{f}(s)\| ds$ est une immersion C^1 strictement croissante (car de dérivée $\|\dot{f}(s)\|$ continue et strictement positive), donc est une bijection de I dans J , d'inverse C^1 par le théorème d'inversion locale. Par conséquent, l'application $\varphi : I \rightarrow J$ est un C^1 -difféomorphisme et le théorème de dérivation des fonctions composées montre que la courbe $f \circ \varphi^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, de vecteur vitesse au temps s égal à $-\frac{\dot{f}(\varphi^{-1}(s))}{\|\dot{f}(\varphi^{-1}(s))\|}$, est paramétrée par longueur d'arc.

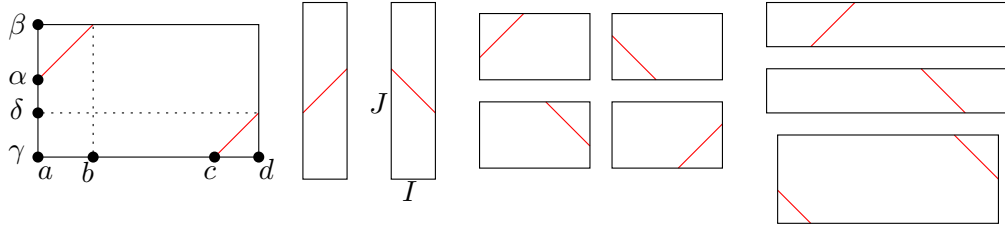
L'unicité vient du fait qu'un C^1 -difféomorphisme d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans un intervalle de $\mathbb{R}$, de pente ± 1 en chaque point, est en fait la restriction d'une isométrie de $\mathbb{R}$ (de pente constante égale à 1 ou à -1). $\square$

Lemme 5.9. *Soient $f : I \rightarrow M$ et $g : J \rightarrow M$ deux paramétrages C^∞ par longueur d'arc d'ouverts de M (en particulier $f(\partial I), g(\partial J) \subset \partial M$, où ∂I et ∂J sont les bords des variétés à bord I et J). Alors l'intersection $f(I) \cap g(J)$ admet au plus deux composantes connexes. Si elle n'en a qu'une, alors l'application f peut être étendue en un paramétrage par longueur d'arc d'image $f(I) \cup g(J)$. Si elle en a deux, alors M est C^∞ -difféomorphe au cercle.*

Démonstration. L'application $g^{-1} \circ f : f^{-1}(f(I) \cap g(J)) \rightarrow g^{-1}(f(I) \cap g(J))$, définie sur un ouvert de I et à valeurs dans un ouvert de J , est un difféomorphisme de dérivées ± 1 . Donc son graphe

$$\Gamma = \{(s, t) \in I \times J : s \in f^{-1}(f(I) \cap g(J)), t = g^{-1}(f(s))\} = \{(s, t) \in I \times J : f(s) = g(t)\}$$

est un fermé de $I \times J$ composé de segments de droite de pente ± 1 . Puisque Γ est fermé dans $I \times J$ et $g^{-1} \circ f$ est un difféomorphisme local, ces segments doivent avoir leurs extrémités sur le bord du carré $I \times J$. Puisque $g^{-1} \circ f$ et $f^{-1} \circ g$ sont bijectifs, chacun des quatre côtés du carré $I \times J$ contient au plus un point de Γ . Donc Γ admet au plus deux composantes connexes, et s'il y en a deux, alors leurs pentes sont égales.



Si Γ est connexe, alors l'application $g^{-1} \circ f$ s'étend en une application affine $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (de pente ± 1). Les applications f et $g \circ A$ définies sur I et $A^{-1}(J)$ se recollent pour donner un paramétrage par longueur d'arc $F : I \cup A^{-1}(J) \rightarrow f(I) \cup g(J)$.

Supposons que Γ admette deux composantes connexes, disons de pentes $+1$. Notons respectivement $((a, \alpha), (b, \beta))$ et $((c, \gamma), (d, \delta))$ les couples d'extrémités des deux segments de Γ , de sorte que $a < b \leq c < d$ et $\gamma < \delta \leq \alpha < \beta$. Quitte à translater J , nous pouvons supposer que $\gamma = c$ et par conséquent que $\delta = d$. Notons que $\alpha - a > 0$ car $a < c = \gamma < \alpha$. Considérons l'application $h : \mathbb{S}_1 \rightarrow M$ définie, en posant $t = a + (\alpha - a)\theta$ pour tout $\theta \in]0, 1]$, par

$$h(e^{2i\pi\theta}) = \begin{cases} f(t) & \text{si } a < t < d \\ g(t) & \text{si } c < t < \beta. \end{cases}$$

Elle est bien définie car

- I a pour extrémités a et d , donc $f(t)$ est bien défini pour tout $t \in]a, d[$,
- J a pour extrémités $\gamma = c$ et β , donc $g(t)$ est bien défini pour tout $t \in]c, \beta[$,
- puisque $a < c = \gamma < d = \delta \leq \alpha < \beta$, nous avons $\alpha - a > 0$ et les intervalles $]a, d[$ et $]c, \beta[$ recouvrent l'intervalle $]a, \alpha = a + (\alpha - a)[$,
- l'application de $]0, 1]$ dans $]a, \alpha = a + (\alpha - a)[$ définie par $\theta \mapsto t = a + (\alpha - a)\theta$ est un homéomorphisme,
- $f(t)$ et $g(t)$ coïncident sur $t \in]c, d[=]\gamma, \delta[$ par la définition de Γ , c'est-à-dire pour t dans l'intersection $]a, d[\cap]c, \beta[$ des deux domaines de définitions par morceaux de h , et
- $f(s)$ et $g(s + (\alpha - a))$ coïncident sur $s \in]a, b[$ par la définition de Γ .

L'application h est continue (en particulier en $e^{2i\pi\theta}$ pour $\theta = 1$ par la dernière propriété ci-dessus) et injective car f et g le sont et par construction. Son image est compacte (car image de l'espace compact $\mathbb{S}_1$ par une application continue à valeurs dans un espace séparé) et ouverte (car d'image la réunion des ouverts $f(I)$ et $g(J)$), donc égale à M par connexité.

□

Maintenant, supposons que M ne soit pas difféomorphe au cercle, et montrons que M est difféomorphe à un intervalle. Soit $f : I \rightarrow M$ un paramétrage par longueur d'arc maximal, c'est-à-dire tel qu'il n'existe pas d'intervalle $\tilde{I}$ contenant strictement I et de paramétrage par longueur d'arc $\tilde{f} : \tilde{I} \rightarrow M$ tels que $\tilde{f}|_I = f$, dont l'existence est immédiate par extension maximale éventuelle de part et d'autre de I . Montrons que f est surjective, ce qui conclut. Par l'absurde, si l'ouvert $f(I)$ de M n'était pas égal à M tout entier, il existerait par connexité par arcs de M un point d'accumulation $x \in \overline{f(I)} \setminus f(I)$. En prenant $g : J \rightarrow M$ un paramétrage local en x de M , modifié pour qu'il soit un paramétrage par longueur d'arc par le lemme 5.8, et en appliquant le lemme 5.9 ci-dessus, nous obtiendrions un paramétrage par longueur d'arc d'un ouvert de M , qui étendrait strictement f (puisque son domaine contiendrait x), ce qui contredirait la maximalité de f . □

5.3 Le théorème du point fixe de Brouwer

Nous donnons ci-dessous, en application du théorème de Sard 5.3, une démonstration (due à M. Hirsch et suivant le joli petit livre [Mil1]) du théorème de point fixe de Brouwer. La démonstration peut-être la plus naturelle (évitant en particulier la régularisation) est donnée par des arguments homologiques (voir par exemple [God1, Spa, Hat, Pau3]).

Théorème 5.10. (Théorème du point fixe de Brouwer) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, toute application continue de $\mathbb{B}_n$ dans $\mathbb{B}_n$ admet un point fixe.*

Démonstration. Nous pouvons supposer que $n \geq 1$. Nous commençons par montrer un résultat de non existence de rétraction d'une sous-variété compacte à bord sur son bord.

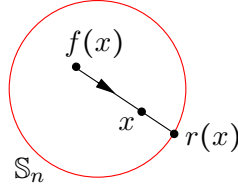
Lemme 5.11. *Soit M une sous-variété à bord, compacte et lisse. Il n'existe pas d'application lisse $r : M \rightarrow \partial M$ valant l'identité sur ∂M .*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe une telle application r , avec M donc ∂M non vide. Par le théorème de Sard 5.3, soit $y \in \partial M$ une valeur régulière de r . Remarquons que puisque $r|_{\partial M} = \text{id}_{\partial M}$, le point y est aussi une valeur régulière de $r|_{\partial M}$. Puisque ∂M est de codimension 1 dans M et par la proposition 5.6, l'image réciproque $r^{-1}(y)$ est une sous-variété à bord, compacte et lisse, de dimension 1, telle que

$$\partial(r^{-1}(y)) = \partial M \cap r^{-1}(y) = (r|_{\partial M})^{-1}(y) = \{y\}.$$

Ceci contredit la classification des sous-variétés compactes de dimension 1 (voir le théorème 5.7), qui montre que leur bord est toujours de cardinal pair. $\square$

Lemme 5.12. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, toute application lisse f de $\mathbb{B}_{n+1}$ dans $\mathbb{B}_{n+1}$ admet un point fixe.*



Démonstration. Sinon, l'application $r : \mathbb{B}_{n+1} \rightarrow \mathbb{S}_n$, qui à $x \in \mathbb{B}_{n+1}$ associe l'unique intersection avec $\mathbb{S}_n$ du rayon d'origine $f(x)$ passant par x est une rétraction⁹² lisse⁹³ de la sous-variété lisse compacte à bord $\mathbb{B}_{n+1}$ sur son bord $\partial \mathbb{B}_{n+1} = \mathbb{S}_n$, ce qui contredit le lemme 5.11. $\square$

Maintenant, nous terminons la démonstration du théorème 5.10 du point fixe de Brouwer par un processus classique d'approximation (ou de régularisation) de fonctions continues. Supposons par l'absurde qu'il existe une application continue $g : \mathbb{B}_{n+1} \rightarrow \mathbb{B}_{n+1}$ sans

92. Si $x \in \mathbb{S}_n$, alors $r(x) = x$ par construction.

93. En effet, notons $\| \cdot \|$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la norme usuelle et le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^{n+1}$. Nous avons $r(t) = x + tu$ où $u = \frac{x-f(x)}{\|x-f(x)\|}$ et $t = -\langle x, u \rangle + \sqrt{\langle x, u \rangle^2 - \|x\|^2 + 1}$ (par un petit calcul utilisant le fait que $\|r(x)\| = 1$ et x appartient au segment entre $f(x)$ et $r(x)$). Alors u et t dépendent de manière lisse de x , car le dénominateur de u ne s'annule pas, et le terme sous la racine carrée est strictement positif, car sinon $\|x\| = 1$ et $\langle x, u \rangle = 0$, donc $\langle x, f(x) \rangle = \langle x, x \rangle$, et par le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous aurions $f(x) = x$, une contradiction.

point fixe. Par continuité et compacité, nous avons $\epsilon = \frac{1}{3} \min_{x \in \mathbb{B}_{n+1}} \|g(x) - x\| > 0$. Par le théorème d'approximation de Stone-Weierstrass (voir par exemple [Pau2, §5.6]), il existe une fonction polynomiale (donc lisse) $P : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ telle que

$$\sup_{x \in \mathbb{B}_{n+1}} \|g(x) - P(x)\| \leq \epsilon .$$

L'application $f = \frac{1}{1+\epsilon}P$ est lisse et envoie $\mathbb{B}_{n+1}$ dans $\mathbb{B}_{n+1}$. De plus, par l'inégalité triangulaire inverse, pour tout $x \in \mathbb{B}_{n+1}$, nous avons

$$\begin{aligned} \|f(x) - x\| &= \frac{1}{1+\epsilon} \|P(x) - g(x) + g(x) - x + x - (1+\epsilon)x\| \\ &\geq \frac{1}{1+\epsilon} (-\|P(x) - g(x)\| + \|g(x) - x\| - \|x - (1+\epsilon)x\|) \\ &\geq \frac{1}{1+\epsilon} (-\epsilon + 3\epsilon - \epsilon) > 0 . \end{aligned}$$

Donc f n'admet pas de point fixe, ce qui contredit le lemme 5.12. $\square$

5.4 Sous-variétés différentielles orientables

Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq p \leq n$. Nous ne considérerons que des sous-variétés lisses à bord (éventuellement vide) dans cette partie.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie p . Une *orientation* de E est une classe d'équivalence de bases de E pour la relation $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ si l'unique application linéaire de E dans E envoyant le p -uplet $\mathcal{B}$ sur le p -uplet $\mathcal{B}'$ (dans l'ordre) est de déterminant strictement positif (ou, de manière équivalente, si le déterminant de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est strictement positif). Il existe exactement deux orientations sur E , car $p \geq 1$ (ce sont les classes d'équivalence d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ et de la base $\mathcal{B}' = (-e_1, e_2, \dots, e_p)$). Nous dirons que E est *orienté* s'il est muni d'une orientation. Une base appartenant à cette orientation est alors dite *positive* ou *directe*.

Un isomorphisme linéaire d'un espace vectoriel réel orienté E dans un espace vectoriel réel orienté F *préserve l'orientation* s'il envoie l'orientation de E sur l'orientation de F , c'est-à-dire s'il envoie une/toute base positive de E sur une base positive de F , ou de manière équivalente, si son déterminant, dans des bases positives de E et de F , est strictement positif.

L'espace $\mathbb{R}^p$ est muni de l'orientation dite *canonique* (ou standard) telle que sa base canonique soit positive. Si E et F sont deux espaces vectoriels réels de dimension finie orientés, alors l'espace vectoriel produit $E \times F$ (dans cet ordre) sera muni de l'orientation, dite *produit*, telle que la concaténation d'une base positive de E et d'une base positive de F (dans cet ordre) soit une base positive de $E \times F$.

Par convention, une *orientation* d'un espace vectoriel nul est un choix d'un signe $+1$ ou -1 .⁹⁴

Soit M une sous-variété à bord dans $\mathbb{R}^n$, lisse et de dimension p .

Une *orientation* de M est un choix *localement cohérent*, pour tout $x \in M$, d'une des deux orientations de l'espace vectoriel réel $T_x M$ de dimension p , où par *localement cohérent*, nous entendons que pour tout $x_0 \in M$, il existe un paramétrage local $\varphi : W \rightarrow U$ de M en

94. auquel on peut penser comme à un spin ± 1 de physicien

x_0 , où U est un voisinage ouvert de x_0 dans M , et W un ouvert de $\mathbb{R}^p$, tel que pour tout $x \in U$, l'image réciproque par l'isomorphisme linéaire $d\varphi_{\varphi^{-1}(x)} : \mathbb{R}^p \rightarrow T_x M$ de l'orientation choisie de $T_x M$ soit une orientation de $\mathbb{R}^p$ indépendante de $x \in U$. Si cette orientation est l'orientation canonique de $\mathbb{R}^p$, nous dirons que le paramétrage local φ est *orienté*.

Nous dirons que M est *orientable* si elle admet une orientation. *Orienter* M , c'est choisir une orientation sur M , et nous noterons souvent de la même manière la sous-variété orientée obtenue.

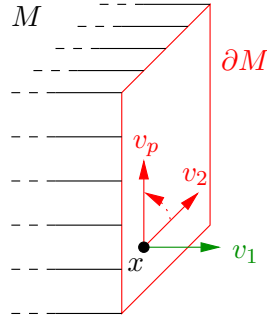
Si M et N sont deux sous-variétés à bord, lisses et orientées, de dimension au moins 1, un C^1 -difféomorphisme local $f : M \rightarrow N$ *préserve l'orientation* si pour tout $x \in M$, l'application tangente⁹⁵ $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ préserve l'orientation.

Par convention, une *orientation* d'une sous-variété M' de dimension 0 est une application $\varepsilon : M' \rightarrow \{\pm 1\}$.⁹⁶ Une sous-variété orientée de dimension 0 est un couple (M', ε) d'une sous-variété M' de dimension 0 munie d'une orientation ε . Une bijection $f : M' \rightarrow M''$ entre deux sous-variétés de dimension 0 munies respectivement d'orientations ε et ε' *préserve l'orientation* si $\varepsilon' \circ f = \varepsilon$. Remarquons que toute sous-variété de dimension 0 est *orientable*, c'est-à-dire admet une orientation, par exemple la fonction constante de valeur 1.

Remarques. (1) La sous-variété à bord M est orientable si et seulement si chacune de ses composantes connexes l'est. Si M est connexe et orientable, alors M admet exactement deux orientations. Si M est orientable, alors M admet exactement 2^{n_0} orientations, où n_0 est le nombre de composantes connexes de M .

(2) Il découle par exemple du théorème de classification 5.7 que toute sous-variété à bord, de dimension 1 et lisse, est orientable, car les intervalles et le cercle le sont. Les deux orientations possibles du cercle $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ sont l'*orientation trigonométrique* (une base directe de $T_z \mathbb{S}_1$ est $\{iz\}$) et l'*orientation opposée du sens des aiguilles d'une montre*.

(3) Si M est orientée et si sa dimension p est au moins 2, alors il existe une unique orientation sur la sous-variété lisse ∂M telle que pour tout x dans ∂M , si $(v_2, \dots, v_p)$ est une base orientée de $T_x(\partial M)$, et si v_1 est un vecteur tangent en x à M pointant vers l'extérieur (c'est-à-dire $v_1 = \dot{c}(0)$ où $c :]-\epsilon, +\epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ , avec $c(0) = x$, $\dot{c}(0) \notin T_x(\partial M)$, $c(t) \in M$ si $t \leq 0$ et $c(t) \notin M$ si $t > 0$), alors $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est une base orientée de $T_x M$.

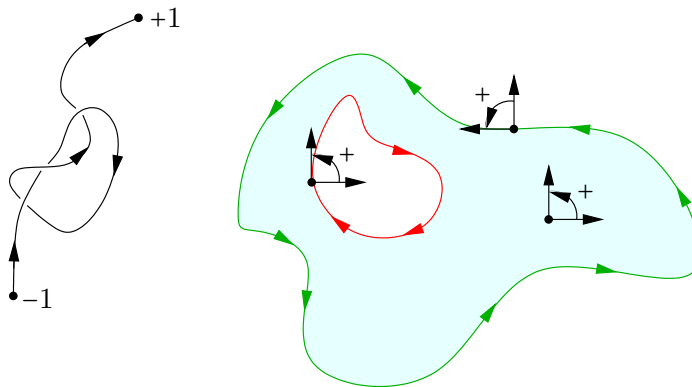


L'orientation de ∂M ci-dessus est appelée l'*orientation par la direction sortante* (ou *normale sortante*). Sauf mention explicite du contraire, le bord de toute sous-variété à bord, lisse et orientée, sera muni de cette orientation. Le choix de cette orientation est

95. qui est un isomorphisme linéaire par l'hypothèse que f est un C^1 -difféomorphisme local

96. c'est-à-dire la donnée d'un spin ± 1 pour tout point de M

important pour la validité des formules de Stokes et ses variantes (Ostrogradski, etc), voir par exemple [Paul], et on prendra bien garde à la signification de cette orientation par la direction sortante du bord des domaines non simplement connexes du plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$, voir la figure de droite ci-dessous.



Si M est orientée et si $p = 1$, alors il existe une unique orientation sur la sous-variété ∂M de dimension 0 telle que pour tout $x \in \partial M$, si $\varphi :] - \epsilon, 0] \rightarrow U$ est un paramétrage local d'un voisinage ouvert U de $x = \varphi(0)$ dans M , alors la valeur en x de l'orientation de ∂M est, par définition, $+1$ si φ préserve l'orientation et -1 sinon. Voir la figure de gauche ci-dessus.

Exemples. (1) La sous-variété $\mathbb{R}^p$ est orientable, et orientée par le choix de la base canonique dans l'espace tangent $T_x \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^p$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$. Tout ouvert non vide U d'une sous-variété à bord orientée M est orientable, en munissant, pour tout $x \in U$, l'espace tangent $T_x U$ de l'orientation de $T_x M = T_x U$. La sous-variété à bord U sera, sauf mention explicite du contraire, munie de cette orientation. L'affirmation suivante en découle par contraposition.

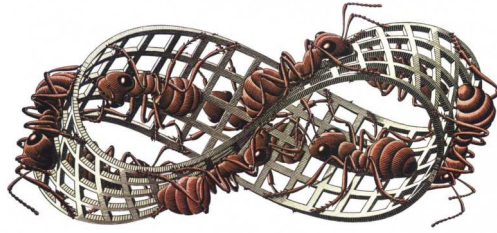
Méthodologie :

Pour montrer qu'une sous-variété à bord n'est pas orientable, il suffit de montrer qu'elle contient un ouvert non vide non orientable.

(2) Si M_1 et M_2 sont deux sous-variétés lisses et orientées (sans bord, même si l'une des deux peut en avoir, voir le commentaire avant l'exercice E.66), alors la sous-variété produit $M_1 \times M_2$ est orientable. Elle sera orientée par le choix de l'orientation produit sur $T_{(x,y)}(M_1 \times M_2) = T_x M_1 \times T_y M_2$ (dans cet ordre!), et alors appelée la *sous-variété orientée produit*.

(3) Si M est une sous-variété orientée lisse, si G est un groupe discret agissant sur M proprement et librement par C^∞ -difféomorphismes préservant l'orientation, alors la variété quotient $G \backslash M$, réalisée de manière indifférente comme une sous-variété par le théorème de plongement de Whitney, est une sous-variété lisse orientable, et orientée par l'unique orientation telle que la projection canonique $M \rightarrow G \backslash M$ (qui est un C^∞ -difféomorphisme local, voir la proposition 4.16) préserve l'orientation.

(4) Un point important est qu'alors que tout espace vectoriel réel de dimension finie, ainsi que tout ouvert de $\mathbb{R}^p$, admet une orientation, il existe des sous-variétés lisses qui ne sont pas orientables. C'est le cas par exemple du ruban de Möbius, qui est la variété quotient de $\mathbb{R}^2$ par l'action libre et propre du groupe $\mathbb{Z}$, où $1 \in \mathbb{Z}$ agit par $(x, y) \mapsto (x+1, -y)$ (voir l'exercice E.7 (2)).



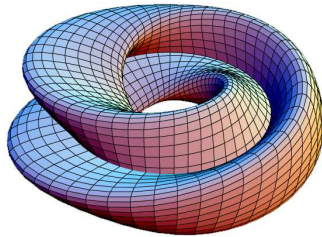
Les fourmis d'Escher

Le plan projectif réel et la bouteille de Klein (voir l'exercice E.27), qui contiennent tous deux des ouverts qui sont difféomorphes au ruban de Möbius, ne sont pas orientables non plus, par l'exemple (1). Voir pour illustration le site de Henri Paul de Saint Gervais

<http://analysis-situs.math.cnrs.fr/Quelques-surfaces-non-orientables.html> .



Bouteille de Klein



Huit de Klein



Bonnet de Klein



Dent de Klein

Exercice E.67.

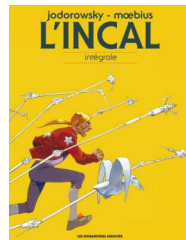
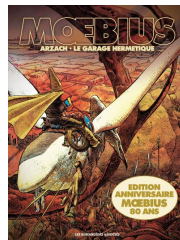
- (1) Montrer que la sphère $\mathbb{S}_n$ est orientable. Montrer que l'orientation du bord du disque $\mathbb{B}_2$ par la normale sortante munit le cercle $\mathbb{S}_1$ de l'orientation dans le sens trigonométrique.
- (2) Montrer que le ruban de Möbius n'est pas orientable.⁹⁷ Plus généralement, montrer que si une sous-variété M est recouverte par les images de deux paramétrages locaux (W, φ) et (W', φ') tels que le jacobien de l'application de changement de paramétrage local

$$\varphi^{-1} \circ \varphi' : (\varphi')^{-1}(\varphi(W) \cap \varphi(W')) \rightarrow \varphi^{-1}(\varphi(W) \cap \varphi(W'))$$

ne soit pas de signe constant, alors M n'est pas orientable.

- (3) Montrer que l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est orientable.
- (4) Montrer que toute sous-variété lisse simplement connexe est orientable.
- (5) Montrer que l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est orientable si et seulement si n est impair.

97. Application pratique : le titre du film « Möbius » d'Éric Rochant en 2013, avec Cécile de France et Jean Dujardin, est-il vraiment justifié ? Pour comprendre qu'une double identité apparente peut ne représenter qu'une face d'une même personnalité, relire l'œuvre de Jean Giraud.



- (6) Montrer que toute sous-variété M de classe C^∞ admet un revêtement double (c'est-à-dire à deux feuillets) $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ qui est orientable. Si M est connexe et non orientable, montrer que ce revêtement est connexe et unique à isomorphisme de revêtements près, et qu'il existe une action libre de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\widetilde{M}$ telle que la variété quotient $G \backslash \widetilde{M}$ soit C^∞ -difféomorphe à M . (Ce revêtement est appelé un *revêtement d'orientation* de M .)

5.5 Degré des applications différentiables

Soient M et N deux sous-variétés (à bord vide) lisses orientées⁹⁸ de même dimension $n \geq 1$. Soit $f : M \rightarrow N$ une application lisse. Supposons que M soit compacte et N connexe.

Si $x \in M$ n'est pas un point critique de f , alors $T_x f : T_x M \rightarrow T_x N$ est une application linéaire surjective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie, donc est un isomorphisme linéaire. Notons $\varepsilon_f(x) = +1$ si $T_x f$ préserve l'orientation, et $\varepsilon_f(x) = -1$ sinon.

Si $y \in N$ est une valeur régulière de f qui appartient à l'image de f , rappelons que $f^{-1}(y)$ est une sous-variété de dimension $n - n = 0$ de M , donc est discrète dans M , et finie par compacité de M . Posons

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon_f(x).$$

De manière compatible avec la convention usuelle des sommes vides, si $y \in N$ est une valeur régulière de f qui n'appartient pas à l'image de f , posons $\deg(f, y) = 0$.

Lemme 5.13. *L'entier $\deg(f, y)$ est défini pour y dans un ouvert dense de N . Il est localement constant dans cet ouvert dense. Si l'orientation de M (respectivement N) est changée en son orientation opposée, alors l'entier $\deg(f, y)$ est changé en son opposé.*

Démonstration. La densité de l'ensemble des valeurs régulières découle du théorème de Sard 5.3. L'ensemble des points critiques est fermé par la semi-continuité inférieure du rang, donc est compact dans M . Par la continuité de f (à valeurs dans un espace séparé), l'ensemble des valeurs critiques de f est compact, donc son complémentaire est ouvert dans N .

Pour tout $x \in f^{-1}(y)$, l'application f est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert U_x de x dans M à valeurs dans un voisinage ouvert V_x de y dans N . Puisque la partie $f^{-1}(y)$ est finie, nous pouvons supposer que les U_x sont deux à deux disjoints et que les orientations de M et N dans les U_x et les V_x sont cohérentes. Si

$$V = \left(\bigcap_{x \in f^{-1}(y)} V_x \right) - f\left(M - \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} U_x\right)$$

alors V est un voisinage ouvert de y dans N et pour tous les $y' \in V$ et $x \in f^{-1}(y)$, la fibre $f^{-1}(y')$ est contenue dans $\bigcup_{z \in f^{-1}(y)} U_z$, elle rencontre U_x en un et un seul point x' et nous avons $\varepsilon_f(x) = \varepsilon_f(x')$. La seconde affirmation en découle.

La dernière affirmation est immédiate. $\square$

⁹⁸. Cette hypothèse est cruciale, sinon il n'est possible de définir le degré qu'en tant qu'élément de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, voir par exemple [Mil1].

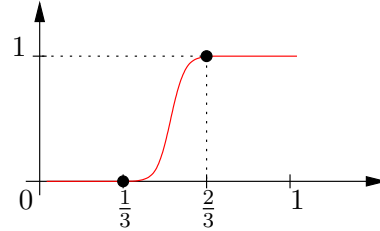
Nous allons en fait voir que l'entier $\deg(f, y)$ est constant sous les hypothèses sur M et N du début de la partie 5.5, et que c'est un invariant homotopique de f . Nous le noterons $\deg f$, et nous l'appellerons le *degré* de f .

Deux applications lisses $f, g : X \rightarrow Y$ entre deux sous-variétés lisses sont C^∞ -homotopes s'il existe une application $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ de classe C^∞ (appelée une C^∞ -homotopie entre f et g) telle que $h(x, 0) = f(x)$ et $h(x, 1) = g(x)$ pour tout x dans X . Remarquons que $X \times [0, 1]$ est une sous-variété lisse à bord (car le bord de X est vide), donc demander que h soit de classe C^∞ fait sens. Lorsque X et Y sont des variétés à bord, alors $X \times [0, 1]$ est une variété à coins, et comme précédemment, nous pouvons définir une C^∞ -homotopie comme une restriction à $X \times [0, 1]$ d'une application lisse de $X \times]-\epsilon, 1 + \epsilon[$ dans Y pour un $\epsilon > 0$ vérifiant les deux conditions au temps $t = 0$ et $t = 1$. Ceci sera utile dans la partie 7.1.

Théorème 5.14. *L'entier $\deg(f, y)$ est indépendant du choix de la valeur régulière y de f . Si f est C^∞ -homotope à une application lisse $g : M \rightarrow N$, alors $\deg f = \deg g$.*

Démonstration. La relation « être C^∞ -homotope à » que nous noterons $\sim_\infty$, reste une relation d'équivalence. En effet, les formules données dans la partie 1.1 pour montrer que la relation d'homotopie est réflexive et transitive restent valables pour $\sim_\infty$ (les homotopies constantes $h : (x, s) \mapsto f(x)$ et les homotopies inverses $\bar{h} : (x, s) \mapsto h(x, 1 - s)$ d'une homotopie h de classe C^∞ sont encore de classe C^∞). Mais par contre, la formule donnée pour montrer la transitivité ne fonctionne plus (elle fournit des homotopies seulement C^∞ par morceaux), et doit être adaptée.

Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction lisse valant 0 sur $[0, \frac{1}{3}]$ et 1 sur $[\frac{2}{3}, 1]$ (par exemple construite comme dans le lemme 4.4).



Si h est une homotopie lisse entre deux applications lisses f et g entre deux sous-variétés, alors l'application $\tilde{h} : (x, s) \mapsto h(x, \varphi(s))$ est une homotopie lisse entre f et g , qui vérifie de plus $\tilde{h}(x, s) = f(x)$ pour tout $s \in [0, \frac{1}{3}]$ et $\tilde{h}(x, s) = g(x)$ pour tout $s \in [\frac{2}{3}, 1]$. Maintenant, si $f_1 \sim_\infty f_2$ par la C^∞ -homotopie h_1 et $f_2 \sim_\infty f_3$ par la C^∞ -homotopie h_2 , alors $f_1 \sim_\infty f_3$ par la C^∞ -homotopie composée

$$(x, s) \mapsto \begin{cases} \tilde{h}_1(x, 2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{h}_2(x, 2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

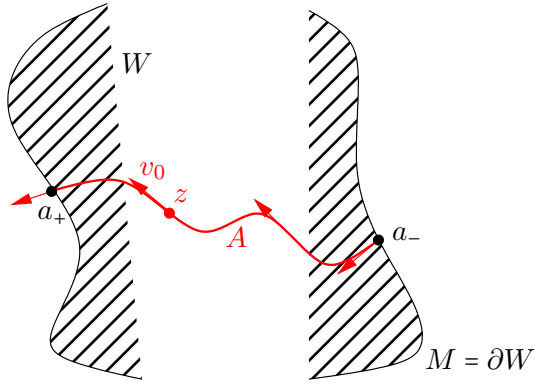
qui est maintenant de classe C^∞ quand $s = \frac{1}{2}$.

Lemme 5.15. *Supposons que la sous-variété orientée M soit le bord d'une sous-variété lisse compacte orientée à bord W et que f soit la restriction à M d'une application lisse $F : W \rightarrow N$. Alors pour toute valeur régulière y de f , nous avons $\deg(f, y) = 0$.*

Démonstration. Nous pouvons supposer que y appartient à l'image de f , sinon le résultat découle de la définition du degré. Par densité et puisque $\deg(f, y)$ est localement constant en $y \in N$, nous pouvons supposer que y est aussi une valeur régulière de F . La proposition 5.6 montre que $F^{-1}(y)$ est une sous-variété à bord de dimension 1 de W , et $f^{-1}(y) = F^{-1}(y) \cap \partial W$. Par le théorème de classification 5.7, la préimage $F^{-1}(y)$ est une union finie

de cercles et d'arcs, tels que si A est une composante connexe de $F^{-1}(y)$ qui est un arc, alors $\partial A \subset \partial W$, par la proposition 5.6. Montrons que $\sum_{a \in \partial A} \varepsilon_f(a) = 0$, ce qui conclut par une sommation sur les composantes connexes de $F^{-1}(y)$ qui sont des arcs.

Munissons A de l'orientation définie par celles de W et N de la manière suivante. Pour tout $z \in A$, soit v_0 un vecteur tangent non nul en z à la sous-variété A , complété en une base $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ positive de $T_z W$ (qui est de dimension au moins 2, c'est possible quitte à remplacer v_1 par $-v_1$). L'application tangente de F en z induit un isomorphisme linéaire de $T_z W / T_z A$ dans $T_y N$. Nous demandons que (v_0) soit une base positive de $T_z A$ si et seulement si l'image par $T_z F$ de $(v_1, \dots, v_n)$ soit une base positive de $T_y N$, ce qui ne dépend pas du choix de $(v_1, \dots, v_n)$.



En notant $\nu_1(z)$, pour tout $z \in A$, le vecteur tangent à A en z positivement orienté et unitaire (pour la norme de l'espace euclidien ambiant contenant W), l'application de A dans TW définie par $z \mapsto \nu_1(z)$ est un arc lisse. Il est sortant de W en une extrémité a_+ de A et rentrant dans W en l'autre extrémité a_- de A . L'orientation des espaces tangents à W le long de l'arc A varie continuellement. Donc $\varepsilon_f(a_+) = +1$ et $\varepsilon_f(a_-) = -1$, par définition de l'orientation de $\partial W = M$. Comme $\sum_{a \in \partial A} \varepsilon_f(a) = \varepsilon_f(a_-) + \varepsilon_f(a_+)$, ceci montre le résultat. $\square$

Lemme 5.16. Soient $f, g : M \rightarrow N$ deux applications lisses C^∞ -homotopes et $y \in N$ une valeur régulière commune à f et à g . Alors $\deg(f, y) = \deg(g, y)$.

Démonstration. Soit $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ une homotopie C^∞ entre f et g . La sous-variété à bord, lisse et orientée, $W = M \times [0, 1]$, admet pour bord la réunion disjointe de $M \times \{1\}$ (avec l'orientation de M) et de $M \times \{0\}$ (avec l'orientation opposée de celle M). Posons $f^* : \partial W \rightarrow N$ l'application telle que $f^*|_{M \times \{1\}} = g$ et $f^*|_{M \times \{0\}} = f$. Notons que $f^* = F|_{\partial W}$ est la restriction de F à ∂W . Une valeur régulière de f^* est une valeur régulière commune à f et à g . Nous avons donc, par le lemme précédant,

$$\deg(g, y) - \deg(f, y) = \deg(f^*, y) = 0.$$

Ceci montre le lemme 5.16. $\square$

Nous admettrons provisoirement le résultat suivant, voir par exemple [Mil1] et la partie 6.3.2. Deux C^∞ -difféomorphismes $f, g : P \rightarrow Q$ sont dits *isotopes* s'il existe une C^∞ -isotopie entre f et g , c'est-à-dire une homotopie $h : P \times [0, 1] \rightarrow Q$ de classe C^∞ telle que pour tout $s \in [0, 1]$, l'application h_s de P dans Q définie par $x \mapsto h(x, s)$ soit un C^∞ -difféomorphisme.

Proposition 5.17. *Le groupe⁹⁹ des C^∞ -difféomorphismes isotopes à l'identité d'une sous-variété lisse connexe agit transitivement sur ses points.*

Maintenant, soient y et z deux valeurs régulières de f . Par la proposition ci-dessus, puisque N est connexe, il existe un C^∞ -difféomorphisme $\phi : N \rightarrow N$ isotope à l'identité qui envoie z sur y . En particulier ϕ , comme l'identité de N , préserve l'orientation de N . Alors $\phi(z)$ est une valeur régulière de $\phi \circ f$ par le théorème de dérivation des applications composées, et par la naturalité de la construction, nous avons

$$\deg(\phi \circ f, \phi(z)) = \deg(f, z) .$$

Or par le lemme 5.16 appliqué avec $g = \phi \circ f$, qui est C^∞ -homotope à f , nous avons

$$\deg(\phi \circ f, y) = \deg(f, y) .$$

Comme $\phi(z) = y$, nous avons $\deg(f, z) = \deg(f, y)$, et la première assertion du théorème 5.14 en découle. La seconde assertion découle alors du lemme 5.16, car l'intersection de deux ouverts denses (les ensembles des valeurs régulières de f et de g) de N est non vide. $\square$

Exemples. (1) Toute application constante de M dans N est de degré nul. Plus généralement, toute application f lisse non surjective de M dans N est de degré 0, puisque tout élément de $N \setminus f(M)$ est une valeur régulière de f .

(2) Nous avons $\deg(\text{id}) = 1$. Si M, N, P sont des sous-variétés (à bord vide) compactes lisses orientées et connexes de mêmes dimensions, si $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow P$ sont des applications lisses, alors

$$\deg(g \circ f) = (\deg g)(\deg f) .$$

Ceci se montre en utilisant la définition même du degré, en remarquant que pour toute valeur régulière z de g tel que tout point de l'ensemble fini $g^{-1}(z)$ soit une valeur régulière de f (qui existe car l'ensemble des valeurs régulières est ouvert et dense par le lemme 5.13), nous avons une réunion disjointe $(g \circ f)^{-1}(z) = \bigcup_{y \in g^{-1}(z)} f^{-1}(y)$.

(3) Un C^∞ -difféomorphisme de M dans N est de degré +1 s'il préserve l'orientation et -1 sinon.

(4) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'application $z \mapsto z^k$ de $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{S}_1$ est une application lisse de degré k . La notion de degré d'une application lisse de $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{S}_1$ coïncide avec celle définie dans l'exercice E.12 pour toutes les applications continues de $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{S}_1$.

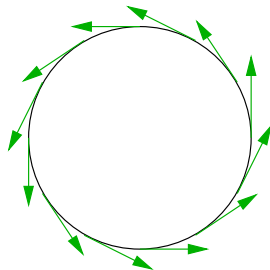
(5) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'application d'antipodie $x \mapsto -x$ de $\mathbb{S}_n$ dans $\mathbb{S}_n$ est de degré $(-1)^{n+1}$. Donc par le théorème 5.14, si n est pair, alors l'application d'antipodie n'est pas C^∞ -homotope à l'identité.

Corollaire 5.18. (Théorème de peignage des sphères) *Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la sphère $\mathbb{S}_n$ admet un champ de vecteurs tangents lisse¹⁰⁰ ne s'annulant pas si et seulement si n est impair.*

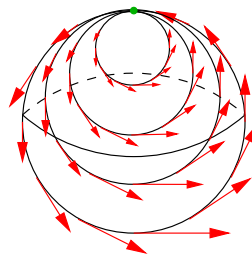
99. Il s'agit bien d'un sous-groupe du groupe des C^∞ -difféomorphismes, car si h est une C^∞ -isotopie entre f et id , et si k est une C^∞ -isotopie entre g et id , alors $(x, s) \mapsto k(h(x, s), s)$ est une C^∞ -isotopie entre $g \circ f$ et id , et en notant pour tout $s \in [0, 1]$, l'application h_s définie par $x \mapsto h(x, s)$, l'application $(x, s) \mapsto h_s^{-1}(x)$ est une C^∞ -isotopie entre f^{-1} et id .

100. Nous renvoyons à la partie 4.4.2 pour la définition des champs de vecteurs sur les sous-variétés, et à la partie 6.3 pour des généralités sur ces champs de vecteurs.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $\mathbb{S}_{2n+1} \rightarrow T\mathbb{S}_{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$ définie par $z \mapsto (z, iz)$ est un champ de vecteurs lisse ne s'annulant pas sur la sphère de dimension impaire $\mathbb{S}_{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$.



peignage du cercle $\mathbb{S}_1$



peignage à un épi de la sphère $\mathbb{S}_2$

Pour tout entier non nul $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si $f : x \mapsto (x, v(x))$ est une application de $\mathbb{S}_{2n}$ dans $T\mathbb{S}_{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1}$, qui est un champ de vecteurs lisse sur $\mathbb{S}_{2n}$ ne s'annulant pas, alors, l'application de $\mathbb{S}_{2n} \times [0, 1]$ dans $\mathbb{S}_{2n}$ définie par

$$(x, s) \mapsto x \cos(\pi s) + \frac{v(x)}{\|v(x)\|} \sin(\pi s),$$

qui est bien à valeurs dans $\mathbb{S}_{2n}$ car $v(x)$ est orthogonal à x , est une homotopie lisse entre l'identité $x \mapsto x$ en $s = 0$ et l'antipodie $x \mapsto -x$ en $s = 1$, ce qui est impossible par l'exemple (5) ci-dessus. $\square$

Remarque. Nous n'avons défini le degré que pour les sous-variétés de même dimension au moins 1. Il est possible de le définir aussi en dimension 0, pour les amateurs de conventions. Soient M et N deux variétés de dimension 0, munies d'une orientation $\eta_M : M \rightarrow \{\pm 1\}$ et $\eta_N : N \rightarrow \{\pm 1\}$. Notons que toute application f de M dans N est de classe C^∞ , et tout point de M est un point régulier de f (l'application linéaire nulle entre deux espaces vectoriels nuls est surjective!). Donc tout point de N est une valeur régulière. Nous pouvons définir le *degré* de f en un point $y \in N$ par

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \eta_M(x) \eta_N(y),$$

(qui ne dépend pas de y si N est connexe, car alors N est réduite à $\{y\}$). Il vérifie encore que

$$\deg(g \circ f, g(y)) = \deg(g, g(y)) \deg(f, y)$$

pour tout $y \in N$ et toute application $g : N \rightarrow P$ où P est une variété de dimension 0, et que

$$\deg(f, y) = 0$$

pour tout $y \in N$ si M est le bord d'une sous-variété lisse compacte orientée à bord W de dimension 1 et si f est la restriction à M d'une application lisse $F : W \rightarrow N$ (qui est alors constante sur chaque composante connexe de W).

5.6 Autres exercices

Exercice E.68. Soient M et N des sous-variétés lisses de $\mathbb{R}^d$ de dimension m et n telles que $m + n < d$. Montrer que l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}^d$ tels que $(M + v) \cap N \neq \emptyset$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Exercice E.69. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ un entier et M une sous-variété lisse de codimension 1 de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$. Montrer que M est orientable si et seulement s'il existe une application ¹⁰¹ $N : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ lisse telle que pour tout $x \in M$, nous avons $\|N(x)\| = 1$ et $N(x) \perp T_x M$.

Exercice E.70. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ un entier, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une submersion lisse. Montrer que pour tout $y \in f(U)$, le sous-espace $f^{-1}(y)$ est une sous-variété lisse orientable de $\mathbb{R}^n$ de codimension 1.

Exercice E.71. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ un entier non nul. Montrer que toute application lisse de la sphère $\mathbb{S}_n$ dans elle-même de degré différent de $(-1)^{n+1}$ admet au moins un point fixe.

Exercice E.72. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{S}_n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$. Le but de cet exercice est de démontrer le *théorème de Borsuk-Ulam* qui dit que pour toute application lisse ¹⁰² $f : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$, il existe un point $x \in \mathbb{S}_n$ tel que $f(x) = f(-x)$. Une application $g : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ est dite *impaire* si $g(x) = -g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}_n$.

- (1) Démontrer le théorème de Borsuk-Ulam pour $n = 1$. Nous supposons maintenant que $n \geq 2$.
- (2) Soit $g : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ une application continue impaire. Montrer que $\deg(g)$ est impair. Supposons par récurrence que toute application $g : \mathbb{S}_{n-1} \rightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ lisse impaire est de degré impair.
- (3) Dans les questions (3) à (5), considérons une application $g \in C^\infty(\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_n)$ impaire. Montrer que, quitte à composer g avec une rotation, nous pouvons supposer que les pôles Nord $(1, 0, \dots, 0)$ et Sud $(-1, 0, \dots, 0)$ de $\mathbb{S}_n$ sont des points réguliers de g , et n'appartiennent pas à l'image $g(\mathbb{S}_n^0)$ par g de l'équateur $\mathbb{S}_n^0 = (\{0\} \times \mathbb{R}^n) \cap \mathbb{S}_n$ de $\mathbb{S}_n$.
- (4) Soient $p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \{0\} \times \mathbb{R}^n$ la projection orthogonale de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^{n+1}$ sur son hyperplan vectoriel horizontal $\{0\} \times \mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}_n^{\geq 0} = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}_n : x_0 \geq 0\}$ l'hémisphère Nord fermé de $\mathbb{S}_n$ et $\tilde{g} = (p \circ g)|_{\mathbb{S}_n^{\geq 0}}$. Montrer que 0 est une valeur régulière de $p \circ g$. Montrer que le degré de g est congru modulo 2 à $\text{Card } \tilde{g}^{-1}(0)$.
- (5) Montrer que $\text{Card } \tilde{g}^{-1}(0)$ est impair. En déduire que $\deg(g)$ est impair. ¹⁰³
- (6) Dans les questions (6) à (8), considérons par l'absurde une application $f \in C^\infty(\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_n)$ telle que $f(x) \neq f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}_n$. Construire une application $g \in C^\infty(\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_{n-1})$ impaire.

101. Une telle application N s'appelle une *application de Gauss* de l'hypersurface orientable M . Nous y reviendrons dans l'exercice E.84 et dans la partie 8.2.4.

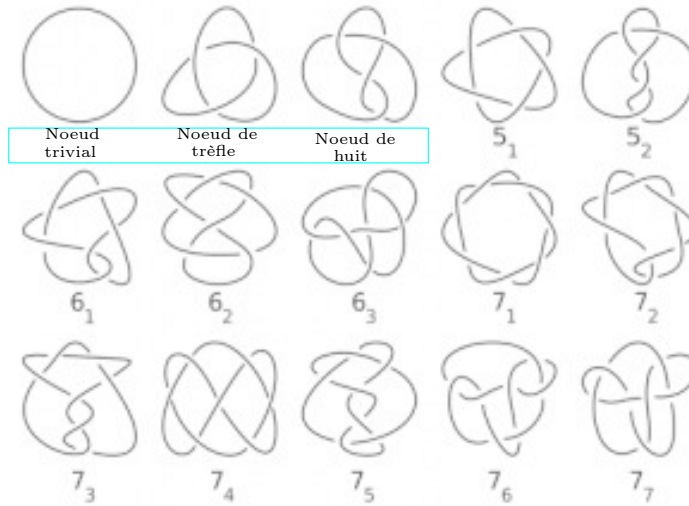
102. Nous n'avons défini le degré que pour les applications lisses, mais la régularité de classe C^1 suffit (avec invariance par C^1 -homotopie), comme le montre une relecture de la partie 5.5. Ceci permet de remplacer la régularité C^∞ par la régularité C^1 dans cet énoncé du théorème de Borsuk-Ulam. Par ailleurs, le théorème de Borsuk-Ulam est en fait vrai pour des applications simplement supposées continues, mais sa démonstration utilise alors des outils homologiques (voir par exemple [Hat, Coro. 2B.7]).

103. En particulier, une application lisse impaire de $\mathbb{S}_n$ dans $\mathbb{S}_n$ est surjective, car le degré d'une application non surjective est nul (donc n'est pas impair!).

- (7) Montrer que l'application $g|_{\mathbb{S}_n^0}$ est de degré impair.
- (8) Montrer que l'application $g|_{\mathbb{S}_n^0}$ est de degré nul. Conclure.

Exercice E.73. Un *noeud* est un plongement lisse du cercle $\mathbb{S}_1$ dans l'espace euclidien orienté usuel $\mathbb{R}^3$, ou par extension, l'image d'un tel plongement. Nous renvoyons par exemple à [Rol, Ada] pour des informations sur la théorie des noeuds. Pour tout $v \in \mathbb{S}_2$, notons π_v la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan $v^\perp$ orthogonal à v . Si f est un noeud, nous dirons que les auto-intersections de $\pi_v \circ f$ sont *transverses*¹⁰⁴ si pour tous les $x \neq y$ dans $\mathbb{S}_1$ tels que $\pi_v \circ f(x) = \pi_v \circ f(y)$, les vecteurs $\pi_v \circ f'(x) = \pi_v \circ f'(y)$ sont linéairement indépendants.

- (1) Montrer qu'il existe un ouvert V de $\mathbb{S}_2$ de mesure pleine (c'est-à-dire de complémentaire de mesure nulle) tel que pour tout $v \in V$, l'application $\pi_v \circ f$ soit une immersion.
- (2) Montrer que pour presque tout $v \in \mathbb{S}_2$ les auto-intersections de $\pi_v \circ f$ sont transverses.
- (3) Montrer que l'ensemble des $v \in \mathbb{S}_2$ tels que les auto-intersections de $\pi_v \circ f$ soient transverses est un ouvert de $\mathbb{S}_2$.
- (4) Montrer qu'il existe un ouvert dense V de $\mathbb{S}_2$ tel que pour tout $v \in \mathbb{S}_2$, l'application $\pi_v \circ f$ soit une immersion à auto-intersections transverses *au plus doubles* de $\pi_v \circ f$, c'est-à-dire telle que le sous-ensemble $(\pi_v \circ f)^{-1}(y)$ de $\mathbb{S}_1$ soit de cardinal au plus 2 pour tout $y \in v^\perp$. L'image de $\pi_v \circ f$ est alors appelée un *diagramme de noeud*, et un point z du plan $v^\perp$ tel que $(\pi_v \circ f)^{-1}(z)$ soit de cardinal 2 est appelé un *(point de) croisement*.



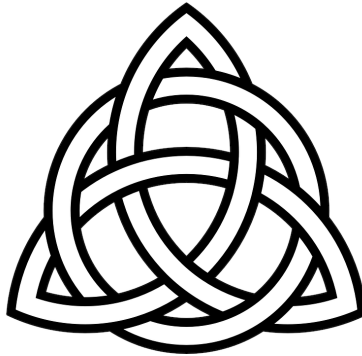
Liste de noeuds à au plus 7 croisements

Exercice E.74. Soient $n, m, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $m + n = k$, et soient M et N deux sous-variétés lisses compactes, connexes, orientées (à bord vide) disjointes de l'espace euclidien orienté usuel $\mathbb{R}^{k+1}$, de dimension respectivement m et n . Nous définissons le *nombre d'enlacement* de M et N , et nous notons $\text{Enl}(M, N)$, le degré de l'application de $M \times N$ dans $\mathbb{S}_k$ définie par

$$(x, y) \mapsto \frac{x - y}{\|x - y\|}.$$

104. Voir la partie 6.2 pour un développement complet de cette notion.

- (1) Montrer que $\text{Enl}(M, N) = (-1)^{(m-1)(n-1)} \text{Enl}(N, M)$.
- (2) Préciser la dépendance de $\text{Enl}(M, N)$ par rapport au choix des orientations de M et de N .
- (3) Montrer que s'il existe une sous-variété lisse à bord W de $\mathbb{R}^{k+1}$ telle que $M = \partial W$ et $W \cap N = \emptyset$, alors $\text{Enl}(M, N) = 0$.
- (4) Montrer que s'il existe un hyperplan affine de $\mathbb{R}^{k+1}$ séparant M et N , alors $\text{Enl}(M, N) = 0$.
- (5) À partir de maintenant, nous supposons que $k = 2$ et $m = n = 1$. Un *entrelac* (à deux composantes) est un couple de plongements lisses du cercle $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{R}^3$ d'images disjointes, et par extension, la réunion de ses deux images. Soit (f, g) un entrelac. Montrer qu'il existe un ouvert dense U de $\mathbb{S}_2$ tel que pour tout $v \in U$, si π_v est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan $v^\perp$ orthogonal à v , alors les applications $\pi_v \circ f$ et $\pi_v \circ g$ sont des immersions à auto-intersections transverses au plus doubles (voir l'exercice E.73 pour la terminologie) de $\mathbb{S}_1$ dans $v^\perp$ telles que pour tous les $x, y \in \mathbb{S}_1$, si $z = \pi_v \circ f(x) = \pi_v \circ g(y)$, alors les ensembles $(\pi_v \circ f)^{-1}(z)$ et $(\pi_v \circ g)^{-1}(z)$ sont des singletons. La réunion des images de $\pi_v \circ f$ et $\pi_v \circ g$, avec indication de quel brin passe dessus et lequel passe dessous (par rapport à l'ordre sur la droite $\mathbb{R}v$ dirigée par v), est appelé un *diagramme d'entrelac*. Comment lire sur un tel diagramme le nombre d'entrelacement des deux composantes connexes d'un entrelac ?

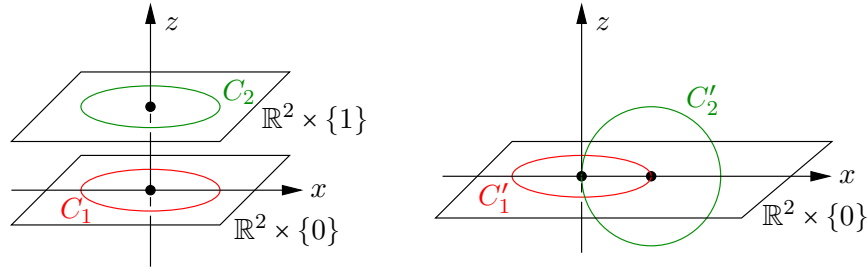


- (6) Deux entrelacs (f_0, g_0) et (f_1, g_1) sont dits *isotopes* dans $\mathbb{R}^3$ s'il existe deux homotopies $f : \mathbb{S}_1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{S}_1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ respectivement entre f_0 et f_1 , et entre g_0 et g_1 telles que pour tout $t \in [0, 1]$, les applications $x \mapsto f(x, t)$ et $x \mapsto g(x, t)$ soient des plongements lisses d'images disjointes. Montrer qu'alors

$$\text{Enl}(f_0(\mathbb{S}_1), g_0(\mathbb{S}_1)) = \text{Enl}(f_1(\mathbb{S}_1), g_1(\mathbb{S}_1)) .$$

- (7) En déduire que *l'entrelac celtique* de la figure ci-dessus n'est pas isotope à *l'entrelac trivial* (voir le dessin de gauche ci-dessous) d'image $C_1 \cup C_2$ où

$$C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\} \quad \text{et} \quad C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 1\} .$$



- (8) En déduire que l'entrelac celtique de la figure ci-dessus n'est pas isotope à l'entrelac de Hopf (voir le dessin de droite ci-dessus) d'image $C'_1 \cup C'_2$ où

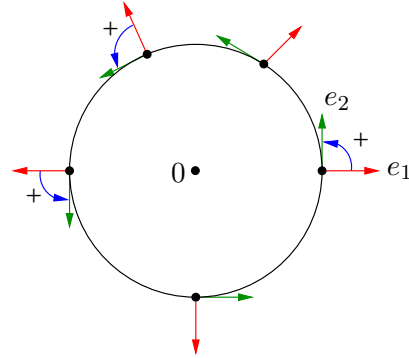
$$C'_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\} \quad \text{et} \quad C'_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + z^2 = 1, y = 0\}.$$

5.7 Indications pour la résolution des exercices

Correction de l'exercice E.66. Comme être une sous-variété à bord est un problème local, par le théorème 4.8 de forme normale des applications de rang constant appliqué à f , en prenant un paramétrage local de M à la source et quitte à effectuer une translation sur $\mathbb{R}$ au but, nous nous ramenons au cas où M est un ouvert de $\mathbb{R}^m$, contenant 0, où $f(0) = 0$ et $y = 0$, et où f est une restriction à un ouvert de l'application linéaire $\ell : (x_1, \dots, x_m) \mapsto x_m$. Or la préimage $\ell^{-1}(]-\infty, 0])$ de $] -\infty, 0]$ par ℓ est le demi-espace standard $\mathbb{R}_+^m$, qui est bien une sous-variété à bord, dont le bord est $\partial\mathbb{R}_+^m = \mathbb{R}^{m-1} \times]-\infty, 0] = \ell^{-1}(0)$. Le résultat en découle.

Correction de l'exercice E.67.

(1) La seconde assertion est immédiate par la définition de l'orientation du bord d'une sous-variété, en mettant le vecteur sortant en première position.



Pour montrer la première assertion, nous pouvons supposer que $n \geq 2$, car toute sous-variété de dimension 0 ou 1 est orientable. L'ensemble des inverses des deux projections stéréographiques de pôle Nord et Sud est un ensemble de paramétrages locaux dont les images recouvrent la sphère $\mathbb{S}_n$. L'application de changement de paramétrage local est l'inversion $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (voir l'exemple (2) de la partie 4.6). Celle-ci préserve l'orientation si n est pair (et la renverse sinon). Si n est impair, en précomposant l'inverse de la projection stéréographique de pôle Sud par l'application lisse $x \mapsto -x$ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, nous obtenons un ensemble de deux paramétrages locaux dont les images couvrent la sphère $\mathbb{S}_n$ et dont l'application de changement de paramétrage local $x \mapsto -\frac{x}{\|x\|^2}$ préserve l'orientation.

La première assertion est aussi un cas particulier de l'exercice E.69 en considérant la normale sortante $N : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $N(x) = x$.

(3) Nous pouvons supposer que $n \geq 1$. L'assertion (3) découle de l'assertion (4) par le corollaire 1.13. Mais il est aussi possible de le montrer directement. Les applications de changement de cartes du système de cartes affines usuelles $(U_i, \varphi_i)_{i \leq n}$ de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ (voir l'exemple (3) de la partie 4.6), sont, pour tout $i \neq j$, les applications

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \{(t_0, \dots, \widehat{t_i}, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n : t_j \neq 0\} \rightarrow \{(u_0, \dots, \widehat{u_j}, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n : u_i \neq 0\}$$

définies par $u_k = \frac{t_k}{t_j}$ si $k \neq i, j$, et $u_i = \frac{1}{t_j}$. Ces applications préservent l'orientation (par exemple parce qu'elles sont holomorphes).

(4) Soient M une sous-variété lisse simplement connexe et $x_* \in M$. Pour tout $x \in M$, soit α_x un chemin lisse injectif de x_* à x . Par compacité de $[0, 1]$, il existe un choix cohérent d'orientation des espaces tangents $T_{\alpha_x(t)}M$ le long de α_x . Puisque M est simplement connexe, cette orientation ne dépend pas du choix d'un chemin lisse injectif de x_* à x , et ce choix d'orientation est localement cohérent.

(6) Nous pouvons supposer M connexe, quitte à prendre la réunion disjointe des revêtements doubles orientables de chaque composante connexe de M . Si M est orientable, alors le revêtement double trivial $M \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de M est orientable.

Supposons donc que M est connexe et non orientable. Puisque M est localement contractile, soit $\widetilde{\pi} : \widetilde{M} \rightarrow M$ un revêtement simplement connexe de M , et soit G le groupe des automorphismes de revêtement de $\widetilde{\pi}$. Alors $\widetilde{M}$ est une sous-variété lisse orientable par la question (4). Le groupe G agit librement et proprement sur $\widetilde{M}$, et il n'est pas entièrement constitué d'éléments préservant l'orientation, sinon M serait orientable par l'exemple (3) de la partie 5.4. Considérons son sous-groupe G_+ d'indice 2 constitué des éléments qui préservent l'orientation. Alors le revêtement à deux feuillets $G_+ \backslash \widetilde{M} \rightarrow M$ défini par ce sous-groupe convient.

Correction de l'exercice E.68. L'application $f : M \times N \rightarrow \mathbb{R}^d$, définie par $(x, y) \mapsto y - x$, est une application de classe C^∞ , car c'est la restriction à une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ d'une application bilinéaire. Son application tangente en tout point $(x, y) \in M \times N$, qui est une application linéaire de l'espace vectoriel $T_{(x,y)}(M \times N) = T_x M \times T_y N$ de dimension $m + n$, à valeurs dans l'espace vectoriel $T_{f(x,y)}\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d$ de dimension d , n'est pas surjective, car $m + n < d$. Donc tout point de $M \times N$ est un point critique pour f . Par conséquent, l'image de f , qui est formée de valeurs critiques de f , est de mesure de Lebesgue nulle, par le théorème de Sard 5.3. Or cette image est exactement $\{v \in \mathbb{R}^d : (M + v) \cap N \neq \emptyset\}$. Ceci montre le résultat.

Correction de l'exercice E.69. S'il existe une telle fonction N , pour tout $x \in M$, munissons $T_x M$ de l'unique orientation telle qu'une base $(v_{x,1}, \dots, v_{x,n-1})$ de $T_x M$ est positive si et seulement si $(v_{x,1}, \dots, v_{x,n-1}, N(x))$, qui est bien une base de $\mathbb{R}^n$, est positive (c'est-à-dire que $\det(v_{x,1}, \dots, v_{x,n-1}, N(x)) > 0$ en prenant le déterminant de n -uplets de vecteurs dans la base canonique). Montrons que ce choix est localement cohérent. Soit $\varphi : W \rightarrow V$ un paramétrage local d'un voisinage ouvert V de x dans M par un ouvert W de $\mathbb{R}^{n-1}$, qui est en particulier une immersion au voisinage de $\varphi^{-1}(x)$. Alors pour tout $x' \in V$ proche de x , la suite $(v_{x',1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(x')), \dots, v_{x',n-1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(\varphi^{-1}(x')))$ est une base de $T_{x'} M$, et le signe de $\det(v_{x',1}, \dots, v_{x',n-1}, N(x'))$ est constant au voisinage de x par continuité (et peut être supposé positif quitte à précomposer φ par une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan vectoriel).

Réciproquement, si M est orientable, pour tout $x \in M$, pour tout paramétrage local orienté $\varphi : W \rightarrow V$ d'un ouvert V de M par un ouvert W de $\mathbb{R}^{n-1}$ tel que $0 \in V$ et $\varphi(0) = x$, notons

$$N(x) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(0)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(0) \right\|}$$

le produit vectoriel¹⁰⁵ renormalisé des dérivées partielles de φ en $0 = \varphi^{-1}(x)$. Il est bien défini, car comme φ est une immersion en 0 , ses dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(0)$ sont linéairement indépendantes. Montrons qu'il ne dépend pas du choix du paramétrage local orienté. En effet, soit ψ un autre paramétrage local orienté envoyant 0 sur x . Pour tous les $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, nous avons $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(0) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\ell}(0) \frac{\partial (\varphi^{-1} \circ \psi)_\ell}{\partial x_j}(0)$. Donc par le caractère multilinéaire alterné du produit vectoriel, nous avons

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(0) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \psi}{\partial x_{n-1}}(0) = (\det J(\varphi^{-1} \circ \psi)_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(0).$$

L'invariance en le paramétrage local orienté vient alors du fait que le jacobien du changement de paramétrage local entre deux paramétrages locaux orientés est strictement positif. Donc $N : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application lisse, qui a les propriétés voulues.

Correction de l'exercice E.70. Par la définition des sous-variétés par fonctions implicites (voir le théorème 4.5 (2), ainsi que la proposition 4.9), puisque $y \in f(U)$, nous savons que $M = f^{-1}(y)$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^n$ de codimension 1. Nous pouvons supposer que $n \geq 3$, car toute sous-variété de dimension 0 ou 1 est orientable.

Notons e_1 le vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}$, considéré comme un vecteur tangent en y à $\mathbb{R}$. Puisque f est une submersion, il existe un vecteur $v_{x,n} \in T_x U = \mathbb{R}^n$ tel que $d_x f(v_x) = e_1$. Par la proposition 4.12 (2), pour tout $x \in M$, nous avons $T_x M = \text{Ker } d_x f$, et en particulier $v_{x,n} \notin T_x M$. Nous munissons $T_x M$ de l'unique orientation telle qu'une base

105. Nous renvoyons par exemple à [Pau5, Prop. 1.25] pour les rappels ci-dessous. Notons $\det$ le déterminant des n -uplets de vecteurs dans la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Le *produit vectoriel* d'un $(n-1)$ -uplet $(x_1, \dots, x_{n-1})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est l'unique vecteur $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$ tel que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, nous ayons

$$\langle x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}, y \rangle = \det(x_1, \dots, x_{n-1}, y).$$

Nous avons

- l'application $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$ est $(n-1)$ -linéaire alternée,
- $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} = 0$ si et seulement si $x_1, \dots, x_{n-1}$ sont linéairement dépendants,
- $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})^\perp$, et
- si $A = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1}$ est la matrice $n \times (n-1)$ dont les colonnes sont les vecteurs colonnes des coordonnées de $x_1, \dots, x_{n-1}$ dans la base canonique, alors la i -ème coordonnée $(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1})_i$ de $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$ dans la base canonique est $(-1)^{n-i}$ fois le déterminant de la matrice A_i obtenue en enlevant la i -ème ligne de A :

$$(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1})_i = (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i-1,1} & \cdots & x_{i-1,n-1} \\ x_{i+1,1} & \cdots & x_{i+1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

En particulier, le produit vectoriel de $x_1, \dots, x_{n-1}$ dépend de manière C^∞ (car polynomiale en les coordonnées) de $x_1, \dots, x_{n-1}$.

$(v_{x,1}, \dots, v_{x,n-1})$ de $T_x M$ est positive si et seulement si $(v_{x,1}, \dots, v_{x,n-1}, v_{x,n})$, qui est bien une base de $\mathbb{R}^n$, est positive. Ceci ne dépend pas du choix de $v_{x,n}$. Ce choix d'orientation sur les espaces tangents aux points de M est localement cohérent par l'exercice E.69, car nous pouvons choisir de manière lisse ce vecteur $v_{x,n}$, en prenant l'unique vecteur unitaire orthogonal à $T_x M$ dont l'image par $d_x f$ est un multiple (strictement) positif de e_1 , ou tout simplement

$$v_{x,n} = \frac{\nabla_x f}{\|\nabla_x f\|}.$$

Correction de l'exercice E.71. Supposons par contraposition que nous ayons une application lisse $f : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ sans point fixe. Montrons que le degré de f est égal à $(-1)^{n+1}$. Considérons l'application $h : \mathbb{S}_n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_n$ définie par

$$(x, s) \mapsto \frac{(1-s)f(x) - sx}{\|(1-s)f(x) - sx\|}.$$

Elle est bien définie car pour tout $x \in \mathbb{S}_n$ la corde affine $[-x, f(x)]$ dans la boule fermée unité $\mathbb{B}_{n+1}$ ne passe pas par 0, sinon cette corde serait un diamètre et nous aurions $f(x) = x$. Elle est clairement lisse. C'est donc une C^∞ -homotopie entre l'application f au temps $s = 0$ et l'antipodie $i : x \mapsto -x$ au temps $s = 1$. Comme les homotopies préservent le degré (voir le théorème 5.14) et par le calcul du degré de l'antipodie (voir l'exemple (5) de la partie 5.5), nous avons donc

$$\deg(f) = \deg(i) = (-1)^{n-1}.$$

Correction de l'exercice E.72. Le théorème de Borsuk-Ulam est même vrai en dimension 0, car toute application de $\mathbb{S}_0 = \{\pm 1\}$ dans $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ est constante !

(1) Voir la correction de l'exercice E.13 (1).

(2) Voir la correction de l'exercice E.13 (2) a).

(3) Notons que l'équateur $\mathbb{S}_n^0$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$ (qui s'identifie avec la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$ par l'identification usuelle de $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$). L'application $\tilde{g} = g|_{\mathbb{S}_n^0} : \mathbb{S}_n^0 \rightarrow \mathbb{S}_n$, qui est lisse, n'est une submersion en aucun point car $n-1 < n$, donc toutes les valeurs de $\tilde{g}$ sont des valeurs critiques. Donc (voir le corollaire 5.5 du théorème de Sard) le fermé (car image d'un compact par une application continue) $g(\mathbb{S}_n^0)$ est de mesure nulle. En particulier $U = \mathbb{S}_n \setminus g(\mathbb{S}_n^0)$ est un ouvert non vide. Toujours par le théorème de Sard, puisque l'ensemble des valeurs régulières de g est dense, il existe une valeur régulière y de g appartenant à U . Puisque g est impaire, $-y$ est aussi une valeur régulière de g . Par la transitivité de l'action du groupe des rotations sur les paires de points opposés de la sphère, quitte à post-composer g par une rotation r , nous pouvons supposer que y est le pôle Nord (et $-y$ le pôle Sud). Ceci préserve le fait que g soit impaire car r est linéaire ; ceci préserve les valeurs régulières car r est un C^∞ -difféomorphisme de la sphère $\mathbb{S}_n$; et ceci fait que ces pôles n'appartiennent pas à l'image de $\mathbb{S}_n^0$ par g , par la définition de U .

(4) L'origine 0 de l'hyperplan vectoriel $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ est une valeur régulière de $p|_{\mathbb{S}_n}$, car nous avons $p^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_n = \{S, N\}$ et pour tout $v \in \{S, N\}$, l'application $T_v p = p : T_v \mathbb{S}_n = v^\perp = \mathbb{R}^n \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \{0\}$ vaut l'identité. Puisque N et S sont des valeurs régulières de g , et puisque $T_x(p \circ g) = T_v p \circ T_x g$ pour tous les $x \in g^{-1}(v)$ et $v \in \{S, N\}$, l'origine 0 est donc une valeur régulière de $p \circ g$.

Puisque 0 est une valeur régulière de $p \circ g$ et puisque les dimensions de $\mathbb{S}_n$ et de $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ coïncident, la partie $(p \circ g)^{-1}(0)$ est finie, car c'est une sous-variété de dimension $0 = n - n$ de la variété compacte $\mathbb{S}_n$ par le corollaire 5.1.

Notons $\mathbb{S}_n^{>0} = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}_n : x_0 > 0\}$ et $\mathbb{S}_n^{<0} = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}_n : x_0 < 0\}$ les hémisphères ouverts Nord et Sud de $\mathbb{S}_n$. Pour tout $x \in (p \circ g)^{-1}(0)$, soit $\epsilon_x \in \{\pm 1\}$ le signe du déterminant de $T_x g$ dans des bases directes de $T_x \mathbb{S}_n$ et $T_{g(x)} \mathbb{S}_n$. Notons $\equiv$ la congruence modulo 2. Puisque $\epsilon_x = \pm 1 \equiv 1$, puisque $(p \circ g)^{-1}(0)$ est la réunion disjointe $g^{-1}(S) \sqcup g^{-1}(N)$, et puisque $S, N \notin g(\mathbb{S}_{n-1} \times \{0\})$ par la question (3), nous avons

$$\begin{aligned} \text{Card } \tilde{g}^{-1}(0) &\equiv \sum_{x \in (p \circ g)^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_n^{>0}} \epsilon_x = \sum_{x \in g^{-1}(N) \cap \mathbb{S}_n^{>0}} \epsilon_x + \sum_{x \in g^{-1}(S) \cap \mathbb{S}_n^{>0}} \epsilon_x \\ &= \sum_{x \in g^{-1}(N) \cap \mathbb{S}_n^{>0}} \epsilon_x + \sum_{x \in g^{-1}(S) \cap \mathbb{S}_n^{>0}} \epsilon_x . \end{aligned}$$

Puisque l'application g est impaire, l'antipodie $x \mapsto -x$ induit une bijection de $g^{-1}(S) \cap \mathbb{S}_n^{>0}$ sur $g^{-1}(N) \cap \mathbb{S}_n^{<0}$. Toujours puisque g est impaire, l'application $T_{-x} g : T_{-x} \mathbb{S}_n \rightarrow T_{g(-x)} \mathbb{S}_n$ est égale à l'application $T_x g : T_x \mathbb{S}_n \rightarrow T_{g(x)} \mathbb{S}_n$, mais par contre les orientations de $T_x \mathbb{S}_n$ et $T_{-x} \mathbb{S}_n$, ainsi que de $T_{g(x)} \mathbb{S}_n$ et $T_{-g(x)} \mathbb{S}_n$, sont opposées. Donc $\epsilon_{-x} = -(\epsilon_x) = \epsilon_x$. Par conséquent, en utilisant une congruence modulo 2, nous avons

$$\begin{aligned} \text{Card } \tilde{g}^{-1}(0) &\equiv \sum_{x \in g^{-1}(N) \cap \mathbb{S}_n^{>0}} \epsilon_x + \sum_{x \in g^{-1}(N) \cap \mathbb{S}_n^{<0}} \epsilon_{-x} = \sum_{x \in g^{-1}(N) \cap \mathbb{S}_n^{>0}} \epsilon_x + \sum_{x \in g^{-1}(N) \cap \mathbb{S}_n^{<0}} \epsilon_x \\ &= \deg(g, N) = \deg(g) . \end{aligned}$$

(5) Considérons l'application $G : \mathbb{S}_n^0 \rightarrow \mathbb{S}_n^0$ définie par $x \mapsto \frac{p \circ g(x)}{\|p \circ g(x)\|}$, qui est bien définie et lisse car $g(\mathbb{S}_n^0)$ ne rencontre pas $p^{-1}(0) = \{S, N\}$ par la question (3). C'est une application impaire d'une sphère de dimension $n - 1$ dans elle-même car g l'est et p est linéaire. Donc par récurrence, le degré de G est impair.

Notons $a_1, \dots, a_k$ les éléments de $\mathbb{S}_n^{>0}$ qui appartiennent à $(p \circ g)^{-1}(0)$. Remarquons que $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{S}_n^{>0}$ comme vu précédemment, et que $\text{Card } \tilde{g}^{-1}(0) = k$ par la définition de $\tilde{g}$. Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, notons B_i l'intersection avec $\mathbb{S}_n$ d'une boule ouverte (de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$) centrée en x_i de rayon assez petit pour que B_i soit contenue dans $\mathbb{S}_n^{>0}$ et vérifie $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $j \neq i$. Considérons la variété compacte connexe orientée (par l'orientation de $\mathbb{S}_n$) à bord $Y = \mathbb{S}_n^{>0} \setminus \bigcup_{i=1}^k B_i$. Son bord orienté par la normale sortante est $\partial Y = \mathbb{S}_n^0 \sqcup \bigsqcup_{i=1}^k (\partial B_i)^{\text{opp}}$.

Considérons l'application $\tilde{G} : Y \rightarrow \mathbb{S}_n^0$ définie par $x \mapsto \frac{p \circ g(x)}{\|p \circ g(x)\|}$, qui est bien définie et lisse pour les mêmes raisons que celles pour G . Par le lemme 5.15 et puisque $G = \tilde{G}|_{\mathbb{S}_n^0}$, nous avons $0 = \deg(\tilde{G}|_{\partial Y}) = \deg G + \sum_{i=1}^k \deg \tilde{G}|_{(\partial B_i)^{\text{opp}}}$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, montrons que $\deg \tilde{G}|_{\partial B_i} \equiv 1 \pmod{2}$, ce qui est équivalent à $\deg \tilde{G}|_{(\partial B_i)^{\text{opp}}} \equiv 1 \pmod{2}$. Ceci implique que modulo 2

$$\text{Card } \tilde{g}^{-1}(0) = k \equiv \sum_{i=1}^k \deg \tilde{G}|_{(\partial B_i)^{\text{opp}}} \equiv \deg G \equiv 1 \pmod{2} ,$$

et démontre la première partie de l'assertion (5).

Or puisque les points $a_1, \dots, a_k$ sont des points réguliers de $p \circ g$, cette application est un C^∞ -difféomorphisme local en a_i , envoyant a_i sur 0. Donc si le rayon des boules B_i est

assez petit, l'application $\tilde{G}|_{\partial B_i}$ est un difféomorphisme de la sphère orientée ∂B_i sur la sphère orientée $\mathbb{S}_n^{\geq 0}$. En particulier, elle est de degré ± 1 (donc impair) par l'exemple (3) de la partie 5.5.

La dernière partie de l'assertion (5) découle immédiatement de la question (4).

(6) L'application $g : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ définie par $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$ est bien définie et lisse par l'hypothèse sur f , et elle est clairement impaire.

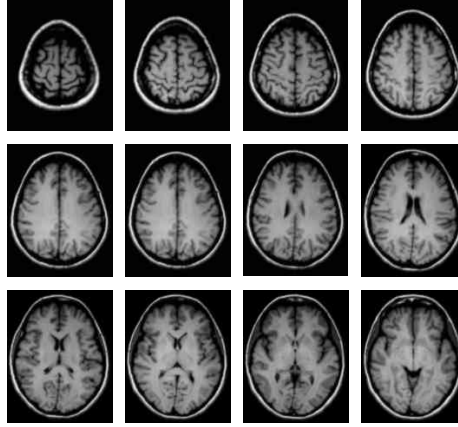
(7) Après identification de $\mathbb{S}_n^0$ et $\mathbb{S}_{n-1}$, ceci découle des questions (2) à (5).

(8) L'application $g|_{\mathbb{S}_n^0}$ se prolonge (par l'application $g!$) à une application lisse de la variété lisse compacte orientée à bord $\mathbb{S}_n^{\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{S}_{n-1}$. Donc par le lemme 5.15, le degré de $g|_{\mathbb{S}_n^0}$ est nul. Ceci contredit la question (7).

6 Théorie de Morse



Tomographe à rayon X
(Laboratoire Matéis)



Comment comprendre la topologie du cerveau ?
Par la tomographie !

Le but de cette partie est de donner une description homotopique des sous-variétés différentielles. Nous donnons un exemple dans ce préambule afin de comprendre le cheminement que nous allons prendre. Soient $p, m \in \mathbb{N}$ avec $p \leq m$. Nous fixons dans cette partie une sous-variété différentielle lisse M de dimension p dans $\mathbb{R}^m$, et une application $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r , avec $r \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) \cup \{\infty\}$, parfois appelée la *fonction de hauteur* sur M . Il est important que $r \geq 2$, mais le seul cas à garder en tête est $r = \infty$ (surtout en première lecture), cela évite des problèmes de perte de régularité.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous notons (en étant bien conscient du fait que cela dépende de la fonction f fixée)

$$M_{=a} = f^{-1}(a) ,$$

appelé le *niveau* de M de *hauteur* a , et

$$M_{\leq a} = \{x \in M : f(x) \leq a\} ,$$

appelé le *sous-niveau* de M de *hauteur* a . Un niveau $M_{=a}$ est dit *critique* si a est une valeur critique de f , et *régulier* sinon. Le but est de décrire la sous-variété M en décrivant comment changent les niveaux $M_{=a}$ et sous-niveaux $M_{\leq a}$ de M , lorsque a parcourt $\mathbb{R}$ en croissant.

Comme vu dans l'exercice [E.66](#), si $a \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière de f , alors $M_{\leq a}$ est une sous-variété à bord de classe C^r , de bord la sous-variété $M_{=a} = f^{-1}(a)$ de classe C^r .

Par exemple, soit $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction de hauteur définie par $(x, y, z) \mapsto z$ sur un tore de révolution $\mathbb{T}^2$ posé sur un plan horizontal (donc de révolution autour d'une droite horizontale). Elle est C^∞ , car c'est la restriction à une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ d'une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ (voir la proposition [4.7](#)). Elle a quatre points critiques x_0, x_1, x_2, x_3 et quatre valeurs critiques correspondantes $t_0 < t_2 < t_2 < t_3$. Les points x_0 et x_3 sont les uniques points de M où f atteint son minimum et maximum, respectivement.

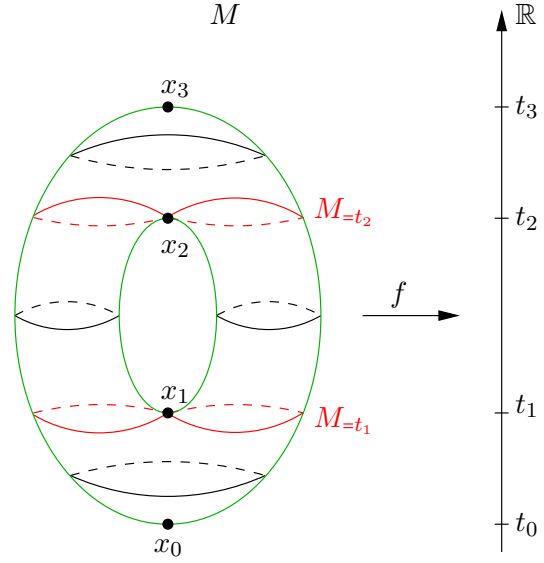
Si $t < t_0$ ou $t > t_3$, alors le niveau $M_{=t} = f^{-1}(t)$ est vide.

Si $t = t_0$ ou $t = t_3$, alors le niveau $M_{=t} = f^{-1}(t)$ est réduit au singleton x_0 ou x_3 , respectivement.

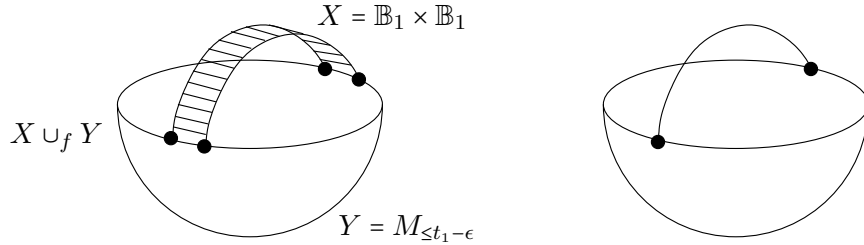
Si $t = t_1$ ou $t = t_2$, le niveau $M_{=t} = f^{-1}(t)$ n'est pas une sous-variété du tore M , il est homéomorphe à un bouquet de deux cercles.

Si $t \in]t_0, t_1[\cup]t_2, t_3[$, alors le niveau $M_{=t} = f^{-1}(t)$ est une sous-variété du tore M de dimension 1, difféomorphe à un cercle.

Enfin, si $t \in]t_1, t_2[$, alors le niveau $M_{=t} = f^{-1}(t)$ est une sous-variété du tore M de dimension 1, difféomorphe à la réunion disjointe de deux copies du cercle.



La sous-variété à bord $M_{\leq t}$ pour $t \neq t_0, t_1, t_2, t_3$ change de type d'homotopie quand t passe par l'une des valeurs critiques. Par exemple, si $\epsilon > 0$ est assez petit, alors $M_{\leq t_1 - \epsilon}$ est contractile (difféomorphe au disque fermé) et $M_{\leq t_1 + \epsilon}$ est C^∞ -difféomorphe à un cylindre $\mathbb{S}_1 \times [0, 1]$, de groupe fondamental isomorphe à $\mathbb{Z}$. En fait, en rappelant que $\mathbb{B}_n$ est la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$, l'espace topologique $M_{\leq t_1 + \epsilon}$ est, à homéomorphisme près, obtenu à partir de $M_{\leq t_1 - \epsilon}$ par recollement $X \cup_f Y$ (au sens de l'exemple (5) de la partie A.2.6 de l'appendice A) d'une anse $X = \mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_1$ sur $Y = M_{\leq t_1 - \epsilon}$ par une application continue $f : \mathbb{B}_1 \times \partial \mathbb{B}_1 \rightarrow \partial Y$, qui est même un homéomorphisme sur son image.



Le but de cette partie est de généraliser une telle description à toutes les sous-variétés lisses M .

6.1 Points critiques non dégénérés

Remarquons qu'un point critique (voir la définition en début de partie 5) de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est un point x de M tel que l'application linéaire $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$ (qui est une forme linéaire) soit nulle.

Rappelons certaines propriétés du calcul différentiel du second ordre entre ouverts d'espaces vectoriels normés de dimension finie. Si W est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, si $g : W \rightarrow \mathbb{R}$ est une application de classe C^2 et si $w \in W$ est un point critique de g , la *forme hessienne* de f en w est la forme bilinéaire symétrique $H_w g : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ définie par ¹⁰⁶

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^p, \quad H_w g(X, Y) = d^2 g_w(X)(Y) .$$

106. Rappelons l'identification usuelle de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}))$ et de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p; \mathbb{R})$ des formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^p$ par l'application $f \mapsto \{(x, y) \mapsto f(x)(y)\}$. Rappelons (voir l'appendice C) que la

Si V est un ouvert de $\mathbb{R}^q$, si $v \in V$, si $h : V \rightarrow W$ est une application de classe C^2 telle que $w = h(v)$ soit un point critique de g , alors par la formule (67) de l'appendice C, qui utilise de manière cruciale le fait que w soit un point critique de g , nous avons

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^q, \quad H_v(g \circ h)(X, Y) = H_w g (dh_v(X), dh_v(Y)). \quad (14)$$

En particulier, si h est un C^2 -difféomorphisme, alors la forme bilinéaire symétrique $H_w g$ est non dégénérée¹⁰⁷ si et seulement si la forme bilinéaire symétrique $H_v(g \circ h)$ l'est.

Notons que la matrice de la forme bilinéaire $H_w g$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est la *matrice hessienne* de g en w

$$\text{Hess}_w g = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(w) \right)_{1 \leq i, j \leq p}. \quad (15)$$

En particulier, la forme bilinéaire symétrique $H_w g$ est non dégénérée si et seulement si la matrice hessienne $\text{Hess}_w g$ est inversible. Si V est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, si $v \in V$, si $h : V \rightarrow W$ est une application lisse telle que $w = h(v)$ soit un point critique de g , alors¹⁰⁸

$$\text{Hess}_v(g \circ h) = {}^t(Jh_v) (\text{Hess}_w g) (Jh_v),$$

où Jh_v est la matrice jacobienne de h en v , ce qui remonte la formule (14).

Passons au cas des sous-variétés, avec les notations du début du chapitre 6. Pour tout point critique $x \in M$ de f , la *forme hessienne* de f en x , notée $H_x f : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$, est la forme bilinéaire symétrique sur $T_x M$ définie, pour tout paramétrage local $\varphi : W \rightarrow M$ en x par un ouvert W de $\mathbb{R}^p$, en posant $w = \varphi^{-1}(x)$, par

$$\forall X, Y \in T_x M, \quad H_x f(X, Y) = H_w(f \circ \varphi)((T_w \varphi)^{-1}(X), (T_w \varphi)^{-1}(Y)). \quad (17)$$

Notons que la formule ci-dessus ne dépend pas du choix du paramétrage local φ en x , par la formule (14), puisque $w = \varphi^{-1}(x)$ est un point critique de $f \circ \varphi$.¹⁰⁹

différentielle de l'application $dg : W \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ définie par $x \mapsto df_x$ est appelée la différentielle seconde de g , notée $d^2 g : W \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}))$, et que la forme bilinéaire $d^2 g_w$ est symétrique pour tout $w \in W$ par le lemme de Schwarz, puisque g est de classe C^2 .

107. Rappelons qu'une forme bilinaire symétrique $B : E \times E \rightarrow K$ sur un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps commutatif K est *non dégénérée* si son noyau $\text{Ker } B = \{X \in E : \forall Y \in E, B(X, Y) = 0\}$ est réduit à $\{0\}$.

108. Voir la formule (68) de l'appendice C. Si $h_1, \dots, h_m$ sont les composantes de h , alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (g \circ h)}{\partial x_i \partial x_j}(v) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial (g \circ h)}{\partial x_j} \right)(v) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{1 \leq \ell \leq m} \frac{\partial g}{\partial x_\ell} \circ h \frac{\partial h_\ell}{\partial x_j} \right)(v) \\ &= \sum_{1 \leq k, \ell \leq m} \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_\ell}(h(v)) \frac{\partial h_k}{\partial x_i}(v) \frac{\partial h_\ell}{\partial x_j}(v) + \sum_{1 \leq \ell \leq m} \frac{\partial g}{\partial x_\ell}(h(v)) \frac{\partial^2 h_\ell}{\partial x_i \partial x_j}(v). \end{aligned} \quad (16)$$

En particulier, si $\frac{\partial g}{\partial x_i}(h(v)) = 0$ pour $1 \leq i \leq m$, alors

$$\frac{\partial^2 (g \circ h)}{\partial x_i \partial x_j}(v) = \sum_{1 \leq k, \ell \leq m} \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_\ell}(h(v)) \frac{\partial h_k}{\partial x_i}(v) \frac{\partial h_\ell}{\partial x_j}(v).$$

109. Si $\psi : W' \rightarrow M$ est un autre paramétrage local en x , notons $h = \psi^{-1} \circ \varphi$, qui est un C^∞ -difféomorphisme d'un voisinage ouvert de $\varphi^{-1}(x)$ sur un voisinage ouvert de $\psi^{-1}(x)$. Alors, en utilisant la formule (14) pour

Nous dirons qu'un point critique x de f est *non dégénéré* si la forme hessienne de f en x est non dégénérée (voir la note de bas de page 107). Si x est un point critique non dégénéré, si la signature de la forme bilinéaire symétrique réelle $H_x f$ est (k, k') , avec k la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $T_x M$ sur lequel $H_x f$ est définie négative, nous appellerons k l'*indice* du point critique x , noté $\text{Ind}(x)$, et $\text{Ind}_f(x)$ lorsqu'il convient de préciser f .

La propriété d'être un point critique non dégénéré est invariante par difféomorphisme, au sens suivant. Soit $h : M' \rightarrow M$ un C^r -difféomorphisme, et soient $x' \in M'$ et $x \in M$ tels que $h(x') = x$. Alors x est un point critique non dégénéré de f si et seulement si x' est un point critique non dégénéré de $f \circ h$, et alors

$$\text{Ind}_f(x) = \text{Ind}_{f \circ h}(x') .$$

En effet, par les formules (14) et (17), nous avons

$$\forall X', Y' \in T_{x'} M', \quad H_{x'}(f \circ h)(X', Y') = H_x(f)(T_{x'} h(X'), T_{x'} h(Y')) ,$$

et $T_{x'} h : T_{x'} M' \rightarrow T_x M$ est un isomorphisme linéaire.

Remarquons que si x est un point critique non dégénéré de f , et si p est la dimension de M , alors $k' = p - k$ et

$$\text{Ind}(x) \in \llbracket 0, p \rrbracket .$$

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $\varphi : U \rightarrow M$ un paramétrage local lisse d'un voisinage ouvert d'un point x de M . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq r$ et pour tous les $i_1, \dots, i_n \in \llbracket 1, p \rrbracket$, nous noterons par abus $\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}$ l'application

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} = \frac{\partial^n (f \circ \varphi)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R} \quad (18)$$

(qui dépend du choix du paramétrage local). Ainsi, x est un point critique de f si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) = 0$ et il est non dégénéré si et seulement si la matrice hessienne

$$\text{Hess}_x f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq p}$$

(qui dépend du choix du paramétrage local) est inversible, cette inversibilité ne dépendant pas, elle, du choix du paramétrage local en x .

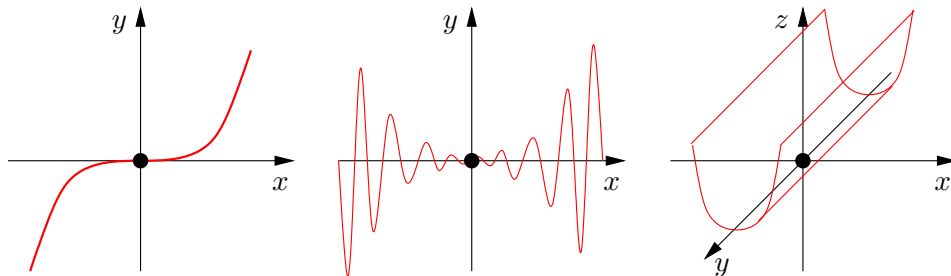
Exemples. (1) Le point $(0, 0)$ de la courbe lisse M d'équation $y = x^3$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ est un point critique isolé dégénéré pour la fonction de hauteur $f : (x, y) \mapsto y$. Le point $(0, 0)$ de la courbe lisse M d'équation $y = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ est un point critique non isolé dégénéré pour la fonction de hauteur $f : (x, y) \mapsto y$. Le point $(0, 0, 0)$ de la surface

la deuxième égalité, nous avons

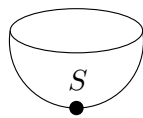
$$\begin{aligned} & H_{\varphi^{-1}(x)}(f \circ \varphi)((T_{\varphi^{-1}(x)} \varphi)^{-1}(X), (T_{\varphi^{-1}(x)} \varphi)^{-1}(Y)) \\ &= H_{h^{-1}(\psi^{-1}(x))}(f \circ \psi \circ h)((T_{h^{-1}(\psi^{-1}(x))} \psi \circ h)^{-1}(X), (T_{h^{-1}(\psi^{-1}(x))} \psi \circ h)^{-1}(Y)) \\ &= H_{\psi^{-1}(x)}(f \circ \psi)((d_{h^{-1}(\psi^{-1}(x))} h) \circ (T_{h^{-1}(\psi^{-1}(x))} \psi \circ h)^{-1}(X), (d_{h^{-1}(\psi^{-1}(x))} h) \circ (T_{h^{-1}(\psi^{-1}(x))} \psi \circ h)^{-1}(Y)) \\ &= H_{\psi^{-1}(x)}(f \circ \psi)((T_{\psi^{-1}(x)} \psi)^{-1}(X), (T_{\psi^{-1}(x)} \psi)^{-1}(Y)) . \end{aligned}$$

Ceci montre bien l'indépendance de la forme hessienne $H_x f$ en le paramétrage local.

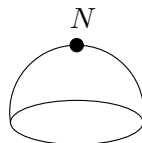
lisse M d'équation $z = x^2$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ est un point critique non isolé dégénéré pour la fonction de hauteur $f : (x, y, z) \mapsto z$. Le point $(0, 0, 0)$ de la surface lisse M d'équation $z = x^2 y^2$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ est un point critique isolé dégénéré pour la fonction de hauteur $f : (x, y, z) \mapsto z$.



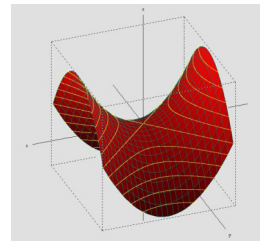
(2) Dans les dessins qui suivent, représentant diverses sous-variétés M de $\mathbb{R}^3$ munies d'un point critique non dégénéré isolé, la fonction de hauteur f est la fonction de troisième coordonnée $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_3$.



$S = (0, 0, -1)$ point critique
non dégénéré de $M = \mathbb{S}_2$
 $\text{Ind}(S) = 0$



$N = (0, 0, 1)$ point critique
non dégénéré de $M = \mathbb{S}_2$
 $\text{Ind}(N) = 2$



$0 = (0, 0, 0)$ point critique
non dégénéré de M d'équation
 $z = x^2 - y^2$, où $\text{Ind}(0) = 1$

Le dernier exemple, dit de la *selle de cheval*, est typique d'un comportement local d'un point critique non dégénéré, à changement de coordonnées à la source près, comme le montre le résultat suivant.

Lemme 6.1. (Lemme de Morse) *Supposons que $r \geq 3$. Soit $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$. Si $x_0 \in M$ est un point critique non dégénéré d'indice k de f , alors il existe un paramétrage local $\varphi : W \rightarrow U$ de M en x_0 de classe C^{r-2} , où W est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et U un voisinage ouvert de x_0 dans M , tel que $\varphi(0) = x_0$ et, pour tout $y = (y_1, \dots, y_p)$ dans un voisinage assez petit de 0 dans $\mathbb{R}^p$, nous ayons*

$$f \circ \varphi(y) = f(0) - (y_1)^2 - (y_2)^2 - \dots - (y_k)^2 + (y_{k+1})^2 + \dots + (y_p)^2.$$

Démonstration. Nous commençons la démonstration par un lemme d'algèbre linéaire à paramètre montrant en particulier que la signature d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée varie de manière lisse. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\text{Sym}_n = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : {}^t X = X\}$ l'espace vectoriel réel des matrices symétriques réelles de taille n .

Lemme 6.2. *Si A est une matrice diagonale de taille n , de coefficients diagonaux dans cet ordre $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{-1, +1\}$, alors il existe un voisinage ouvert U de A dans Sym_n et une application $P : U \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe C^∞ telle que pour tout $B \in U$, nous ayons*

$${}^t P(B) B P(B) = A.$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur n , le résultat étant immédiat pour $n = 0$. Soit $n \geq 1$. Si U est un voisinage ouvert de A dans Sym_n assez petit, alors pour tout $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in U$, son coefficient b_{11} est non nul et du même signe que a_1 , de sorte que $a_1 = \frac{b_{11}}{|b_{11}|}$. Posons

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|b_{11}|}} & -\frac{b_{12}}{b_{11}} & \cdots & -\frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ 0 & & & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors T dépend de manière C^∞ de B sur U . En utilisant le fait que B est symétrique, un petit calcul montre que

$${}^t T B T = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$$

avec $B' \in \text{Sym}_{n-1}$ qui dépend de manière C^∞ de B sur U , et qui, si U est assez petit, est proche de la matrice diagonale A' de coefficients diagonaux $a_2, \dots, a_n$. Par récurrence, quitte à réduire U , il existe donc une matrice Q' qui dépend de manière C^∞ de B' (donc de B) sur U , telle que ${}^t Q' B' Q' = A'$. En posant $Q = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q' \end{pmatrix}$, qui dépend de manière C^∞ de B sur U , nous avons ${}^t Q B Q = A$, comme voulu. $\square$

Afin de démontrer le lemme de Morse 6.1, nous pouvons supposer que M est un ouvert convexe V de $\mathbb{R}^p$, que $x_0 = 0$ et $f(x_0) = 0$. Par un changement de coordonnées linéaire (et la réduction de Gauss des formes quadratiques), nous pouvons supposer que la matrice hessienne $A = \text{Hess } f_0$ de f en 0 est diagonale, avec les k premiers coefficients diagonaux égaux à -1 et les $p - k$ derniers égaux à $+1$.

Notons que, par le théorème fondamental de l'intégration et puisque $f(0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0$, nous avons, pour tout $x \in V$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(tx)) dt = \sum_{j=1}^p \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_j \\ &= \sum_{i,j=1}^p \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(stx) dt ds \right) x_i x_j. \end{aligned}$$

Il existe donc une application $x \mapsto B_x = (b_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq p}$ de classe C^{r-2} de V dans Sym_p telle que pour tout $x \in M$, nous ayons

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^p b_{ij}(x) x_i x_j = {}^t x B_x x.$$

Quitte à réduire V , notons $Q_x = P(B_x)$ la matrice dépendant de manière C^∞ de B_x (donc de manière C^{r-2} de x) telle que ${}^t Q_x B_x Q_x = A$, donnée par le lemme précédent. Remarquons que $B_0 = A$ par l'hypothèse sur la matrice hessienne de f en 0, et donc Q_0 est la matrice identité I_p . L'application $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie par $x \mapsto Q_x^{-1}x$ est de classe C^{r-2} . Sa différentielle en $x = 0$, qui existe car $r \geq 3$ et vaut l'application linéaire $X \mapsto Q_0^{-1}X = X$, est inversible. Par le théorème d'inversion locale, ϕ est un C^{r-2} -difféomorphisme local en 0. Alors pour $y = (y_1, \dots, y_p)$ proche de 0, en posant $x = \phi^{-1}(y)$, de sorte que $y = Q_x^{-1}x$ donc $x = Q_x y$, nous avons

$$f \circ \phi^{-1}(y) = f(x) = {}^t x B_x x = {}^t y {}^t Q_x B_x Q_x y = {}^t y A y = \sum_{i=1}^p a_{ii} y_i^2.$$

Le résultat en découle. □

Nous dirons qu'une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r , avec $r \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) \cup \{\infty\}$ est une *fonction de Morse* si tous ses points critiques sont non dégénérés.

Remarquons qu'il découle du lemme de Morse 6.1 que si $r \geq 3$, alors un point critique non dégénéré de f est isolé dans M , et donc (par la séparabilité des sous-variétés) que l'ensemble des points critiques d'une fonction de Morse sur M est discret et dénombrable, et en particulier fini si M est compacte.

Remarque 6.3. Un minimum local et un maximum local d'une fonction de classe C^1 étant un point critique, si f est une fonction de Morse de classe C^r , ses minima locaux et maxima locaux sont des points critiques non dégénérés. Par le lemme de Morse, l'indice d'un minimum local de f est 0 et l'indice d'un maximum local de f est la dimension p de M . Si M est compacte, alors par continuité, f admet au moins un point critique d'indice 0 et un point critique d'indice p .

Exemples. (1) Une submersion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , qui n'a pas de point critique, est une fonction de Morse.

(2) La fonction de hauteur $f : (x, y, z) \mapsto z$ sur le tore $\mathbb{T}^2$ décrite en début de chapitre 6 est une fonction de Morse de classe C^∞ , ayant un point critique x_0 non dégénéré d'indice 0, deux points critiques x_1, x_2 non dégénérés d'indice 1 et un point critique x_3 non dégénéré d'indice 2.

Nous allons étudier dans la partie suivante le problème de l'existence de fonctions de Morse : elles sont très nombreuses ! Nous reviendrons sur une démonstration de l'existence, par une méthode complètement différente, dans la partie 8.3.

6.2 Existence de fonctions de Morse lisses

Nous renvoyons à [Hir] pour tout complément sur cette partie.

Commençons cette partie par des éléments d'algèbre linéaire. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie e . Soient B et C des sous-espaces vectoriels de E de dimension b et c respectivement. Nous dirons que B et C sont *transverses* dans E , et nous noterons $B \pitchfork C$, si

$$E = B + C .$$

Nous ne demandons pas que cette somme soit une somme directe.

Remarque 6.4. Cette condition, qui est symétrique en B et C , est équivalente au fait de demander que l'inclusion de B dans E induise une surjection de B dans l'espace vectoriel quotient E/C .

Exemples. (1) Si $b + c < e$, alors B et C ne sont pas transverses.

(2) Si $b + c = e$, alors B et C sont transverses si et seulement si E est la somme directe de B et de C , ou, de manière équivalente, si $B \cap C = \{0\}$, ou encore, toujours de manière équivalente, si l'inclusion de B dans E induit une bijection de B dans l'espace vectoriel quotient E/C .

(3) Si $e \geq 2$, deux hyperplans vectoriels dans E sont transverses si et seulement s'ils sont distincts.

Soient M et N deux sous-variétés lisses, et A une sous-variété lisse de N . Nous dirons qu'une application $f : M \rightarrow N$ de classe C^1 est *transverse* à A si pour tout $x \in M$ tel que $f(x) \in A$, les sous-espaces vectoriels $T_{f(x)}A$ et $T_x f(T_x M)$ de l'espace vectoriel $T_{f(x)}N$ sont transverses, c'est-à-dire si nous avons

$$T_{f(x)}N = T_{f(x)}A + T_x f(T_x M) .$$

Pour toute partie P de M , nous dirons que $f \in C^1(M, N)$ est *transverse en A en tout point de P* , et nous noterons $f \pitchfork_P A$ (et $f \pitchfork_y A$ si $P = \{y\}$), si pour tout $x \in P$ tel que $f(x) \in A$, nous avons $T_{f(x)}N = T_{f(x)}A + T_x f(T_x M)$.

Si M et A sont deux sous-variétés de N , nous dirons que M et A sont *transverses* dans N si l'inclusion $f : M \rightarrow N$ est transverse à A , c'est-à-dire si pour tout point $x \in A \cap M$, les sous-espaces vectoriels $T_x A$ et $T_x M$ de $T_x N$ sont transverses dans $T_x N$.

Exemples. (1) Si la somme de la dimension de A et de la dimension de M est strictement inférieure à la dimension de N , alors il n'existe pas d'application $f : M \rightarrow N$ de classe C^1 transverse à A .

(2) Si M et A sont deux sous-variétés de N , dont la somme des dimensions est égale à la dimension de N , alors M et A sont transverses dans N si et seulement si, pour tout $x \in A \cap M$, nous avons

$$T_x N = T_x A \oplus T_x M .$$

(3) Soient $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^1 , A une sous-variété lisse de N , $\psi : N \rightarrow N'$ et $\phi : M' \rightarrow M$ des C^1 -difféomorphismes. Alors f est transverse à A si et seulement si $\psi \circ f \circ \phi : M' \rightarrow N'$ est transverse à $\psi(A)$.¹¹⁰

Proposition 6.5. Soit $g : M \rightarrow N$ une application de classe C^∞ transverse à une sous-variété lisse A de N . Alors $g^{-1}(A)$ est une sous-variété lisse de M , de codimension dans M égale à la codimension de A dans N .

Démonstration. Le résultat est un résultat local, invariant par difféomorphisme. Nous pouvons donc supposer, par redressement, que $N = \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^{q-a}$ et $A = \mathbb{R}^a \times \{0\}$. Notons $\text{pr}_2 : \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^{q-a} \rightarrow \mathbb{R}^{q-a}$ la projection $(u, v) \mapsto v$ sur le second facteur. Nous avons donc que g est transverse à A si et seulement si pour tout $x \in M$ tel que $\text{pr}_2 \circ g(x) = 0$ (ceci équivaut

110. Pour tout $x' \in M'$, posons $x = \phi(x')$. Puisque ψ est injective, nous avons $\psi \circ f \circ \phi(x') \in \psi(A)$ si et seulement si $f(x) \in A$. Supposons ceci vérifié. Comme $T_{f(x)}\psi : T_{f(x)}N \rightarrow T_{\psi \circ f \circ \phi(x')}N'$ est un isomorphisme linéaire, nous avons

$$T_{\psi \circ f \circ \phi(x')}N' = T_{f(x)}\psi(T_{f(x)}N) .$$

Puisque ψ est un C^1 -difféomorphisme entre les sous-variétés A de N et $\psi(A)$ de N' , nous avons

$$T_{\psi \circ f \circ \phi(x')}(\psi(A)) = T_{f(x)}\psi(T_{f(x)}A) .$$

Par le théorème de dérivation des fonctions composées et puisque $T_{x'}\phi : T_{x'}M' \rightarrow T_x M$ est un isomorphisme linéaire, nous avons

$$T_{x'}(\psi \circ f \circ \phi)(T_{x'}M') = T_{f(x)}\psi(T_x f(T_{x'}\phi(T_{x'}M'))) = T_{f(x)}\psi(T_x f(T_x M)) .$$

Donc de nouveau puisque $T_{f(x)}\psi$ est un isomorphisme linéaire, nous avons

$$T_{\psi \circ f \circ \phi(x')}N' = T_{\psi \circ f \circ \phi(x')}(\psi(A)) + T_{x'}(\psi \circ f \circ \phi)(T_{x'}M')$$

si et seulement si $T_{f(x)}N = T_{f(x)}A + T_x f(T_x M)$. Ceci montre l'affirmation de l'exemple (3).

à demander que $g(x) \in A$), l'application $T_x(\text{pr}_2 \circ g) : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^{q-a}$ est surjective, donc si et seulement si 0 est une valeur régulière de $\text{pr}_2 \circ g$. Comme $g^{-1}(A) = (\text{pr}_2 \circ g)^{-1}(0)$, le résultat découle du corollaire 5.1. $\square$

Rappelons que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

- le dual $(\mathbb{R}^m)^*$ de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^m$ est l'espace vectoriel réel des formes linéaires sur $\mathbb{R}^m$,
- toute forme linéaire ℓ sur un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^m$ s'étend de manière unique en une forme linéaire $\tilde{\ell}$ sur $\mathbb{R}^m$ en demandant qu'elle soit nulle sur l'orthogonal $E^\perp$ de E dans $\mathbb{R}^m$ (pour son produit scalaire euclidien usuel), et
- l'application ainsi définie du dual de E dans l'espace vectoriel réel des formes linéaires de $\mathbb{R}^m$ nulles sur $E^\perp$ est un isomorphisme linéaire.

Soit M une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^m$ de dimension p . Le *fibré cotangent* de M est l'ensemble des couples (x, ℓ) d'un point de M et d'une forme linéaire ℓ sur $T_x M$:

$$T^*M = \{(x, \ell) : x \in M, \ell \in (T_x M)^*\} ,$$

muni de la *projection canonique* $\pi^* : T^*M \rightarrow M$ définie par $(x, \ell) \mapsto x$. Notons que T^*M s'identifie, par les rappels d'algèbre linéaire précédents, à la partie de $\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^m)^*$ définie par

$$\{(x, \tilde{\ell}) \in \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^m)^* : \tilde{\ell}|_{(T_x M)^\perp} = 0\} .$$

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, alors nous avons $T^*U = U \times (\mathbb{R}^p)^*$. Une démonstration analogue à celle de la proposition 4.13 montre que T^*M est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^m)^*$, de dimension $2p$, telle que si $\varphi : W \rightarrow M$ est un paramétrage local de M , où W est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, alors l'application de $W \times (\mathbb{R}^p)^*$ dans T^*M définie par

$$(x, \ell) \mapsto (\varphi(x), \ell \circ (d\varphi_x)^{-1}) \quad (19)$$

est un paramétrage local de T^*M . Notons que si $\phi : M \rightarrow N$ est un C^∞ -difféomorphisme, alors l'application $T^*\phi : T^*M \rightarrow T^*N$ définie par

$$(x, \ell) \mapsto (\phi(x), \ell \circ (T_x \phi)^{-1}) \quad (20)$$

est un C^∞ -difféomorphisme.

Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 . Rappelons que $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$ est une forme linéaire, qui est nulle si et seulement si x est un point critique de f . Nous avons une application continue $df : M \rightarrow T^*M$, appelée la *différentielle*¹¹¹ de f , qui à $x \in M$ associe la forme linéaire $df_x = T_x f$ sur $T_x M$. C'est une 1-forme différentielle continue sur M , c'est-à-dire une application continue ω de M dans T^*M telle que $\pi^* \circ \omega = \text{id}_M$. Mais c'est la seule forme différentielle que nous rencontrerons dans ce cours (voir par exemple [Paul] pour une introduction aux formes différentielles).

La *section nulle* de T^*M est la sous-variété lisse $Z^* = M \times \{0\}$ de T^*M , qui est de dimension p . Notons que x est un point critique de f si et seulement si df_x appartient à la section nulle Z^* . Si $\phi : M \rightarrow N$ est un C^∞ -difféomorphisme, alors $T^*\phi : T^*M \rightarrow T^*N$ envoie la section nulle de T^*M sur la section nulle de T^*N (voir la formule (20)).

111. Il convient de ne pas confondre la différentielle $df : M \rightarrow T^*M$ de f avec l'application tangente $Tf : TM \rightarrow T\mathbb{R}$ de f , même si l'une détermine l'autre (car pour tout $x \in M$, nous avons par définition $df_x = T_x f$), car les applications df et Tf n'ont pas les mêmes espaces de départ et d'arrivée.

Lemme 6.6. Une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 est de Morse si et seulement si sa différentielle $df : M \rightarrow T^*M$ est transverse à la section nulle Z^* de T^*M .

Démonstration. Puisque les problèmes de la transversalité en un point de la section nulle et de la non dégénérescence d'un point critique s'étudient localement et sont invariants par C^2 -difféomorphismes, nous pouvons supposer que nous avons $M = \mathbb{R}^p$. Alors la section nulle $Z^* = \mathbb{R}^p \times \{0\}$ est le premier facteur de l'espace vectoriel produit $T^*M = \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^p)^*$ de dimension $2p$, et en particulier Z^* est un sous-espace vectoriel de dimension p de ce produit.

Soit x un point critique de f . Alors $df_x = (x, 0) \in Z^*$ et $T_{(x,0)}Z^* = \mathbb{R}^p \times \{0\}$. Puisque df est l'application de M dans T^*M définie par $y \mapsto (y, w \mapsto df_y(w))$, l'application

$$T_x(df) : T_xM = \mathbb{R}^p \rightarrow T_{(x,0)}T^*M = \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^p)^*$$

est l'application $v \mapsto (v, w \mapsto d_x^2 f(v, w))$. Son image $T_x(df)(T_xM)$ est par conséquent le sous-espace vectoriel $A = \{(v, w \mapsto d_x^2 f(v, w)) : v \in \mathbb{R}^p\}$ de $\mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^p)^*$. Vu les dimensions, pour que les espaces vectoriels $T_{(x,0)}Z^* = \mathbb{R}^p \times \{0\}$ et $T_x(df)(T_xM) = A$ (qui est de dimension au plus p) soient transverses dans $T_{(x,0)}T^*M = \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^p)^*$, il faut et il suffit que A soit de dimension égale à p et que l'intersection $T_{(x,0)}Z^* \cap A$ soit réduite à $\{0\}$, c'est-à-dire que pour tout vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^p$, la forme linéaire $w \mapsto d_x^2 f(v, w)$ soit non nulle. Ceci est exactement demander que x soit un point critique non dégénéré de f . $\square$

Notons $C^\infty(M, N)$ l'ensemble des applications de classe C^∞ de M dans une sous-variété lisse N de dimension q . Nous allons le munir de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts des applications lues dans les cartes et d'un nombre fini leurs dérivées, de la manière suivante. Considérons $g_0 \in C^\infty(M, N)$. Soient (U, ϕ) et (V, ψ) des paramétrages locaux d'ouverts de M et N par des ouverts U et V de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement. Soient $r \in \mathbb{N}$, K un compact de U tel que $g_0(\phi(K)) \subset \psi(V)$, et $\epsilon > 0$. Notons $\mathcal{V}_{\epsilon, K, r, (U, \phi), (V, \psi)}(g_0)$ l'ensemble des applications $g \in C^\infty(M, N)$ telles que $g(\phi(K)) \subset \psi(V)$ et telles que pour tout $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$, nous ayons

$$\sup_{x \in K} \|d^k(\psi^{-1} \circ g \circ \phi)_x - d^k(\psi^{-1} \circ g_0 \circ \phi)_x\| < \epsilon,$$

où $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ sont munis de leur norme euclidienne usuelle et, pour tout $k \geq 1$,

$$\|\ell\| = \sup_{v_1, \dots, v_k \neq 0} \frac{\|\ell(v_1, \dots, v_k)\|}{\|v_1\| \dots \|v_k\|}$$

désigne la norme d'opérateur des applications k -linéaires ℓ de $(\mathbb{R}^p)^k$ dans $\mathbb{R}^q$.

Alors la *topologie* C^∞ ¹¹² sur $C^\infty(M, N)$ est la topologie engendrée par les ensembles de parties $\mathcal{V}_{\epsilon, K, r, (U, \phi), (V, \psi)}(f)$ de $C^\infty(M, N)$, de sorte qu'une partie U de $C^\infty(M, N)$ est ouverte si et seulement si pour tout $f \in U$, il existe une intersection finie de telles parties $\mathcal{V}_{\epsilon_i, K_i, r_i, (U_i, \phi_i), (V_i, \psi_i)}(f)$ qui est contenue dans U .

Par exemple, par le théorème de dérivation des fonctions composées, si P est une sous-variété lisse, l'application de composition $(f, g) \mapsto g \circ f$ de $C^\infty(M, N) \times C^\infty(N, P)$ dans $C^\infty(M, P)$ est continue pour les topologies C^∞ .

L'intérêt de la notion de transversalité vient, outre de la proposition 6.5, du résultat suivant.

112. Plus précisément, il s'agit de la topologie C^∞ *faible*, mais nous ne considérons que celle-ci dans ces notes, voir [Hir, §2.1] pour des compléments.

Théorème 6.7. Soient M et N deux sous-variétés lisses, et A une sous-variété lisse de N . L'ensemble des applications $f : M \rightarrow N$ de classe C^∞ transverses à A est dense dans $C^\infty(M, N)$ pour la topologie C^∞ .

Démonstration. Nous ne montrerons qu'une version locale de ce résultat, en renvoyant à [Hir, §3.2] pour le passage du local au global, qui utilise le fait que la topologie de $C^\infty(M, N)$ est définissable par une distance complète, et la propriété de Baire.

Proposition 6.8. Soient $m, n \in \mathbb{N}$, M un ouvert de $\mathbb{R}^m$, K un compact de M , $N = \mathbb{R}^n$ et A un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Alors l'ensemble $\{f \in C^\infty(M, N) : f \dashv_K A\}$ des applications lisses de M dans N transverses en A en tout point de K est un ouvert dense de $C^\infty(M, N)$.

Démonstration. Notons $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/A$ la projection canonique. Remarquons que pour tous les $x \in M$ et $f \in C^\infty(M, N)$, nous avons $f \dashv_x A$ si ou bien (i) $f(x) \notin A$, ou bien (ii) $f(x) \in A$ et x est un point régulier de $p \circ f$ (par la remarque 6.4).

Soit $f_0 \in C^\infty(M, N)$ tel que $f_0 \dashv_K A$. Tout élément y de K admet un voisinage compact K_y tel que ou bien la propriété (i) pour $f = f_0$ (qui est une propriété ouverte car A est fermée) soit vérifiée pour tout $x \in K_y$, ou bien la propriété (ii) pour $f = f_0$ soit vérifiée pour tout $x \in K_y$ (car la propriété d'être un point régulier est ouverte). Pour tout compact K' de M contenu dans l'ouvert $f_0^{-1}(N \setminus A)$, si f est uniformément proche de f_0 , alors nous avons aussi $K' \subset f^{-1}(N \setminus A)$. De même, pour tout compact K' de M contenu dans $f_0^{-1}(A)$ dont tout point est un point régulier de $p \circ f_0$, si f est proche de f_0 pour la topologie C^∞ , alors tout point de $K' \cap f^{-1}(A)$ est un point régulier de $p \circ f$. En recouvrant le compact K par un nombre fini de compacts $K_{y_1}, \dots, K_{y_k}$ comme ci-dessus, nous avons donc que l'ensemble $\{f \in C^\infty(M, N) : f \dashv_K A\}$ est ouvert.

Soit $g \in C^\infty(M, N)$. Par la théorème de Sard 5.3, il existe une suite $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^n$ convergeant vers 0 telle que $p(y_i)$ soit une valeur régulière de $p \circ g$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, définissons une application $g_i \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ par $x \mapsto g(x) - y_i$. Remarquons qu'elle est transverse à A , car $p \circ g_i : x \mapsto p \circ g(x) - p(y_i)$ admet 0 comme valeur régulière. De plus, la suite $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers g dans la topologie C^∞ . Ceci démontre la propriété de densité cherchée. $\square \square$

Nous admettrons la variation suivante sur le théorème 6.7 (voir par exemple [Hir, Theo. 3.2.8]).

Théorème 6.9. Soient M une sous-variété lisse et A une sous-variété lisse de T^*M . L'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, telles que $df \in C^\infty(M, T^*M)$ soit transverse à A , est dense dans $C^\infty(M, \mathbb{R})$ pour la topologie C^∞ . $\square$

Le corollaire immédiat suivant montre donc l'existence de fonctions de Morse.

Corollaire 6.10. Soit M une sous-variété lisse.

(1) Dans l'espace $C^\infty(M, \mathbb{R})$ muni de la topologie C^∞ , l'ensemble des fonctions de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ est dense.

(2) Il existe une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que tout sous-niveau $M_{\leq a} = \{x \in M : f(x) \leq a\}$ soit compact, et tout niveau $M_{=a} = \{x \in M : f(x) = a\}$ contienne au plus un point critique de f .

Démonstration. Pour la première affirmation, il suffit d'appliquer le théorème 6.9 avec $A = Z^*$ en utilisant le lemme 6.6.

Pour la seconde affirmation, par la dénombrabilité à l'infini de M , fixons-nous une suite $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'ouverts de M , tels que U_i soit d'adhérence compacte contenue dans $\overline{U_{i+1}}$. Nous construisons une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ lisse valant 0 sur U_0 et i sur le compact $\overline{U_{2i}} - U_{2i-1}$ pour $i \geq 1$, en interpolant de manière C^∞ par partition de l'unité sur $\overline{U_{2i+1}} - U_{2i}$ pour $i \geq 0$, de sorte que f soit à valeurs dans $[i, i+1]$ dans $\overline{U_{2i+1}} - U_{2i}$. En particulier, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est positive ou nulle, de classe C^∞ et propre.

Puis par récurrence, nous construisons par la première affirmation de ce corollaire, une fonction $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$, arbitrairement proche de $f|_{U_i}$ sur $U_{i+1} - \overline{U_i}$, de Morse sur un voisinage de $\overline{U_i}$ dans U_{i+1} , coïncidant avec f en dehors de U_{i+1} et coïncidant avec f_{i-1} sur U_{i-1} si $i \geq 1$. La fonction g valant f_i sur U_i est alors bien définie, de Morse, positive ou nulle et propre. En rajoutant des petites fonctions plateau au voisinage des points critiques, il est alors possible de séparer les points critiques dans un même niveau (en nombre fini car discrets dans un compact). $\square$

Voici une démonstration élémentaire de l'existence d'une fonction de Morse sur une surface compacte.

Exercice E.75. Soit S une surface compacte.

- (1) Soient W un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in C^\infty(W, \mathbb{R})$. Montrer que pour presque tous les $a, b \in \mathbb{R}$, l'application $g : W \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto f(x, y) + ax + by$ est une fonction de Morse.
- (2) Soient V' un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in C^\infty(V', \mathbb{R})$ une fonction de Morse. Montrer que pour tout ouvert V d'adhérence compacte contenue dans V' , si $g \in C^\infty(V', \mathbb{R})$ est suffisamment proche de 0 pour la topologie C^∞ , alors l'application $f + g$ est encore de Morse sur un voisinage ouvert de l'adhérence de V dans V' .
- (3) Montrer qu'il existe des entiers $n, N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2n$, un plongement C^∞ de S dans $\mathbb{R}^N$ par lequel nous identifions S avec son image, et des recouvrements ouverts finis $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ de S , tels que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'ouvert V_i soit d'adhérence compacte contenue dans U_i et l'application définie par $x = (x_1, \dots, x_N) \mapsto (x_{2i-1}, x_{2i})$ soit un C^∞ -difféomorphisme d'un voisinage ouvert V'_i dans U_i de l'adhérence de V_i , à valeurs dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- (4) Montrer que l'application $f_1 : S \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x = (x_1, \dots, x_N) \mapsto x_1$ est une fonction de Morse sur V'_1 . Montrer qu'il existe des réels a_3, a_4 tels que l'application $f_2 : x = (x_1, \dots, x_N) \mapsto f_1(x) + a_3 x_3 + a_4 x_4$ de S dans $\mathbb{R}$ soit de Morse sur la réunion d'un voisinage ouvert de l'adhérence de V_1 dans U_1 et d'un voisinage ouvert de l'adhérence de V_2 dans U_2 .
- (5) Montrer l'existence d'une fonction de Morse $f \in C^\infty(S, \mathbb{R})$.

6.3 Flot local d'un champ de vecteurs

Soient M une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^m$ de dimension p , et $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Rappelons (voir la partie 4.4) qu'un *champ de vecteurs* X de classe C^r sur M est une section de classe C^r du fibré tangent de M , c'est-à-dire une application de classe C^r de M dans TM telle que, pour tout $x \in M$, nous ayons $X(x) = (x, v(x))$ avec $v(x) \in T_x M$. Nous noterons souvent, par abus, de la même manière l'application $X : M \rightarrow TM \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ et sa seconde projection $v = \text{pr}_2 \circ X : M \rightarrow \mathbb{R}^m$. Nous noterons $\Gamma_r(TM)$ (et $\Gamma(TM)$ si $r = \infty$) l'ensemble des champs de vecteurs de classe C^r sur M .

Par exemple, le *champ de vecteurs nul* sur M , noté 0 , est l'application $x \mapsto (x, 0)$. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, comme TU est égal à $U \times \mathbb{R}^p$, un champ de vecteurs de classe C^r sur U , qui est une application $x \mapsto (x, X(x))$ de U dans TU de classe C^r , s'identifie donc à l'application $x \mapsto X(x)$ de classe C^r de U dans $\mathbb{R}^p$.

6.3.1 Opérations sur les champs de vecteurs

Structure d'espace vectoriel réel. La structure d'espace vectoriel réel de l'espace tangent en tout point de M permet de munir l'ensemble $\Gamma_r(TM)$ d'une structure d'espace vectoriel réel pour l'addition point par point

$$X + Y : x \mapsto X(x) + Y(x)$$

(où nous notons $(x, v) + (x, w) = (x, v + w)$ dans $TM \subset M \times \mathbb{R}^m$ pour tous les $v, w \in T_x M$) et la multiplication externe point par point

$$\lambda X : x \mapsto \lambda X(x)$$

(où nous notons $\lambda(x, v) = (x, \lambda v)$ pour tous les $v \in T_x M$ et $\lambda \in \mathbb{R}$).

Structure de $C^r(M, \mathbb{R})$ -module. L'ensemble $\Gamma_r(TM)$ est aussi muni d'une structure de module sur l'anneau $C^r(M, \mathbb{R})$, pour l'addition point par point précédente et la multiplication point par point par une fonction $f \in C^r(M, \mathbb{R})$, définie par

$$fX : x \mapsto f(x)X(x) .$$

Par exemple, si U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, si $(e_1, \dots, e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$, si X_{e_i} est le champ de vecteurs constant $x \mapsto e_i$ sur U , alors $\Gamma_r(TU)$ est un $C^r(U, \mathbb{R})$ -module libre engendré par les X_{e_i} pour $1 \leq i \leq p$: tout champ de vecteurs $X \in \Gamma_r(TU)$ s'écrit, de manière unique, sous la forme

$$X = \sum_{i=1}^p X_i X_{e_i} \quad (21)$$

où les fonctions $X_i \in C^r(U, \mathbb{R})$ sont appelées les *composantes* (ou coordonnées) du champ de vecteurs X dans la base $(X_{e_1}, \dots, X_{e_p})$ du $C^r(U, \mathbb{R})$ -module libre $\Gamma_r(TU)$.

Image réciproque par morphismes étales. Les champs de vecteurs se tirent en arrière par les difféomorphismes locaux, par la formule suivante. Soient N une sous-variété lisse et $\varphi : M \rightarrow N$ un C^{r+1} -difféomorphisme local. Pour tout champ de vecteurs Y de classe C^r sur N , nous définissons un champ de vecteurs φ^*Y sur M de classe C^r , appelé *image réciproque de Y par φ* (ou parfois *tiré en arrière*), par

$$\varphi^*Y : x \mapsto (T_x \varphi)^{-1}(Y(\varphi(x)))$$

en utilisant le fait que l'application $T_x \varphi : T_x M \rightarrow T_{\varphi(x)} N$ est un isomorphisme linéaire.

Cette opération d'image réciproque sur les champs de vecteurs vérifie les propriétés suivantes.

- (1) L'application φ^* de $\Gamma_r(TN)$ dans $\Gamma_r(TM)$ définie par $Y \mapsto \varphi^*Y$ est $\mathbb{R}$ -linéaire, et pour toute fonction f de classe C^r sur N , nous avons

$$\varphi^*(fY) = (f \circ \varphi) (\varphi^*Y) .$$

- (2) Les images réciproques se comportent de manière contravariante pour la composition. Plus précisément, si $\psi : N \rightarrow P$ est un C^{r+1} -difféomorphisme local, et si Z est un champ de vecteurs de classe C^r sur P , alors

$$(\psi \circ \varphi)^* Z = \varphi^* (\psi^* Z) .$$

Il est immédiat que $\text{id}^* X = X$ pour tout $X \in \Gamma_r(TM)$. En particulier, si $\varphi : M \rightarrow N$ est un C^{r+1} -difféomorphisme, alors $\varphi^* : \Gamma_r(TN) \rightarrow \Gamma_r(TM)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels, et $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.

- (3) Si U est un ouvert de M et $i : U \rightarrow M$ est l'inclusion, alors

$$\forall X \in \Gamma_r(TM), \quad i^* X = X|_U .$$

Il découle donc de la propriété précédente que les images réciproques et les restrictions de champs de vecteurs sont compatibles. Plus précisément, si U est un ouvert de N , et si Y est un champ de vecteurs de classe C^r sur N , alors nous avons

$$(\varphi|_{\varphi^{-1}(U)})^*(Y|_U) = (\varphi^* Y)|_{\varphi^{-1}(U)} .$$

Par exemple, soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^p$, soit $\varphi : U \rightarrow V$ un C^{r+1} -difféomorphisme de composantes $\varphi_1, \dots, \varphi_p$, et soit $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ un champ de vecteurs de classe C^r sur V de composantes $Y_1, \dots, Y_p$. Alors $X = \varphi^* Y : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ est le champ de vecteurs sur U défini par $x \mapsto (d\varphi_x)^{-1}(Y(\varphi(x)))$, c'est-à-dire tel que

$$Y(\varphi(x)) = d\varphi_x(X(x)) .$$

Par calcul matriciel, les composantes $X_1, \dots, X_p$ de X vérifient donc

$$Y_i = \left(\sum_{k=1}^p \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} X_k \right) \circ \varphi^{-1} .$$

Cette formule exprime les anciennes coordonnées $Y_1, \dots, Y_p$ du champ de vecteurs Y sur V en fonction des nouvelles coordonnées $X_1, \dots, X_p$ du champ de vecteurs $X = \varphi^* Y$ sur U . Afin d'obtenir les nouvelles en fonction des anciennes, il suffit d'inverser la matrice jacobienne de φ (ou de calculer la matrice jacobienne de l'inverse de φ).

6.3.2 Équation différentielle associée à un champ de vecteurs sur une sous-variété

Soit X un champ de vecteurs de classe C^r sur M , avec $r \geq 1$ (condition nécessaire pour pouvoir appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz). Comme dans le cas des ouverts de $\mathbb{R}^p$, nous allons étudier les courbes tracées sur M dont le vecteur vitesse en tout point est donné par le champ de vecteurs X .

Un *flot (local)* de X est une application $\phi : \Omega \rightarrow M$ de classe C^r , notée $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$, où Ω est un voisinage ouvert de $\{0\} \times M$ dans $\mathbb{R} \times M$ tel que pour tout $x \in M$, l'ouvert $\Omega \cap (\mathbb{R} \times \{x\})$ de $\mathbb{R} \times \{x\}$ soit connexe,¹¹³ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

113. donc $\Omega \cap (\mathbb{R} \times \{x\}) = I_x \times \{x\}$ où I_x est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$

(1) (**Équation différentielle autonome**) pour tous les $(s, x) \in \Omega$, nous avons

$$\frac{d\phi_t(x)}{dt} \Big|_{t=s} = X(\phi_s(x)) ,$$

(2) (**Condition initiale**) pour tout $x \in M$, nous avons

$$\phi_0(x) = x .$$

La première composante t de $(t, x) \in \Omega$ s'appelle la *coordonnée de temps*, et la seconde composante x la *coordonnée d'espace*.

Un flot local $\phi : \Omega \rightarrow M$ de X est *maximal* s'il n'est pas possible de l'étendre strictement, c'est-à-dire si pour tout autre flot local $\phi' : \Omega' \rightarrow M$ de X tel que $\Omega \subset \Omega'$ et $\phi = \phi'|_{\Omega}$, nous avons $\Omega = \Omega'$ et $\phi = \phi'$.

Un flot local $\phi : \Omega \rightarrow M$ de X est *complet* si $\Omega = \mathbb{R} \times M$. Il est alors maximal, et la première affirmation du résultat suivant montre qu'il est alors unique. Nous dirons alors que le champ de vecteurs X est *complet*.

Une *courbe intégrale* de X est une courbe $c : I \rightarrow M$ de classe C^1 tracée sur M , où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, telle que $\dot{c} = X \circ c$. Elle est *maximale* s'il n'est pas possible de l'étendre strictement, c'est-à-dire si pour tout autre courbe intégrale $c^* : I^* \rightarrow M$ de X telle que $I \subset I^*$ et $c = c^*|_I$, nous avons $I^* = I$ et $c^* = c$.

Théorème 6.11. *Un champ de vecteurs X de classe C^r sur M , avec $r \geq 1$, admet un unique flot local maximal $\phi : \Omega \rightarrow M$. De plus, ϕ vérifie les propriétés suivantes.*

(3) *Pour tout $x_0 \in M$, l'unique courbe intégrale maximale de X passant par x_0 au temps $t = 0$ est la courbe $c : I_{x_0} = \{t \in \mathbb{R} : (t, x_0) \in \Omega\} \rightarrow M$ définie par*

$$t \mapsto \phi_t(x_0) .$$

(4) *Pour tout $(s, x) \in \Omega$, nous avons $(t, \phi_s(x)) \in \Omega$ si et seulement si $(t + s, x) \in \Omega$ et alors*

$$\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_{t+s}(x) . \quad (22)$$

(5) *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application*

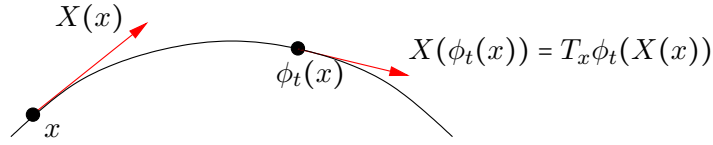
$$\phi_t : U_t = \{x \in M : (t, x) \in \Omega\} \rightarrow M$$

est un C^r -difféomorphisme local. Si de plus X est complet, alors $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre de C^r -difféomorphismes de M de classe C^r .¹¹⁴

(6) (**Le flot local préserve le champs de vecteurs**) *Pour tout $(t, x) \in \Omega$, nous avons*

$$T_x \phi_t(X(x)) = X(\phi_t(x)) . \quad (23)$$

114. Ceci signifie que ϕ_0 est l'identité de M , que pour tous les t, s dans $\mathbb{R}$, nous avons $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$, que l'application $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$ de $\mathbb{R} \times M$ dans M est de classe C^r . Ceci implique que $\phi_t : M \rightarrow M$ est un C^r -difféomorphisme pour tout $t \in \mathbb{R}$.



Nous noterons $\phi^X : (t, x) \mapsto \phi_t^X(x)$ le flot local maximal de X lorsqu'il convient de préciser le champ de vecteurs X . La régularité C^r du flot local maximal de X s'appelle la propriété de *régularité en fonction des conditions initiales* des solutions de l'équation différentielle autonome définie dans l'assertion (1).

Démonstration. Pour montrer l'existence et l'unicité locale, en prenant les images réciproques des restrictions de X par les paramétrages locaux, nous nous ramenons au cas où M est un ouvert d'un espace $\mathbb{R}^n$, pour lequel le résultat est bien connu puisque $r \geq 1$, parfois sous le nom de théorème de Cauchy-Lipschitz (avec dépendance régulière des conditions initiales) (voir un cours de calcul différentiel [Ave, Die2, Car]).

Pour montrer l'existence et l'unicité globale, nous procédons par recollement, en utilisant l'unicité locale.

Notons que la partie I_{x_0} de $\mathbb{R}$ définie dans l'assertion (3) est bien un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, par les hypothèses sur Ω . Cette propriété (3) se démontre par l'absurde, en utilisant l'existence et l'unicité locale pour étendre strictement le flot local ϕ si la courbe c définie par l'assertion (3), qui est bien une courbe intégrale de X par la propriété (1), n'est pas maximale.

L'assertion (4) dit qu'à (s, x) fixé dans Ω , l'un des deux termes de l'égalité (22) est défini si et seulement si l'autre l'est, et qu'ils sont alors égaux. Elle découle de l'unicité dans l'assertion (3), les deux membres de l'égalité (22) vérifiant la même équation différentielle en t avec la même condition initiale en $t = 0$.

L'assertion (5) s'obtient en prenant $t = -s$ dans l'assertion précédente : puisque le couple $(-s + s = 0, x)$ appartient à Ω , le couple $(-s, \phi_s(x))$ appartient à Ω et nous avons $\phi_{-s} \circ \phi_s(x) = \phi_0(x) = x$. Ceci est vrai sur un voisinage de x dans M puisque Ω est ouvert. Donc l'application linéaire $T_x \phi_s$ est injective, entre espaces vectoriels de même dimension, donc est bijective. Par le théorème d'inversion locale, l'application ϕ_s est par conséquent un C^r -difféomorphisme local en x .

Enfin, l'assertion (6) s'obtient en dérivant par rapport à s en $s = 0$ la formule (22), par le théorème de dérivation des fonctions composées. $\square$

Le *support* $\text{Supp}(X)$ d'un champ de vecteurs X est plus petit fermé de M en dehors duquel le champ de vecteurs X est nul, donc

$$\text{Supp}(X) = \overline{\{x \in M : X(x) \neq 0\}}.$$

Proposition 6.12. (7) Supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $] -2\epsilon, 2\epsilon[\times M$ soit contenu dans Ω . Alors le champ de vecteurs X est complet.

(8) Si le support de X est compact (par exemple si M est compacte), alors X est complet.

Démonstration. (7) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, considérons l'application $\psi_t = \phi_\epsilon^{\circ k} \circ \phi_{t-k\epsilon}$ où $k = \lfloor \frac{t}{\epsilon} \rfloor$ est la partie entière de $\frac{t}{\epsilon}$ et $\phi_\epsilon^{\circ k}$ est la composée k -ème de ϕ_ϵ , qui est bien définie en tout

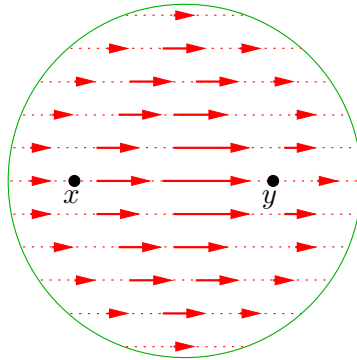
point de M par l'hypothèse de l'assertion (7). Comme le flot local $\phi : \Omega \rightarrow M$ de X préserve X (voir l'assertion (6) ci-dessus), il est immédiat que $\frac{d\psi_t(x)}{dt}|_{t=s} = X(\psi_s(x))$, et $\psi_0(x) = x$ pour tous les s dans $\mathbb{R}$ et x dans M . Donc ψ est un flot local de X défini sur $\mathbb{R} \times M$. Par maximalité, ceci montre que $\phi = \psi$ est complet.

(8) Pour tout x dans M , puisque le domaine Ω du flot local est ouvert, il existe un voisinage ouvert U_x de x et $\epsilon_x \in]0, 1]$ tel que le flot local de X soit défini sur $] - 2\epsilon_x, 2\epsilon_x[\times U_x$. Lorsque $x \notin \text{Supp}(X)$, la courbe intégrale maximale de X passant en x au temps $t = 0$ est l'application constante en x , donc nous pouvons prendre $\epsilon_x = 1$ et $U_x = X \setminus \text{Supp}(X)$. Par la compacité de $\text{Supp}(X)$, il existe $k \geq 1$ et $x_1, \dots, x_k$ dans M tels que $\text{Supp}(X) \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k}$. Soit $\epsilon = \min_{1 \leq i \leq k} \epsilon_{x_i}$. Alors l'hypothèse de l'assertion (7) est vérifiée. $\square$

Si X est un champ de vecteurs complet de classe C^∞ , alors le temps t de son flot $\phi_t : M \rightarrow M$ est un C^∞ -difféomorphisme C^∞ -isotope à l'identité, car $(x, s) \mapsto \phi_{st}$ est une homotopie de classe C^∞ entre id en $s = 0$ et ϕ_t en $s = 1$, et ϕ_{st} est un C^∞ -difféomorphisme pour tout $s \in [0, 1]$. Cette remarque permet de donner une démonstration à la proposition 5.17.

Démonstration de la proposition 5.17. Montrons tout d'abord que pour tous les points x et y de la boule ouverte unité $\mathring{\mathbb{B}}_p$ de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^p$, il existe (au moins) un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^p$ envoyant x sur y , qui est C^∞ -isotope à l'identité par une homotopie h telle que pour tout $s \in [0, 1]$, l'application $x \mapsto h(x, s)$ soit un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^p$, qui préserve la boule ouverte unité $\mathring{\mathbb{B}}_p$, et vaille l'identité sur $\mathbb{R}^p \setminus \mathring{\mathbb{B}}_p$.

Nous pouvons supposer que $x \neq y$. Soient $v = \frac{y-x}{\|y-x\|}$, qui est un vecteur (de norme 1) de $\mathbb{R}^p$ et $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une application C^∞ strictement positive sur la boule ouverte $\mathring{\mathbb{B}}_p$, et nulle en dehors de celle-ci. Par exemple, nous pouvons prendre l'application $x \mapsto e^{-\frac{1}{(1-\|x\|)^2}}$ si $\|x\| < 1$ et $x \mapsto 0$ sinon.



Considérons le champ de vecteurs (qui sont tous colinéaires à v) de classe C^∞ défini par $X : x \mapsto \varphi(x)v$. Il est complet, car nul en dehors du compact $\mathring{\mathbb{B}}_p$. Notons $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ son flot. Les courbes intégrales de X sont, autres celles réduites à un point x pour tout $x \notin \mathring{\mathbb{B}}_p$, les intersections avec $\mathring{\mathbb{B}}_p$ des droites affines de vecteur directeur v , car elles sont contenues dans ces droites affines, et φ ne s'annulant pas dans la boule ouverte, les limites en $\pm\infty$ de ces courbes intégrales doivent être les points d'intersection avec la sphère unité de ces droites

affines. Si $T \in]0, +\infty[$ est tel que $\phi_T(x) = y$, alors le C^∞ -difféomorphisme ϕ_T convient, par l'explication précédant le début de la démonstration.

Maintenant, soit M une sous-variété lisse connexe de dimension p quelconque. Définissons une relation « être isotope à » sur M en demandant que $x \in M$ soit isotope à $y \in M$ s'il existe un C^∞ -difféomorphisme C^∞ -isotope à l'identité de M envoyant x sur y . C'est clairement une relation d'équivalence. Puisque tout point de M admet un paramétrage local $\varphi : \mathring{\mathbb{B}}_p \rightarrow M$, toute classe d'équivalence est ouverte par ce qui précède. Par connexité de M , et puisque les classes d'équivalence forment une partition de M , il existe donc une seule classe d'équivalence, ce qui démontre la proposition 5.17. $\square$

Exercice E.76. Si N est une sous-variété lisse, si $\psi : M \rightarrow N$ est un C^{r+1} -difféomorphisme et si $Y \in \Gamma_r(TN)$ est un champ de vecteurs de classe C^r sur N de flot local maximal défini sur l'ouvert Ω^Y de $\mathbb{R} \times N$, montrer que le flot local maximal de $X = \psi^*Y$ est défini sur l'ouvert $\Omega^X = (\text{id} \times \psi)^{-1}(\Omega^Y) = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M : (t, \psi(x)) \in \Omega^Y\}$ de $\mathbb{R} \times M$ par

$$\forall (t, x) \in \Omega^X, \quad \phi_t^X(x) = \psi^{-1} \circ \phi_t^Y \circ \psi(x).$$

6.3.3 Dérivation des fonctions associée à un champ de vecteurs

Les champs de vecteurs lisses sur une sous-variété peuvent être interprétés comme des dérivations des fonctions lisses sur cette sous-variété.

Une *dérivation* de M est une application $\mathbb{R}$ -linéaire $\delta : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que, pour tous les $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, nous ayons

$$\delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f).$$

L'ensemble $\mathcal{D}(M)$ des dérivations de M est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(C^\infty(M, \mathbb{R}), C^\infty(M, \mathbb{R}))$. C'est aussi un $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -module, pour la multiplication externe par $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ de $\delta \in \mathcal{D}(M)$ définie par

$$(f\delta)(g) : x \mapsto f(x)\delta(g)(x).$$

Notons que toute dérivation est nulle sur les fonctions constantes, par leur linéarité et le fait que $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) + \delta(1)$.

Si X est un champ de vecteurs de classe C^∞ sur M , alors l'application $\mathcal{L}_X$ de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ dans $C^\infty(M, \mathbb{R})$ définie par

$$\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \quad \mathcal{L}_X(f) : x \mapsto T_x f(X(x)) \tag{24}$$

est clairement une dérivation, appelée la *dérivation de Lie* associée à X .¹¹⁵ Il est traditionnel de noter aussi

$$\mathcal{L}_X(f) = X(f)$$

pour tout $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, et il est important de garder en tête que $X(f)$ est une fonction lisse sur M .

115. La formule fait sens lorsque f et X sont seulement supposés de classe C^{r+1} et C^r respectivement pour $r \in \mathbb{N}$, avec une perte d'un degré de régularité : la fonction $\mathcal{L}_X(f)$ est alors seulement de classe C^r en général.

Le théorème de dérivation des fonctions composées montre que si ϕ est un flot local de X , alors

$$\mathcal{L}_X(f) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f \circ \phi_t .$$

Par exemple, si M est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et si $(e_1, \dots, e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$, si X_{e_i} est le champ de vecteur constant $x \mapsto e_i$ sur M , alors, comme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = df_x(e_i)$, nous avons $\mathcal{L}_{X_{e_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i}$. La formule (21) devient donc

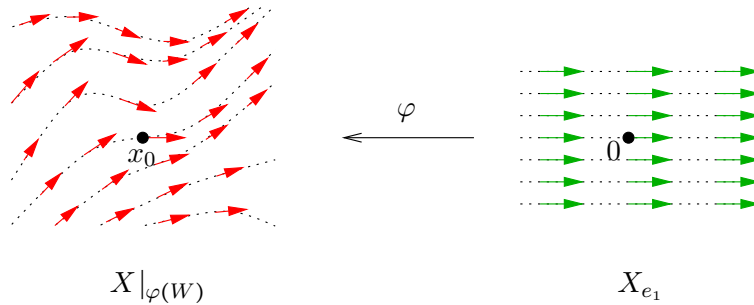
$$\mathcal{L}_X = \sum_{i=1}^p X_i \frac{\partial}{\partial x_i} . \quad (25)$$

Plus généralement, si (W, φ) est un paramétrage local de M , alors $\mathcal{L}_{(\varphi^{-1})^* X_{e_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i}$, où cette dérivation est définie par la formule (18).

Nous renvoyons par exemple à [Paul1] pour une démonstration du résultat suivant, dont nous n'aurons pas besoin dans ces notes, qui identifie les champs de vecteurs lisses et les dérivations sur M . Certains ouvrages notent encore X la dérivation $\mathcal{L}_X$, ce qui explique la notation $X(f)$.

Théorème 6.13. *L'application $X \mapsto \mathcal{L}_X$ de $\Gamma(TM)$ dans $\mathcal{D}(M)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels, ainsi que de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -modules.* $\square$

Nous concluons cette partie sur les champs de vecteurs par une généralisation de l'exercice E.C.130, à considérer comme un théorème de forme normale locale pour un champ de vecteurs ne s'annulant pas en un point. Dans $\mathbb{R}^p$, le champ de vecteurs constant $X_{e_1} : x \mapsto e_1$, où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$, est un exemple de tel champ. Le théorème suivant dit que, localement et à difféomorphisme près, c'est le seul.



Théorème 6.14. (Théorème de redressement des champs de vecteurs) *Soit X un champ de vecteurs de classe C^r sur une variété lisse M , avec $r \geq 1$. Pour tout point x_0 de M tel que $X(x_0) \neq 0$, il existe un paramétrage local (W, φ) de classe C^r de M en x_0 , tel que*

$$\varphi^*(X|_{\varphi(W)}) = (X_{e_1})|_W .$$

Démonstration. Comme le problème est local, et par les propriétés des champs de vecteurs vis à vis des restrictions et des images réciproques, nous pouvons supposer que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, que $x_0 = 0$ et que $X(x_0) = e_1$. Cette dernière propriété peut être obtenue en effectuant un changement de coordonnées linéaire. Notons ϕ un flot local de X en 0. Considérons l'application

$$\varphi : (t, x_2, \dots, x_n) \mapsto \phi_t(0, x_2, \dots, x_n) ,$$

qui est de classe C^r et définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Comme $\phi_0 = \text{id}$ et

$$\frac{d\phi_t(0)}{dt} \Big|_{t=0} = X(0) = e_1 ,$$

la différentielle de φ en 0 est l'identité. Donc par le théorème d'inversion locale, φ est un C^k -difféomorphisme local en 0. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ suffisamment proche de 0, nous avons

$$d\varphi_x(e_1) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=x_1} \varphi(t, x_2, \dots, x_n) = X(\phi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n)) = X(\varphi(x)) .$$

Donc $(\varphi^{-1})^*(X_{e_1}) = X$ sur un voisinage de 0, ce qui montre le résultat. $\square$

6.4 Structure des variétés entre deux niveaux critiques

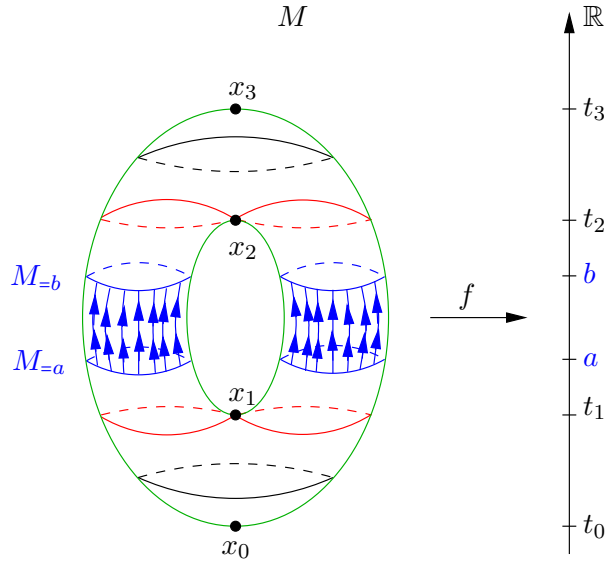
Dans cette partie et la partie 6.6, nous allons mettre en œuvre le programme décrit en début du chapitre 6, de description homotopique des (sous-)variétés différentielles. Nous fixons toujours une sous-variété différentielle lisse M de dimension p dans $\mathbb{R}^m$, et une application $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Nous supposons maintenant que f est une fonction de Morse de classe C^r , de régularité $r \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}) \cup \{\infty\}$, telle que tout sous-niveau $M_{\leq a} = \{x \in M : f(x) \leq a\}$ soit compact, et tout niveau $M_{=a} = \{x \in M : f(x) = a\}$ contienne au plus un point critique, ce qui est possible par le corollaire 6.10.

Regardons d'abord ce qui se passe entre deux niveaux critiques. Le résultat suivant dit en particulier que le type d'homotopie des sous-niveaux ne change pas tant que nous ne traversons pas de niveau critique.

Théorème 6.15. *Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ tels que l'intervalle $[a, b]$ ne contienne pas de valeur critique de f . Alors les sous-niveaux $M_{\leq a}$ et $M_{\leq b}$ sont C^{r-1} -difféomorphes, et la sous-variété à bord $f^{-1}([a, b])$ est C^{r-1} -difféomorphe à $M_{=a} \times [0, 1]$. De plus, $M_{\leq b}$ se rétracte par déformation forte sur $M_{\leq a}$, et en particulier l'inclusion de $M_{\leq a}$ dans $M_{\leq b}$ est une équivalence d'homotopie.*

La compacité de la partie $f^{-1}([a, b])$ de M entre les niveaux réguliers $M_{=a}$ et $M_{=b}$ est nécessaire. La fonction hauteur du tore vertical introduite au début du chapitre 6 permet d'illustrer ce résultat.



Démonstration. Notons $\| \cdot \|$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la norme et le produit scalaire usuels de l'espace euclidien ambiant $\mathbb{R}^m$. Le résultat ci-dessous généralise à toutes les sous-variétés la notion de gradient (voir la note de base de page 121) d'une fonction C^1 définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$ (la structure euclidienne de $\mathbb{R}^m$ étant cruciale).

Proposition 6.16. *Pour toute application $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r , il existe un et un seul champ de vecteurs ∇g de classe C^{r-1} sur M , appelé le gradient de g (et aussi noté $\text{grad } g$), tel que pour tous les champs de vecteurs lisses X sur M , nous ayons*

$$\langle X, \nabla g \rangle = X(g) .$$

De plus, si $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ est une courbe lisse tracée sur M , alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\langle \dot{c}(t), \nabla g(c(t)) \rangle = dg_{c(t)}(\dot{c}(t)) = (g \circ c)'(t) .$$

Démonstration. Rappelons que tout produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur un espace vectoriel réel de dimension finie E induit un isomorphisme, dit de dualité, entre E et son espace vectoriel réel dual E^* , défini par $u \mapsto \{v \mapsto \langle u, v \rangle\}$. Pour tout $x \in M$, définissons le vecteur $\nabla g(x) \in T_x M$ comme le dual de la forme linéaire $T_x g \in T_x^* M$ pour la restriction $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ au sous-espace vectoriel $T_x M$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^m$. La formule

$$\forall x \in M, \quad \langle X(x), \nabla g(x) \rangle = X(g)(x) = \mathcal{L}_X g(x)$$

découle alors de la définition dans la formule (24) de la dérivation de Lie associée à X . La dernière assertion découle de la définition de la 1-forme différentielle $dg : M \rightarrow T^* M$ qui à $x \in M$ associe la forme linéaire $T_x g : T_x M \rightarrow T_g(x) \mathbb{R} = \mathbb{R}$, ainsi que du théorème de dérivation des fonctions composées.

Le fait que le champ de vecteurs $x \mapsto \nabla g(x)$ soit de classe C^{r-1} sur M se vérifie en prenant des paramétrages locaux. ¹¹⁶ □

116. Notons $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Soit (W, φ) un paramétrage local lisse par un ouvert W de $\mathbb{R}^p$ d'un ouvert $\varphi(W)$ de M . Pour tout $x \in \varphi(W)$, notons respectivement

Remarquons que $x \in M$ est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(x) = 0$. Par partition de l'unité, puisque $f^{-1}([a, b])$ est compact et ne contient pas de point critique, il est élémentaire ¹¹⁷ de construire une fonction $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} valant $\frac{1}{\|\nabla f\|^2}$ sur $f^{-1}([a, b])$ et 0 en dehors d'un voisinage compact dans M de $f^{-1}([a, b])$. Considérons le champ de vecteurs

$$X = \rho \nabla f$$

sur M , qui est de classe C^{r-1} , avec $r-1 \geq 1$. Comme il est à support compact, il est complet par la proposition 6.12 (8). Notons $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ son flot (voir le théorème 6.11), qui est de classe C^{r-1} .

Pour tout $x \in M$, si $\phi_t(x) \in f^{-1}([a, b])$, par la dernière affirmation de la proposition 6.16, nous avons

$$\frac{d(f \circ \phi_t(x))}{dt} = \left\langle \frac{d\phi_t(x)}{dt}, \nabla f(\phi_t(x)) \right\rangle = \langle X(\phi_t(x)), \nabla f(\phi_t(x)) \rangle = 1.$$

Donc la fonction $t \mapsto f \circ \phi_t(x)$ est affine de pente 1 sur les $t \in \mathbb{R}$ tels que $f \circ \phi_t(x) \in [a, b]$.

Le C^{r-1} -difféomorphisme $\phi_{b-a} : M \rightarrow M$ envoie donc le niveau $M_{=a}$ sur le niveau $M_{=b}$, ainsi que le sous-niveau $M_{\leq a}$ sur le sous-niveau $M_{\leq b}$, qui sont par conséquent des sous-variétés à bord C^{r-1} -difféomorphes.

L'application de $f^{-1}([a, b])$ dans $M_{\leq a} \times [0, 1]$ définie par $x \mapsto (\phi_{a-f(x)}(x), \frac{f(x)-a}{b-a})$ est un C^{r-1} -difféomorphisme. L'application $h : M_{\leq b} \times [0, 1] \rightarrow M_{\leq b}$, définie par

$$(x, s) \mapsto \begin{cases} x & \text{si } f(x) \leq a \\ \phi_{s(a-f(x))}(x) & \text{si } a \leq f(x) \leq b \end{cases}$$

est une application continue, telle que l'application $x \mapsto h(x, 0)$ soit l'identité de $M_{\leq b}$. De plus, l'application $x \mapsto h(x, 1)$ envoie $M_{\leq b}$ dans $M_{\leq a}$ et pour tout $s \in [0, 1]$, l'application $x \mapsto h(x, s)$ vaut l'identité sur $M_{\leq a}$. Donc $M_{\leq b}$ se rétracte par déformation forte sur $M_{\leq a}$. $\square$

Nous étudierons dans la partie 6.6 le comportement homotopique des sous-niveaux de part et d'autre d'un niveau critique, toujours en ayant en tête l'exemple du début du chapitre 6. Nous commençons par définir le vocabulaire nécessaire aux énoncés.

6.5 CW-complexes finis et caractéristique d'Euler

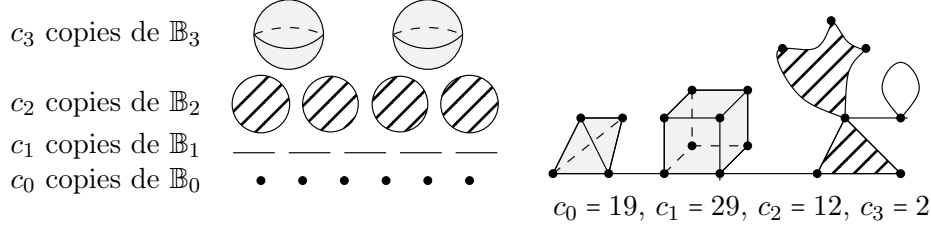
En deux mots, un CW-complexe est un espace topologique stratifié où la n -ème strate est obtenue par recollements de boules euclidiennes de dimension n le long de leur bord sur

- Y_x la matrice colonne des coordonnées dans la base $\mathcal{B}_x = (d\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(e_1), \dots, d\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(e_p))$ de $T_x M$ du vecteur $\nabla g(x) \in T_x M$,
- Z_x la matrice colonne des coordonnées dans la base $\mathcal{B}_x$ de la forme linéaire $T_x g$ sur $T_x M$ (qui dépend de manière C^{r-1} de x)
- A_x la matrice dans la base $\mathcal{B}_x$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ sur $T_x M$ (qui dépend de manière lisse de x).

Alors nous avons $Y_x = A_x^{-1} Z_x$, qui dépend bien de manière C^{r-1} de x .

117. Soient U un voisinage ouvert d'adhérence compacte de $K = f^{-1}([a, b])$ ne contenant pas de point critique de f et $V = M \setminus K$. Soit $\{\varphi_U, \varphi_V\}$ une partition de l'unité de classe C^∞ subordonnée au recouvrement ouvert $\{U, V\}$ de M (voir la proposition 4.17). La fonction $\varphi_U \frac{1}{\|\nabla f\|^2}$, qui est bien définie sur U car U ne contient pas de point critique de f , s'étend de manière C^∞ sur M , en demandant qu'elle prenne la valeur 0 sur $M \setminus U$. Alors l'application $\rho = \varphi_U \frac{1}{\|\nabla f\|^2}$ convient, car $\varphi_U = 1 - \varphi_V$ vaut 1 sur K .

la $(n-1)$ -ème strate, en notant que ces recollements ne sont pas forcément injectifs sur les bords des boules. Dans le cas des CW-complexe fini, on part d'un ensemble fini discret de points, sur lequel on recolle un nombre fini d'intervalles, sur lesquels on recolle un nombre fini de disques, et on itère un nombre fini de fois.



Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier. Nous appellerons *cellule* de dimension k toute variété topologique à bord ¹¹⁸ e , qui est homéomorphe à la boule unité fermée $\mathbb{B}_k$ (avec $\mathbb{B}_0 = \{0\}$). Notons que son bord ∂e est alors homéomorphe à la sphère $\partial \mathbb{B}_k = \mathbb{S}_{k-1}$ (avec $\mathbb{S}_{-1} = \emptyset$), et son intérieur $\overset{\circ}{e}$ à la boule unité ouverte $\overset{\circ}{\mathbb{B}}_k$ (avec $\overset{\circ}{\mathbb{B}}_0 = \{0\}$).

Nous renvoyons vers l'exemple (5) d'espace topologique quotient dans la partie A.2.6 de l'appendice A pour la définition et les propriétés de base des recollements $X' \cup_{f'} Y'$ d'un espace topologique X' sur un espace topologique Y' par une application continue $f' : A' \rightarrow Y'$ où A' est une partie de X' . Nous dirons qu'un espace topologique Y est obtenu par *recollement de cellules* de dimension k sur un espace topologique X s'il existe une famille $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ où e_α est une cellule de dimension k munie d'une application continue ¹¹⁹ $g_\alpha : \partial e_\alpha \rightarrow X$, appelée l'*application d'attachement* de e_α , telle qu'il existe un homéomorphisme

$$\left(\left(\coprod_{\alpha \in A} e_\alpha \right) \cup_{(\coprod_{\alpha \in A} g_\alpha)} X \right) \rightarrow Y.$$

de l'espace topologique recollement sur X des cellules e_α par les applications g_α , à valeurs dans Y . Rappelons (voir la partie A.2.5 de l'appendice A) que l'ensemble somme disjointe $\coprod_{\alpha \in A} e_\alpha$ est muni de la topologie somme disjointe. La donnée d'une telle famille et d'un tel homéomorphisme s'appelle une *décomposition cellulaire* de Y relative à X .

La restriction de cet homéomorphisme à X est un homéomorphisme sur son image dans Y , car $\coprod_{\alpha \in A} \partial e_\alpha$ est un fermé dans $\coprod_{\alpha \in A} e_\alpha$. De même, la restriction de cet homéomorphisme à toute cellule ouverte $\overset{\circ}{e}_\alpha$ est un homéomorphisme sur son image dans Y , car les applications d'attachement ne recollent que les bords ∂e_α des cellules e_α sur X , donc tout ouvert de $\overset{\circ}{e}_\alpha$ est un ouvert de l'espace topologique somme disjointe $(\coprod_{\alpha \in A} e_\alpha) \amalg X$, qui est saturé pour la relation d'équivalence définissant l'espace recollement $(\coprod_{\alpha \in A} e_\alpha) \cup_{(\coprod_{\alpha \in A} g_\alpha)} X$. De plus, les images dans Y des cellules ouvertes $\overset{\circ}{e}_\alpha$ sont deux à deux disjointes pour $\alpha \in A$, et si $k \geq 1$, les composantes connexes de Y privé de l'image de X est exactement la réunion (disjointe) des images des cellules ouvertes $\overset{\circ}{e}_\alpha$ pour $\alpha \in A$.

Nous identifierons dans la suite X et $\overset{\circ}{e}_\alpha$ avec leur image dans Y par cette restriction. Les cellules ouvertes $\overset{\circ}{e}_\alpha$ pour $\alpha \in A$ sont alors les composantes connexes de $Y \setminus X$.

¹¹⁸. Il découle du théorème d'invariance du domaine 4.1 que le bord d'une variété topologique à bord de dimension p (définie comme étant localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}_+^p$) est bien défini. Dans les applications ci-dessous, les cellules seront des sous-variétés au moins de classe C^1 , auquel cas la notion de bord est bien définie comme vu dans la partie 5.2.

¹¹⁹. Nous ne demandons pas que l'application g_α soit injective.

Notons que si $k = 0$, alors Y est juste l'espace topologique somme disjointe de X et de l'ensemble des indices A muni de la topologie discrète. En particulier, si X est localement contractile, alors Y l'est aussi.

Si $k \geq 1$ et si X est localement contractile, comme les cellules ouvertes e_α° sont contractiles et puisque Y privé d'un point dans chaque cellule ouverte e_α° pour $\alpha \in A$ se rétracte par déformation forte sur X (via la rétraction radiale vers le bord de $\mathbb{B}_k \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{S}_{k-1}$), alors Y est aussi localement contractile.

Un *CW-complexe fini*¹²⁰ de dimension N est un espace topologique X , appelé *l'espace topologique sous-jacent*, muni d'une famille $(X^{(n)})_{0 \leq n \leq N}$ de sous-espaces, appelée la *structure de CW-complexe sur l'espace topologique sous-jacent*, telle que $X = \bigcup_{n=1}^N X^{(n)}$ et telle que, en utilisant la convention que $X^{(-1)} = \emptyset$, pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, le sous-espace $X^{(n)}$ soit obtenu par recollement d'un nombre fini de cellules de dimension n sur $X^{(n-1)}$, avec au moins une cellule si $n = N$. Le sous-espace topologique $X^{(n)}$ est appelé le *n -squelette* de cette structure de CW-complexe (avec la convention qu'il est égal à X si $n > N$). Si $n \leq N$, muni de la famille $(X^{(k)})_{0 \leq k \leq n}$, le *n -squelette* $X^{(n)}$ est un CW-complexe fini de dimension n .

Remarquons que les cellules ouvertes s'envoient par un homéomorphisme sur leur image dans X , et que, par passage à la limite des sphères $S(0, r)$ dans $\mathbb{B}_n$ quand $r \rightarrow 1$, la donnée de la famille $(X^{(n)})_{0 \leq n \leq N}$ détermine de manière unique les applications d'attachement du bord des k -cellules sur le $(k-1)$ -squelette pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

Les 0-cellules d'un CW-complexe fini sont aussi appelées ses *sommets*, et les 1-cellules d'un CW-complexe fini sont aussi appelées ses *arêtes*.

Remarquons qu'un CW-complexe fini est localement contractile, car son 0-squelette l'est et par récurrence sur ses squelettes. En particulier, un CW-complexe fini connexe est connexe par arcs, et admet un revêtement universel (voir la partie 2.12).

Un *morphisme* de CW-complexes d'un CW-complexe fini X dans un CW-complexe fini Y est une application continue de X dans Y qui, pour tout $n \in \mathbb{N}$, envoie le n -squelette $X^{(n)}$ de X dans le n -squelette $Y^{(n)}$ de Y . Un *isomorphisme* de CW-complexes d'un CW-complexe fini X dans un CW-complexe fini Y est un morphisme de CW-complexes bijectif dont l'inverse est un morphisme de CW-complexes.

La *caractéristique d'Euler* d'un CW-complexe fini X , ayant c_n cellules ouvertes de dimension n pour tout $n \in \mathbb{N}$, est

$$\chi(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n c_n.$$

Cette somme est finie, égale à $\sum_{n=0}^N (-1)^n c_n$ si X est de dimension N . Notons que c_n est égal au nombre de composantes connexes de $X^{(n)} \setminus X^{(n+1)}$. La caractéristique d'Euler est un invariant d'isomorphisme de CW-complexes, mais c'est aussi un invariant topologique et homotopique, comme le montre le résultat suivant (que nous admettrons, car sa démonstration, utilisant de l'homologie cellulaire et son invariance homotopique, nécessite de trop longs développements, voir par exemple [Pau3]).

120. La première lettre C de la terminologie vient du mot « cell ». Nous ne définirons pas dans ces notes la notion générale de CW-complexe, voir par exemple [Pau3], qui explique la seconde lettre W, initiale de « weak »).

Théorème 6.17. *Si les espaces topologiques sous-jacentes à deux CW-complexes finis X et Y ont le même type d'homotopie (et en particulier s'ils sont homéomorphes), alors $\chi(X) = \chi(Y)$.* $\square$

Si un espace topologique X a le même type d'homotopie qu'un CW-complexes fini X' , nous définissons alors la *caractéristique d'Euler* de X comme

$$\chi(X) = \chi(X') ,$$

ce qui ne dépend pas du choix de X' par le théorème précédent. Mais cette définition n'est pas toujours optimale lorsque X n'est pas compact. On prendra bien garde que recoller une cellule C de dimension k sur X par une application continue de ∂C dans X n'a peut-être pas toujours l'effet escompté d'ajouter $(-1)^k$ à la caractéristique d'Euler de X .

Exemples. (1) Les CW-complexes finis de dimension 0 sont les ensembles finis discrets.

(2) Un cercle admet une infinité de structures de CW-complexe fini de dimension 1 à isomorphisme près. Il est par exemple obtenu (à homéomorphisme près) par le recollement d'une cellule de dimension 1 sur un singleton (pour l'unique application d'attachement possible). Donc sa caractéristique d'Euler est $1 - 1 = 0$:

$$\chi(\mathbb{S}_1) = 0 .$$

Le cercle est aussi (voir le dessin ci-dessous) le recollement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, de $k + 1$ cellules de dimension 1 sur un ensemble discret de $k + 1$ cellules de dimension 0 (de manière appropriée, en recollant de manière cyclique l'origine de la i -ème 1-cellule sur la i -ème 0-cellule et l'extrémité de la i -ème 1-cellule sur la $(i + 1)$ -ème 0-cellule, avec i modulo $k + 1$).

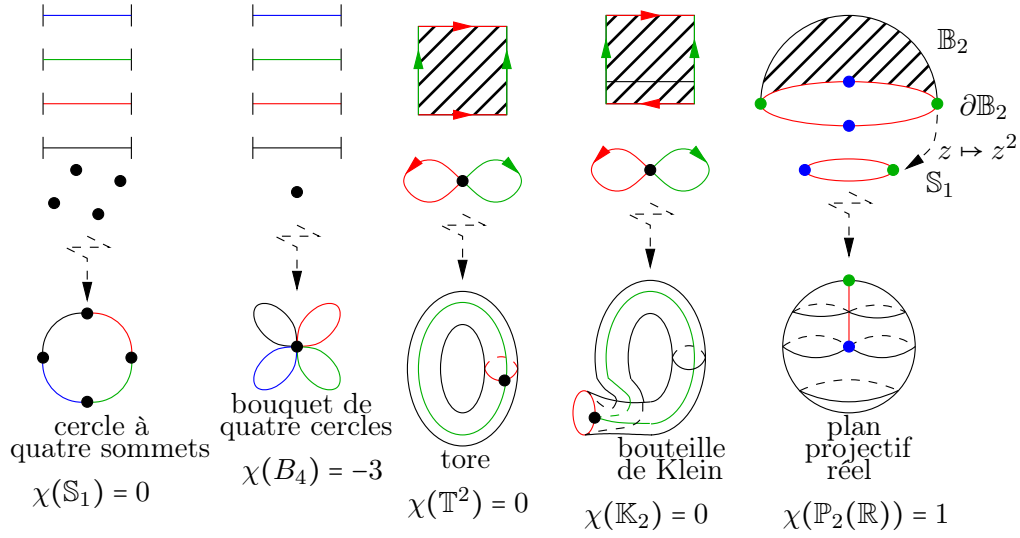
(3) Pour tout $n \geq 2$, un bouquet de n cercles B_n admet (voir le dessin ci-dessous) une structure naturelle de CW-complexe fini de dimension 1, obtenu par recollement de n cellules de dimension 1 sur un singleton, par les (uniques) applications d'attachement constantes (qui envoient les deux points du bord de chaque 1-cellule sur l'unique 0-cellule). Donc sa caractéristique d'Euler est :

$$\chi(B_n) = 1 - n . \tag{26}$$

Plus généralement, un graphe topologique (voir la partie 2.8) X *fini*, c'est-à-dire ayant un nombre fini S de sommets et un nombre fini A d'arêtes, est un CW-complexe fini de dimension au plus 1, dont les 0 cellules sont les sommets du graphe et les 1-cellules sont les arêtes du graphe. Donc sa caractéristique d'Euler est :

$$\chi(S) = S - A .$$

En particulier, un graphe topologique fini connexe, qui a le même type d'homotopie qu'un bouquet de cercle, est un arbre si et seulement s'il est contractile, donc si et seulement si sa caractéristique d'Euler est égale à 1. Le 1-squelette $X^{(1)}$ d'un CW-complexe est un graphe topologique fini.



(4) Le tore $\mathbb{T}^2$ (respectivement la bouteille de Klein $\mathbb{K}^2$) admet une structure de CW-complexe fini de dimension 2, de 0-squelette réduit à un point x_0 , de 1-squelette le bouquet de deux cercles $\mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_1$, avec recollement d'une unique cellule de dimension 2, le carré unité $[0, 1]^2$, avec application d'attachement donnée par

$$g : \begin{cases} (1, t) \in \{1\} \times [0, 1] \mapsto e^{2i\pi t} \in \{x_0\} \vee \mathbb{S}_1 \\ (t, 1) \in [0, 1] \times \{1\} \mapsto e^{2i\pi t} \in \mathbb{S}_1 \vee \{x_0\} \\ (0, t) \in \{0\} \times [0, 1] \mapsto e^{2i\pi t} \in \{x_0\} \vee \mathbb{S}_1 \\ (t, 0) \in [0, 1] \times \{0\} \mapsto e^{2i\pi t} \in \mathbb{S}_1 \vee \{x_0\} \end{cases} \quad (\text{resp. } e^{-2i\pi t} \in \mathbb{S}_1 \vee \{x_0\}).$$

Ils sont donc tous les deux de caractéristique d'Euler nulle :

$$\chi(\mathbb{T}^2) = 0 \quad \text{et} \quad \chi(\mathbb{K}^2) = 0.$$

En particulier, il existe des CW-complexes finis non homéomorphes (et même qui n'ont pas le même type d'homotopie, comme le tore et la bouteille de Klein, dont les groupes fondamentaux sont respectivement abélien et non abélien, donc non isomorphes) ayant la même caractéristique d'Euler.

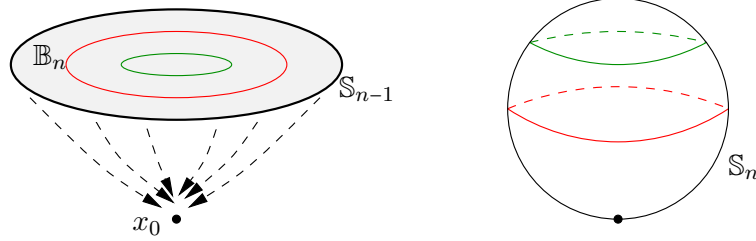
Le plan projectif réel $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \{\pm 1\} \backslash \mathbb{S}_2$ admet une structure de CW-complexe fini de dimension 2, de 0-squelette réduit à un point x_0 , de 1-squelette un cercle $\mathbb{S}_1$, avec recollement d'une unique cellule de dimension 2, le disque $\mathbb{B}_2$ (vu comme l'hémisphère Nord de la sphère $\mathbb{S}_2$), par l'application d'attachement $g : \partial \mathbb{B}_2 = \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ définie par $z \mapsto z^2$ (voir par exemple l'exercice [E.A.121](#) de l'appendice [A](#)). La caractéristique d'Euler de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est donc

$$\chi(\mathbb{P}_2(\mathbb{R})) = 1.$$

Plus généralement, le 2-complexe de Cayley X d'une présentation finie de groupe $\langle S, R \rangle$ admet, par construction (voir la démonstration de la proposition [3.6](#)), une structure de CW-complexe fini de dimension 2 (si R est non vide), de 0-squelette réduit à un point x_0 , de 1-squelette le bouquet de $|S|$ cercles (où $|S|$ est le cardinal de S), avec recollement d'une cellule de dimension 2 pour chaque élément $r \in R$, par l'application d'attachement g_r décrite dans ladite démonstration. Nous avons donc

$$\chi(X) = 1 - |S| + |R|.$$

(5) La sphère $\mathbb{S}_n$ admet une structure de CW-complexe ayant en tout et pour tout une cellule x_0 de dimension 0 et une cellule e de dimension n (dont l'application d'attachement est l'unique application (constante!) $\partial e \rightarrow \{x_0\}$).

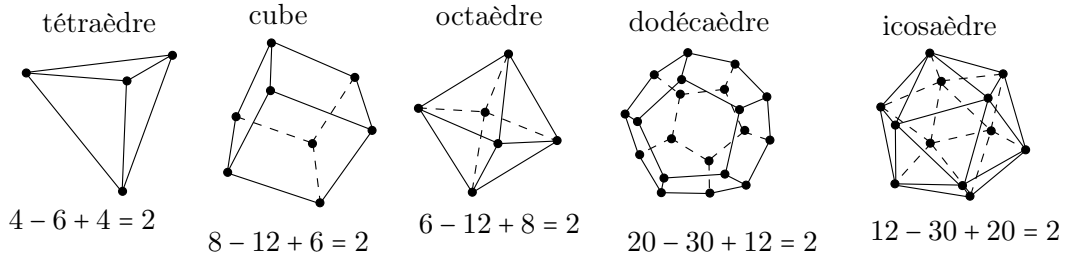


Donc sa caractéristique d'Euler est

$$\chi(\mathbb{S}_n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Le cas de la dimension impaire est un cas particulier d'un résultat général (voir la proposition 6.20).

(6) Si P est un polyèdre compact convexe de $\mathbb{R}^3$ (intersection compacte d'un nombre fini de demi-espaces fermés) d'intérieur $\overset{\circ}{P}$ non vide, ayant S sommets, A arêtes et F faces, alors la frontière $\partial P = P - \overset{\circ}{P}$ de P admet une structure de CW-complexe ayant S cellules de dimension 0, A cellules de dimension 1 et F cellules de dimension 2.



Comme ∂P est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_2$ (par exemple par rétraction radiale sur la sphère de rayon $\epsilon > 0$ assez petit centrée en son barycentre), une conséquence du théorème 6.17 et du calcul précédent $\chi(\mathbb{S}_2) = 2$ est la formule célèbre

$$S - A + F = 2.$$

(7) Le théorème 6.17 permet de définir la *caractéristique d'Euler* d'un espace topologique X ayant le même type d'homotopie qu'un CW-complexe fini Y (mais par exemple pas forcément compact) en posant

$$\chi(X) = \chi(Y),$$

ce qui ne dépend pas du choix de Y par le théorème susdit.

En particulier, si X est un espace contractile (comme $\mathbb{R}^m$, ou un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^m$) alors $\chi(X) = 1$. L'espace $\mathbb{R}^2$ privé d'un nombre fini n de points, qui se rétracte par déformation forte sur un bouquet de n cercles (voir l'exercice E.9), a donc pour caractéristique d'Euler $1 - n$ par l'exemple (2) ci-dessus.

Exercice E.77. Soient Y un CW-complexe fini et $p : X \rightarrow Y$ un revêtement fini à n feuillets de l'espace topologique sous-jacent à Y . Montrer que X admet une structure de CW-complexe fini, et que

$$\chi(X) = n \chi(Y).$$

Proposition 6.18. Soient $(X, (X^{(n)})_{0 \leq n \leq N})$ un CW-complexe fini connexe et x un point base de X appartenant à $X^{(0)}$. L'inclusion $X^{(1)} \rightarrow X$ induit un morphisme de groupes surjectif $\pi_1(X^{(1)}, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$, et l'inclusion $X^{(2)} \rightarrow X$ induit un isomorphisme de groupes $\pi_1(X^{(2)}, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$.

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, la rétraction radiale vers le bord de la boule épointée $\mathbb{B}_n \setminus \{0\}$ sur son bord $\mathbb{S}_{n-1}$ montre que le n -squelette $X^{(n)}$ de X , privé d'un point dans chaque cellule ouverte de dimension n , se rétracte par déformation forte sur le $(n-1)$ -squelette $X^{(n-1)}$ de X . Si $n \geq 2$, tout lacet dans un CW-complexe fini de dimension n est homotope à un lacet dont l'image évite un point dans chaque cellule ouverte de dimension n , donc à un lacet dans le $(n-1)$ -squelette. Par récurrence descendante, ceci montre que tout lacet de X est homotope à un lacet contenu dans $X^{(1)}$, ce qui montre la première affirmation.

De même, si $n \geq 3$, toute homotopie h entre deux lacets contenus dans le $(n-1)$ -squelette d'un CW-complexe fini de dimension n est homotope à une homotopie de ces lacets dont l'image évite un point dans chaque cellule ouverte de dimension n . Donc par rétraction h est homotope à une homotopie de lacets dans le $(n-1)$ -squelette. Par récurrence descendante, ceci montre que si un lacet contenu dans le 1-squelette d'un CW-complexe fini de dimension n est homotope au lacet trivial, alors il est homotope au lacet trivial par une homotopie à valeurs dans le 2-squelette. Ceci montre l'injectivité de l'application $\pi_1(X^{(2)}, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$, qui est surjective par la première affirmation. $\square$

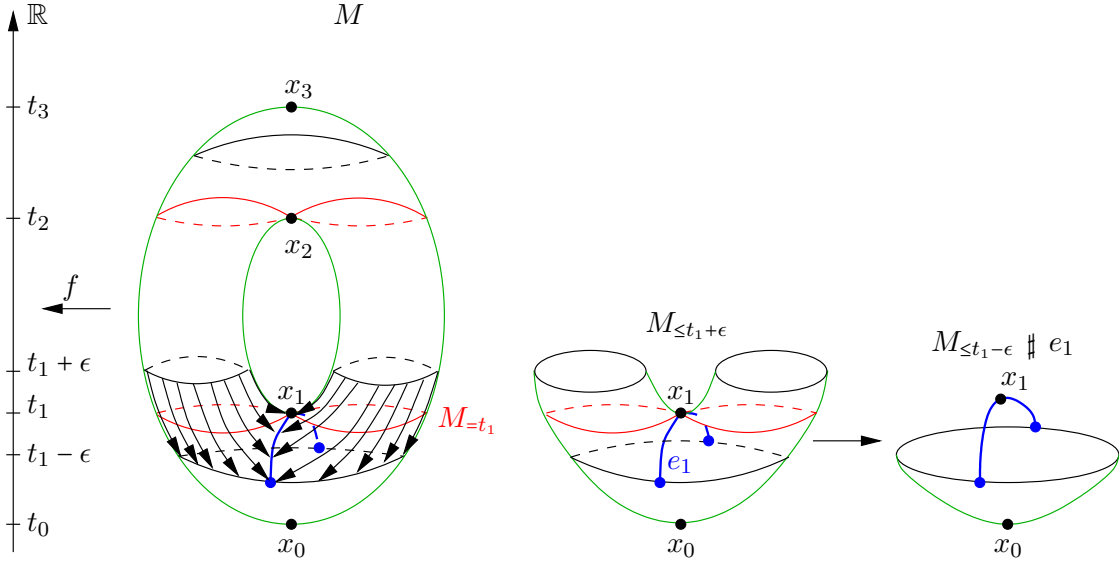
6.6 Décomposition en anses des variétés différentielles

Revenons maintenant à l'étude du changement homotopique des sous-niveaux lors de passages de niveaux critiques. Nous reprenons les notations du début de la partie 6.4.

Théorème 6.19. Soit $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que $r \geq 4$. Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ deux valeurs régulières d'une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r , telle que $f^{-1}([a, b])$ soit compact et contienne un et un seul point critique de f , d'indice noté k . Alors il existe une cellule e_k de dimension k contenue dans $f^{-1}([a, b])$, rencontrant $M_{=a}$ en son bord, et telle que $M_{\leq b}$ se rétracte par déformation forte sur $M_{\leq a} \cup e_k$.

En particulier, le sous-niveau $M_{\leq b}$ possède le même type d'homotopie qu'un recollement sur le sous-niveau $M_{\leq a}$ d'une cellule de dimension k , avec application d'attachement un homéomorphisme sur son image.

Voici une illustration de ce théorème dans le cas du tore vertical $\mathbb{T}^2$ muni de la fonction de Morse lisse définie au début du chapitre 6, où le passage du niveau critique en $t = t_1$ se traduit, à équivalence d'homotopie près, par le recollement d'une cellule e_1 de dimension 1 sur un sous-niveau juste en dessous.



Démonstration. Notons z le point critique de f dans $f^{-1}([a, b])$ et $c = f(z) \in]a, b[$ la valeur critique correspondante. Nous pouvons supposer que $c = 0$, quitte à remplacer f par $f - c$. En particulier $a < 0$ et $b > 0$.

Soit (W, φ) un paramétrage local de M de classe C^{r-2} au voisinage de z , tel que $\varphi(0) = z$, vérifiant le lemme de Morse 6.1, c'est-à-dire tel que, pour $(x_1, \dots, x_p)$ proche de 0 dans W , puisque k est l'indice de z , nous avons

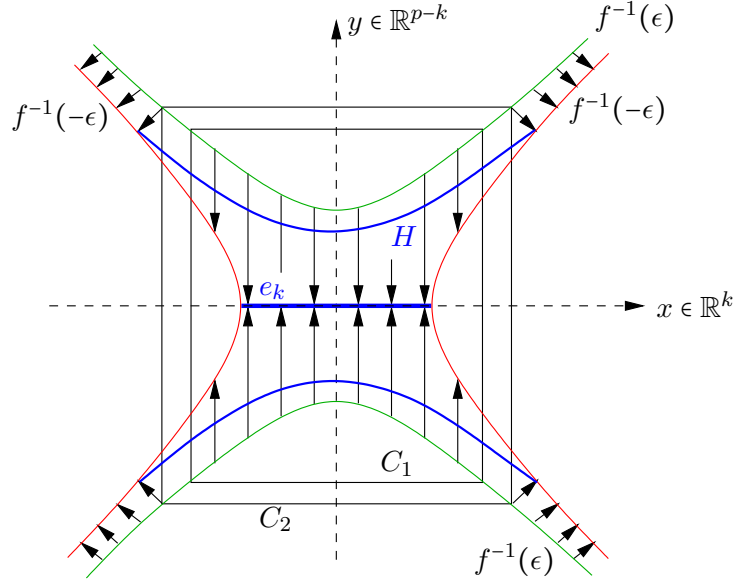
$$f \circ \varphi(x_1, \dots, x_p) = - \sum_{i=1}^k (x_i)^2 + \sum_{i=k+1}^p (x_i)^2.$$

L'absence de terme constant vient du fait que $f(z) = 0$. Pour tous les $s > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, notons $B_n(s)$ (respectivement $\mathring{B}_n(s)$) la boule fermée (respectivement ouverte) de centre 0 et de rayon s dans l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa norme euclidienne usuelle.

Par restriction, nous pouvons supposer que $W = \mathring{B}_k(\delta) \times \mathring{B}_{p-k}(\delta)$ où $\delta \in]0, 1]$ est assez petit pour que $\varphi(W) \subset f^{-1}(]a/2, b/2[)$. Identifions $\mathbb{R}^p$ avec le sous-espace des p premières coordonnées de l'espace euclidien standard $\mathbb{R}^m$ contenant M . Par changements de coordonnées de classe C^{r-2} (qui fait que la sous-variété M est maintenant seulement de classe C^{r-2} , la fonction f est de classe C^{r-2} et son gradient ∇f de classe C^{r-3}), nous pouvons supposer que $W \subset M$ et que $\varphi = \text{id}_W$ (en particulier que $z = 0$), de sorte que, pour tous les $x \in \mathring{B}_k(\delta)$ et $y \in \mathring{B}_{p-k}(\delta)$, nous avons

$$f(x, y) = -\|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Soient $\epsilon = \delta^2/100$ et $e_k = B_k(\sqrt{\epsilon}) \times \{0\}$, qui est une cellule de dimension k , contenue dans W donc dans $f^{-1}(]a/2, b/2[)$.



Notons $C_1 = B_k(\sqrt{2\epsilon}) \times B_{p-k}(\sqrt{3\epsilon})$ et $C_2 = B_k(\sqrt{3\epsilon}) \times B_{p-k}(\sqrt{4\epsilon})$, qui sont tous les deux contenus dans W , avec C_1 contenu dans l'intérieur de C_2 . Notons que les « coins » de C_1 et C_2 , c'est-à-dire leurs couples (x, y) de points de norme maximale (par exemple $\|x\| = \sqrt{2\epsilon}$ et $\|y\| = \sqrt{3\epsilon}$ pour C_1) appartiennent à $f^{-1}(\epsilon) = \{(x, y) \in W : -\|x\|^2 + \|y\|^2 = \epsilon\}$.

Notons que le gradient de f en $(x, y) \in W$ vaut $\nabla f(x, y) = (-2x, 2y)$. En utilisant le fait que $r - 3 \geq 1$, considérons un champ de vecteurs X de classe C^{r-3} sur M , qui est

- nul hors de $f^{-1}(]a, b[)$ (donc le champ de vecteurs X , nul en dehors du compact $f^{-1}([a, b])$, est complet),
- égal à l'opposé $-\nabla f$ du gradient de f sur $f^{-1}([-\epsilon, +\epsilon]) \setminus C_2$, et interpolant de manière lisse sur $f^{-1}([a, b]) \setminus (f^{-1}([-\epsilon, +\epsilon]) \cup C_2)$,
- valant $(0, -2y)$ sur C_1 , qui est un champ de vecteur vertical, ne s'annulant que sur $C_1 \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$.
- interpolant par $(x, y) \mapsto 2(\rho(x, y)x, -y)$ sur $C_2 \setminus C_1$ avec $\rho : W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse à valeurs dans $[0, 1]$, valant 0 dans C_1 et 1 hors de C_2 .

Le temps 2ϵ du flot $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de X est un C^{r-3} -difféomorphisme de M , qui envoie $M_{\leq \epsilon}$ sur $M_{\leq -\epsilon} \cup H$ où H (appelée une *anse de rang k*) est contenu dans $f^{-1}([-\epsilon, \epsilon])$, est homéomorphe à $\mathbb{B}_k \times \mathbb{B}_{p-k}$ par un homéomorphisme tel que H rencontre $M_{\leq -\epsilon}$ en exactement l'image de $\partial \mathbb{B}_k \times \mathbb{B}_{p-k}$ par cet homéomorphisme. De plus, $M_{\leq -\epsilon} \cup H$ se rétracte par déformation forte sur $M_{\leq -\epsilon} \cup e_k$ verticalement (voir le dessin ci-dessus).

En utilisant le fait que $M_{\leq -\epsilon}$ se rétracte par déformation forte sur $M_{\leq a}$ et que $M_{\leq b}$ se rétracte par déformation forte sur $M_{\leq \epsilon}$ par le théorème 6.15, le résultat en découle. $\square$

Remarque. En itérant le théorème 6.19, il est possible de montrer que toute variété lisse compacte M de dimension p , munie d'une fonction de Morse lisse f , ayant $\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_k(f)$ points critiques d'indice k pour k compris entre 0 et p (qui sont les deux indices extrémaux par la remarque 6.3), a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe fini de dimension p , ayant $\mathbf{p}_k$ cellules de dimension k , voir par exemple [Mil2, §I.3], [Hir, §6.4]. Par la définition de la caractéristique d'Euler d'un espace topologique ayant le même type d'homotopie qu'un

CW-complexe fini, et par son invariance par équivalence d'homotopie, nous avons donc

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \mathfrak{p}_k .$$

Proposition 6.20. *Si M est une variété compacte lisse (à bord vide) de dimension impaire, alors*

$$\chi(M) = 0 .$$

Démonstration. Notons p la dimension de M et f une fonction de Morse sur M (qui existe par le corollaire 6.10). Remarquons que la fonction $-f$ est aussi une fonction de Morse lisse sur M , ayant les mêmes points critiques que f , et que, puisqu'en tout point critique de f la forme hessienne de $-f$ est l'opposée de la forme hessienne de f (ou par le lemme de Morse 6.1) et par la définition de l'indice, un point $x \in M$ est un point critique d'indice k de f si et seulement si x est un point critique d'indice $p - k$ de $-f$.

Donc $\mathfrak{p}_k(f) = \mathfrak{p}_{p-k}(-f)$ pour $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$. Par conséquent, en utilisant le fait que la caractéristique d'Euler de M est indépendante de la fonction de Morse choisie pour la calculer (voir le théorème 6.17), nous avons

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \mathfrak{p}_k(f) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \mathfrak{p}_{p-k}(-f) = (-1)^p \sum_{k=0}^p (-1)^k \mathfrak{p}_k(-f) \\ &= (-1)^p \chi(M) . \end{aligned}$$

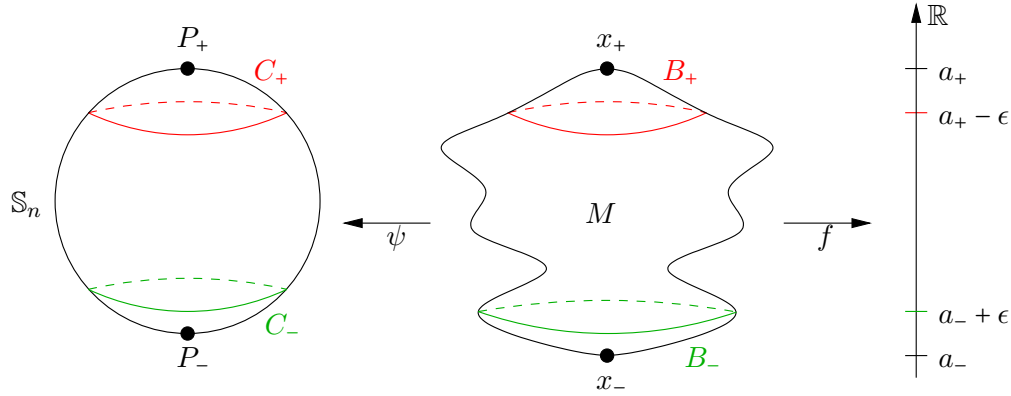
Puisque p est impair, le résultat en découle. $\square$

Nous terminons cette partie en donnant un résultat permettant de caractériser topologiquement les sphères à partir des fonctions de Morse, que nous utiliserons dans la classification des surfaces dans le chapitre 7.

Théorème 6.21. (Théorème de reconnaissance des sphères) *Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et M une sous-variété lisse compacte de dimension n admettant une fonction de Morse f de classe C^∞ ayant exactement deux points critiques. Alors M est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_n$.*

Attention, ce théorème ne dit pas qu'il est possible de trouver un C^∞ -difféomorphisme entre M et $\mathbb{S}_n$. En fait, cet argument a été utilisé par Milnor pour construire des structures de variétés différentielles distinctes sur la variété topologique $\mathbb{S}_7$.

Démonstration. Par compacité, l'application continue f admet un minimum et un maximum dans M , qui sont nécessairement des points critiques et qui sont distincts, car f n'est pas constante (sinon tous les points de M seraient critiques). Nous pouvons donc noter x_- et x_+ les points critiques distincts de f , tels que x_- soit le minimum de f et x_+ le maximum de f , et $a_\pm = f(x_\pm)$. Par le lemme de Morse 6.1, la fonction f est de la forme $x_1^2 + \dots + x_n^2 + a_-$ (respectivement $-x_1^2 - \dots - x_n^2 + a_+$) dans un paramétrage local lisse au voisinage de x_- (respectivement x_+). Donc si ϵ est assez petit, les images réciproques $B_- = f^{-1}([a_-, a_- + \epsilon])$ et $B_+ = f^{-1}([a_+ - \epsilon, a_+])$ sont des boules fermées $\mathbb{B}_n$ plongées dans M , de bord C^∞ -difféomorphes à la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$. Par le théorème 6.15, l'image réciproque $f^{-1}([a_- + \epsilon, a_+ - \epsilon])$ est C^∞ -difféomorphe au cylindre $\mathbb{S}_{n-1} \times [0, 1]$.



Tout homéomorphisme h de la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$ dans elle-même s'étend radialement en un homéomorphisme $\tilde{h}$ de la boule $\mathbb{B}_n$ dans elle-même, défini par

$$\tilde{h}: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \|x\| h\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc un C^∞ -difféomorphisme ψ de $f^{-1}([a_- + \epsilon, a_+ - \epsilon])$ dans $\mathbb{S}_n - (C_- \cup C_+)$, où $C_\pm$ est une calotte polaire ouverte centrée au pôle $P_\pm = (0, \dots, 0, \pm 1)$ de $\mathbb{S}_n$, s'étend en un homéomorphisme ψ de M dans $\mathbb{S}_n$. $\square$

6.7 Autres exercices

Exercice E.78. Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour chacune des applications f ci-dessous, montrer que f est une fonction de Morse, trouver ses points critiques et leurs indices :

- (1) pour tout $r > 1$, l'application $f: (\mathbb{S}_1)^m \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \mapsto \prod_{i=1}^m (r + \cos \theta_i) ;$$

- (2) l'application $f: \mathbb{S}_m \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto x_0 ;$$

- (3) pour tous les $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ tels que $a_0 < a_1 < \dots < a_m$, l'application $f: \mathbb{P}_m(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie en coordonnées homogènes par

$$[x_0 : \dots : x_m] \mapsto \frac{a_0 x_0^2 + \dots + a_m x_m^2}{x_0^2 + \dots + x_m^2} .$$

Exercice E.79. Soient M et N deux variétés lisses compactes, et soient $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: N \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de Morse. Pour tous les $a, b > 0$, considérons l'application $F_{a,b}: M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(x, y) \mapsto (a + f(x))(b + g(y)) .$$

Montrer que si a et b sont suffisamment grands, alors la fonction $F_{a,b}$ est une fonction de Morse. Trouver alors ses points critiques et leurs indices (en fonction des mêmes données pour f et g).

Exercice E.80. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- (1) Montrer qu'il existe un champ de vecteurs lisse ne s'annulant pas sur le tore de révolution $\mathbb{T}^2 = \{(2 + \cos \varphi) \cos \theta, (2 + \cos \varphi) \sin \theta, \sin \varphi) : \theta, \varphi \in \mathbb{R}\}$ dans $\mathbb{R}^3$. Le but de cet exercice est d'étudier le comportement local des champs de vecteurs au voisinage de leurs zéros isolés.
- (2) Soient U un ouvert de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$ et X un champ de vecteurs lisse sur U . Soit x un zéro isolé de X . Définissons l'indice de X en x

$$\text{Ind}(X, x) = \deg \left(v \mapsto \frac{X(x + \epsilon v)}{\|X(x + \epsilon v)\|} \right)$$

comme le degré de l'application de $\mathbb{S}_{n-1} \rightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ définie par $v \mapsto \frac{X(x + \epsilon v)}{\|X(x + \epsilon v)\|}$ pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit. Montrer que l'indice est bien défini et ne dépend pas de ϵ si ϵ est suffisamment petit.

- (3) Soient M une sous-variété lisse, Y un champ de vecteurs lisse sur M , $y \in M$ un zéro isolé de Y , et $\varphi : U \rightarrow M$ un paramétrage local lisse par un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ d'un voisinage ouvert $\varphi(U)$ de y dans M . Définissons (voir la partie 6.3.1) le *champ de vecteurs image réciproque* de Y sur U par φ comme le champ de vecteurs $\varphi^*Y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sur U défini par

$$\varphi^*Y : x \mapsto (T_x \varphi)^{-1}(Y(\varphi(x))) .$$

Définissons l'indice de Y en y comme l'indice du champ de vecteurs φ^*Y de U en $\varphi^{-1}(y)$. Montrer que cette définition ne dépend pas du choix du paramétrage local φ .

- (4) Montrer que les applications suivantes de la sphère $\mathbb{S}_2$ dans $\mathbb{R}^3$ sont des champs de vecteurs lisses sur $\mathbb{S}_2$, dessiner leurs courbes intégrales, trouver leurs zéros isolés et calculer leur indice en ces points :

$$X : (x, y, z) \mapsto (-y, x, 0), \quad Y : (x, y, z) \mapsto (xz, yz, z^2 - 1),$$

$$Z : (x, y, z) \mapsto (1 - z - x^2, -xy, x(1 - z)) .$$

On pourra utiliser la projection stéréographique de pôle Nord pour étudier le champ de vecteurs Z .

- (5) Pour tout $n \geq 1$, dessiner les courbes intégrales du champ de vecteurs $\nabla(\text{Re}(z^n))$ sur $\mathbb{C}$. Quel est l'indice de ce champ de vecteurs en 0 si $n \geq 2$?

Exercice E.81. Soient $n \geq 1$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $Y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux champs de vecteurs lisses sur U . Notons ϕ^X et ϕ^Y des flots locaux de X et Y respectivement (par exemple ceux maximaux). Pour tout $x \in U$, pour tout t assez proche de 0, notons

$$f(t) = \phi_t^X \circ \phi_t^Y \circ \phi_{-t}^X \circ \phi_{-t}^Y(x) \quad \text{et} \quad [X, Y](x) = \frac{1}{2} f''(0) .$$

- (1) Pour tout $y \in U$, donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de l'application $g : t \mapsto \phi_t^X(y)$.
- (2) Calculer $f''(0)$ et montrer que

$$[X, Y](x) = d_x X(Y(x)) - d_x Y(X(x)) .$$

- (3) Montrer que l'application de $\Gamma(TU) \times \Gamma(TU)$ dans $\Gamma(TU)$ définie par $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ est bilinéaire, antisymétrique et vérifie l'identité de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Le champ de vecteurs lisse $[X, Y]$ s'appelle le *crochet de Lie* des champs de vecteurs lisses X et Y .

Exercice E.82. Notons Heis_3 , et appelons *groupe de Heisenberg*, le sous-groupe du groupe linéaire réel $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures unipotentes, défini par

$$\text{Heis}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pour tout $g \in \text{Heis}_3$, notons $L_g : \text{Heis}_3 \rightarrow \text{Heis}_3$ l'application définie par la multiplication à gauche $h \mapsto gh$ par la matrice g .

- (1) Montrer que Heis_3 est une sous-variété de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que L_g est un C^∞ -difféomorphisme de Heis_3 pour tout $g \in \text{Heis}_3$. Expliciter L_g .

- (2) Considérons les éléments $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de l'espace tangent $T_{I_3} \text{Heis}_3$ en l'élément neutre I_3 de Heis_3 . Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, l'application $E_i : g \mapsto T_{I_3} L_g(e_i)$ est un champ de vecteurs lisse sur Heis_3 , et expliciter E_i .

- (3) Calculer les flots locaux maximaux des champs de vecteurs E_1, E_2, E_3 .
 (4) Calculer les crochets de Lie (voir l'exercice E.81) $[E_1, E_3]$, $[E_2, E_3]$ et $[E_1, E_2]$.

Exercice E.83.

- (1) Soit G un groupe discret agissant par C^∞ -difféomorphismes, librement et proprement sur une sous-variété différentielle lisse M . Notons $\pi : M \rightarrow G \backslash M$ la projection canonique sur la variété quotient $G \backslash M$ (voir la proposition 4.16). Un champ de vecteurs lisse X sur M est G -invariant si $g^* X = X$ pour tout $g \in G$ (ou, de manière équivalente si $X(gx) = T_x g(X(x))$ pour tous les $g \in G$ et $x \in M$). Montrer que tout champ de vecteurs G -invariant lisse X sur M est l'image réciproque par π d'un champ de vecteurs lisse Y sur la variété quotient $G \backslash M$. Exprimer le flot local maximal de Y en fonction du flot local maximal de X .
- (2) Soit X un champ de vecteurs lisse sur $\mathbb{R}^2$ qui est $\mathbb{Z}^2$ -périodique c'est-à-dire tel que $X(x + k) = X(k)$ pour tous les $x \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que X est l'image réciproque par la projection canonique $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ d'un champ de vecteurs lisse Y sur le tore $\mathbb{T}^2$. Montrer que X et Y sont complets.
- (3) Supposons maintenant que X soit un champ de vecteurs constant sur $\mathbb{R}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le flot ϕ^Y de Y soit périodique, c'est-à-dire tel qu'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\phi_{t+n}^Y = \phi_t^Y$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice E.84. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme de l'espace euclidien orienté usuel $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit M une hypersurface lisse compacte connexe orientée

de $\mathbb{R}^{n+1}$. Notons $\nu M = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^{n+1} : v \perp T_x M\}$, qui muni de la projection canonique $(x, v) \mapsto x$ de νM sur M est appelé le *fibré normal* de M . Pour tout $x \in M$, notons $N(x)$ l'unique élément de $\mathbb{S}_n$ tel que si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base orthonormée directe de $T_x M$ alors $(v_1, \dots, v_n, N(x))$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^{n+1}$.

- (1) Montrer que le fibré normal νM de M est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$, et calculer sa dimension. Montrer que l'application $N : M \rightarrow \mathbb{S}_n$ définie par $x \mapsto N(x)$ est de classe C^∞ .
- (2) Pour tous les $v \in \mathbb{S}_n$ et $x \in M$, notons $X_v(x)$ la projection orthogonale de v sur $T_x M$. Montrer que X_v est un champ de vecteurs de classe C^∞ sur M .
- (3) Considérons la fonction $f_v : M \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \|x - v\|^2$. Montrer que x est un point critique de f_v si et seulement si (x, v) est un point critique de l'application $e : \nu M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $(y, w) \mapsto y + w$. Montrer qu'il existe un ouvert Ω de $\mathbb{S}_n$ de mesure pleine tel que pour tout $v \in \Omega$, la fonction $f_v : x \in M \mapsto \|x - v\|^2$ soit une fonction de Morse. En déduire un résultat similaire pour la fonction $x \mapsto \langle x, v \rangle$.
- (4) En déduire qu'il existe un ensemble de mesure pleine Ω' dans $\mathbb{S}_n$ tel que pour tout $v \in \Omega'$, les zéros du champ de vecteurs X_v soient isolés.
- (5) Notons $i : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ l'application antipodale $x \mapsto -x$. Exprimer le degré de $i \circ N : M \rightarrow \mathbb{S}_n$ en fonction de celui de N et en déduire que si n est pair, alors pour tout $v \in \Omega'$, nous avons

$$\deg N = \frac{1}{2} \sum_{x \in M : X_v(x)=0} \text{Ind}(X_v, x)$$

où l'indice $\text{Ind}(X_v, x)$ est défini dans l'exercice [E.80](#) (3).

Exercice E.85. Soient $d \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $X = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) : x^d + y^d = z^d\}$, appelée la *courbe (projective) de Fermat* de degré d , et $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ l'application définie par $[x : y : z] \mapsto [x : y]$.

- (1) Montrer que X est une sous-variété lisse compacte de dimension 2 de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.
- (2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, l'application $[x : y : z] \mapsto [x : y : ze^{2i\pi k/d}]$ est un C^∞ -difféomorphisme de X .
- (3) Notons $F = \{[x : y : z] \in X : z = 0\}$. Montrer que π est un C^∞ -difféomorphisme local en tout point de $X \setminus F$.
- (4) Montrer que $\pi|_{X \setminus F}$ est un revêtement galoisien lisse, et calculer son groupe des automorphismes de revêtement.
- (5) Montrer que la surface réelle X est connexe et orientable.
- (6) Montrer que la sphère $\mathbb{S}_2$ privée de d points se rétracte par déformation forte sur un CW-complexe fini de dimension 1 et donner sa caractéristique d'Euler.
- (7) Montrer que si une surface lisse S compacte connexe privée de d points se rétracte par déformation forte sur un CW-complexe fini de dimension 1 et de caractéristique d'Euler N , alors S a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe fini de caractéristique d'Euler $N + d$.
- (8) En utilisant l'exercice [E.77](#), calculer la caractéristique d'Euler de X .

6.8 Indications pour la résolution des exercices

Correction de l'exercice E.75. (1) Un point $(x, y) \in W$ est un point critique de g si et seulement si ¹²¹ $\nabla f(x, y) = -(a, b)$. La matrice hessienne de f en un point $z \in W$ est la matrice jacobienne en z du gradient de f , par sa définition dans la formule (15) :

$$\text{Hess}_z f = J(\nabla f)_z.$$

Le point critique (x, y) est donc non dégénéré si et seulement si $-(a, b)$ est une valeur régulière de $\nabla f : W \rightarrow \mathbb{R}^2$. Le résultat découle alors du théorème de Sard 5.3.

(2) Notons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^2$. L'application f est de Morse si et seulement si pour tout point $z \in V'$, si $\nabla f(z) = 0$, alors $\text{Hess}_z f \neq 0$. Donc f est de Morse si et seulement si

$$\forall z \in V', \quad (\det \text{Hess}_z f)^2 + \|\nabla f(z)\|^2 > 0.$$

Le résultat découle du fait que cette condition sur f est ouverte pour la topologie C^∞ , en utilisant la convergence uniforme des fonctions et de ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 sur un voisinage compact de $\overline{V}$.

(3) Ceci se montre comme le théorème de Whitney (voir le théorème 4.18). Par la compacité de S , soit $(U_i, \varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ un atlas fini de cartes lisses de S à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Soit $(\theta_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition de l'unité lisse subordonnée au recouvrement ouvert $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ de S , où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application θ_i est constante sur un voisinage ouvert V'_i dans U_i de l'adhérence d'un ouvert V_i relativement compact dans U_i tel que la famille $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ recouvre encore S . Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, nous notons encore $\theta_i \varphi_i : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'extension par 0 en dehors de U_i de l'application produit $\theta_i|_{U_i} \varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$. Elle est de classe C^∞ . Posons $N = 3n$. Montrons que l'application ψ de M dans $(\mathbb{R}^2)^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^N$ définie par

$$x \mapsto (\theta_1(x)\varphi_1(x), \dots, \theta_n(x)\varphi_n(x), \theta_1(x), \dots, \theta_n(x))$$

convient. C'est un C^∞ -plongement par la démonstration du théorème de Whitney 4.18. De plus, notons c_i la valeur commune des $\theta_i(x)$ pour $x \in V'_i$. Alors le couple des $(2i-1)$ -ème et $(2i)$ -ème composantes de ce plongement est, en restriction à V'_i , égal à c_i fois le couple des deux composantes de φ_i , donc est un C^∞ -difféomorphisme de V'_i dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(4) L'application f_1 de S dans $\mathbb{R}$ définie par $x = (x_1, \dots, x_N) \mapsto x_1$ est en restriction à V'_1 la composition du difféomorphisme $x = (x_1, \dots, x_N) \mapsto (x_1, x_2)$ avec la projection linéaire de $\mathbb{R}^2$ sur son premier facteur, donc est une submersion par composition. D'où $(f_1)|_{V'_1}$ est de Morse (car sans point critique).

Par la question (2), si $\epsilon > 0$ est assez petit, alors pour tous les $a_3, a_4 \in [-\epsilon, +\epsilon]$, l'application lisse f_2 de S dans $\mathbb{R}$ définie par $x = (x_1, \dots, x_N) \mapsto f_1(x) + a_3 x_3 + a_4 x_4$ est en restriction à un voisinage ouvert de $\overline{V}_1$ dans V'_1 encore une application de Morse.

Soit $\psi_2 : V'_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application $x = (x_1, \dots, x_N) \mapsto (x_3, x_4)$ donnée par la question (3) avec $i = 2$. Alors $f_1 \circ \psi_2^{-1} : \psi_2(V'_2) \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ . Donc par la question (1), pour

121. Rappelons que le *gradient* d'une application $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ est l'application $\nabla h = (\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n})$ de V dans $\mathbb{R}^n$, qui est donc un champ de vecteurs de classe C^{r-1} sur V . En notant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, l'application ∇h est uniquement déterminée par la propriété $\langle \nabla h(x), X \rangle = d_x h(X)$ pour tous les $x \in V$ et $X \in \mathbb{R}^n$. Voir la proposition 6.16 pour une généralisation aux sous-variétés.

presque tout $a_3, a_4 \in [-\epsilon, +\epsilon]$, l'application $g : (x_3, x_4) \mapsto f_1 \circ \psi_2^{-1}(x_3, x_4) + a_3 x_3 + a_4 x_4$ est une fonction de Morse sur $\psi_2(V_2')$. Puisque ψ_2 est un C^∞ -difféomorphisme sur son image, nous en déduisons donc que $f_2 = g \circ \psi_2 : V_2' \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi une fonction de Morse.

(5) Soit $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$. Supposons qu'il existe une application lisse $f_k : S \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit de Morse sur un voisinage de l'adhérence de V_i dans U_i pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, comme le montre la question (4) pour $k = 2$. De la même manière, il existe $a_{2k-1}, a_{2k} \in \mathbb{R}$ telle que l'application $f_{k+1} : S \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f_k(x) + a_{2k-1}x_{2k-1} + a_{2k}x_{2k}$ reste de Morse sur un voisinage de l'adhérence de V_i dans U_i pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, et soit aussi de Morse sur un voisinage de l'adhérence de V_{k+1} dans U_{k+1} . Ainsi par récurrence, nous construisons une application $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ qui est de Morse sur un voisinage de l'adhérence de V_i dans U_i pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement de S , l'application f_n est donc une fonction de Morse sur S .

Correction de l'exercice E.76. Notons Ω^Y le domaine de définition du flot local maximal ϕ^Y de Y . Notons $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M : (t, \psi(x)) \in \Omega^Y\}$, qui est un ouvert de $\mathbb{R} \times M$ contenant $\{0\} \times M$. L'application $\phi : (t, x) \mapsto \phi_t(x) = \psi^{-1} \circ \phi_t^Y \circ \psi(x)$ est définie sur Ω et à valeurs dans M . Elle vérifie $\phi_0(x) = x$ pour tout $x \in M$. Par le théorème de dérivation des fonctions composées, pour tout $(s, x) \in \Omega$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=s} \phi_t(x) &= T_{\phi_s^Y \circ \psi(x)}(\psi^{-1}) \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=s} \phi_t^Y(\psi(x)) \right) \\ &= (T_{\psi^{-1} \circ \phi_s^Y \circ \psi(x)} \psi)^{-1} \left(Y(\psi(\psi^{-1} \circ \phi_s^Y \circ \psi(x))) \right) = X(\phi_s(x)). \end{aligned}$$

Donc ϕ est un flot local de X . La maximalité de ϕ (et donc le fait que $\phi = \phi^X$) découle de celle de ϕ^Y par l'absurde, car si $\tilde{\phi}$ était une extension stricte de ϕ , alors de la même manière, $(t, y) \mapsto \psi \circ \tilde{\phi}_t \circ \psi^{-1}(y)$ serait un flot local de Y étendant strictement ϕ^Y .

Correction de l'exercice E.77. Notons N la dimension de M , $(Y^{(k)})_{0 \leq k \leq N}$ la suite des squelettes de Y , et c_k le nombre de cellules de dimension k de Y , de sorte que nous ayons $\chi(Y) = \sum_{k=0}^N (-1)^k c_k$.

Posons $X^{(0)} = p^{-1}(Y^{(0)})$, qui, puisque p est un revêtement à n feuillets, est une partie fini discrète de X de cardinal $n c_0$. Soit $k \geq 1$. Notons $X^{(k)} = p^{-1}(Y^{(k)})$. Notons $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ la famille des k -cellules de Y . Pour tout $\alpha \in A$, notons $y_\alpha \in Y$ un point fixé de l'intérieur $\overset{\circ}{e}_\alpha$ de e_α , et $x_{\alpha,1}, \dots, x_{\alpha,n} \in X$ ses n préimages par le revêtement à n feuillets p . Puisque la boule $\mathbb{B}_k$ est simplement connexe (car contractile), pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application canonique $e_\alpha \rightarrow Y^{(k)}$ se relève par le théorème du relèvement 2.27 en une unique application continue $f_{\alpha,i} : e_\alpha \rightarrow X^{(k)}$ envoyant y_α sur $x_{\alpha,i}$, dont nous notons $g_{\alpha,i} : \partial e_\alpha \rightarrow X^{(k-1)}$ la restriction au bord. Puisqu'un revêtement d'un espace simplement connexe par un espace connexe est un homéomorphisme, la restriction de p à chaque $f_{\alpha,i}(\overset{\circ}{e}_\alpha)$ est un homéomorphisme sur son image. La restriction de $f_{\alpha,i}$ à $\overset{\circ}{e}_\alpha$ est donc un homéomorphisme sur son image, et les images $f_{\alpha,i}(\overset{\circ}{e}_\alpha)$ pour $\alpha \in A$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont deux à deux disjointes. Donc $X^{(k)}$ est obtenu par rattachement sur $X^{(k-1)}$ de $n c_k$ cellules de dimension k , avec applications d'attachement les $g_{\alpha,i}$ pour $\alpha \in A$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Donc $(X, (X^{(k)})_{0 \leq k \leq N})$ est un CW-complexe, de caractéristique d'Euler

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^N (-1)^k (n c_k) = n \chi(Y).$$

Correction de l'exercice E.78. (1) L'application h de $\mathbb{R}^m$ dans $(\mathbb{S}_1)^m$ définie par

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \mapsto h(\theta) = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_m})$$

est un C^∞ -difféomorphisme local (qui fournit par restriction un paramétrage local au voisinage de chaque point de $(\mathbb{S}_1)^m$). Donc $h(\theta)$ est un point critique de f si et seulement si θ est un point critique de $f \circ h$, puisque

$$T_\theta(f \circ h) = T_{h(\theta)}f \circ T_\theta h .$$

De plus, si $h(\theta)$ est un point critique de f , alors $h(\theta)$ est non dégénéré d'indice k pour f si et seulement si θ est non dégénéré d'indice k pour $f \circ h$, puisque

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^m, \quad H_\theta(f \circ h)(X, Y) = H_{h(\theta)}f(T_\theta h(X), T_\theta h(Y))$$

par la formule (14). Soient $g = f \circ h$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$, $X = (X_1, \dots, X_m) \in \mathbb{R}^m$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_m) \in \mathbb{R}^m$. Un calcul immédiat montre que

$$dg_\theta(X) = - \sum_{k=1}^m \sin \theta_k \prod_{j \neq k} (r + \cos \theta_j) X_k .$$

Comme $r > 1$, nous avons $dg_\theta = 0$ si et seulement si $\sin \theta_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Donc θ est un point critique de g si et seulement si $\theta \in (\pi\mathbb{Z})^m$.

Un autre calcul immédiat montre que si $\theta \in (\pi\mathbb{Z})^m$, alors

$$d^2 g_\theta(X, Y) = - \sum_{k=1}^m \cos \theta_k \prod_{j \neq k} (r + \cos \theta_j) X_k Y_k .$$

Puisque $\cos \theta_k \in \{\pm 1\}$, ceci montre que θ est un point critique non dégénéré, et son indice est $\text{Card}\{k \in \llbracket 1, m \rrbracket : \theta_k \in 2\pi\mathbb{Z}\}$. En particulier, g donc f est une fonction de Morse.

(2) Puisque l'application f est la restriction à la sous-variété $\mathbb{S}_m$ d'une forme linéaire, elle est lisse. De plus, son application tangente en $x = (x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{S}_m$ est l'application $T_x f : T_x \mathbb{S}_m \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(X_0, X_1, \dots, X_m) \mapsto X_0$. Cette forme linéaire est nulle si et seulement si l'espace tangent à $\mathbb{S}_m$ en x est l'hyperplan vectoriel d'équation $X_0 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si x est le pôle Nord $N = (1, 0, \dots, 0)$ ou le pôle Sud $N = (-1, 0, \dots, 0)$. Au voisinage de ces pôles, les applications

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (\pm \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_m^2}, x_1, \dots, x_m)$$

(définies sur un voisinage ouvert assez petit de 0 dans $\mathbb{R}^m$) sont des paramétrages locaux lisses. Dans ces coordonnées locales, l'application f est donc simplement l'application

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto \pm \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_m^2} .$$

Sa différentielle seconde a pour matrice $-I_m$ au pôle Nord et I_m au pôle Sud. Donc les indices des points critiques sont

$$\text{Ind}_f(N) = m \quad \text{et} \quad \text{Ind}_f(S) = 0 .$$

En particulier, f est une application de Morse.

(3) L'application h de $\mathbb{S}_m$ dans $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ définie par

$$x = (x_0, \dots, x_m) \mapsto h(x) = [x_0 : \dots : x_m]$$

est un C^∞ -difféomorphisme local (et un revêtement à deux feuillets). Donc comme dans la question (1), si $g : \mathbb{S}_m \rightarrow \mathbb{R}$ est l'application lisse définie par

$$g = f \circ h : x = (x_0, \dots, x_m) \mapsto a_0 x_0^2 + \dots + a_m x_m^2,$$

alors pour tout $x \in \mathbb{S}_m$, le point $h(x) \in \mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ est un point critique de f si et seulement si x est un point critique de g , et si $h(x)$ est un point critique de f , alors $h(x)$ est non dégénéré d'indice k pour f si et seulement si x est non dégénéré d'indice k pour g . Notons que l'application tangente en un point u d'une sous-variété M de $\mathbb{R}^{m+1}$ de la restriction à M d'une application lisse $F : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ est $T_u(F|_M) = (dF_u)|_{T_u M}$. Donc pour tout $x = (x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{S}_m$, l'application tangente

$$T_x g : T_x \mathbb{S}_m = x^\perp = \{(X_0, \dots, X_m) \in \mathbb{R}^{m+1} : x_0 X_0 + \dots + x_m X_m = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

de g en x est

$$(X_0, \dots, X_m) \mapsto 2a_0 x_0 X_0 + \dots + 2a_m x_m X_m.$$

Elle est donc nulle si et seulement si l'équation $2a_0 x_0 X_0 + \dots + 2a_m x_m X_m = 0$ est une équation du plan tangent en x à $\mathbb{S}_m$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$a_0 x_0 = t x_0, \quad a_1 x_1 = t x_1, \quad \dots, \quad a_m x_m = t x_m.$$

Ces égalités impliquent que $t = a_j$ pour tous les $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tels que $x_j \neq 0$, et il existe au moins un tel j . Comme les réels $a_0, \dots, a_m$ sont deux à deux distincts et puisque $x = (x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{S}_m$, ceci implique que les points critiques de g sont exactement les points

$$a_{j,\pm} = (x_0 = 0, \dots, x_{j+1} = 0, x_j = \pm 1, x_{j-1} = 0, \dots, x_m = 0).$$

Au voisinage de $a_{j,\pm}$, l'application

$$(x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, x_{j-1}, \pm \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{j-1}^2 - x_{j+1}^2 - \dots - x_m^2}, x_{j+1}, \dots, x_m)$$

est un paramétrage local de $\mathbb{S}_m$ et l'application g lue dans ce paramétrage local est l'application

$$(x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m) \mapsto (a_0 - a_j)x_0^2 + \dots + (a_{j-1} - a_j)x_{j-1}^2 + (a_{j+1} - a_j)x_{j+1}^2 + \dots + (a_m - a_j)x_m^2.$$

Puisque $a_0 < a_1 < \dots < a_m$, la forme hessienne de cette application (qui est directement sous forme de Morse, voir le lemme 6.1) est non dégénérée de signature $(j, m - j)$. Donc f est une application de Morse, admettant un point critique $h(a_{j,-}) = h(a_{j,+})$ d'indice j pour tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$.

Correction de l'exercice E.79. Puisque les espaces topologiques M et N sont compacts et puisque les applications f et g sont continues, notons $a_0 = \max_{x \in M} |f(x)|$ et

$b_0 = \max_{y \in N} |g(y)|$, qui sont deux nombres réels. Supposons que $a > a_0$ et $b > b_0$. Notons $F = F_{a,b}$ pour simplifier.

L'application tangente de F en $(x, y) \in M \times N$ est l'application $T_{(x,y)}F : T_x M \times T_y N \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(X, Y) \mapsto T_x f(X)(b + g(y)) + (a + f(x))T_y g(Y) .$$

Puisque $b + g(y) \neq 0$ et $a + f(x) \neq 0$, cette forme linéaire est nulle si et seulement si $T_x f = 0$ et $T_y g = 0$, c'est-à-dire si et seulement si x est un point critique de f et y un point critique de g .

Si (x, y) est un point critique de F , alors la forme hessienne de F est ¹²² l'application $H_{(x,y)}F : (T_x M \times T_y N) \times (T_x M \times T_y N) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$((X, Y), (X', Y')) \mapsto H_x f(X, X')(b + g(y)) + (a + f(x))H_y g(Y, Y') .$$

Comme $b + g(y) > 0$ et $a + f(x) > 0$, et puisque les formes hessiennes $H_x f$ et $H_y g$ sont non dégénérées, ceci montre immédiatement que $H_{(x,y)}F$ est non dégénérée. De plus, si (k, k') est la signature de $H_x f$ et (ℓ, ℓ') est la signature de $H_y g$, alors la signature de $H_{(x,y)}F$ est $(k + \ell, k' + \ell')$. Donc

$$\text{Ind}_F(x, y) = \text{Ind}_f(x) + \text{Ind}_g(y) .$$

Notons m et n les dimensions de M et N respectivement. Il était aussi possible d'utiliser deux fois le lemme de Morse 6.1 pour calculer $\text{Ind}_F(x, y)$. Soit $\phi : U \rightarrow M$ un paramétrage local de M en $x = \phi(0)$ tel que

$$f \circ \phi(u) = f(x) - u_1^2 - \cdots - u_k^2 + u_{k+1}^2 + \cdots + u_m^2$$

pour $u = (u_1, \dots, u_m)$ assez proche de 0. Soit $\psi : V \rightarrow N$ un paramétrage local de N en $y = \psi(0)$ tel que

$$g \circ \psi(v_1, \dots, v_n) = g(y) - v_1^2 - \cdots - v_\ell^2 + v_{\ell+1}^2 + \cdots + v_n^2$$

pour $v = (v_1, \dots, v_n)$ assez proche de 0. Alors l'application $\phi \times \psi : U \times V \rightarrow M \times N$ définie par $(u, v) \mapsto (\phi(u), \psi(v))$ est un paramétrage local de $M \times N$ en (x, y) , et si $u = (u_1, \dots, u_m)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$ sont assez proche de 0, alors

$$\begin{aligned} & (F \circ (\phi \times \psi))(u, v) \\ &= (a + f(x) - u_1^2 - \cdots - u_k^2 + u_{k+1}^2 + \cdots + u_m^2)(b + g(y) - v_1^2 - \cdots - v_\ell^2 + v_{\ell+1}^2 + \cdots + v_n^2) . \end{aligned}$$

Comme $b + g(y) > 0$ et $a + f(x) > 0$, ceci remonte par un calcul par bloc que la signature de la forme hessienne de F en (x, y) est $(k + \ell, m + n - k - \ell)$.

Correction de l'exercice E.80. (1) Pour tous les $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, notons $c = c_{\theta, \varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application

$$t \mapsto ((2 + \cos \varphi) \cos(\theta + t), (2 + \cos \varphi) \sin(\theta + t), \sin \varphi) .$$

Cette courbe est lisse. Elle est tracée sur $\mathbb{T}^2$ car $c(t) \in \mathbb{T}^2$ par changement de variable dans la définition de $\mathbb{T}^2$. Son vecteur vitesse au temps $t = 0$, qui est

$$\dot{c}(0) = (-(2 + \cos \varphi) \sin \theta, (2 + \cos \varphi) \cos \theta, 0)$$

122. par un calcul immédiat utilisant que $T_x f = 0$ et $T_y g = 0$

est non nul, car $\sin \theta$ et $\cos \theta$ ne sont pas simultanément nuls. Il appartient (par la définition même des vecteurs tangents) à l'espace tangent $T_{c(0)}\mathbb{T}^2$ de $\mathbb{T}^2$ en $c(0)$, et donc le couple $(c(0), \dot{c}(0))$ appartient à la sous-variété tangente $T\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ de $\mathbb{T}^2$. De plus, le vecteur tangent $\dot{c}(0)$ ne dépend pas du choix de $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ modulo $\mathbb{Z}^2$ comme le montre sa formule. Nous savons (voir l'exercice E.54 (2)) que l'application de $\mathbb{R}^2$ dans le tore de révolution $\mathbb{T}^2$ définie par

$$(\theta, \varphi) \mapsto ((2 + \cos \varphi) \cos \theta, (2 + \cos \varphi) \sin \theta, \sin \varphi)$$

est un C^∞ -difféomorphisme local et un revêtement, qui induit par passage au quotient un C^∞ -difféomorphisme $\phi : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ de la variété quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{T}^2$. L'application lisse de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $(\theta, \varphi) \mapsto (c_{\theta, \varphi}(0), \dot{c}_{\theta, \varphi}(0))$ passe donc au quotient en une application lisse $\psi : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow T\mathbb{T}^2$. Par conséquent, l'application $\psi \circ \phi^{-1} : \mathbb{T}^2 \rightarrow T\mathbb{T}^2$ est un champ de vecteurs lisse sur $\mathbb{T}^2$ qui ne s'annule pas.

(2) Comme x est un zéro isolé du champ de vecteurs X et puisque tout vecteur $v \in \mathbb{S}_{n-1}$ est unitaire, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que le point $x + \epsilon v$ n'est pas un zéro de X si $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$. De plus, l'application $f_\epsilon : v \mapsto \frac{X(x+\epsilon v)}{\|X(x+\epsilon v)\|}$ est lisse, et définie de la sous-variété orientée $\mathbb{S}_{n-1}$ dans elle-même, donc son degré est bien défini.

Si $\epsilon, \epsilon' \in]0, \epsilon_0[$, alors l'application $(t, v) \mapsto f_{t\epsilon + (1-t)\epsilon'}(v)$ de $[0, 1] \times \mathbb{S}_{n-1}$ dans $\mathbb{S}_{n-1}$ est une C^∞ -homotopie entre f_ϵ et $f_{\epsilon'}$. Par l'invariance du degré (voir le théorème 5.14), l'indice de X en x ne dépend pas de $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$.

(3) Par la propriété de contravariance de l'image réciproque des champs de vecteurs (voir la partie 6.3.1), il suffit de montrer que si $f : U' \rightarrow U$ est un C^∞ -difféomorphisme entre deux ouverts U' et U de $\mathbb{R}^n$, si X est un champ de vecteurs lisses sur U ayant un zéro isolé en $x \in U$, alors

$$\text{Ind}(f^*X, f^{-1}(x)) = \text{Ind}(X, x).$$

Notons $X' = f^*X : y \mapsto (df_y)^{-1}(X(f(y)))$ et $x' = f^{-1}(x)$. Remarquons tout d'abord que x' est un zéro isolé de X' . [...]

(4) Rappelons que pour tout $v \in \mathbb{S}_2$, l'espace tangent à $\mathbb{S}_2$ en $v = (x, y, z)$ est l'hyperplan vectoriel

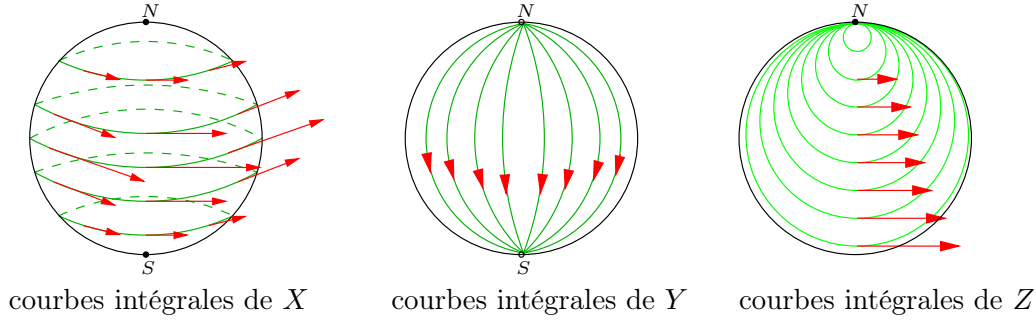
$$v^\perp = \{(A, B, C) \in \mathbb{R}^3 : xA + yB + zC = 0\}$$

orthogonal à v . Un petit calcul immédiat montre alors que les applications X, Y et Z sont des champs de vecteurs sur $\mathbb{S}_2$. Elles sont lisses comme restriction à $\mathbb{S}_2$ d'applications lisses de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Un petit calcul immédiat montre que les zéros de X et Y sont les pôles Nord $N = (0, 0, 1)$ et Sud $S = (0, 0, -1)$, et que le pôle Nord $N = (0, 0, 1)$ est le seul zéro du champ de vecteurs Z . En particulier, les zéros de X, Y et Z sont isolés.

Les courbes intégrales de X sont les applications lisses $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ telles que $(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (-y(t), x(t), 0)$ et passant par un point de $\mathbb{S}_2$. En particulier, l'application z est constante, valant z_0 . En posant $w(t) = x(t) + iy(t)$, nous avons une équation différentielle $\dot{w} = iw$, dont les solutions maximales sont les applications définies sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto e^{it}w_0$ pour $w_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$. Les courbes intégrales maximales de X sont donc les applications définies sur $\mathbb{R}$ par

$$t \mapsto (x_0 \cos t - y_0 \sin t, y_0 \cos t + x_0 \sin t, z_0)$$

pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{S}_2$.



De même les courbes intégrales maximales de Y sont les solutions maximales du système différentiel du premier ordre $(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (x(t)y(t), y(t)z(t), z(t)^2 - 1)$ passant par un point de $\mathbb{S}_2$. L'équation différentielle $\dot{z} = z^2 - 1$ est une *équation de Riccati*. Sa solution maximale valant $z_0 \in [-1, 1]$ au temps $t = 0$ est, par unicité, la solution constante définie sur $\mathbb{R}$ par $z = z_0$ si $z_0 \in \{\pm 1\}$ et la solution définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \tanh(-t + \operatorname{artanh} z_0)$ si $z_0 \in]-1, 1[$. Si $z_0 \neq \pm 1$, la solution maximale de l'équation différentielle $\dot{y} = zy$ valant y_0 au temps $t = 0$ est alors définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto e^{\int_0^t z(s) ds} y_0 = \frac{y_0}{\sqrt{1-z_0^2} \cosh(t - \operatorname{artanh} z_0)}$. De même, la solution maximale de l'équation différentielle $\dot{x} = zx$ valant x_0 au temps $t = 0$ est alors définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \frac{x_0}{\sqrt{1-z_0^2} \cosh(t - \operatorname{artanh} z_0)}$, et nous devons avoir $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{S}_2$.

Les courbes intégrales maximales non constantes de Y restent dans l'intersection avec la sphère $\mathbb{S}_2$ du plan vectoriel d'équation $y_0x - x_0y = 0$, et la coordonnée verticale z est alors décroissante de -1 à 1 quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$. Leurs images sont donc les demi-arcs de cercles ouverts allant du pôle Nord au pôle Sud.

Considérons ¹²³ la projection stéréographique de pôle Nord $p : \mathbb{S}_2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, qui est le C^∞ -difféomorphisme défini par $(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$, d'inverse

$$(a, b) \mapsto \left(\frac{2a}{1+a^2+b^2}, \frac{2b}{1+a^2+b^2}, \frac{a^2+b^2-1}{1+a^2+b^2} \right).$$

L'application tangente de p en $v = (x, y, z)$ est l'isomorphisme linéaire $T_v p$ de $T_v \mathbb{S}_2$ dans $\mathbb{R}^2$ défini par

$$(A, B, C) \mapsto \left(\frac{A}{1-z} + \frac{xC}{(1-z)^2}, \frac{B}{1-z} + \frac{yC}{(1-z)^2} \right).$$

Un petit calcul montre que $T_v p(Z(v)) = (1, 0)$ pour tout $v = (x, y, z) \in \mathbb{S}_2$. Donc Z est le champ de vecteurs image réciproque p^*W du champ de vecteurs constant $W = (1, 0)$ de $\mathbb{R}^2$. La courbe intégrale maximale de Z passant au temps $t = 0$ par v est par l'exercice E.76 l'image réciproque par p de la courbe intégrale de W passant au temps $t = 0$ par $p(v)$. Or celle-ci est la courbe définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto (t + \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$. Donc les courbes intégrales maximales de Z sont les intersections avec $\mathbb{S}_2$ des plans passant par le pôle Nord N et une droite parallèle à l'axe des x contenue dans le plan horizontal d'équation $z = 0$, et paramétrées par

$$t \mapsto \left(\frac{2(t + \frac{x}{1-z})}{1 + (t + \frac{x}{1-z})^2 + (\frac{y}{1-z})^2}, \frac{2(\frac{y}{1-z})}{1 + (t + \frac{x}{1-z})^2 + (\frac{y}{1-z})^2}, \frac{(t + \frac{x}{1-z})^2 + (\frac{y}{1-z})^2 - 1}{1 + (t + \frac{x}{1-z})^2 + (\frac{y}{1-z})^2} \right).$$

123. Voir aussi l'exercice E.A.117 (8) de l'appendice A.

Calculons maintenant les indices. Nous identifions $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ avec $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ par l'application $(x, y, z) \mapsto (w = x + iy, z)$. L'application φ_- du disque ouvert unité $\mathring{\mathbb{B}}_2 = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ dans $\mathbb{S}_2$ définie par $w \mapsto \varphi_-(w) = (w, -\sqrt{1 - |w|^2})$ est un paramétrage local de la sphère $\mathbb{S}_2$ au voisinage de son pôle Sud $S = (0, 0, -1) = \varphi_-(0)$ (voir la définition locale par graphe des sous-variétés du théorème 4.5 (3)). Puisque la différentielle $d(\varphi_-)_w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est de la forme $W \mapsto (W, c_w(W))$ pour c_w une forme linéaire réelle, et puisque $-y + ix = iw$ si $w = x + iy$, nous avons $(\varphi_-)^*X : w \mapsto iw$. Donc l'indice de X en S est le degré de l'application $v \mapsto \frac{i(0+\epsilon v)}{|i(0+\epsilon v)|} = iv$ de $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{S}_1$. Cette application étant un difféomorphisme préservant l'orientation du cercle, son degré est égal à 1 (voir l'exemple (3) de la partie 5.5). La même démonstration en utilisant le paramétrage local $\varphi_+ : w \mapsto (w, \sqrt{1 - |w|^2})$ montre que $\text{Ind}(X, N) = 1$. Notons que

$$\text{Ind}(X, S) + \text{Ind}(X, N) = 2 ,$$

qui est la caractéristique d'Euler de la sphère $\mathbb{S}_2$ (voir la partie 6.5).

Puisque $(zx) + i(zy) = -\sqrt{1 - |w|^2} w$ si $w = x + iy$ et $z = -\sqrt{1 - |w|^2}$, le même paramétrage local φ_- montre que $(\varphi_-)^*Y : w \mapsto -\sqrt{1 - |w|^2} w$. Donc l'indice $\text{Ind}(Y, S)$ est le degré de l'antipodie $v \mapsto -v$ du cercle $\mathbb{S}_1$, qui vaut $(-1)^{1+1} = 1$ (voir l'exemple (5) de la partie 5.5). De même $\text{Ind}(Y, N) = 1$, et nous remarquons que nous avons toujours

$$\text{Ind}(Y, S) + \text{Ind}(Y, N) = 2 ,$$

Enfin, pour tout $v = x + iy \in \mathbb{S}_1$, puisque $1 - \sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{\epsilon^2}{2} + o(\epsilon^2)$ quand $\epsilon \rightarrow 0$, nous avons

$$(\varphi_+)^*Z(0 + \epsilon v) = (1 - \sqrt{1 - \epsilon^2} - \epsilon^2 x^2) + i(-\epsilon^2 xy) = -\frac{\epsilon^2}{2}((x^2 - y^2 + o(1)) + i(2xy)) .$$

Comme $v^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$, l'application $v \mapsto \frac{(\varphi_+)^*Z(\epsilon v)}{|(\varphi_+)^*Z(\epsilon v)|}$ est C^∞ -homotope à l'application $v \mapsto -v^2$. Comme le degré est invariant par C^∞ -homotopie et multiplicatif, puisque le degré de l'antipodie est égal à 1 et le degré de $v \mapsto v^2$ est égal à 2, nous avons donc

$$\text{Ind}(Z, N) = 2 .$$

Encore une fois, la somme des indices des zéros du champ de vecteurs Z à zéros isolés est égal à la caractéristique d'Euler de la sphère $\mathbb{S}_2$.¹²⁴

(5) Pour tout $n \geq 1$, notons $F : z \mapsto \text{Re}(z^n)$. Par convention $z^0 = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Nous avons $\frac{\partial(\text{Re}(x+iy)^n)}{\partial x} = n \text{Re}(x+iy)^{n-1} = n \text{Re}(x-iy)^{n-1}$ et

$$\frac{\partial(\text{Re}(x+iy)^n)}{\partial y} = n \text{Re}(i(x+iy)^{n-1}) = -n \text{Im}(x+iy)^{n-1} = n \text{Im}(x-iy)^{n-1} .$$

Donc $\nabla F : z \mapsto n \bar{z}^{n-1}$. En particulier, si $n = 1$, alors le champ de vecteurs ∇F n'a pas de zéro, son flot local est $(t, z) \mapsto z + t$, et ses courbes intégrales sont les droites affines horizontales paramétrées à vitesse constante 1.

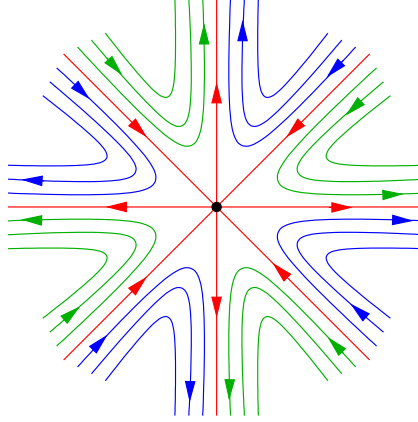
124. Ceci s'explique par le *théorème de l'indice de Poincaré-Hopf* suivant. Soit M une sous-variété lisse compacte. Soit X un champ de vecteurs lisse sur M dont les zéros sont isolés. Alors (voir par exemple [Mil1, §6])

$$\sum_{x \in M : X(x)=0} \text{Ind}(X, x) = \chi(M)$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler de M .

Si $n \geq 2$, alors le champ de vecteurs ∇F a un zéro isolé en 0. Pour tous les $\epsilon > 0$ et $z \in \mathbb{S}_1$, nous avons $\frac{\nabla F(\epsilon z)}{|\nabla F(\epsilon z)|} = \bar{z}^{n-1} = z^{1-n}$. Donc (voir l'exemple (4) de la partie 5.5)

$$\text{Ind}(\nabla F, 0) = \deg(z \mapsto z^{1-n}) = 1 - n .$$



Notons $G : z \mapsto \text{Im}(z^n)$. Une courbe de classe C^1 dans $\mathbb{C}$ définie sur un intervalle I par $t \mapsto z(t)$ est une courbe intégrale du champ de vecteurs ∇F si et seulement si $\dot{z} = n \bar{z}^{n-1}$. En particulier,

$$(G \circ z)' = \text{Im}((z^n)') = n \text{Im}(\dot{z} z^{n-1}) = n^2 \text{Im} |z|^{n-1} = 0 .$$

Donc les courbes intégrales de ∇F dans $\mathbb{C}^\times$ sont contenues dans les composantes connexes des lignes de niveau de la fonction G dans $\mathbb{C}^\times$. Celles-ci (voir la figure ci-dessus avec $n = 4$) sont des sous-variétés de dimension 1, qui sont les rayons d'angles $\frac{k\pi}{n}$ pour $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$ et des plongements propres de $\mathbb{R}$. Ceux-ci sont explicitables en coordonnées polaires par les applications $\theta \mapsto \rho(\theta)e^{i\theta}$ définies sur tout intervalle $] \frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n} [$ pour $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$ par la formule

$$\rho(\theta) = \frac{c}{|\sin(n\theta)|^{1/n}} ,$$

où $c > 0$ est une constante. Comme le seul zéro de ∇F est 0, les images des courbes intégrales maximales de ∇F sont exactement les composantes connexes des lignes de niveau de G .

Correction de l'exercice E.81. (1) Par les propriétés d'un flot local de X , l'application g est définie et lisse sur un intervalle ouvert contenant 0. Donc nous avons

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2}g''(0) + o(t^2) .$$

Or $g(0) = \phi_0^X(y) = y$ par la condition initiale et $g'(t) = \frac{d}{ds}|_{s=t}\phi_s^X(y) = X(\phi_t^X(y))$ par l'équation différentielle autonome associée à X . Donc par le théorème de dérivation des fonctions composées, nous avons

$$g''(0) = d_{\phi_0^X(y)}X\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\phi_t^X(y)\right) = d_yX(X(y)) .$$

Par conséquent, $\phi_t^X(y) = y + tX(y) + \frac{t^2}{2}d_yX(X(y)) + O(t^3)$.

(2) Notons pour simplifier $\phi = \phi^X$ et $\psi = \psi^Y$. En composant les développements limités et en tronquant au fur et à mesure afin de ne conserver que les termes d'ordre inférieur ou égal à 2, nous avons

$$\begin{aligned}\phi_t \circ \psi_t \circ \phi_{-t} \circ \psi_{-t}(x) &= x - tY(x) + \frac{t^2}{2}d_x Y(Y(x)) - tX(x - tY(x)) + \frac{t^2}{2}d_x X(X(x)) \\ &\quad + tY(x - tY(x) - tX(x)) + \frac{t^2}{2}d_x Y(Y(x)) \\ &\quad + tX(x - tX(x)) + \frac{t^2}{2}d_x X(X(x)) + O(t^3) .\end{aligned}$$

En refaisant un développement limité, nous obtenons

$$\phi_t \circ \psi_t \circ \phi_{-t} \circ \psi_{-t}(x) = x + t^2(d_x X(Y(x)) - d_x Y(X(x))) + O(t^3) ,$$

donc $f''(0) = 2(d_x X(Y(x)) - d_x Y(X(x)))$.

(3) L'application $[X, Y]$ est donc l'application définie sur U par

$$[X, Y] : x \mapsto d_x X(Y(x)) - d_x Y(X(x)) . \quad (27)$$

Elle est clairement de classe C^∞ , donc appartient à $\Gamma(TU)$, et aussi clairement bilinéaire et antisymétrique en (X, Y) . La différentielle de $[X, Y]$ est

$$d_x[X, Y] : h \mapsto d_x^2 X(h, Y(x)) + d_x X(d_x Y(h)) - d_x^2 Y(h, X(x)) - d_x Y(d_x X(h)) .$$

Pour tout $Z \in \Gamma(TU)$, la quantité $[X, [Y, Z]](x) + [Y, [Z, X]](x) + [Z, [X, Y]](x)$ est la somme par permutation circulaire des X, Y, Z de la quantité

$$\begin{aligned}d_x X([Y, Z](x)) - d_x [Y, Z](X(x)) &= d_x X(d_x Y(Z(x)) - d_x Z(Y(x))) \\ &\quad - d_x^2 Y(X(x), Z(x)) - d_x Y(d_x Z(X(x))) + d_x^2 Z(X(x), Y(x)) + d_x Z(d_x Y(X(x))) .\end{aligned}$$

Cette somme, en utilisant la linéarité des différentielles et la symétrie des différentielles secondes, est égale à 0.

Correction de l'exercice E.82. (1) La partie Heis_3 est un sous-espace affine de dimension 3 de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc une sous-variété lisse de dimension 3. Pour tout $g \in \text{Heis}_3$, l'application L_g , étant restriction à la sous-variété Heis_3 d'une application lisse (car polynomiale en les coefficients) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, est lisse. Comme elle est bijective d'inverse $L_{g^{-1}}$, c'est un C^∞ -difféomorphisme de Heis_3 .

Si $g = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $h = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$L_g(h) = gh = \begin{pmatrix} 1 & x+a & z+ay+c \\ 0 & 1 & y+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(2) Puisque Heis_3 est un sous-espace affine de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, son espace tangent en tout point est le sous-espace vectoriel associé à cet espace affine. Donc pour tout $g \in \text{Heis}_3$, nous avons

$T_g \text{Heis}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X & Z \\ 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : X, Y, Z \in \mathbb{R} \right\}$. Il est alors immédiat que (e_1, e_2, e_3) est une base de $T_{I_3} \text{Heis}_3$.

Puisque les coefficients de $L_g(h)$ sont affines en x, y, z , un calcul immédiat de dérivée donne que pour tout $g = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Heis}_3$, l'application $T_{I_3} L_g : T_{I_3} \text{Heis}_3 \rightarrow T_g \text{Heis}_3$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & X & Z \\ 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & X & Z + aY \\ 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc en notant a_g le coefficient $(1, 2)$ de g , nous avons

$$E_1 : g \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 : g \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_g \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad E_3 : g \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces applications sont lisses (car restrictions d'applications polynomiales en les coefficients), et $E_i(g) \in T_g \text{Heis}_3$ par construction. Donc E_i est un champ de vecteurs lisse sur Heis_3 .

Remarquons en particulier que E_1 et E_3 sont constants, et que E_2 est la restriction à Heis_3 d'une application linéaire.

(3) Pour tous les $t \in \mathbb{R}$ et $h = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Heis}_3$, posons $\phi_t^{E_1}(h) = \begin{pmatrix} 1 & x+t & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

L'application $(t, h) \mapsto \phi_t^{E_1}(h)$ est définie et lisse sur $\mathbb{R} \times \text{Heis}_3$, et vérifie $\phi_0^{E_1}(h) = h$ et $\frac{d}{dt}|_{t=s}(\phi_t^{E_1}(h)) = e_1 = E_1(\phi_s^{E_1}(h))$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Par unicité, c'est donc le flot local maximal du champ de vecteurs E_1 , qui est complet. De même, le champ de vecteurs E_3

est complet, de flot local maximal $(t, h) \mapsto \phi_t^{E_3}(h) = \begin{pmatrix} 1 & x & z+t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Posons finalement $\phi_t^{E_2}(h) = \begin{pmatrix} 1 & x & z+tx \\ 0 & 1 & y+t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'application $(t, h) \mapsto \phi_t^{E_2}(h)$ est définie

et lisse sur $\mathbb{R} \times \text{Heis}_3$, et vérifie $\phi_0^{E_2}(h) = h$ et $\frac{d}{dt}|_{t=s}(\phi_t^{E_2}(h)) = e_2 + xe_3 = E_2(\phi_s^{E_2}(h))$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. De nouveau par unicité, cette application est donc le flot local maximal du champ de vecteurs E_3 , qui est aussi complet.

(4) Après l'identification de $\mathbb{R}^3$ avec Heis_3 par l'application $(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui

est une carte locale (en fait globale!) de Heis_3 , et par le commentaire de la fin de la correction de la question (2), nous avons $d_g E_1 = 0$, $d_g E_3 = 0$ et

$$d_g E_2 : \begin{pmatrix} 0 & X & Z \\ 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par la formule (27) dans la correction de l'exercice E.81 et pour tout $g \in \text{Heis}_3$, nous avons donc

$$\begin{aligned}[E_1, E_2](g) &= d_g E_1(E_2(g)) - d_g E_2(E_1(g)) = -E_3(g) , \\ [E_1, E_3](g) &= d_g E_1(E_3(g)) - d_g E_3(E_1(g)) = 0 , \\ [E_2, E_3](g) &= d_g E_2(E_3(g)) - d_g E_3(E_2(g)) = 0 .\end{aligned}$$

Correction de l'exercice E.83. (1) Pour tout $y \in G \backslash M$, soit $x \in M$ tel que $\pi(x) = y$ et soit U un voisinage ouvert de x dans M , d'adhérence $\overline{U}$ compacte, tel que pour tout $g \in G \setminus \{e\}$, nous ayons $\overline{U} \cap g\overline{U} = \emptyset$. Outre le fait qu'un tel U existe, nous savons alors (voir le théorème 2.8 et la proposition 4.16) que $\pi(U)$ est un ouvert de $G \backslash M$ et que la restriction $\pi|_U : U \rightarrow \pi(U)$ est un C^∞ -difféomorphisme (car un C^∞ -difféomorphisme local qui est un homéomorphisme sur son image par compacité de $\overline{U}$).

Puisque $y \in \pi(U)$ et puisque $((\pi|_U)^{-1})^* X$ est un champ de vecteurs sur $\pi(U)$, nous pouvons alors poser

$$Y(y) = (((\pi|_U)^{-1})^* X)(y) .$$

Par la définition de l'image réciproque d'un champ de vecteur, cette définition ne dépend pas du choix d'un tel voisinage U de x , et l'application Y est définie et C^∞ sur l'ouvert $\pi(U)$. Montrons qu'elle ne dépend pas non plus du choix de la préimage x de y . En effet, toute autre préimage est de la forme gx pour un élément $g \in G$. Or $\pi \circ g = \pi$ donc $\pi|_{gU} \circ g = \pi|_U$, et gU est un voisinage approprié de gx . Par la propriété de contravariance de l'image réciproque des champs de vecteurs (voir la partie 6.3.1) et par l'invariance de X par G , nous avons donc

$$\begin{aligned}((\pi|_U)^{-1})^* X(y) &= ((\pi|_{gU} \circ g)^{-1})^* X(y) = (g^{-1} \circ (\pi|_{gU})^{-1})^* X(y) \\ &= (\pi|_{gU})^{-1})^* \circ (g^{-1})^* X(y) = (\pi|_{gU})^{-1})^* X(y) .\end{aligned}$$

Ceci montre que $Y(y)$ est indépendant du choix de x .

Notons Ω_X le domaine de définition du flot local maximal $(t, x) \mapsto \phi_t^X(x)$ de X et Ω_Y celui pour Y . Soit $g \in G$. L'application $c : t \mapsto g^{-1} \circ \phi_t^X \circ g(x)$, vérifie sur son domaine de définition $I_{gx} = \{t \in \mathbb{R} : (t, gx) \in \Omega_X\}$ la condition initiale $c(0) = g^{-1} \circ \phi_0^X \circ g(x) = g^{-1} \circ \text{id} \circ g(x) = x$ et l'équation différentielle, pour tout $s \in I_{gx}$,

$$\begin{aligned}\dot{c}(s) &= \frac{d(g^{-1} \circ \phi_t^X \circ g(x))}{dt} \Big|_{t=s} = T_{\phi_s^X \circ g(x)}(g^{-1}) \left(\frac{d\phi_t^X}{dt} \Big|_{t=s}(g(x)) \right) \\ &= (T_{g^{-1} \circ \phi_s^X \circ g(x)})^{-1} (X(g \circ g^{-1} \circ \phi_s^X \circ g(x))) = g^* X(g^{-1} \circ \phi_s \circ g(x)) \\ &= X(g^{-1} \circ \phi_s \circ g(x)) = X(c(s)) .\end{aligned}$$

Donc c est une courbe intégrale du champ de vecteurs X passant au temps $t = 0$ par x . Par la maximalité de ϕ^X , nous avons donc que $I_{gx} \subset I_x$ et c est égale à la restriction de l'application $t \mapsto \phi_t^X(x)$ à l'intervalle I_{gx} . En remplaçant g par g^{-1} , nous avons donc $(t, x) \in \Omega_X$ si et seulement si $(t, gx) \in \Omega_X$, et alors

$$\phi_t^X \circ g(x) = g \circ \phi_t^X(x) .$$

Nous pouvons alors considérer l'application

$$\psi : \Omega' = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times G \backslash M : \exists x \in M, \pi(x) = y \text{ et } (t, x) \in \Omega_X\} \rightarrow G \backslash M$$

définie par $(t, y) \mapsto \psi_t(y) = \pi(\phi_t^X(x))$ pour n'importe quel $x \in M$ tel que $\pi(x) = y$, ce qui est bien défini puisque le flot local de X commute avec l'action de G (transitive sur les fibres de π). Cette application est lisse, car pour tout ouvert U comme au début de la solution de cette question, nous avons $\psi_{\pi(U)} = \pi \circ \phi_t^X \circ (\pi|_U)^{-1}$. Pour tout $y \in G \setminus M$, nous avons $\{t \in \mathbb{R} : (t, y) \in \Omega'\} = I_x$, qui est un intervalle connexe, pour n'importe quel $x \in M$ tel que $\pi(x) = y$, car $I_x = I_{gx}$ pour tout $g \in G$ d'après ce qui précède.

Soient $y \in G \setminus M$ et $x \in M$ tel que $\pi(x) = y$. L'application ψ vérifie la condition initiale $\psi_0(y) = \pi \circ \phi_0^X(x) = \pi(x) = y$ et l'équation différentielle, pour tout $s \in I_x$ tel que $\phi_s^X(x) \in U$,

$$\begin{aligned} \frac{d(\psi_t(y))}{dt} \Big|_{t=s} &= \frac{d(\pi \circ \phi_t^X(x))}{dt} \Big|_{t=s} = T_{\phi_s^X(x)} \pi \left(\frac{d\phi_t^X}{dt} \Big|_{t=s}(x) \right) \\ &= (T_{\pi \circ \phi_s^X(x)} (\pi|_U)^{-1})^{-1} (X((\pi|_U)^{-1} \circ \pi \circ \phi_s^X(x))) = ((\pi|_U)^{-1})^* X(\pi \circ \phi_s^X(x)) \\ &= Y(\pi \circ \phi_s^X(x)) = Y(\psi_s(y)) . \end{aligned}$$

Donc, par la maximalité du flot local maximal ϕ^Y du champ de vecteurs Y , nous avons $\Omega' \subset \Omega_Y$ et l'application ψ est la restriction à Ω' de ϕ^Y . De plus, l'inclusion $\Omega' \subset \Omega_Y$ est en fait une égalité, sinon l'application $\psi : (t, x) \in \mathbb{R} \times M : (t, \pi(x)) \in \Omega_Y \} \rightarrow M$ définie par $(t, x) \mapsto \phi_t^Y(\pi(x))$ contredirait, par une vérification analogue de la condition initiale et de l'équation différentielle autonome associée au champ de vecteurs X , la maximalité du flot local maximal ϕ^X de X .

(2) Comme pour tout $k \in \mathbb{Z}^2$, la différentielle de l'application $g : x \mapsto x + k$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est l'identité, donc a pour différentielle l'identité en tout point, nous avons $g^* X = X$, et le champ de vecteurs X est invariant par l'action du groupe $\mathbb{Z}^2$, qui agit de manière lisse, propre et libre sur $\mathbb{R}^2$ par translations. La première affirmation découle donc de la question (1). Comme $\mathbb{T}^2$ est compact, le champ de vecteurs Y est complet (voir la proposition 6.12 (8)). Par la question (1), le domaine Ω_X du flot local maximal de X est égal à $\{(t, x) \in \mathbb{R} \times M : (t, \pi(x)) \in \Omega_Y\}$, qui vaut $\mathbb{R} \times M$ puisque $\Omega_Y = \mathbb{R} \times G \setminus M$.

(3) Si X est le champ de vecteurs constant (donc $\mathbb{Z}^2$ -périodique) valant (a, b) sur $\mathbb{R}^2$, alors le flot de X est défini sur tout $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ par l'application lisse

$$(t, (x, y)) \mapsto \phi_t^X(x, y) = (at + x, bt + y) ,$$

comme le montre une vérification immédiate de la condition initiale et de l'équation différentielle autonome. Comme vu dans la question (1), le flot de Y est alors

$$(t, (x, y) \bmod \mathbb{Z}^2) \mapsto (at + x, bt + y) \bmod \mathbb{Z}^2 .$$

Si $(a, b) = (0, 0)$, le champ de vecteurs Y est nul, donc son flot est périodique. Sinon, le flot de Y est périodique si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que pour tout $(x, y) \bmod \mathbb{Z}^2 \in \mathbb{T}^2$, nous ayons

$$(a(t + n) + x, b(t + n) + y) = (at + x, bt + y) \bmod \mathbb{Z}^2 ,$$

c'est-à-dire si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $(an, bn) = 0 \bmod \mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire si et seulement si a/b appartient à $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

Correction de l'exercice E.85. (1) Soit $([x_n : y_n : z_n])_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X qui converge vers $[x : y : z] \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Alors par la définition de la topologie quotient de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, il existe

une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}^\times$ telle que $x = \lim \lambda_n x_n$, $y = \lim \lambda_n y_n$ et $z = \lim \lambda_n z_n$ quand $n \rightarrow +\infty$. Donc

$$x^d + y^d - z^d = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n^d (x_n^d + y_n^d - z_n^d) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0.$$

D'où $[x : y : z] \in X$. En tant que fermé de l'espace métrisable compact $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, la courbe de Fermat est compacte.

Soit $[x_0 : y_0 : z_0] \in X$, montrons que X est une sous-variété lisse de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ au voisinage de $[x_0 : y_0 : z_0]$. Si $z_0 \neq 0$, alors l'application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ définie par $(x, y) \mapsto [x : y : 1]$ est un paramétrage local de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ en $[x_0 : y_0 : z_0] = [\frac{x_0}{z_0} : \frac{y_0}{z_0} : 1]$, et l'image réciproque de X par ce paramétrage local est $X' = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^d + y^d = 1\}$.

L'application $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $(x, y) \mapsto x^d + y^d$ est une application lisse (car polynomiale). Montrons que φ est une submersion en tout point (x, y) de X' . Remarquons que $(x, y) \neq 0$ car $0^d + 0^d \neq 1$. La différentielle de φ en (x, y) est l'application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$ définie par $(Z, Z') \mapsto dx^{d-1}Z + dy^{d-1}Z'$ (car la différentielle réelle d'une application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est la multiplication par sa dérivée complexe, et que les deux applications $x \mapsto x^d + y^d$ et $y \mapsto x^d + y^d$ sont holomorphes de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$). Cette différentielle n'est pas la forme linéaire complexe nulle, car $(x, y) \neq 0$ donc $(dx^{d-1}, dy^{d-1}) \neq (0, 0)$, donc est surjective.

Par le théorème des submersions 4.5 2), le sous-espace X' est donc une sous-variété lisse de $\mathbb{C}^2$ de dimension $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2) - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. Par conséquent, X est une sous-variété lisse de dimension 2 de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ au voisinage de $[x_0 : y_0 : z_0]$.

Si $z_0 = 0$, alors $x_0 \neq 0$ car x_0, y_0, z_0 ne sont pas simultanément nuls et $x_0^d + y_0^d = z_0^d$. Donc l'application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ définie par $(x, y) \mapsto [1 : y : z]$ est un paramétrage local de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ en $[x_0 : y_0 : z_0]$, et l'image réciproque de X par ce paramétrage local est $X'' = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^d - z^d = -1\}$. Un raisonnement similaire au précédent montre que X est une sous-variété lisse de dimension 2 de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ au voisinage de $[x_0 : y_0 : z_0]$.

(2) Soit $k \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Il est immédiat que l'application $f_k : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ définie par $[x : y : z] \mapsto [x : y : ze^{2i\pi k/d}]$ préserve X , et est bijective d'inverse f_{-k} . Dans la carte locale $z \neq 0$, c'est l'application $(x, y) \mapsto (xe^{-2i\pi k/d}, ye^{-2i\pi k/d})$, qui est lisse. Dans la carte locale $x \neq 0$, c'est l'application $(y, z) \mapsto (y, ze^{2i\pi k/d})$, qui est lisse. Donc f_k est un C^∞ -difféomorphisme de X .

(3) L'application π est bien définie car si $(x, y) = (0, 0)$ et $x^d + y^d = z^d$, alors $z = 0$. Si $[x : y : z] \in X$ et $z = 0$, alors $x \neq 0$ et $y \neq 0$ et $(\frac{y}{x})^d = -1$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = xe^{i\pi(1+2k)/d}$. Par conséquent

$$F = \{[1 : e^{i\pi(1+2k)/d} : 0] \in X : 0 \leq k \leq d-1\},$$

qui est fini d'ordre d . De plus, $\pi(F) = \{[1 : e^{i\pi(1+2k)/d}] \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) : 0 \leq k \leq d-1\}$ est aussi fini d'ordre d .

Montrons que π est un C^∞ -difféomorphisme local en tout point de $X - F$. L'application $[x : y : z] \mapsto [y : x : z]$ étant un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ qui préserve X , il suffit de montrer que $\pi : X - F \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \pi(F)$ est un C^∞ -difféomorphisme local en tout point $[x_0 : y_0 : z_0] \in X$ tel que $z_0 \neq 0$ et $x_0 \neq 0$. Les applications $(x, y) \mapsto [x : y : 1]$ et $y \mapsto [1 : y]$ sont des paramétrages locaux lisses respectivement de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ et $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ au voisinage de $[x_0 : y_0 : z_0]$ et $[x_0 : y_0]$ respectivement. Il suffit donc de montrer que l'application π lue dans ces paramétrages locaux, que nous noterons f , est un C^∞ -difféomorphisme local. Or f est l'application de $U = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^d + y^d = 1, x \neq 0\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $(x, y) \mapsto \frac{y}{x}$.

L'espace tangent à U en $(x_0, y_0) \in U$ est $\{(X, Y) \in \mathbb{C}^2 : dx_0^{d-1}X + dy_0^{d-1}Y = 0\}$, et donc pour tout (X, Y) dans cet espace tangent, nous avons

$$d_{(x_0, y_0)}f(X, Y) = \frac{1}{x_0}Y - \frac{y_0}{x_0^2}X = \frac{1}{x_0}\left(Y - \frac{y_0}{x_0} \frac{-y_0^{d-1}}{x_0^{d-1}}Y\right) = \frac{1}{x_0^{d+1}}Y.$$

La différentielle $d_{(x_0, y_0)}f$ est donc surjective. Par conséquent, f est une submersion lisse en (x_0, y_0) , et puisque les sous-variétés U et $\mathbb{C}$ sont toutes les deux de dimension 2, f est un C^∞ -difféomorphisme local en (x_0, y_0) .

(4) Pour tout $[x : y : z] \in X - F$, l'image réciproque de $\pi([x : y : z]) = [x : y]$ par π est constituée des d éléments $[x : y : ze^{2i\pi k/d}]$ pour $k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$. Donc l'application $\pi|_{X-F} : X - F \rightarrow \pi(X - F)$ est un homéomorphisme local (par la question (3)) dont toutes les fibres sont de cardinal fini d . Par conséquent $\pi|_{X-F}$ est un revêtement, par la proposition 2.3.

L'application de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ dans le groupe des homéomorphismes de X définie, avec les notations de la correction de la question (2), par $k \mapsto f_k$ est une action continue du groupe fini $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ sur X , qui agit simplement transitivement sur les fibres de $\pi|_{X-F}$. Donc $\pi|_{X-F}$ est un revêtement galoisien de groupe de revêtement $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

(5) Montrons que X est connexe par arcs. Comme une sous-variété est localement connexe par arcs, il suffit de montrer que $X - F$ est connexe par arcs. Comme la base $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \pi(F)$ du revêtement $\pi|_{X-F}$, qui est une sphère privée d'un nombre fini de points, est connexe par arcs, et par la propriété des relèvements des chemins des revêtements, il suffit de montrer que deux points $[0 : 1 : e^{2i\pi k/d}]$ de la fibre de π au-dessus de $[0 : 1]$ sont joints par un chemin. Il suffit par concaténation et par l'action du groupe de revêtement de le faire pour les points $[0 : 1 : 1]$ et $[0 : 1 : e^{2i\pi k}]$.

Notons $\log$ la détermination principale du logarithme complexe sur $\mathbb{C} -]-\infty, 0]$, et remarquons que $\operatorname{Re}(e^{2i\pi t} - 1) = \cos(2\pi t) - 1 > 0$ si $t \in]0, 1[$. Posons $x_t = e^{\frac{1}{d} \log(e^{2i\pi t} - 1)}$ si $t \in]0, 1[$, et $x_0 = x_1 = 0$. Notons que $|x_t| = |x_t^d|^{\frac{1}{d}} = |e^{2i\pi t} - 1|^{\frac{1}{d}}$ tend vers 0 quand $t \in]0, 1[$ tend vers 0 ou 1. Posons $y_t = 1$ et $z_t = e^{2i\pi t/d}$ pour tout $t \in [0, 1]$. Nous avons $x_t^d + y_t^d = z_t^d$ et $z_t \neq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, donc l'application de $[0, 1]$ dans $X - F$ définie par $t \mapsto [x_t, y_t, z_t]$ est un chemin joignant $[0 : 1 : 1]$ à $[0 : 1 : e^{2i\pi k}]$.

Montrons que X est orientable. Il suffit de montrer que $X - F$ est orientable, car les orientations des espaces tangents $T_u X$ quand u converge vers un point u' de F fournissent une orientation localement cohérente de $T_{u'} X$. Comme un revêtement lisse $f : S \rightarrow S'$ d'une surface orientable S' est encore orientable (l'orientation des espaces tangents de S tels que l'isomorphisme linéaire $T_x f : T_x S \rightarrow T_{f(x)} S'$ préserve l'orientation pour tout $x \in S$ est localement cohérente), comme $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \pi(F)$ est une sphère privée d'un nombre fini de points, et que tout ouvert d'une variété orientable l'est encore, $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \pi(F)$ est orientable, donc $X - F$ l'est.

(6) Notons U la sphère $\mathbb{S}_2$ privée de d points. Nous savons que U , comme $\mathbb{R}^2$ privé de $d - 1$ points, se rétracte par déformation forte sur un bouquet de $d - 1$ cercles (voir l'exercice E.9). Donc par l'exemple (3) de la partie 6.5, et par l'invariance par équivalence d'homotopie de la caractéristique d'Euler (voir le théorème 6.17), nous avons

$$\chi(U) = 1 - (d - 1) = 2 - d.$$

(7) Soit S une surface compacte connexe privée de d points qui se rétracte par déformation forte sur un CW-complexe fini S' de dimension 1, dont le nombre de 0-cellules et de 1-cellules est c_0 et c_1 respectivement. Alors S a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe fini obtenu par recollement sur S' de d cellules de dimension 2, donc ayant c_0 , c_1 et $c_2 = d$ cellules de dimension 0, 1 et 2 respectivement. Donc

$$\chi(S) = c_0 - c_1 + c_2 = \chi(S') + c_2 = N + d .$$

(8) Puisque $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est C^∞ -difféomorphe à $\mathbb{S}_2$, la sphère trouée $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \pi(F)$ se rétracte par déformation forte sur un graphe topologique de caractéristique d'Euler $2 - d$ par la question (6). Donc par l'exercice E.77, la surface $X - F$ se rétracte par déformation forte sur un graphe topologique de caractéristique d'Euler $d(2 - d)$. Donc par la question (7), nous avons

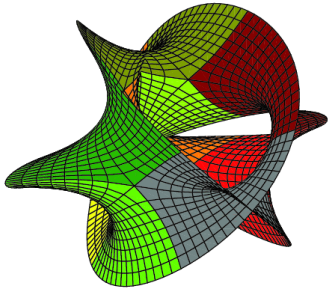
$$\chi(X) = d(2 - d) + d = d(3 - d) .$$

Remarques. (1) En particulier, quand nous aurons vu le théorème 7.12 de classification des surfaces compactes connexes orientables (sans bord) et le calcul de leur caractéristique d'Euler (voir la proposition 7.11), nous obtiendrons que si $d = 2$, alors $\chi(X) = 2$ et X est C^∞ -difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}_2$, et si $d = 3$, alors $\chi(X) = 0$ et X est C^∞ -difféomorphe au tore $\mathbb{T}^2$.

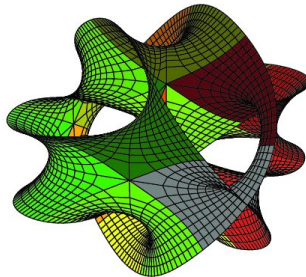
(2) Quand nous aurons défini le genre $g(S)$ d'une surface compacte connexe orientable S dans la partie 7.2 et vu sa relation avec la caractéristique d'Euler de S dans la proposition 7.11, nous aurons que

$$g(X) = \frac{2 - \chi(X)}{2} = \frac{(d - 1)(d - 2)}{2} .$$

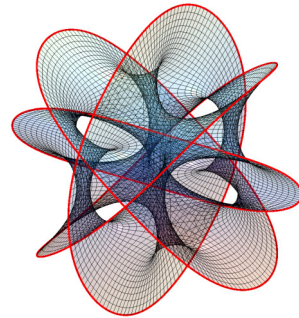
(3) Les deux dessins de gauche ci-dessous respectivement pour $d = 3$ et $d = 4$ sont extraits de A. J. Hanson and J.-P. Sha, *Exploring Visualization Methods for Complex Variables*, dans "Scientific Visualization : Advanced Concepts", H. Hagen ed, pp. 90–109, Dagstuhl Follow-Ups Vol. 1, Dagstuhl Publishing, 2010. Le dessin de droite pour $d = 5$ est extrait de <https://personal.math.ubc.ca/~jbryan/Zoominar-UBC-ETH/> .



Cubique de Fermat



Quartique de Fermat



Quintique de Fermat

7 Topologie des surfaces

Le but de cette partie est de donner une classification à C^∞ -difféomorphisme près des surfaces compactes connexes lisses, en utilisant la théorie de Morse développée dans le chapitre précédent. Je recommande de nouveau la consultation des vidéos de Henri Paul de Saint-Gervais (<http://analysis-situs.math.cnrs.fr/Classification-des-surfaces-triangulees-equipees-de-fermetures-eclair.html>)

<https://www.youtube.com/watch?v=GK-lHk06UTQ> et
https://www.youtube.com/watch?v=MZFBrg_EDi8 .

7.1 Recollements lisses de variétés et sommes connexes

Aussi bien la construction que la classification des surfaces lisses compactes connexes utilise des recollements lisses le long de leur bord de surfaces lisses à bord. Nous commençons cette partie par donner des résultats qui assureront l'invariance (et le bien-fondé) des recollements.

Rappelons (voir l'exemple (5) de topologie quotient dans la partie A.2.6 de l'appendice A) que le recollement d'un espace topologique X sur un espace topologique Y , par une application continue f d'une partie A de X à valeurs dans Y , est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y = (X \amalg Y) / \mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $x \sim f(x)$ pour tout x dans A .

Si M et N sont deux sous-variétés lisses à bord, nous dirons que deux plongements lisses $f, g : M \rightarrow N$ sont C^∞ -isotopes s'il existe une C^∞ -isotopie entre f et g , c'est-à-dire une homotopie $h : M \times [0, 1] \rightarrow N$ entre f et g , de classe ¹²⁵ C^∞ , telle que pour tout $s \in [0, 1]$, l'application $x \mapsto h(x, s)$ soit un plongement lisse de M dans N . Pour des raisons techniques de recollement d'isotopies, nous supposons lorsque c'est nécessaire (voir la démonstration du théorème 5.14 pour l'opération de lissage) qu'il existe $\epsilon \in]0, \frac{1}{3}]$ tel que pour tous les $x \in M$ et $s \in [0, \epsilon]$, nous ayons $h(x, s) = h(x, 0)$ et $h(x, 1 - s) = h(x, 1)$. Nous dirons alors que l'isotopie est *plate au bord*. Comme deux plongements C^∞ -isotopes par une C^∞ -isotopie h sont C^∞ -isotopes par une C^∞ -isotopie plate au bord $\tilde{h}$ (voir la démonstration du théorème 5.14), ceci n'entraîne pas de restriction sur les classes d'équivalence.

Remarquons que la relation « être C^∞ -isotope à » (par une C^∞ -isotopie plate au bord, ce qui facilite la démonstration de la transitivité comme vu dans la démonstration du théorème 5.14) est une relation d'équivalence sur l'ensemble des plongements de M dans N . Ce fait sera utilisé multiples fois, en particulier dans la démonstration du lemme 7.5.

Lemme 7.1.

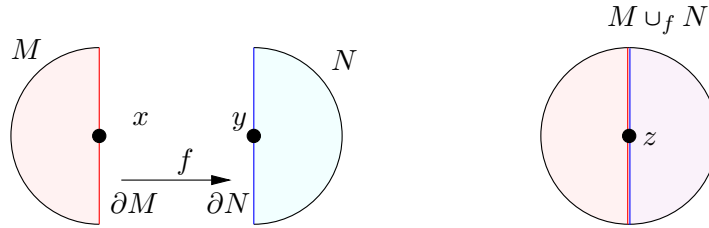
- (1) *Considérons deux variétés lisses à bord M et N de même dimension n , ainsi qu'un C^∞ -difféomorphisme $f : \partial M \rightarrow \partial N$ entre leur bords. Alors il existe une, et une seule à C^∞ -difféomorphisme près, structure de variété lisse sur l'espace topologique recollement $M \cup_f N$ de M et N le long de leur bord par f , qui induise les structures de variétés à bord originelles sur M et N .*

¹²⁵. Comme expliqué avant l'énoncé du théorème 5.14, l'espace $M \times [0, 1]$ est techniquement une sous-variété à coins. Cette régularité signifie que h est la restriction à $[0, 1] \times M$ d'une application de classe C^∞ de $] - \epsilon, 1 + \epsilon[\times M$ dans N , pour un certain $\epsilon > 0$.

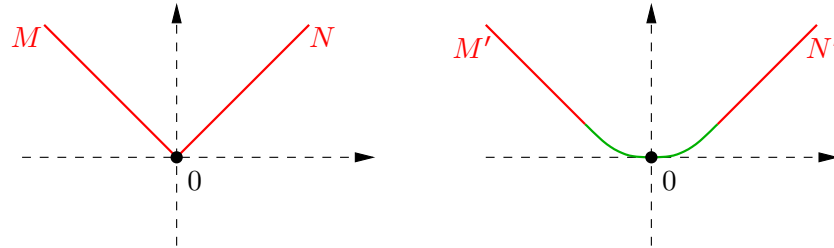
- (2) Si deux C^∞ -difféomorphismes $f, g : \partial M \rightarrow \partial N$ sont C^∞ -isotopes, alors les variétés différentielles lisses $M \cup_f N$ et $M \cup_g N$ ci-dessus définies sont C^∞ -difféomorphes.
- (3) Si $f, g : \partial M \rightarrow \partial N$ sont deux C^∞ -difféomorphismes tels que $f \circ g^{-1} : \partial N \rightarrow \partial N$ s'étende en un C^∞ -difféomorphisme de N , alors les variétés différentielles lisses $M \cup_f N$ et $M \cup_g N$ ci-dessus définies sont C^∞ -difféomorphes.

Les résultats ci-dessus sont valables si nous recollons sur une partie ouverte et fermée du bord. Plus précisément, si $\partial_0 M$ et $\partial_0 N$ sont des réunions de composantes connexes du bord de M et de N respectivement, et si $f, g : \partial_0 M \rightarrow \partial_0 N$ sont des C^∞ -difféomorphismes vérifiant les propriétés demandées dans respectivement les assertions (1), (2), (3) du lemme, alors les espaces topologiques recollements $M \cup_f N$ et $M \cup_g N$ vérifient les propriétés (1), (2), (3) du lemme, mis à part que ce sont maintenant des variétés à bord.

Même si nous partons de deux sous-variétés à bord M et N , l'objet obtenu $M \cup_f N$ est naturellement une variété abstraite, qu'il est alors possible de considérer comme une sous-variété en utilisant le théorème de plongement de Whitney (voir la partie 4.6). L'idée de la démonstration du lemme 7.1 est bien entendu de construire des cartes locales en un point z provenant de l'identification d'un point $x \in \partial M$ avec le point $y = f(x) \in \partial N$ en recollant (de manière lisse) des cartes de variétés à bord de M en x et de N en y . Mais contrairement au cas des recollements juste continus, il est important pour obtenir le caractère lisse de "faire diffuser" le difféomorphisme f de recollement entre les bords dans l'intérieur de N .

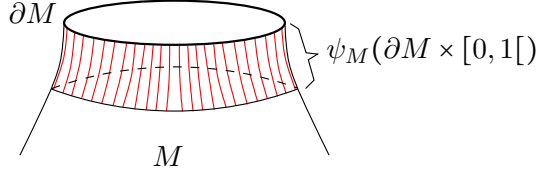


Une manière de visualiser la différence entre un recollement continu et un recollement lisse (et donc la nécessité de « lisser ») est la suivante. Considérons dans $\mathbb{R}^2$ la réunion R des deux demi-droites $M = \{(x, -x) : x \in [-\infty, 0]\}$ et $N = \{(x, x) : x \in [0, +\infty[\}$, qui est une sous-variété topologique de $\mathbb{R}^2$, recollement continu de deux sous-variétés à bord M et N le long de leur bord. Mais R n'est pas une sous-variété de classe C^1 (elle n'a pas de droite tangente en $0 = (0, 0)$). L'intuition (qui sera cachée par une bonne gestion des cartes locales) est la procédure d'arrondissement (de classe C^∞) des angles dans un voisinage du bord de M et de N , décrite dans le dessin suivant.



Pour éviter un processus à la main de passage du local au global, nous utilisons les outils globaux des colliers et des voisinages tubulaires.

Démonstration. (1) Nous admettrons le résultat suivant (obtenu en recollant localement des voisinages de points de bord (ce n'est pas si évident que cela), voir par exemple [Hir, Theo. 6.1]), car dans les cas où nous allons l'utiliser, les colliers sont fournis par les constructions, voir la remarque 7.3.



Théorème 7.2. *Le bord ∂M de toute variété lisse à bord M admet un collier, c'est-à-dire un C^∞ -difféomorphisme $\psi_M : \partial M \times [0, 1[\rightarrow U$ d'image un voisinage ouvert U de ∂M dans M tel que $\psi_M(x, 0) = x$ pour tout $x \in \partial M$, qui est unique à C^∞ -isotopie constante sur $\partial M \times \{0\}$ près.* $\square$

Nous identifions dans cette démonstration M et N avec leurs images dans l'espace topologique recollement $R = M \cup_f N$ par les restrictions de la projection canonique (qui sont des homéomorphismes sur leurs images). L'application $\psi' : (\partial M \times]-1, 1[) \rightarrow R = M \cup_f N$ définie par

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} \psi_M(x, -t) & \text{si } t \leq 0 \\ \psi_N(f(x), t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

est, par la définition du recollement, un homéomorphisme sur un voisinage de l'image de ∂M dans R . En prenant des cartes locales de la variété lisse produit $\partial M \times]-1, 1[$, cet homéomorphisme ψ' permet de construire (par « transport de structure ») des cartes locales de classe C^∞ en tout point de l'image de ∂M dans R . Des cartes locales de domaines contenus dans $M \setminus \partial M$ et $N \setminus \partial N$ pour les structures originelles au voisinage de tout point de $M \setminus \partial M$ et $N \setminus \partial N$ fournissent des cartes locales de R aux points de R n'appartenant pas à l'image de ∂M dans R . Elles sont par construction compatibles entre elles, et donnent donc, en passant à l'atlas maximal, une structure de variété lisse cherchée sur R .

L'image de ψ' est ce que l'on appelle un *voisinage tubulaire* de l'image S de ∂M dans R . Nous ne donnerons pas la définition générale (voir [Hir]), car elle nécessite un soin particulier (voir la remarque 7.4 ci-dessous et l'exercice E.88 (1)). Nous nous contenterons d'affirmer qu'ils sont uniques à C^∞ -isotopie près fixant S . L'unicité de la structure de variété sur R découle du théorème d'unicité à isotopie près des voisinages tubulaires de sous-variétés de variétés, et nous renvoyons par exemple à [Hir, Theo. 8.1.9] pour des explications.

(2) Fixons une C^∞ -isotopie plate au bord $h : (\partial N \times [0, 1]) \rightarrow \partial N$ entre $g \circ f^{-1}$ et l'identité de ∂N . Considérons l'application $\psi'' : \psi_N(\partial N \times [0, \frac{1}{2}]) \rightarrow \psi_N(\partial N \times [0, \frac{1}{2}])$ définie sur un collier fermé de ∂N par la formule

$$\psi'' : \psi_N(x, t) \mapsto \psi_N(h(x, 2t), t) .$$

Alors ψ'' est un C^∞ -difféomorphisme, valant sur $\psi_N(\partial N \times \{0\})$ l'application

$$g \circ f^{-1} : x = \psi_N(x, 0) \mapsto \psi_N(g \circ f^{-1}(x), 0) = g \circ f^{-1}(x) ,$$

et valant l'identité sur l'image de $\psi_N(\partial N \times \{\frac{1}{2}\})$. Ce C^∞ -difféomorphisme ψ'' s'étend en un C^∞ -difféomorphisme de N encore noté ψ'' , par l'identité en dehors du collier fermé $\psi_N(\partial N \times [0, \frac{1}{2}])$.

Alors l'application de la variété lisse $M \cup_f N$ dans la variété lisse $M \cup_g N$ valant l'identité sur M et ψ'' sur N est un C^∞ -difféomorphisme cherché.

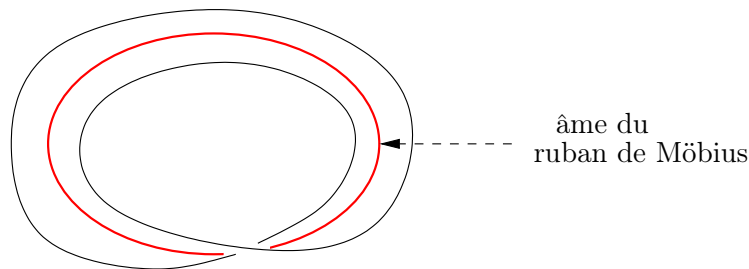
(3) La fin de la démonstration ci-dessus donne le résultat. $\square$

Remarque 7.3. Dans le cas d'une surface à bord S dans les considérations qui suivent, le bord de S viendra avec un collier, que ce soit

- dans les exemples standards des bords des disques $\mathbb{B}_2$ et anneaux $\mathbb{S}_1 \times [0, 1]$ ou $\{z \in C : a \leq |z| \leq b\}$ pour $a, b > 0$,¹²⁶
- par des constructions en enlevant des disques plongés dans S (il suffit d'enlever le disque de rayon $1/2$, et d'utiliser l'invariance par isotopie des plongements de disque, que nous verrons dans le lemme 7.5),
- ou par des sous-niveaux réguliers de fonctions de Morse lisses sur S .¹²⁷

L'unicité de la structure différentielle des recollements le long du bord découle en dimension 2 de la dernière assertion (3) ci-dessus, par le lemme 7.6.

Remarque 7.4. Le ruban de Möbius ouvert $([0, 1] \times]0, 1[) / \sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(0, y) \sim (1, 1-y)$ pour tout $y \in]0, 1[$ est un voisinage tubulaire de son âme¹²⁸, qui est le cercle C image de $[0, 1] \times \{\frac{1}{2}\}$ dans M . Mais M n'est pas homéomorphe à $\mathbb{S}_1 \times]-1, 1[$, donc il ne faut pas croire que tous les voisinages tubulaires sont des produits, comme ceux construits dans la démonstration ci-dessus.



Lemme 7.5. (Cerf-Palais) Soit M une sous-variété lisse connexe à bord de dimension n . Deux plongements lisses $f, g : \mathbb{B}_n \rightarrow M$, qui, si M est orientable, préservent ou renversent tous les deux l'orientation, sont C^∞ -isotopes.

De même, si B est une somme disjointe finie de copies de boules $\mathbb{B}_n$, alors deux plongements lisses préservant l'orientation de B dans une sous-variété lisse connexe orientable de dimension n sont C^∞ -isotopes.

126. Par exemple, l'application de $\mathbb{S}_1 \times [0, 1[$ dans $\mathbb{B}_2$ définie par $(z, t) \mapsto (1-t)z$ est un collier (d'image maximale) du bord $\mathbb{S}_1$ du disque $\mathbb{B}_2$.

127. Si $M_{=a}$ est un niveau régulier d'une fonction de Morse f lisse définie sur une sous-variété lisse M (de dimension quelconque) telle que les sous-niveaux $M_{\leq t}$ de f sont compacts pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors la sous-variété à bord $M_{\leq a}$ admet un collier, d'image égale à $f^{-1}(]a-\epsilon, a]) = M_{\leq a} - M_{\leq a-\epsilon}$ pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, par le théorème 6.15.

128. « Objets inanimés, avez-vous donc une âme qui s'attache à notre âme et la force d'aimer ? » (A. de Lamartine).

Démonstration. Nous pouvons supposer que $n \geq 1$. Puisque le groupe des C^∞ -difféomorphismes isotopes à l'identité agit transitivement sur $M - \partial M$ (voir la proposition 5.17), nous pouvons supposer que $f(0) = g(0) = x_0$.

Soit $(\mathbb{R}^n, \varphi)$ un paramétrage local C^∞ de M en x_0 , tel que $\varphi(0) = x_0$. Quitte à remplacer f , pour ϵ assez petit, par le plongement $x \mapsto f(\epsilon x)$ de $\mathbb{B}_n$, qui est C^∞ -isotope à f par $(x, s) \mapsto f(sx + (1-s)\epsilon x)$, nous pouvons supposer que f (et de même g) est à valeurs dans l'image $\varphi(\mathbb{B}_n)$ de φ , que nous munirons de l'orientation induite de celle de $\mathbb{R}^n$ par transport de structure par φ (telle que le difféomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi(\mathbb{R}^n)$ préserve l'orientation).

Nous pouvons supposer que les plongements f et g ou bien tous deux préservent l'orientation, ou bien tout deux renversent l'orientation. Ceci découle de l'hypothèse si M est orientable. Sinon, nous pouvons, pour $\epsilon > 0$ assez petit, remplacer f par un plongement isotope obtenu en suivant un lacet en x_0 renversant l'orientation.

Quitte à remplacer f et g par $\varphi^{-1} \circ f$ et $\varphi^{-1} \circ g$, et à précomposer φ par une application linéaire renversant l'orientation (comme $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n)$), nous pouvons supposer que $M = \mathbb{R}^n$ et que les plongements f et g fixent 0 et préservent l'orientation. Quitte à remplacer f par l'application linéaire df_0 , qui est C^∞ -isotope à f par

$$(x, s) \mapsto \begin{cases} s^{-1}f(sx) & \text{si } s \neq 0 \\ df_0(x) & \text{sinon,} \end{cases}$$

nous pouvons supposer que f est linéaire, et de même pour g . Comme le sous-groupe $GL_n^+(\mathbb{R})$ de $GL_n(\mathbb{R})$ formé des bijections linéaires de déterminant strictement positif est une sous-variété lisse (en fait un ouvert) et connexe par arcs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un chemin lisse de f à g dans $GL_n^+(\mathbb{R})$ fournit une isotopie entre f et g . $\square$

Lemme 7.6. *Deux C^∞ -difféomorphismes du cercle $\mathbb{S}_1$ préservant l'orientation de $\mathbb{S}_1$ sont C^∞ -isotopes. Deux C^∞ -difféomorphismes du cercle $\mathbb{S}_1$ renversant l'orientation de $\mathbb{S}_1$ sont C^∞ -isotopes. Tout C^∞ -difféomorphisme f du cercle $\mathbb{S}_1$ s'étend en un C^∞ -difféomorphisme du disque $\mathbb{B}_2$.*

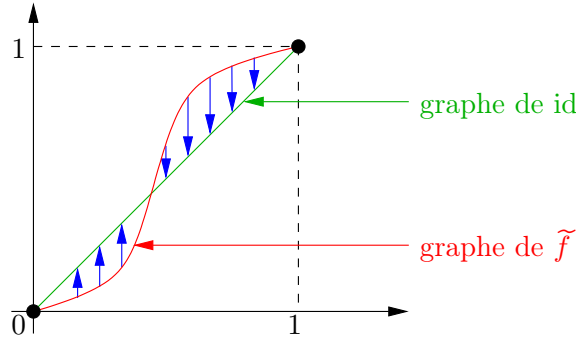
En particulier, tout C^∞ -difféomorphisme du cercle $\mathbb{S}_1$ est C^∞ -isotope ou bien à l'application identité $\text{id} : z \mapsto z$ ou bien à la conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$, suivant que son degré soit +1 ou -1. Deux C^∞ -difféomorphismes du cercle $\mathbb{S}_1$ ayant même degré sont C^∞ -isotopes.

La dernière affirmation de ce lemme est incorrecte pour les sphères de dimension quelconque, par exemple par l'existence de sphères exotiques en dimension 7, ¹²⁹ qui sont toutes construites comme recollement de deux boules $\mathbb{B}_7$ par un difféomorphisme de leur bord.

Démonstration. La seconde assertion se ramène à la première par composition par la conjugaison complexe.

Soit f un C^∞ -difféomorphisme du cercle $\mathbb{S}_1$ préservant l'orientation. Quitte à composer par une rotation (qui est isotope à l'identité), nous pouvons supposer que f fixe le point 1. Notons $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le relevé de f par le revêtement universel lisse $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1$, défini par $t \mapsto e^{2i\pi t}$, tel que $\tilde{f}(0) = 0$, qui est une application lisse strictement croissante. Alors l'application définie par $(x, s) \mapsto sx + (1-s)\tilde{f}(x)$ est une C^∞ -isotopie (équivariante par le groupe du revêtement $\mathbb{Z}$) entre $\tilde{f}$ et $\text{id}_{\mathbb{R}}$, qui induit par passage au quotient une C^∞ -isotopie entre f et $\text{id}_{\mathbb{S}_1}$.

129. Voir la fin de l'exemple (5) de la partie 4.5



Pour démontrer la dernière affirmation du lemme 7.6, nous utilisons tout d'abord une C^∞ -isotopie plate au bord entre f et l'identité, ou entre f et la conjugaison complexe, dont l'existence est donnée par les deux premières assertions, pour étendre l'application f à l'anneau $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\}$ (de sorte que l'extension vaille l'identité ou la conjugaison complexe sur le cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{2}\}$). Puis nous étendons encore par l'identité ou la conjugaison complexe au disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{1}{2}\}$. $\square$

Le résultat suivant est un théorème de reconnaissance des sphères lisses de dimension 2, améliorant en dimension 2 le théorème 6.21 (passant d'un homéomorphisme avec $\mathbb{S}_2$ à un C^∞ -difféomorphisme avec $\mathbb{S}_2$). Mais nous redisons que son extension en toute dimension est incorrecte. Ce résultat est un premier pas vers la classification lisse des surfaces lisses en utilisant la théorie de Morse.

Corollaire 7.7. *Soit M une surface lisse compacte (à bord vide) admettant une fonction de Morse f lisse ayant seulement deux points critiques. Alors M est C^∞ -difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}_2$.*

Démonstration. Par la démonstration du théorème 6.21, M est C^∞ -difféomorphe au recollement de deux disques $\mathbb{B}_2$ le long de leur bord par un C^∞ -difféomorphisme $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$. Quitte à composer f par la conjugaison complexe (qui s'étend en un C^∞ -difféomorphisme du disque), nous pouvons supposer que f est C^∞ -isotope à l'identité, et que les deux disques sont les hémisphères Nord et Sud de la sphère $\mathbb{S}_2$. Or la sphère $\mathbb{S}_2$ est C^∞ -difféomorphe à la variété différentielle recollement de ses hémisphères Nord et Sud par l'identité sur leur bord. Le résultat découle alors de l'affirmation (2) du lemme 7.1. $\square$

Soit S une surface lisse à bord. Un *recollement d'une anse*¹³⁰ sur S est toute surface lisse à bord C^∞ -difféomorphe au recollement $A \cup_f (S \setminus (\overset{\circ}{D}_1 \cup \overset{\circ}{D}_2))$ d'un cylindre $A = \mathbb{S}_1 \times [0, 1]$ sur la surface S privée des intérieurs de deux disques fermés D_1 et D_2 C^∞ -plongés de manière disjointe dans $S \setminus \partial S$, par un C^∞ -difféomorphisme $f : \partial A \rightarrow (\partial D_1 \cup \partial D_2)$. Si S est connexe et orientée, si le bord des variétés orientées à bord est muni de l'orientation par la direction sortante, et si f préserve les orientations, nous dirons que le recollement d'anse *préserve l'orientation*. Par ce qui précède, si S est connexe et orientée, un recollement d'anse sur S préservant l'orientation ne dépend, à C^∞ -difféomorphisme près, ni du choix des disques D_1, D_2 ni du choix du difféomorphisme f . Par ce qui précède, si S est connexe et non orientable, un recollement d'anse ne dépend pas de ces choix, à C^∞ -difféomorphisme près.

130. Cette terminologie d'« anse » diffère de celle introduite dans la partie 6.6.

Définition 7.8. Si S_1 et S_2 sont deux surfaces lisses connexes à bord, une somme connexe de S_1 et S_2 est la variété différentielle

$$S_1 \# S_2 = (S_1 \setminus \overset{\circ}{D}_1) \cup_f (S_2 \setminus \overset{\circ}{D}_2) ,$$

où D_1 et D_2 sont des disques fermés C^∞ -plongés dans $S_1 \setminus \partial S_1$ et $S_2 \setminus \partial S_2$ respectivement, et $f : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ un C^∞ -difféomorphisme.

La structure de variété lisse sur la somme connexe $S_1 \# S_2$ est celle fournie par le lemme 7.1 (1). Par le lemme 7.1 (et les commentaires qui le suivent), et par les lemmes 7.5 et 7.6, la classe de C^∞ -difféomorphisme de $S_1 \# S_2$ ne dépend pas du choix des *données de recollement*, c'est-à-dire des disques D_1 et D_2 ni de l'application de recollement f . Nous parlerons donc par abus de « la » somme connexe de S_1 et S_2 . En utilisant le fait que l'image d'un ouvert saturé par la projection canonique est ouvert, et en identifiant une partie de $(S_1 \setminus \overset{\circ}{D}_1) \sqcup (S_2 \setminus \overset{\circ}{D}_2)$ qui s'injecte par la projection canonique avec son image dans $S_1 \# S_2$, notons que les parties $S_1 \setminus D_1$ et $S_2 \setminus D_2$ de $S_1 \# S_2$ sont des ouverts disjoints, et que les restrictions à $S_1 \setminus \overset{\circ}{D}_1$ et à $S_2 \setminus \overset{\circ}{D}_2$ de la projection canonique sont des homéomorphismes sur leur image.

Remarques. (1) Effectuer une somme connexe avec la sphère $\mathbb{S}_2$ ne change pas la classe de C^∞ -difféomorphisme, car le complémentaire de l'intérieur d'un disque plongé dans $\mathbb{S}_2$ est un disque, et recoller un disque par son bord le long d'une composante connexe compacte du bord d'une surface ne dépend pas, à C^∞ -difféomorphisme près, du choix du recollement par le lemme 7.1 (et les commentaires qui le suivent) et par le lemme 7.6.

(2) Effectuer un recollement d'anse sur une surface connexe revient, à C^∞ -difféomorphisme près, à effectuer une somme connexe avec un tore ou avec une bouteille de Klein.

(3) Effectuer un recollement d'anse sur une surface S ayant deux composantes connexes S_1 et S_2 , tel que les disques D_1 et D_2 de la définition soient contenus respectivement dans S_1 et S_2 , revient, à C^∞ -difféomorphisme près, à effectuer une somme connexe de S_1 et S_2 .

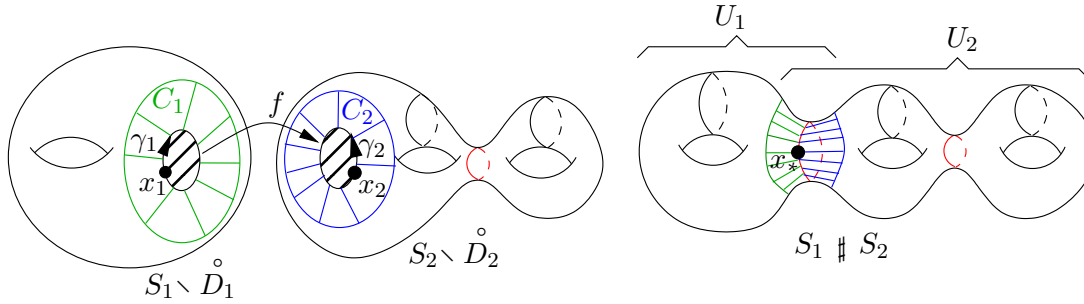
Lemme 7.9. Avec les notations de la définition 7.8, pour $i \in \{1, 2\}$, soit $x_i \in \partial D_i$, soit $\langle A_i | R_i \rangle$ une présentation du groupe fondamental $\pi_1(S_i \setminus \overset{\circ}{D}_i, x_i)$, soit $[\gamma_i]$ un des deux générateurs du groupe infini cyclique $\pi_1(\partial D_i, x_i) \simeq \mathbb{Z}$, et soit w_i un élément du groupe libre $L(A_i)$ sur A_i représentant l'image dans $\pi_1(S_i \setminus \overset{\circ}{D}_i, x_i)$ de $[\gamma_i]$. Soit $f : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ un C^∞ -difféomorphisme, tel que $f(x_1) = x_2$ et (quitte à remplacer $[\gamma_2]$ et w_2 par leur inverse) $f_*([\gamma_1]) = [\gamma_2]$, où $f_* : \pi_1(\partial D_1, x_1) \rightarrow \pi_1(\partial D_2, x_2)$ est l'application induite sur le groupe fondamental par f . Alors le groupe fondamental de la somme connexe

$$S = S_1 \# S_2 = (S_1 \setminus \overset{\circ}{D}_1) \cup_f (S_2 \setminus \overset{\circ}{D}_2) ,$$

pour le point base $x_* \in S$ image commune de x_1 et x_2 , admet pour présentation

$$\langle A_1 \cup A_2 | R_1 \cup R_2 \cup \{w_1 w_2^{-1}\} \rangle .$$

Démonstration. Pour $i \in \{1, 2\}$, notons C_i un voisinage ouvert collier de ∂D_i dans $S_i \setminus \overset{\circ}{D}_i$ homéomorphe à $\partial D_i \times [0, 1[$, et identifions $S_i \setminus \overset{\circ}{D}_i$ avec son image dans S .



En utilisant le fait que l'image d'un ouvert saturé par la projection canonique est ouvert, considérons les ouverts connexes par arcs

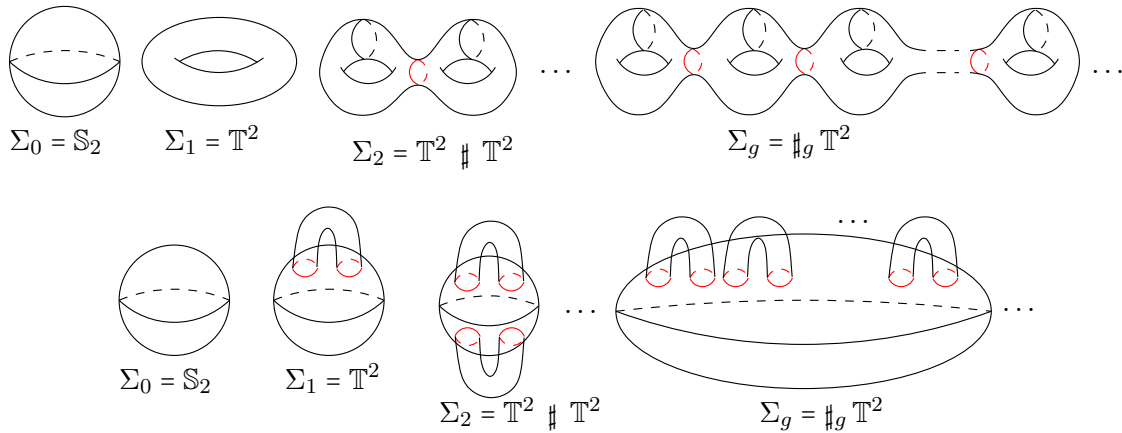
- $U_1 = (S_1 \setminus \overset{\circ}{D}_1) \cup C_2$ qui est connexe par arcs et se rétracte par déformation forte sur $S_1 \setminus \overset{\circ}{D}_1$ et
- $U_2 = (S_2 \setminus \overset{\circ}{D}_2) \cup C_1$ qui est connexe par arcs et se rétracte par déformation forte sur $S_2 \setminus \overset{\circ}{D}_2$.

Nous avons $S = U_1 \cup U_2$. De plus, $U_0 = U_1 \cap U_2 = C_2 \cup C_1$ est un anneau (en particulier connexe par arc) qui se rétracte par déformation forte sur le cercle $C_2 \cap C_1$ de S , image commune de ∂D_1 et ∂D_2 . Le résultat découle alors du théorème de van Kampen 3.3. $\square$

7.2 Les surfaces compactes connexes modèles

Dans cette partie, nous construisons les surfaces compactes connexes qui apparaîtront dans le théorème de classification. Soient $g, n \in \mathbb{N}$.

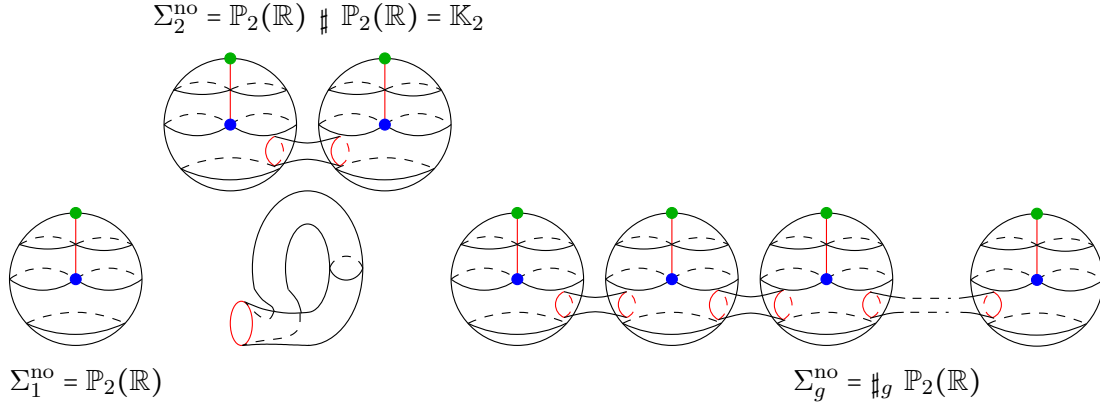
Nous définissons une *surface compacte connexe orientable de genre g* , que nous notons Σ_g , comme toute surface lisse (à bord vide) qui est C^∞ -difféomorphe à la somme connexe de g tores $\mathbb{T}^2$ ou, de manière équivalente, au recollement préservant l'orientation de g anses sur la sphère $\mathbb{S}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, avec par convention $\Sigma_0 = \mathbb{S}_2$. Elle est connexe et orientable.



Si $g \geq 1$, nous définissons une *surface compacte connexe non orientable de genre ¹³¹ g* , que nous notons Σ_g^{no} , comme toute surface lisse (à bord vide) qui est C^∞ -difféomorphe à la

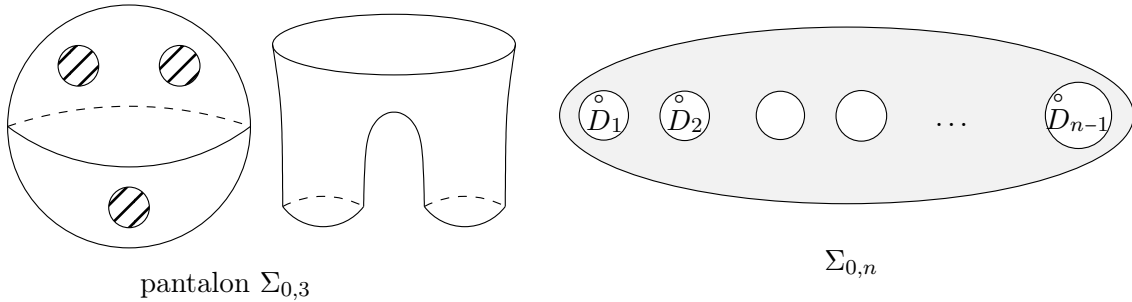
131. La terminologie de « genre » dans le cas non orientable n'est pas uniformément utilisée dans la littérature.

somme connexe de g copies du plan projectif réel $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Elle est connexe et non orientable (car elle contient un ruban de Möbius, puisque $g \geq 1$).



Exercice E.86. Montrer qu'une somme connexe $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ de deux plans projectifs réels est C^∞ -difféomorphe à la bouteille de Klein $\mathbb{K}_2$.

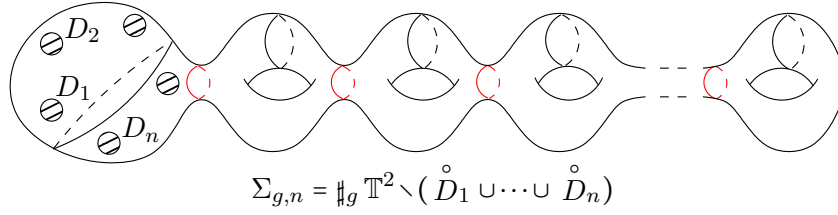
Une *sphère à n trous* $\Sigma_{0,n}$ est toute surface lisse à bord qui est C^∞ -difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}_2$ privée des intérieurs de n disques fermés $\mathbb{B}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ plongés deux à deux disjoints. Si $n \geq 1$, ceci est équivalent à demander que $\Sigma_{0,n}$ soit une surface lisse à bord qui est C^∞ -difféomorphe au disque $\mathbb{B}_2$ privé des intérieurs de $n - 1$ disques plongés $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}$ dans $\mathbb{B}_2 \setminus \partial \mathbb{B}_2$ deux à deux disjoints. Par le commentaire suivant le lemme 7.5, la classe de C^∞ -difféomorphisme de $\Sigma_{0,n}$ ne dépend pas de la famille de disques enlevés. Remarquons que $\Sigma_{0,0}$ est la sphère $\mathbb{S}_2$, que $\Sigma_{0,1}$ est C^∞ -difféomorphe au disque $\mathbb{B}_2$ et que $\Sigma_{0,2}$ est C^∞ -difféomorphe à l'anneau $\mathbb{S}_1 \times [0, 1]$. Toute surface $\Sigma_{0,3}$ est appelée un *pantalon*.



Nous définissons une *surface compacte connexe orientable de genre g à n trous*, que nous notons $\Sigma_{g,n}$, comme étant toute surface lisse à bord qui est C^∞ -difféomorphe à la somme connexe

$$\Sigma_{g,n} = \Sigma_{0,n} \# \Sigma_g$$

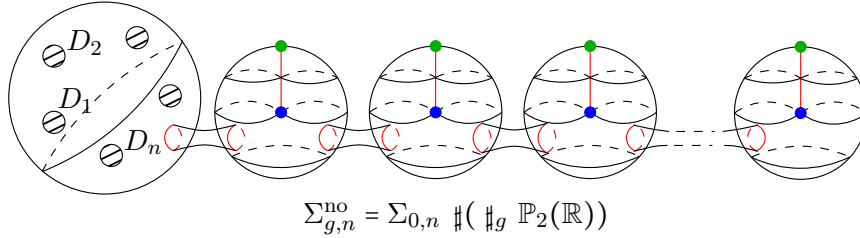
d'une sphère $\Sigma_{0,n}$ à n trous et d'une surface Σ_g compacte connexe orientable de genre g . Remarquons que la somme connexe $\Sigma_{g,n} \# \Sigma_{g',n'}$ est C^∞ -difféomorphe à $\Sigma_{g+g',n+n'}$ pour tous les $g, g', n, n' \in \mathbb{N}$.



Si $g \geq 1$, nous définissons enfin une *surface compacte connexe non orientable de genre g à n trous*, que nous notons $\Sigma_{g,n}^{\text{no}}$, comme étant toute surface lisse à bord qui est C^∞ -difféomorphe à la somme connexe

$$\Sigma_{g,n}^{\text{no}} = \Sigma_{0,n} \# \Sigma_g^{\text{no}}$$

d'une sphère $\Sigma_{0,n}$ à n trous et d'une surface Σ_g^{no} compacte connexe non orientable de genre g . Remarquons que $\Sigma_{g,n}^{\text{no}} \# \Sigma_{g',n'}^{\text{no}}$ est C^∞ -difféomorphe à $\Sigma_{g+g',n+n'}^{\text{no}}$ pour tous les $g, g', n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $g, g' \geq 1$.



Exercice E.87. Montrer que pour tous les $g, g', n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $g \geq 1$, la somme connexe $\Sigma_{g,n}^{\text{no}} \# \Sigma_{g',n'}^{\text{no}}$ est C^∞ -difféomorphe à $\Sigma_{g+2g',n+n'}^{\text{no}}$.

Le résultat suivant donne le calcul des groupes fondamentaux (pour des points bases x_* indifférents) de ces surfaces connexes. Rappelons que si a et b sont deux éléments d'un groupe G , alors leur *commutateur* est l'élément $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ du groupe G .

Proposition 7.10. Soient $g, g', n, n' \in \mathbb{N}$.

(1) Le groupe fondamental d'une surface $\Sigma_{g,n}$ compacte connexe orientable de genre g à n trous admet la présentation de groupe suivante à $2g + n$ générateurs et 1 relation :

$$\pi_1(\Sigma_{g,n}, x_*) \simeq \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_n \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_g, b_g] x_1 x_2 \dots x_n = 1 \rangle.$$

Si $g \geq 1$, le groupe fondamental d'une surface $\Sigma_{g,n}^{\text{no}}$ compacte connexe non orientable de genre g à n trous admet la présentation de groupe suivante à $g + n$ générateurs et 1 relation :

$$\pi_1(\Sigma_{g,n}^{\text{no}}, x_*) \simeq \langle a_1, a_2, \dots, a_g, x_1, \dots, x_n \mid a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2 x_1 x_2 \dots x_n = 1 \rangle.$$

(2) De plus, les surfaces $\Sigma_{g,n}$ et $\Sigma_{g',n'}$, ainsi que les surfaces $\Sigma_{g,n}^{\text{no}}$ et $\Sigma_{g',n'}^{\text{no}}$ si $g, g' \geq 1$, sont C^∞ -difféomorphes si et seulement si elles sont homéomorphes, et si et seulement si $(g, n) = (g', n')$.

En particulier,

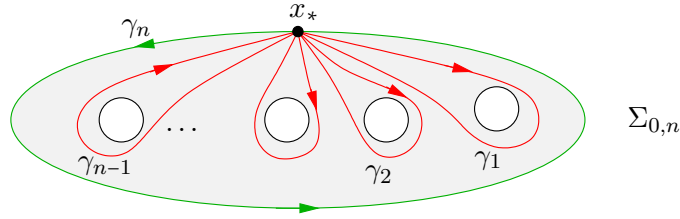
$$\pi_1(\Sigma_g, x_*) \simeq \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_g, b_g] = 1 \rangle,$$

$$\pi_1(\Sigma_g^{\text{no}}, x_*) \simeq \langle a_1, a_2, \dots, a_g \mid a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2 = 1 \rangle,$$

et si $n \geq 1$, alors $\pi_1(\Sigma_{g,n}, x_*)$ est un groupe libre à $2g+n-1$ générateurs (la relation exprime le générateur x_n comme un mot en les autres générateurs, donc le groupe $\pi_1(\Sigma_{g,n}, x_*)$ est isomorphe au groupe libre de partie génératrice libre $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_{n-1}\}$) et le groupe $\pi_1(\Sigma_{g,n}^{\text{no}}, x_*)$ est un groupe libre à $g+n-1$ générateurs.

Il est en fait possible de montrer que si $n \geq 1$, alors $\Sigma_{g,n}$ admet le même type d'homotopie qu'un bouquet de $2g+n-1$ cercles, et que si $g, n \geq 1$, alors $\Sigma_{g,n}^{\text{no}}$ admet le même type d'homotopie qu'un bouquet de $g+n-1$ cercles.

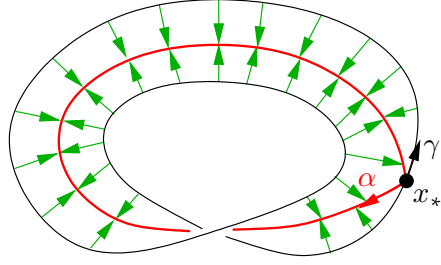
Démonstration. (1) La démonstration procède par récurrence sur le genre g , avec $g \geq 0$ dans le cas orientable et $g \geq 1$ sinon. Plus précisément, nous montrons par récurrence sur g les deux formules centrées dans l'énoncé de la proposition 7.10, avec le fait que si $n \geq 1$, et si le point base x_* est un point de la n -ème composante connexe du bord de $\Sigma_{g,n}$ ou de $\Sigma_{g,n}^{\text{no}}$, alors l'élément x_n dans les présentations ci-dessus des groupes libres $\pi_1(\Sigma_{g,n}, x_*)$ et $\pi_1(\Sigma_{g,n}^{\text{no}}, x_*)$ peut être choisi comme la classe d'homotopie d'un lacet en x_* qui engendre le groupe fondamental de la n -ème composante connexe du bord de $\Sigma_{g,n}$ ou de $\Sigma_{g,n}^{\text{no}}$.



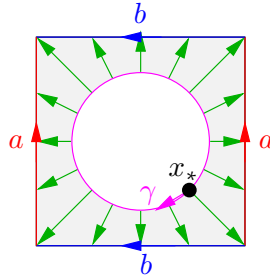
Si $n = 0$, la surface $\Sigma_{0,n}$ est la sphère $\mathbb{S}_2$, de groupe fondamental trivial. Si $n \geq 1$, alors la surface $\Sigma_{0,n}$ est le disque privé des intérieurs de $n-1$ disques fermés plongés deux à deux disjoints. Elle se rétracte par déformation forte sur un bouquet de $n-1$ cercles plongé dans $\Sigma_{0,n}$, de sommet x_* dans le bord du disque, donc son groupe fondamental est un groupe libre. Notons pour usage ultérieur que la classe d'homotopie $x_n = [\gamma_n]$ du lacet γ_n faisant une fois le bord du disque dans le sens trigonométrique (conformément à l'orientation du bord) est égale au produit $x_{n-1}^{-1} \dots x_1^{-1}$ des inverses des classes d'homotopie $x_i = [\gamma_i]$ des lacets γ_i faisant une fois le tour de chaque disque enlevé dans le sens des aiguilles d'une montre (conformément à l'orientation du bord par la direction sortante). En particulier, le groupe $\pi_1(\Sigma_{0,n}, x_*)$ admet comme présentation $\langle x_1, \dots, x_{n-1} \mid \rangle$, où, de manière plus appropriée pour appliquer l'hypothèse de récurrence via le théorème de van Kampen, $\langle x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \mid x_1 \dots x_{n-1} = x_n^{-1} \rangle$, où $x_n = [\gamma_n]$ représente un élément générateur du groupe fondamental (infini cyclique) de la n -ème composante connexe du bord de $\Sigma_{0,n}$.

Nous savons déjà (voir le chapitre 3) que

- le groupe fondamental du tore $\mathbb{T}^2$ admet comme présentation $\langle a_1, b_1 \mid [a_1, b_1] = 1 \rangle$;
- le groupe fondamental du plan projectif admet comme présentation $\langle a_1 \mid a_1^2 = 1 \rangle$;
- le plan projectif réel privé d'un disque est un ruban de Möbius, dont la classe d'homotopie du bord est (quitte à prendre son inverse) le carré d'une classe d'homotopie génératrice du groupe fondamental (cyclique) du ruban de Möbius : pour tout point base x_* sur le bord de $\Sigma_{1,1}^{\text{no}}$, le groupe fondamental $\pi_1(\Sigma_{1,1}^{\text{no}}, x_*)$ admet comme présentation $\langle a_1, x_1 \mid a_1^2 = x_1^{-1} \rangle$ avec $x_1 = [\gamma]$ l'un des deux éléments générateurs du groupe fondamental du bord et $a_1 = [\alpha]$ l'un des deux éléments générateurs du groupe fondamental du ruban de Möbius;



• la classe d'homotopie du bord $[\gamma]$ du tore troué $\Sigma_{1,1} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \setminus \overset{\circ}{B}(0, \frac{1}{2})$, qui se rétracte par déformation forte sur un bouquet de deux cercles, dont le groupe fondamental est un groupe libre sur $S = \{a, b\}$ où a et b représentent des générateurs des groupes fondamentaux des deux cercles pointés, est égale (quitte à passer à son inverse) à $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, ce qui montre que, pour tout point base x_* sur le bord de $\Sigma_{1,1}$, le groupe fondamental $\pi_1(\Sigma_{1,1}, x_*)$ admet comme présentation $\langle a_1, b_1, x_1 \mid [a_1, b_1] = x_1^{-1} \rangle$ avec x_1 représentant un élément générateur du groupe fondamental du bord.



Les deux formules centrées dans l'énoncé de la proposition 7.10 découlent alors par récurrence du lemme 7.9, sachant que

$$\Sigma_{g,n} = \Sigma_{g-1,n} \# \mathbb{T}^2 \quad \text{et} \quad \Sigma_{g,n}^{\text{no}} = \begin{cases} \Sigma_{g-1,n}^{\text{no}} \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) & \text{si } g \geq 2 \\ \Sigma_{0,n}^{\text{no}} \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) & \text{si } g = 1. \end{cases}$$

(2) Montrons la dernière assertion de la proposition 7.10. Remarquons que l'abélianisé¹³² de $\pi_1(\Sigma_g, x_*)$ est isomorphe au groupe abélien libre $\mathbb{Z}^{2g}$ de rang $2g$: il admet comme présentation

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_i, a_j] = [a_i, b_j] = [b_i, b_j] = 1 \rangle$$

132. L'abélianisé d'un groupe G est son groupe quotient $G/[G, G]$ par son sous-groupe dérivé $[G, G]$ engendré par les commutateurs d'éléments de G . C'est le plus gros quotient abélien de G , au sens que si $f : G \rightarrow A$ est un morphisme de groupes à valeurs dans un groupe abélien, alors f factorise par un (unique) morphisme de groupes $\bar{f} : G/[G, G] \rightarrow A$: si $p : G \rightarrow G/[G, G]$ est la projection canonique, alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ p \downarrow & \searrow f & \\ G/[G, G] & \xrightarrow{\bar{f}} & A. \end{array}$$

Comme le groupe dérivé est un groupe caractéristique, si $\varphi : G \rightarrow G'$ est un isomorphisme de groupes, alors $\varphi([G, G]) = [G', G']$ et φ induit par passage au quotient un isomorphisme entre les groupes abéliens $G/[G, G]$ et $G'/[G', G']$.

car la relation de la présentation donnée par l'assertion (1) de $\pi_1(\Sigma_{g,n}, x_*)$ avec $n = 0$ devient triviale dans l'abélianisé. Cet abélianisé devient, par la réduction modulo 2 des $\mathbb{Z}$ -modules, un espace vectoriel de dimension $2g$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si $n \geq 1$, l'abélianisé de $\pi_1(\Sigma_{g,n}, x_*)$ est isomorphe au groupe abélien libre $\mathbb{Z}^{2g+n-1}$ de rang $2g + n - 1$: il admet comme présentation

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_{n-1} \mid [a_i, a_j] = [a_i, b_j] = [b_i, b_j] = [a_i, x_k] = [b_i, x_k] = [x_\ell, x_k] = 1 \rangle$$

puisque la relation de $\pi_1(\Sigma_{g,n}, x_*)$ exprime x_n comme un mot en les autres générateurs $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_{n-1}$, et donc enlever cette relation ainsi que le générateur x_n ne change pas la classe d'isomorphisme du groupe. Cet abélianisé devient, par la réduction modulo 2 des $\mathbb{Z}$ -modules, un espace vectoriel de dimension $2g + n - 1$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De même, si $g \geq 1$, l'abélianisé de $\pi_1(\Sigma_g^{\text{no}}, x_*)$, de présentation

$$\langle a_1, \dots, a_g \mid [a_i, a_j] = (a_1 \dots a_g)^2 = 1 \rangle \simeq \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g \mid [\alpha_i, \alpha_j] = \alpha_g^2 = 1 \rangle,$$

(en posant $\alpha_i = a_i$ si $i \leq g-1$ et $\alpha_g = a_1 \dots a_g$), est isomorphe au groupe abélien $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{g-1}$. Cet abélianisé devient, par la réduction modulo 2 des $\mathbb{Z}$ -modules, un espace vectoriel de dimension g sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si $g, n \geq 1$, l'abélianisé de $\pi_1(\Sigma_{g,n}^{\text{no}}, x_*)$ est de présentation

$$\langle a_1, \dots, a_g, x_1, \dots, x_{n-1} \mid [a_i, a_j] = [a_i, x_k] = [x_\ell, x_k] = 1 \rangle$$

(puisque la relation de $\pi_1(\Sigma_{g,n}^{\text{no}}, x_*)$ exprime x_n comme un mot en les autres générateurs $a_1, \dots, a_g, x_1, \dots, x_{n-1}$, et donc enlever cette relation ainsi que le générateur x_n ne change pas la classe d'isomorphisme du groupe). Cet abélianisé devient, par la réduction modulo 2 des $\mathbb{Z}$ -modules, un espace vectoriel de dimension $g + n - 1$ sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Comme n est le nombre de composantes connexes du bord, et comme le bord est préservé par tout homéomorphisme de variété topologique à bord, si $\Sigma_{g,n}$ et $\Sigma_{g',n'}$ (respectivement $\Sigma_{g,n}^{\text{no}}$ et $\Sigma_{g',n'}^{\text{no}}$ si $g, g' \geq 1$) sont homéomorphes, alors $n = n'$.

Un homéomorphisme entre deux variétés connexes induit un isomorphisme de groupes entre leurs groupes fondamentaux (pour des choix indifférents de point base), donc un isomorphisme de groupes entre leurs abélianisés, donc un isomorphisme d'espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en réduisant modulo 2. La dimension (ou le cardinal) d'un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un invariant d'isomorphisme d'espaces vectoriels. Donc le rang d'un groupe abélien libre est, par réduction modulo 2, un invariant d'isomorphisme des groupes abéliens libres. Par conséquent, si $\Sigma_{g,n}$ et $\Sigma_{g',n}$ (respectivement $\Sigma_{g,n}^{\text{no}}$ et $\Sigma_{g',n}^{\text{no}}$ si $g, g' \geq 1$) sont homéomorphes, alors $2g = 2g'$ si $n = 0$ et $2g + n - 1 = 2g' + n - 1$ si $n \geq 1$ (respectivement $g = g'$ si $n = 0$ et $g + n - 1 = g' + n - 1$ si $n \geq 1$). Dans tous les cas, nous avons donc $g = g'$, ce qui termine la démonstration de la proposition 7.10. $\square$

Proposition 7.11. *La caractéristique d'Euler d'une surface $\Sigma_{g,n}$ compacte connexe orientable de genre g à n trous est*

$$\chi(\Sigma_{g,n}) = 2 - 2g - n.$$

Si $g \geq 1$, la caractéristique d'Euler d'une surface $\Sigma_{g,n}^{\text{no}}$ compacte connexe non orientable de genre g à n trous est

$$\chi(\Sigma_{g,n}^{\text{no}}) = 2 - g - n.$$

Démonstration. Si $n \geq 1$, puisque la caractéristique d'Euler est un invariant d'équivalence d'homotopie, et puisque $\Sigma_{g,n}$ (respectivement $\Sigma_{g,n}^{\text{no}}$ si $g \geq 1$) se rétracte par déformation

forte sur le bouquet de $2g + n - 1$ (respectivement $g + n - 1$) cercles, le résultat découle de la formule (26) dans l'exemple (3) de CW-complexe dans la partie 6.5).

Les espaces Σ_g (respectivement Σ_g^{no} si $g \geq 1$) sont obtenus par recollement d'une 2-cellule sur $\Sigma_{g,1}$ (respectivement $\Sigma_{g,1}^{\text{no}}$ si $g \geq 1$). Donc

$$\chi(\Sigma_g) = \chi(\Sigma_{g,1}) + 1 = 2 - 2g - 1 + 1 = 2 - 2g$$

(respectivement $\chi(\Sigma_g^{\text{no}}) = \chi(\Sigma_{g,1}^{\text{no}}) + 1 = 2 - g - 1 + 1 = 2 - g$). $\square$

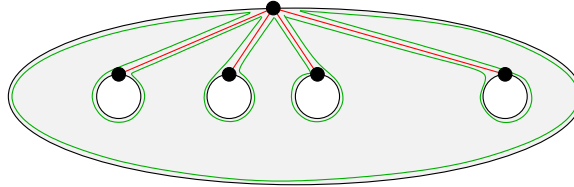
Remarque. Il existe de très nombreuses manières de montrer tout ou partie de ce résultat. Par exemple, si X et Y sont deux CW-complexes finis, contenant respectivement des sous-CW-complexes finis A et B , et si $f : A \rightarrow B$ est un isomorphisme de CW-complexe, alors l'espace topologique $X \cup_f Y$ admet une structure de CW-complexe naturelle, dont le k -squelette est le recollement du k -squelette de X sur le k -squelette de Y par la restriction de f aux k -squelettes de A et de B . Un argument simple de comptage (alterné) de cellules montre la *formule d'additivité de la caractéristique d'Euler*

$$\chi(X \cup_f Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(A). \quad (28)$$

En particulier, puisque la caractéristique d'Euler du cercle est nulle, le recollement de deux surfaces à bord le long d'une composante connexe de leur bord est additif pour la caractéristique d'Euler. Il est possible d'utiliser cette remarque, par récurrence, pour calculer, à partir des exemples du tore troué $\Sigma_{1,1}$, du pantalon $\Sigma_{0,3}$ et du plan projectif troué $\Sigma_{1,1}^{\text{no}}$ (qui ont respectivement -1 , -1 et 0 comme caractéristique d'Euler), la caractéristique d'Euler de toutes les surfaces compactes connexes à bord.

La sphère à $n \geq 1$ trous admet une structure de CW-complexe avec n sommets (une par trou), $2n - 1$ arêtes (une faisant le tour de chaque trou, plus une entre un trou fixé et les autres trous), et 1 cellule de dimension 2 (vue comme un polygone avec $n + 2(n - 1) = 3n - 2$ côtés, avec application d'attachement du bord représentée en vert sur la figure ci-dessous), ce qui permet de retrouver que

$$\chi(\Sigma_{0,n}) = n - (2n - 1) + 1 = 2 - n.$$

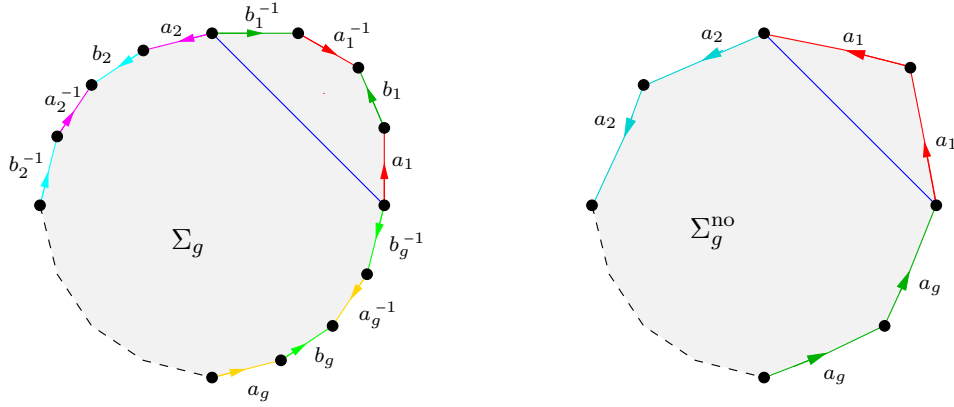


Cellulation de $\Sigma_{0,n}$ avec n sommets, $n + (n - 1)$ arêtes et une 2-cellule

Si $g \geq 1$, une autre manière de calculer la caractéristique d'Euler de la surface compacte connexe orientable de genre g est de dire qu'elle est homéomorphe à l'espace Σ'_g obtenu par identification de côtés du $4g$ -gone régulier (de côtés numérotés cycliquement

$$a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_2, b_2, a_2^{-1}, b_2^{-1}, \dots, a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1})$$

de la manière de la figure de gauche ci-dessous.



En effet, si $g = 1$, nous obtenons la construction bien connue du tore $\mathbb{T}^2$ comme recollement des côtés opposés d'un carré par translations. Et si $g \geq 2$, le découpage le long d'une corde entre les extrémités de quatre arêtes consécutives montre que $\Sigma'_g = \Sigma'_{g-1} \# \Sigma'_1$, qui par récurrence est donc homéomorphe à $\Sigma_{g-1} \# \mathbb{T}^2 = \Sigma_g$.

Comme le recollement Σ'_g admet naturellement une structure de CW-complexe avec un seul sommet (vérifier que tous les sommets du $4g$ -gone sont identifiés), $(4g)/2 = 2g$ arêtes (une par paire d'arêtes du $4g$ -gone) et une seule cellule de dimension 2, nous retrouvons que

$$\chi(\Sigma_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g .$$

Le théorème de van Kampen, comme dans l'exemple (2) suivant la démonstration du théorème de van Kampen 3.3, permet de retrouver le calcul du groupe fondamental de Σ_g .

De même, si $g \geq 1$, la surface compacte connexe non orientable de genre g est homéomorphe à l'espace Σ_g^{no} obtenu par identification de côtés du $2g$ -gone régulier (de côtés numérotés cycliquement

$$a_1, a_1, a_2, a_2, \dots, a_g, a_g)$$

comme sur la figure de droite ci-dessus. Elle admet donc une structure de CW-complexe ayant un seul sommet, $\frac{2g}{2} = g$ arêtes et une seule cellule de dimension 2, ce qui permet de retrouver que

$$\chi(\Sigma_g^{\text{no}}) = 1 - g + 1 = 2 - g .$$

De même, le théorème de van Kampen permet de retrouver le calcul du groupe fondamental de Σ_g^{no} .

7.3 Classification lisse des surfaces à bord compactes connexes

Le but de cette partie est de montrer que toute surface à bord S , lisse, compacte et connexe, est C^∞ -difféomorphe à une des surfaces construites dans la partie précédente, en utilisant des fonctions de Morse.

Nous renvoyons par exemple à [Moi] pour le fait (spécifique aux dimensions au plus 3, en particulier le cas qui nous intéresse de la dimension 2) qu'il n'y a pas de différence entre la classification des surfaces lisses à C^∞ -difféomorphisme près, et la classification des surfaces topologiques à homéomorphisme près. Nous renvoyons à [Rey] pour une excellente exposition de la classification topologique des surfaces compactes connexes, et à [Ker, Ric] pour la classification topologique des surfaces connexes non compactes. Nous suivrons les références [Gra, Hir] dans cette partie.

Un *point selle* d'une surface lisse munie d'une fonction de Morse lisse est un point critique d'indice 1.

Théorème 7.12. *Une surface à bord S , lisse, compacte et connexe, est C^∞ -difféomorphe à $\Sigma_{g,n}$ pour un unique couple $(g, n) \in \mathbb{N}^2$ si elle est orientable, et à $\Sigma_{g,n}^{\text{no}}$ pour un unique couple $(g, n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times \mathbb{N}$ sinon.*

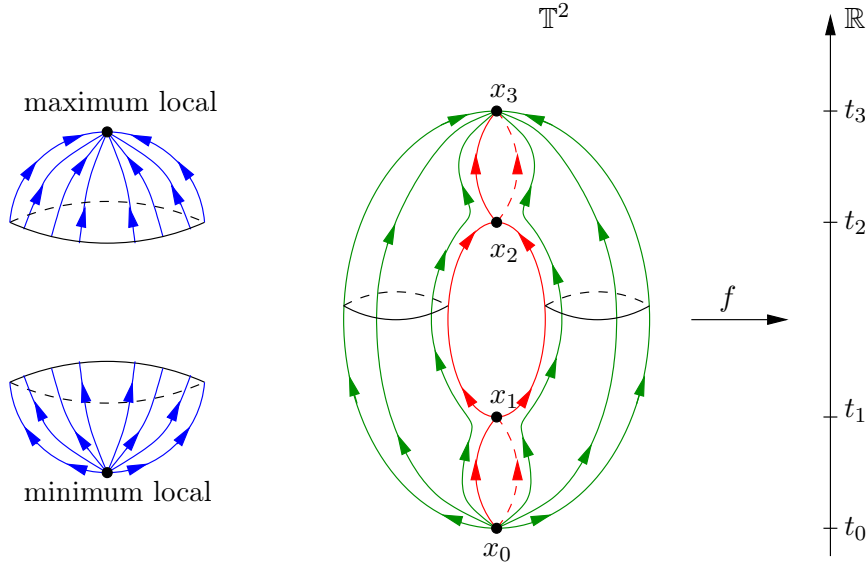
L'unicité découle de la proposition 7.10 (2). Donc le théorème 7.12 est un théorème de classification complet, à C^∞ -difféomorphisme près, des surfaces compactes connexes.

Démonstration. En recollant de manière lisse un disque sur chaque composante connexe de bord (de manière indifférente par les lemmes 7.1 et 7.6), en appliquant le théorème de classification lisse pour les surfaces compactes connexes à bord vide, puis en refaisant le même nombre de trous¹³³ (de manière indifférente par le lemme de Cerf-Palais 7.5 et les lemmes 7.1 et 7.6), nous pouvons supposer que le bord de S est vide.

Par le théorème de plongement de Whitney 4.18, nous supposons qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que S soit une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^m$. Par le corollaire 6.10, soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse, ayant (par compacité de S) un nombre fini de points critiques, avec un seul point critique par niveau critique. Rappelons (voir la remarque 6.3) que par le lemme de Morse, les points critiques d'indice 0 de f sont les minima locaux de f et les points critiques d'indice 2 de f sont les maxima locaux de f .

Puisque S est compacte, le gradient ∇f de f (défini par le produit scalaire de $\mathbb{R}^m$, voir la démonstration du théorème 6.15) est un champ de vecteurs complet sur M . Les courbes intégrables non réduites à un point de ∇f , le long desquelles la fonction f est strictement croissante, sont définies sur $\mathbb{R}$ par complétude et convergent toutes en $+\infty$ et en $-\infty$ vers un point critique. En effet, toute valeur d'adhérence en $\pm\infty$ (qui existe par compacité) doit être un point critique par le comportement du flot au voisinage d'un point régulier, voir le théorème 6.14. De plus, l'ensemble A_- des valeurs d'adhérence en $-\infty$ et celui A_+ en $+\infty$ sont connexes, par la connexité de $[0, +\infty[$ (et le théorème de l'arbre et de l'écorce). Or les points critiques sont isolés, donc $A_\pm$ est une partie discrète non vide connexe, par conséquent réduite à un et un seul point. En conclusion, les courbes intégrables convergent en $+\infty$ vers un point critique de S d'indice 1 ou 2 (car il ne peut pas être un minimum local) et en $-\infty$ vers un point critique de S d'indice 0 ou 1 (car il ne peut pas être un maximum local).

133. Le poinçonneur des Lilas, Serge Gainsbourg <https://www.youtube.com/watch?v=eWkWCFzkOvU> : « des petits trous, des petits trous, encore des petits trous ».



Le dessin ci-dessus donne le comportement du flot du gradient de f au voisinage d'un minimum local et d'un maximum local (avec convergence en $-\infty$ et $+\infty$ respectivement des courbes vers ces extrema), ainsi qu'une représentation schématique des courbes intégrables du gradient de la fonction de hauteur $f : (x, y, z) \mapsto z$ sur le tore de révolution $\mathbb{T}^2$ vertical définie en début de la partie 6 : toutes les orbites partent en $-\infty$ du minimum global x_0 et arrivent en $+\infty$ au maximum global x_3 sauf

- les quatre orbites critiques (constantes),
- deux orbites partant en $-\infty$ de x_0 et arrivant en $+\infty$ en x_1 ,
- deux orbites partant en $-\infty$ de x_1 et arrivant en $+\infty$ en x_2 ,
- deux orbites partant en $-\infty$ de x_2 et arrivant en $+\infty$ en x_3 .

Raisonnons par récurrence sur le nombre ν de points selle de f .

Si $\nu = 0$, alors toute courbe intégrale de ∇f converge en $+\infty$ vers un maximum local de f car il n'y a pas de point selle. Par la connexité de S , l'ensemble Ω des points réguliers de f , qui est égal à la surface S privé d'un nombre fini de points, est connexe.

Pour tout maximum local x de f , montrons que l'ensemble Ω_x des points de Ω dont la courbe intégrale converge vers x en $+\infty$ est ouvert dans Ω . En effet, comme vu ci-dessus, il existe un voisinage ouvert V de x dans S tel que l'orbite positive $\{\phi_t(y) : t \geq 0\}$ de tout point de V soit contenue dans V et converge vers x en $+\infty$. Pour tout $z \in \Omega_x$, fixons $T > 0$ tel que $\phi_T(z) \in V$. Par la régularité du flot en fonction des conditions initiales, si $z' \in S$ est assez proche de z , alors $\phi_T(z') \in V$, et donc $\phi_t(z') = \phi_{t-T}(\phi_T(z'))$ converge vers x quand $t \rightarrow +\infty$.

Or Ω est la réunion disjointe des Ω_x lorsque x parcourt l'ensemble des maxima locaux. Donc par la connexité de Ω (qui ne peut pas s'écrire comme une union disjointe de deux ouverts non vides), l'application f admet un seul maximum local. En remplaçant f par $-f$, nous obtenons aussi qu'elle admet un seul minimum local. Donc la fonction de Morse f admet seulement deux points critiques. Par le corollaire 7.7 de reconnaissance de la sphère lisse de dimension 2, la surface S est C^∞ -difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}_2$.

Supposons donc que $\nu \geq 1$. Notons z le point selle le plus bas de f , c'est-à-dire tel que pour tout autre point selle z' de f , nous ayons $f(z) < f(z')$ (ce qui est possible car chaque niveau critique ne contient qu'un seul point critique).

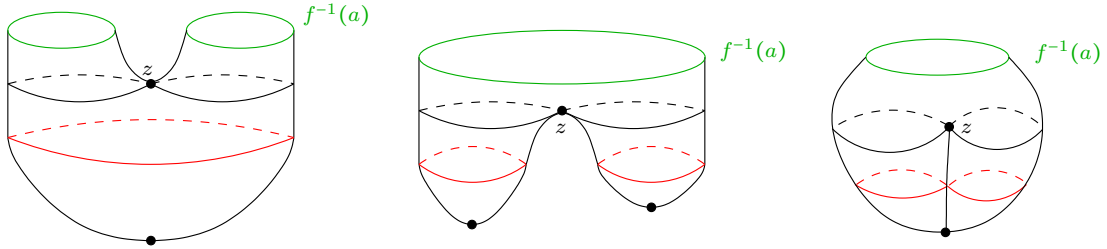
Lemme 7.13. *Si a est une valeur régulière de f qui appartient à l'image de f , alors une composante connexe M du sous-niveau $S_{\leq a} = f^{-1}(]-\infty, a])$ qui ne contient pas de point selle est un disque (fermé, plongé de manière lisse) dont le bord est contenu dans le niveau $S_a = f^{-1}(a)$, et ne contenant qu'un seul point critique, qui est un minimum local de f .*

Démonstration. L'intersection $M \cap S_a$ est non vide par la connexité de S et puisque le niveau S_a est non vide. Les courbes intégrales en temps négatifs de ∇f , partant au temps $t = 0$ de $M \cap S_a$ convergent quand t tend vers $+\infty$ vers un unique minimum local x de f appartenant à M par la connexité de M (par un argument semblable au précédent). Par le lemme de Morse, si $\epsilon > 0$ est assez petit, alors $f(x) + \epsilon < a$ et la composante connexe D du sous-niveau $S_{\leq f(x) + \epsilon}$ contenant x est C^∞ -difféomorphe au disque $\mathbb{B}_2$. Notons que D est contenue dans M car $x \in M$. Puisque $M \cap f^{-1}([f(x) + \epsilon, a])$ ne contient pas de point critique, le théorème 6.15 montre que $A = M \cap f^{-1}([f(x) + \epsilon, a])$ est C^∞ -difféomorphe à l'anneau $\Sigma_{0,2}$ et vérifie $A \cap D = \partial D$. Donc $M = A \cup D$ est C^∞ -difféomorphe au recollement de l'anneau sur le disque (par un C^∞ -difféomorphisme envoyant le bord du disque sur l'une des deux composantes connexes du bord de l'anneau). Par conséquent, M est C^∞ -difféomorphe au disque. Le seul point critique de f dans M est le minimum local x . $\square$

Lemme 7.14. *Soit S une surface lisse compacte connexe, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse lisse, a une valeur régulière de f telle que $f^{-1}(a) \neq \emptyset$ et le sous-niveau $S_{\leq a} = f^{-1}(]-\infty, a])$ ne contiennent qu'un seul point selle z . Alors la composante connexe M de $S_{\leq a}$ contenant z est une sous-surface à bord de S qui est C^∞ -difféomorphe*

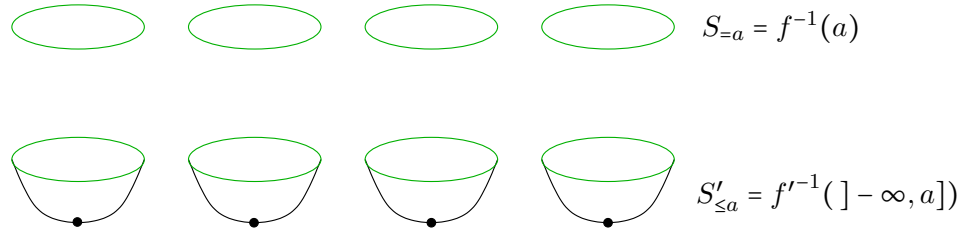
- *ou bien à un anneau $\Sigma_{0,2}$ ayant ses deux composantes connexes dans $f^{-1}(a)$, contenant un seul minimum local,*
- *ou bien à un disque $\Sigma_{0,1}$, dont le bord est contenu dans $f^{-1}(a)$, ayant deux minima locaux*
- *ou bien à un plan projectif réel troué $\Sigma_{1,1}^{\text{po}}$, dont le bord est contenu dans $f^{-1}(a)$, contenant un seul minimum local.*

Le dessin ci-dessous représente, de la gauche vers la droite, les trois possibilités du lemme ci-dessus. La partie en dessous de la courbe rouge dans le dessin de droite est bien un disque plongé dans la surface (et la courbe rouge est donc un cercle dans la surface), mais le dessin dans $\mathbb{R}^3$ ne permet pas de le montrer aussi comme un disque plongé dans $\mathbb{R}^3$. Toujours dans ce dessin de droite, la partie entre le cercle vert et le cercle rouge est un ruban de Möbius troué, voir le dernier dessin avant la partie 7.4.



Avant de démontrer ce lemme, montrons comment il implique le théorème de classification 7.12. Le niveau régulier $S_a = \partial(f^{-1}([a, +\infty[))$ est une sous-variété lisse compacte de dimension 1, donc une union finie disjointe de cercles, par le théorème de classification 5.7. Notons S' la surface lisse (pas forcément connexe) compacte à bord vide obtenue en

recollant de manière lisse sur le sur-niveau $f^{-1}([a, +\infty[)$ (qui est une sous-surface compacte lisse à bord), dont le bord est le niveau $S_{=a}$, un disque (le long de son bord) sur chaque composante connexe de $S_{=a}$. Il est de plus possible d'étendre, en une fonction de Morse lisse f' sur la surface S' , la restriction $f|_{f^{-1}([a, +\infty[)}$, que sorte que l'extension ait exactement un minimum local (et pas d'autres points critiques) dans chacun des disques rajoutés. Alors S' est une surface compacte (à bord vide) munie d'une fonction de Morse f' ayant un point selle de moins que f . Par récurrence, chaque composante connexe de S' est donc une des surfaces modèles de la partie 7.2. De plus, S' est connexe, sauf si M est un anneau dont les deux composantes de bord appartiennent à deux composantes connexes disjointes du sur-niveau $f^{-1}([a, +\infty[)$.



En appliquant l'hypothèse de récurrence à chacune des composantes connexes de S' , nous obtenons le résultat, car S est obtenue à partir de S' , à C^∞ -difféomorphisme près, en fonction des trois possibilités portant sur la composante M obtenues dans le lemme 7.14, par respectivement

- recollement d'une anse, si M est un anneau, donc S est la somme connexe des deux composantes connexes de S' si S' n'est pas connexe, et si S' est connexe, alors M est un anneau dont les deux composantes de bord appartiennent la même composante connexe du sur-niveau $f^{-1}([a, +\infty[)$, et donc S est la somme connexe avec un tore $\mathbb{T}^2$ ou avec une bouteille de Klein, en fonction de la préservation ou pas de l'orientation par les applications de recollement de l'anse,
- somme connexe avec une sphère, si M est un disque (il est aussi possible de modifier la fonction de Morse f de sorte qu'elle ait un point selle de moins), donc en fait S est C^∞ -difféomorphe à S' ,
- somme connexe avec un plan projectif, si M est un plan projectif réel troué, donc S est difféomorphe à une des surfaces modèles.

Démonstration du lemme 7.14. Quitte à remplacer f par $f - f(z)$, nous pouvons supposer que $f(z) = 0$. Soit $\epsilon \in]0, a[$ suffisamment petit, pour que 0 soit la seule valeur critique dans $[-\epsilon, +\epsilon]$. Montrons que si ϵ est assez petit, la composante connexe M' de $f^{-1}([-\epsilon, +\epsilon])$ contenant z est C^∞ -difféomorphe

- ou bien à un pantalon $\Sigma_{0,3}$ ayant exactement deux composantes connexes de bord dans le niveau $f^{-1}(+\epsilon)$, et l'autre dans $f^{-1}(-\epsilon)$,
- ou bien à un pantalon $\Sigma_{0,3}$ ayant exactement une composante connexe de bord dans le niveau $f^{-1}(+\epsilon)$, et les deux autres dans $f^{-1}(-\epsilon)$,
- ou bien à un plan projectif réel à deux trous $\Sigma_{1,2}^{\text{no}}$ ayant exactement une composante connexe de bord dans le niveau $f^{-1}(+\epsilon)$, et l'autre dans $f^{-1}(-\epsilon)$.

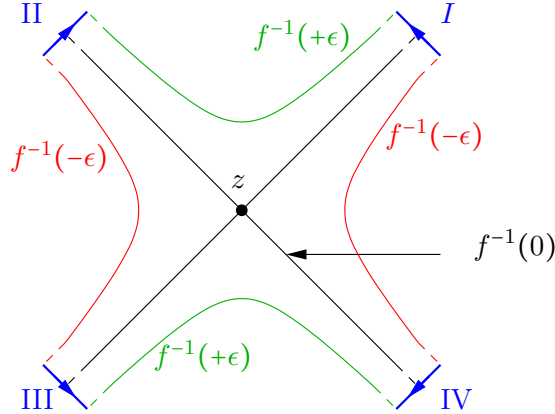
Le lemme 7.14 découle alors de cette affirmation, comme suit. Chaque composante connexe de $M \cap f^{-1}([-\infty, -\epsilon])$ est un disque par le lemme 7.13. Comme $f^{-1}(+\epsilon)$ est une sous-variété compacte de dimension 1 (à bord vide), donc une union finie disjointe de

cercles, le sous-espace $f^{-1}(] + \epsilon, a])$ est, par le théorème 6.15, une union finie disjointe de cylindres. Par la trichotomie ci-dessus, la composante M' possède au moins une composante connexe de bord contenue dans le niveau $f^{-1}(+ \epsilon)$, et une dans $f^{-1}(- \epsilon)$. Si M' est un pantalon ayant deux (respectivement une) composantes de bord dans le niveau $f^{-1}(+ \epsilon)$, alors M est un anneau comme dans la première conclusion du lemme (respectivement un disque comme dans la deuxième conclusion du lemme). Enfin, si M' est un plan projectif réel à deux trous, alors M est un plan projectif réel à un trou comme dans la troisième conclusion du lemme.

Par le lemme de Morse, prenons un paramétrage local (W, φ) de S en z tel que $\varphi(0) = z$ et

$$f \circ \varphi(x, y) = -x^2 + y^2$$

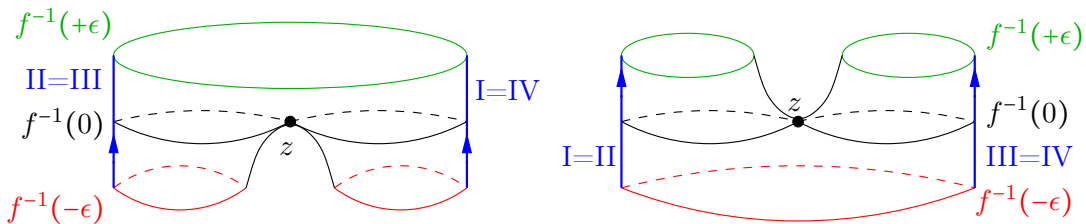
si (x, y) est assez proche de 0 dans W . Comme le niveau critique $f^{-1}(0)$ privé de z est une sous-variété de dimension 1, et par leur théorème de classification 5.7, $M' \cap f^{-1}(0)$ est homéomorphe au symbole 8 (ou au symbole ∞ , bref à un bouquet de 2 cercles!). En suivant les niveaux réguliers quitte à réduire ϵ , nous obtenons par connexité que M' est C^∞ -difféomorphe à un recollement des côtés pairs (contenus dans des courbes intégrales du gradient de f) d'un octogone, dont les côtés impairs, après recollement de leurs extrémités, correspondent aux deux sous-variétés $f^{-1}(+ \epsilon)$ et $f^{-1}(- \epsilon)$.



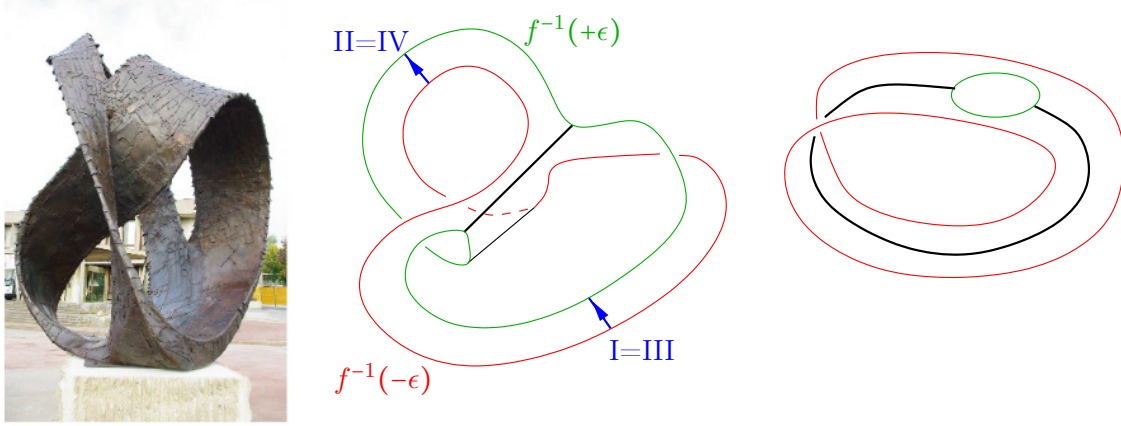
Numérotons cycliquement par I, II, III, IV (dans le sens trigonométrique) les côtés pairs à recoller de l'octogone, comme sur la figure ci-dessus. Ils sont orientés par la direction du gradient de f , et les recollements doivent préserver l'orientation de ces segments.

Si les côtés I et IV sont recollés, alors les côtés III et II le sont, et M' est un pantalon, ayant deux composantes connexes dans le niveau $f^{-1}(- \epsilon)$ et une dans le niveau $f^{-1}(+ \epsilon)$. Voir le dessin de gauche ci-dessous.

Si les côtés I et II sont recollés, alors les côtés III et IV le sont, et M' est un pantalon, ayant une composante connexe dans le niveau $f^{-1}(- \epsilon)$ et deux dans le niveau $f^{-1}(+ \epsilon)$. Voir le dessin de droite ci-dessous.



Enfin, si les côtés I et III sont recollés, alors les côtés II et IV le sont, et puisque les recollements préservent les niveaux, la sous-variété M' n'est pas orientable, elle a deux composantes connexes de bord, une dans le niveau $f^{-1}(-\epsilon)$ et une dans le niveau $f^{-1}(+\epsilon)$.



De plus, M' est un ruban de Möbius à un trou, donc un plan projectif réel à deux trous. Ceci termine la démonstration du lemme 7.14, donc du théorème de classification 7.12. $\square\square$

7.4 Autres exercices

Exercice E.88. (Courbes fermées simples) Une *courbe fermée simple* dans une surface lisse à bord Σ est l'image (encore notée c) d'un plongement $c : \mathbb{S}_1 \rightarrow \Sigma$ de classe C^∞ du cercle $\mathbb{S}_1$ dans Σ .

- Elle est dite *essentielle* si l'application $c_* : \pi_1(\mathbb{S}_1, 1) \rightarrow \pi_1(\Sigma, c(1))$ induite sur les groupes fondamentaux est injective (ce qui ne dépend pas du choix de point base sur le cercle ni du paramétrage de c).

- Elle est dite *séparante* si le complémentaire $\Sigma \setminus c(\mathbb{S}_1)$ de son image dans Σ n'est pas connexe.

- Elle est dite *préservant l'orientation transverse* (respectivement *renversant l'orientation transverse*) s'il existe une application $v : [0, 1] \rightarrow T\Sigma$ de classe C^∞ telle que pour tout $t \in [0, 1]$, nous ayons $v(t) \in T_{c(e^{2\pi it})}\Sigma$ (que nous appellerons un *champ de vecteurs le long de c*), telle que $(\dot{c}(e^{2\pi it}), v(t))$ soit une base de $T_{c(e^{2\pi it})}\Sigma$ pour tout $t \in [0, 1]$ et telle que $v(1) = v(0)$ (respectivement $v(1) = -v(0)$). Ceci ne dépend pas du choix du paramétrage de c .

Dans la suite, nous fixons $g \in \mathbb{N}$ et Σ_g une surface lisse compacte connexe orientable (à bord vide) de genre g .

- (1) a) Montrer qu'une courbe fermée simple c dans Σ_g préserve l'orientation transverse et admet un voisinage compact dans Σ_g qui est une sous-variété à bord C^∞ -difféomorphe à l'anneau $\Sigma_{0,2} = \mathbb{S}_1 \times [-1, 1]$ par un C^∞ -difféomorphisme ψ envoyant c sur $\mathbb{S}_1 \times \{0\}$. ¹³⁴

134. Ceci est un cas particulier du théorème du voisinage tubulaire mentionné dans la démonstration du lemme 7.1 (1). Si c est une courbe fermée simple renversant l'orientation transverse dans une surface lisse S , le même argument que celui dans le cas préservant l'orientation transverse montre que c admet un voisinage compact dans Σ_g qui est une sous-variété à bord C^∞ -difféomorphe au ruban de Möbius (celui qui est compact) par un C^∞ -difféomorphisme envoyant c sur l'âme du ruban de Möbius (voir l'exercice E.7). La surface S n'est alors pas orientable.

b) Montrer que si c est séparante, il existe deux surfaces compactes connexes orientables à bord Σ_- et Σ_+ , chacune à bord non vide connexe, et un C^∞ -difféomorphisme $f : \partial\Sigma_+ \rightarrow \partial\Sigma_-$ tels que Σ_g soit C^∞ -difféomorphe à la surface recollement $\Sigma_+ \cup_f \Sigma_-$ par un C^∞ -difféomorphisme envoyant c sur l'image de $\partial\Sigma_\pm$ dans $\Sigma_+ \cup_f \Sigma_-$. La réunion disjointe $\Sigma^c = \Sigma_+ \amalg \Sigma_-$ est appelée la *surface Σ_g découpée le long de c* .

Montrer que si c est non séparante, il existe une surface compacte connexe orientable à bord Σ^c dont le bord a exactement deux composantes connexes C_+ et C_- et un C^∞ -difféomorphisme $f : C_+ \rightarrow C_-$, renversant l'orientation par la direction sortante,¹³⁵ tels que Σ_g soit C^∞ -difféomorphe à la surface quotient¹³⁶ $\Sigma^c/\mathcal{R}$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ engendrée par l'identification de $x \in C_+$ et $f(x) \in C_-$, par un C^∞ -difféomorphisme envoyant c sur l'image de $C_\pm$ dans $\Sigma^c/\mathcal{R}$. La surface Σ^c est appelée la *surface Σ_g découpée le long de c* .

- (2) Montrer qu'une courbe fermée simple non essentielle c dans Σ_g est le bord d'un plongement d'un disque $\mathbb{B}_2$ dans Σ_g . En déduire le *théorème de Jordan* lisse, disant que si $c : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe fermée simple (au sens ci-dessus), alors $\mathbb{R}^2 \setminus c$ admet deux composantes connexes, l'une bornée et dont l'adhérence est une sous-variété à bord C^∞ -difféomorphe au disque fermé $\mathbb{B}_2$, l'autre non bornée et dont l'adhérence est une sous-variété à bord C^∞ -difféomorphe à $\mathbb{B}_2 \setminus \{0\}$.
- (3) Montrer qu'il n'existe pas de courbe fermée simple essentielle sur la sphère $\Sigma_0 = \mathbb{S}_2$.
- (4) Si $g = 1$, montrer qu'aucune courbe fermée simple séparante de Σ_g n'est essentielle.
- (5) Notons C_g l'ensemble des classes d'équivalence $[c]$ de courbes fermées simples c sur la surface Σ_g modulo C^∞ -isotopie¹³⁷ lisse et reparamétrage. Notons $\text{Diff}(\Sigma_g)$ le groupe des C^∞ -difféomorphismes de Σ_g , qui agit sur C_g par l'application $(\phi, [c]) \mapsto [\phi \circ c]$. Montrer que le nombre d'orbites de cette action est fini, et calculer le cardinal

$$\text{Card}(\text{Diff}(\Sigma_g) \backslash C_g) < +\infty.$$

Montrer que $\text{Diff}(\Sigma_g)$ agit transitivement sur le sous-ensemble de C_g des classes de courbes fermées simples non séparantes. Montrer que le sous-groupe $\text{Diff}_0(\Sigma_g)$ de $\text{Diff}(\Sigma_g)$, formé des C^∞ -difféomorphismes de Σ_g qui sont C^∞ -isotopes à l'identité, agit transitivement sur le sous-ensemble de C_g des classes de courbes fermées simples non essentielles.

- (6) Soit c une courbe fermée simple séparante dans Σ_g . Montrer que le groupe $c_*(\pi_1(\mathbb{S}_1, 1))$ image de c_* est contenu dans le groupe dérivé $[\pi_1(\Sigma_g, c(1)), \pi_1(\Sigma_g, c(1))]$.
- (7) Soit c une courbe fermée simple non séparante dans Σ_g . Construire un revêtement double $p : \tilde{\Sigma}_g \rightarrow \Sigma_g$ de Σ_g dans lequel $p^{-1}(c)$ est une courbe fermée simple non séparante.
- (8) Soit c une courbe fermée simple essentielle séparante. Construire un revêtement double $p : \tilde{\Sigma}_g \rightarrow \Sigma_g$ de Σ_g dans lequel $p^{-1}(c)$ est la réunion disjointe de deux courbes fermées simples non séparantes.

135. Par la connexité de Σ_+ , ceci ne dépend pas du choix d'une des deux orientations de Σ_+ .

136. La structure lisse de ce quotient est construite de la même manière que dans le lemme 7.1 en recollant des colliers de C_+ et C_- dans Σ^c .

137. Voir la définition de deux plongements C^∞ -isotopes dans le début de la partie 7.1.

Exercice E.89. (Décomposition en pantalons) Soient $g, g', b, b' \in \mathbb{N}$, notons $\Sigma_{g,b}$ une surface lisse compacte connexe orientable de genre g avec b composantes de bord. Rappelons que si $g = 0$ et $b = 3$, une telle surface est appelée un *pantalon*. Une *décomposition en pantalons* de $\Sigma_{g,b}$ est un ensemble fini $\{c_1, \dots, c_k\}$ de courbes fermées simples dans la surface $\Sigma_{g,b} \setminus \partial\Sigma_{g,b}$ deux à deux disjointes tel que chaque composante connexe de la surface $\Sigma_{g,b} \setminus (\partial\Sigma_{g,b} \cup c_1 \cup \dots \cup c_k)$ soit un pantalon privé de son bord.

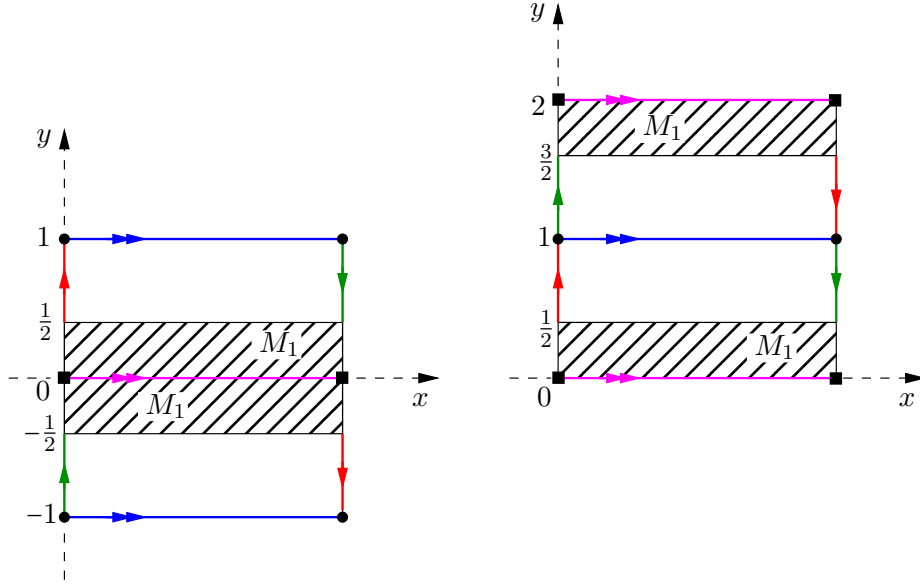
- (1) Soient D une composante connexe du bord de $\Sigma_{g,b}$ et D' une composante connexe du bord de $\Sigma_{g',b'}$. Soient $f : D \rightarrow D'$ un C^∞ -difféomorphisme et $S = \Sigma_{g,b} \cup_f \Sigma_{g',b'}$ la surface lisse ¹³⁸ à bord recollement de $\Sigma_{g,b}$ et $\Sigma_{g',b'}$ par f . Calculer $\chi(S)$ en fonction de $\chi(\Sigma_{g,b})$ et $\chi(\Sigma_{g',b'})$.
- (2) Soient D et D' deux composantes de bord distinctes de $\Sigma_{g,b}$. Soient $f : D \rightarrow D'$ un difféomorphisme et $S = \Sigma_{g,b}/\mathcal{R}$ la surface lisse à bord recollement de $\Sigma_{g,b}$ par f , où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $x \sim f(x)$ pour tout $x \in D$. Calculer $\chi(S)$ en fonction de $\chi(\Sigma_{g,b})$.
- (3) Montrer que la surface $\Sigma_{g,b}$ admet une décomposition en pantalons si et seulement si $\chi(\Sigma_{g,b}) < 0$.
- (4) Soit $\{c_1, \dots, c_k\}$ une décomposition en pantalons de $\Sigma_{g,b}$. Montrer que le nombre de composantes connexes de $\Sigma_{g,b} \setminus (c_1 \cup \dots \cup c_k)$ est égal à $2g - 2 + b$ et que le nombre de courbes fermées simples définissant une décomposition en pantalons est égal à

$$k = 3g - 3 + b.$$

7.5 Indications pour la résolution des exercices

Correction de l'exercice E.86. Comme vu dans l'exercice E.27, la bouteille de Klein $\mathbb{K}_2$ est obtenue comme la variété quotient (voir la proposition 4.16) du plan $\mathbb{R}^2$ par une action lisse, propre et libre d'un groupe discret d'isométries affines de $\mathbb{R}^2$, revenant à recoller les côtés opposés du carré $C = [0, 1] \times [-1, 1]$, par l'identification par la translation $(t, -1) \mapsto (t, 1)$ des côtés horizontaux $[0, 1] \times \{-1\}$ et $[0, 1] \times \{1\}$, et par l'identification par la translation tordue $(0, t) \mapsto (1, -t)$ des côtés verticaux $\{0\} \times [-1, 1]$ et $\{1\} \times [-1, 1]$.

¹³⁸. Voir la note de bas de page 136.

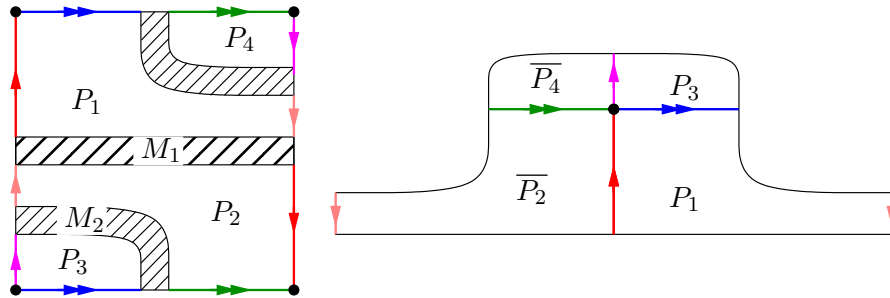


Considérons l'image M_1 dans $\mathbb{K}_2$ de la bande $[0, 1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ horizontale de C , qui est un ruban de Möbius (fermé) plongé dans $\mathbb{K}_2$.

L'adhérence du complémentaire de M_1 dans $\mathbb{K}_2$, que nous pouvons aussi voir comme la bande $[0, 1] \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ avec l'identification par $(0, t) \mapsto (1, 2-t)$ des côtés verticaux $\{0\} \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ et $\{1\} \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, est aussi un ruban de Möbius (fermé) plongé dans $\mathbb{K}_2$.

Comme le plan projectif privé de l'intérieur d'un disque fermé plongé est C^∞ -difféomorphe au ruban de Möbius, et par l'invariance à C^∞ -difféomorphisme près des sommes connexes en les données de recollement, la somme connexe $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est C^∞ -difféomorphe à $\mathbb{K}_2$.

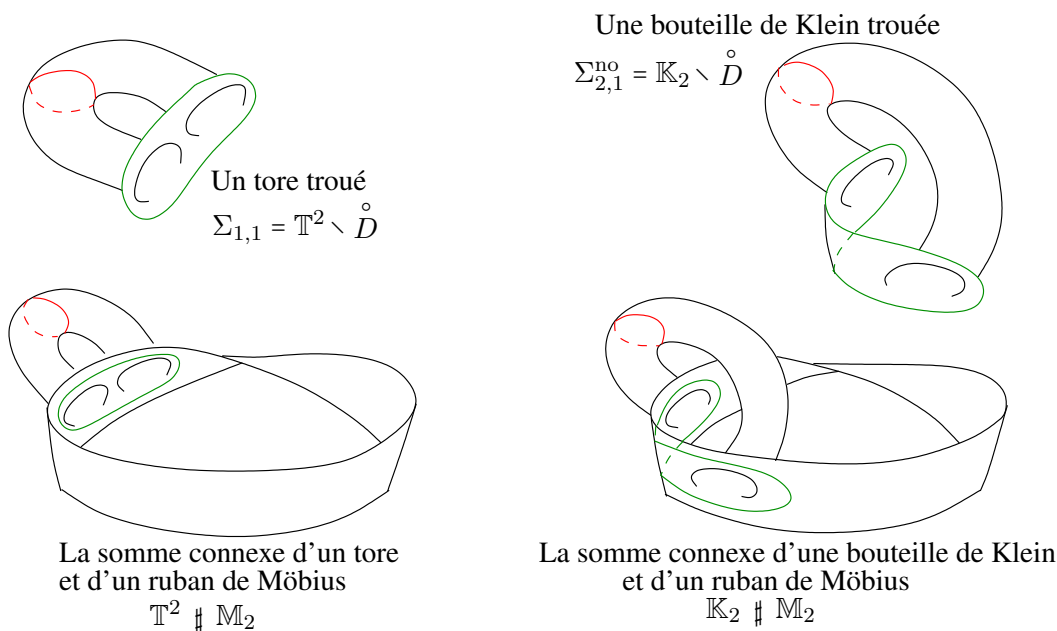
Une manière de voir la bouteille de Klein comme recollement d'une anse entre deux plans projectifs réels est la suivante. La réunion des images dans $\mathbb{K}_2$ des deux rubans (fermés) hachurés curvilignes de C dans le dessin ci-dessous est aussi un ruban de Möbius (fermé) plongé dans $\mathbb{K}_2$.



L'image A dans $\mathbb{K}_2$ des adhérences des quatre composantes connexes P_1, P_2, P_3 et P_4 du complémentaire de la réunion des trois parties hachurées dans C est C^∞ -difféomorphe à l'anneau $\mathbb{S}_1 \times [0, 1]$, et donc $\mathbb{K}_2$ est C^∞ -difféomorphe au recollement de A sur deux copies M_1 et M_2 du plan projectif privé de l'intérieur d'un disque fermé plongé, chaque composante connexe du bord de A étant envoyé sur le bord de l'une de ces deux copies (rappelons que le bord du ruban de Möbius est constitué d'un seul cercle).

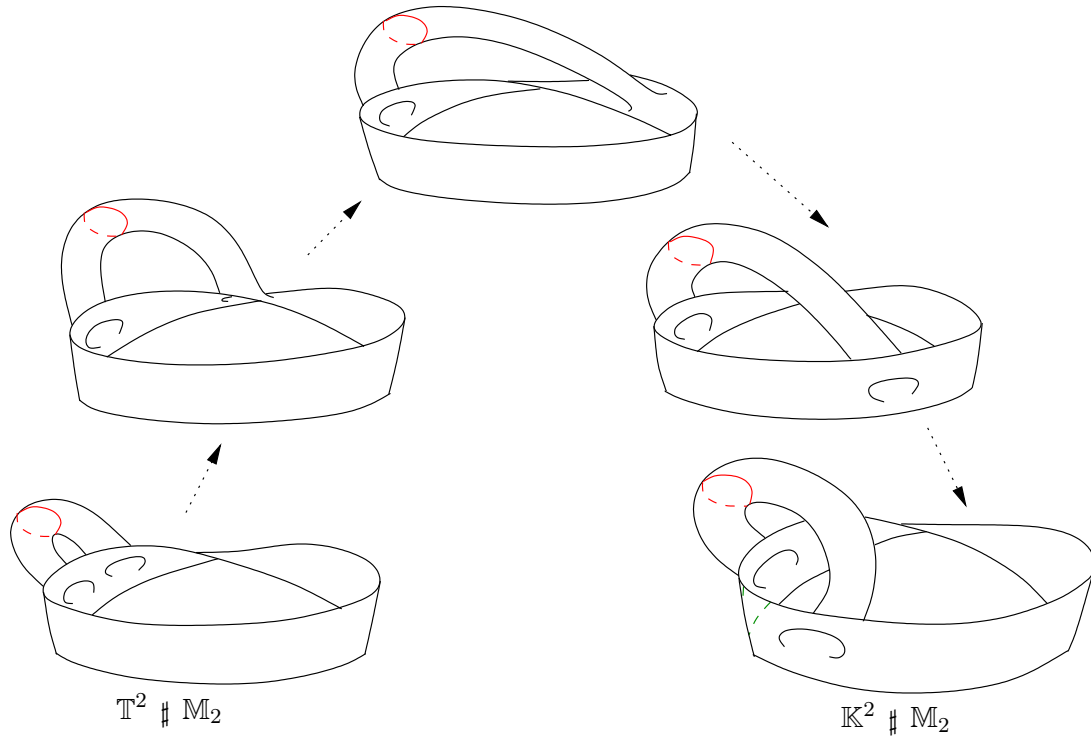
Correction de l'exercice E.87. Par les propriétés d'associativité et de commutativité à C^∞ -difféomorphisme près des sommes connexes, et par récurrence, il suffit de montrer que la somme connexe $\Sigma_{1,0}^{\text{no}} \# \Sigma_{1,0} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \# \mathbb{T}^2$ est C^∞ -difféomorphe à la somme connexe triple $\Sigma_{3,0}^{\text{no}} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, ou à la somme connexe $\mathbb{K}_2 \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, par l'exercice E.86.

Comme faire un trou (en enlevant l'intérieur d'un disque fermé plongé), puis effectuer un C^∞ -difféomorphisme, puis recoller un disque sur l'image du bord du trou ne change pas la classe de C^∞ -difféomorphisme, et puisque le plan projectif troué $\Sigma_{1,1}^{\text{no}}$ est C^∞ -difféomorphe au ruban de Möbius (compact) $\mathbb{M}_2$, il suffit en fait de montrer que la somme connexe $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{M}_2$ est C^∞ -difféomorphe à $\mathbb{K}^2 \# \mathbb{M}_2$. Le dessin ci-dessous¹³⁹ représente ces deux surfaces.



Le résultat découle alors des dessins suivant, qui expliquent qu'en faisant glisser une anse le long d'un ruban de Möbius, on passe par C^∞ -isotopie de la somme connexe $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{M}_2$ d'un tore et d'un ruban de Möbius à la somme connexe $\mathbb{K}^2 \# \mathbb{M}_2$ d'une bouteille de Klein et d'un ruban de Möbius.

139. Il est extrait, comme le suivant, du très joli livre de J. Weeks, "The shape of space", 2nd ed., Mono. Text. Pure Appl. Math. **249**, Dekker, 2002.



Correction de l'exercice E.88. (1) a) Par partition de l'unité, il est possible de construire un champ de vecteurs le long de c tel que $(\dot{c}(e^{2\pi it}), v(t))$ soit une base de $T_{c(e^{2\pi it})}\Sigma$ pour tout $t \in [0, 1]$. Si les vecteurs $v(0)$ et $v(1)$ ne sont pas dans la même composante connexe de $T_{c(1)}\Sigma_g \setminus \mathbb{R}\dot{c}(1)$, alors les bases $(\dot{c}(1), v(0))$ et $(\dot{c}(1), v(1))$ ne sont pas dans une même orientation de $T_{c(1)}\Sigma_g$. Ceci contredit le fait que Σ_g est orientable. Quitte à modifier $v(t)$ pour t proche de 1 dans une carte locale de Σ_g en $c(1)$, nous pouvons alors supposer que $v(0) = v(1)$. Par carte locale et partition de l'unité, nous pouvons étendre v en un champ de vecteurs lisse sur tout Σ_g . Puisque Σ_g est compact, ce champ de vecteurs est complet. Notons $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ son flot. Puisque c est compact et puisque v ne s'annule pas le long de la courbe c , il existe $\epsilon > 0$ tel que l'application de $c \times [-\epsilon, +\epsilon]$ dans Σ_g définie par $(x, t) \mapsto \phi_t(x)$ soit un C^∞ -difféomorphisme sur un voisinage compact de c , envoyant $c \times \{0\}$ sur c . Comme $c \times [-\epsilon, +\epsilon]$ est C^∞ -difféomorphe à l'anneau $\mathbb{S}_1 \times [-1, 1]$ par un C^∞ -difféomorphisme qui envoie $c \times \{0\}$ sur $\mathbb{S}_1 \times \{0\}$, le résultat en découle par composition.

b) Notons ψ le C^∞ -difféomorphisme de la question a). Notons Σ^c la surface Σ_g privée de l'anneau ouvert $\psi(\mathbb{S}_1 \times]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[)$, qui est une surface lisse compacte à bord, ayant deux composantes connexes de bord $C_\pm = \psi(\mathbb{S}_1 \times \{\pm \frac{1}{2}\})$. La surface Σ^c possède deux composantes connexes si c est séparante, et une seule composante connexe sinon. Munissons Σ^c de l'orientation induite par le choix d'une des deux orientations de Σ_g . Si

$$f : C_- = \psi\left(\mathbb{S}_1 \times \left\{-\frac{1}{2}\right\}\right) \rightarrow C_+ = \psi\left(\mathbb{S}_1 \times \left\{+\frac{1}{2}\right\}\right)$$

est l'application définie par $\psi(x, -\frac{1}{2}) \mapsto \psi(x, \frac{1}{2})$, alors f est un C^∞ -difféomorphisme, renversant l'orientation par la direction sortante, entre les deux composantes connexes du bord de Σ^c . Soit $\alpha : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, 1]$ un C^∞ -difféomorphisme infiniment plat en 0 et en $\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire dont les dérivées de tout ordre en 0 et en $\frac{1}{2}$ sont nulles) tel que $\alpha(0) = 0$ et

$\alpha(\frac{1}{2}) = 1$. Notons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur Σ^c engendrée par l'identification de $x \in C_+$ et $f(x) \in C_-$. Considérons l'application Φ de $\Sigma^c/\mathcal{R}$ dans Σ_g , qui vaut l'identité en dehors de l'image de $\psi(\mathbb{S}_1 \times ([-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]))$, et telle que pour tous les $x \in \mathbb{S}_1$ et $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, nous ayons

$$\Phi(\psi(x, -t)) = \psi(x, -\alpha(t - \frac{1}{2})) \quad \text{et} \quad \Phi(\psi(x, t)) = \psi(x, \alpha(t - \frac{1}{2})) .$$

Alors l'application Φ est bien définie par la construction de $\mathcal{R}$, et est un C^∞ -difféomorphisme de $\Sigma^c/\mathcal{R}$ dans Σ_g par les recollements plats.

(2) Notons Σ^c la surface Σ_g découpée le long de c . Supposons par l'absurde qu'aucune composante connexe de Σ^c n'est un disque. Supposons d'abord que c soit séparante, et notons Σ_+ et Σ_- les deux composantes connexes de Σ^c . Par la classification des surfaces lisses compactes connexes orientables à bord, il existe alors $g_-, g_+ \in \mathbb{N}$ tels que $\Sigma_- = \Sigma_{g_-,1}$ et $\Sigma_+ = \Sigma_{g_+,1}$ (à C^∞ -difféomorphisme près). Par l'hypothèse d'absurdité, g_- et g_+ sont non nuls. Fixons un point base $x_\pm$ sur le bord de $\Sigma_\pm$, tel que $x_+ = f(x_-)$ pour un C^∞ -difféomorphisme $f : \partial\Sigma_- \rightarrow \partial\Sigma_+$ permettant de recoller Σ_+ et Σ_- pour obtenir Σ_g , de sorte que $x_\pm$ s'envoie sur l'origine $c(1)$ du lacet c dans Σ_g . Notons $u_\pm$ la classe d'homotopie d'un lacet en $x_\pm$ dans $\partial\Sigma_\pm$, engendrant $\pi_1(\partial\Sigma_\pm, x_\pm)$, telle que $u_+ = f_*(u_-)$, où $f_* : \pi_1(\partial\Sigma_-, x_-) \rightarrow \pi_1(\partial\Sigma_+, x_+)$ est l'application induite par f sur les groupes fondamentaux. Nous savons que le groupe fondamental $\pi_1(\Sigma_\pm, x_\pm)$ admet pour présentation

$$\langle a_1^\pm, b_1^\pm, \dots, a_{g_\pm}^\pm, b_{g_\pm}^\pm, u_\pm \mid u_\pm = [a_1^\pm, b_1^\pm] \dots [a_{g_\pm}^\pm, b_{g_\pm}^\pm] \rangle .$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'élément $u_\pm^n$ est non trivial si $g_\pm \neq 0$, car ce groupe est égal au groupe libre $L(S)$ sur $S = \{a_1^\pm, b_1^\pm, \dots, a_{g_\pm}^\pm, b_{g_\pm}^\pm\}$, et le mot

$$([a_1^\pm, b_1^\pm] \dots [a_{g_\pm}^\pm, b_{g_\pm}^\pm])^n$$

est un mot réduit sur S , de longueur non nulle si $g_\pm > 0$ et $n > 0$. Considérons le morphisme $\pi_1(\partial\Sigma_-, x_-) \rightarrow \pi_1(\Sigma_-, x_-)$ induit par l'inclusion de $\partial\Sigma_-$ dans Σ_- ainsi que le morphisme $\pi_1(\partial\Sigma_-, x_-) \rightarrow \pi_1(\Sigma_+, x_+)$ induit par la composition de f_* avec le morphisme $\pi_1(\partial\Sigma_+, x_+) \rightarrow \pi_1(\Sigma_+, x_+)$ induit par l'inclusion de $\partial\Sigma_+$ dans Σ_+ , qui sont tous les deux injectifs. En particulier, la somme amalgamée

$$\pi_1(\Sigma_-, x_-) *_{\pi_1(\partial\Sigma_-, x_-)} \pi_1(\Sigma_+, x_+)$$

est un produit amalgamé (voir la remarque (3) de la partie 3.1.1).

Par le théorème de van Kampen, le groupe fondamental

$$\pi_1(\Sigma_g, c(1)) \simeq \pi_1(\Sigma_-, x_-) *_{\pi_1(\partial\Sigma_-, x_-)} \pi_1(\Sigma_+, x_+)$$

admet pour présentation

$$\langle a_1^-, b_1^-, \dots, a_{g_-}^-, b_{g_-}^-, a_1^+, b_1^+, \dots, a_{g_+}^+, b_{g_+}^+ \mid [a_1^-, b_1^-] \dots [a_{g_-}^-, b_{g_-}^-] = [a_1^+, b_1^+] \dots [a_{g_+}^+, b_{g_+}^+] \rangle .$$

Notons pour une utilisation dans la question (3) que nous avons alors $g = g_- + g_+$, par exemple par abélianisation, car nous savons que l'abélianisé de $\pi_1(\Sigma_g)$ est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}^{2g}$ (et par unicité du rang d'un groupe abélien libre de type fini).

La puissance n -ème de la classe d'homotopie du lacet c (ou son inverse) est égale à $([a_1^-, b_1^-] \dots [a_{g_-}^-, b_{g_-}^-])^n$ dans cette présentation, qui n'est pas triviale si g_- , g_+ et n sont

non nuls, car c'est un élément réduit non trivial dans la forme normale des éléments dans le produit amalgamé $\pi_1(\Sigma_-, x_-) *_{\pi_1(\partial\Sigma_-, x_-)} \pi_1(\Sigma_+, x_+)$, voir la partie 3.1.2.

La démonstration dans le cas non séparant est similaire.

Notons que la réciproque de la question (2) est vraie : si Σ^c admet une composante connexe qui est un disque $\Sigma_{0,1} = \mathbb{B}_2$, alors c est non essentielle (car homotope au lacet constant puisque $\mathbb{B}_2$ est contractile).

(3) Comme la sphère $\mathbb{S}_2$ est simplement connexe, il n'existe pas d'application injective de $\pi_1(\mathbb{S}_1, *) \simeq \mathbb{Z}$ dans $\pi_1(\mathbb{S}_2, *) = \{0\}$.

(4) Comme vu dans la question (2), si la surface $\Sigma_{g_-,1} \amalg \Sigma_{g_+,1}$ est le tore $\Sigma_{1,0}$ découpé le long d'une courbe fermée simple séparante c , alors $g_- + g_+ = 1$. Donc nécessairement $g_- = 0$ ou $g_+ = 0$ et c n'est pas essentielle, car elle borde un disque.

(5) Soit $f \in \text{Diff}(\Sigma_g)$. Si c est une courbe fermée simple, alors $f(c)$ l'est aussi, et c est séparante si et seulement si $f(c)$ l'est, car f induit une bijection de l'ensemble des composantes connexes de $\Sigma_g \setminus c$ sur l'ensemble des composantes connexes de $\Sigma_g \setminus f(c)$.

Si c est une courbe fermée simple non séparante de Σ_g , alors la surface Σ_g découpée le long de c est, par la classification des surfaces compactes connexes orientables à bord et le théorème de van Kampen, C^∞ -difféomorphe à $\Sigma_{g-1,2}$. Par l'unicité de la classe de C^∞ -isotopie de C^∞ -difféomorphismes du cercle renversant l'orientation (voir le lemme 7.6), et par l'invariance par C^∞ -isotopie de la classe de C^∞ -difféomorphismes des recollements (en utilisant l'adaptation immédiate du lemme 7.1 lorsque nous recollons une partie des composantes connexes du bord sur une partie disjointe des composantes connexes du bord d'une même variété), le groupe $\text{Diff}(\Sigma_g)$ agit transitivement sur l'ensemble des classes de C^∞ -isotopie de courbes fermées simples non séparantes de Σ_g .

Supposons maintenant que c soit une courbe fermée simple séparante de Σ_g . Alors la surface Σ_g découpée le long de c est, comme vu dans la question (2), par la classification des surfaces compactes connexes orientables à bord et le théorème de van Kampen, C^∞ -difféomorphe à $\Sigma_{g_-,1} \amalg \Sigma_{g_+,1}$ avec $g_- + g_+ = g$ et $0 \leq g_- \leq g_+$ (avec $g_- = 0$ si et seulement si c est non essentielle). Par l'unicité dans ce théorème de classification, un tel couple (g_-, g_+) est unique. Le nombre de tels choix de décompositions (g_-, g_+) de g est $1 + \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$. De plus, si $g' \neq g''$, alors $\Sigma_{g',1}$ et $\Sigma_{g'',1}$ ne sont pas C^∞ -difféomorphes, toujours par le théorème de classification. Comme précédemment, le nombre d'orbites du groupe $\text{Diff}(\Sigma_g)$ sur l'ensemble des classes de C^∞ -isotopie de courbes fermées simples séparantes de Σ_g est donc égal à $1 + \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$.

Au total, nous obtenons que l'ensemble des orbites du groupe $\text{Diff}(\Sigma_g)$ sur l'ensemble des classes de C^∞ -isotopie de courbes fermées simples de Σ_g est de cardinal $2 + \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$.

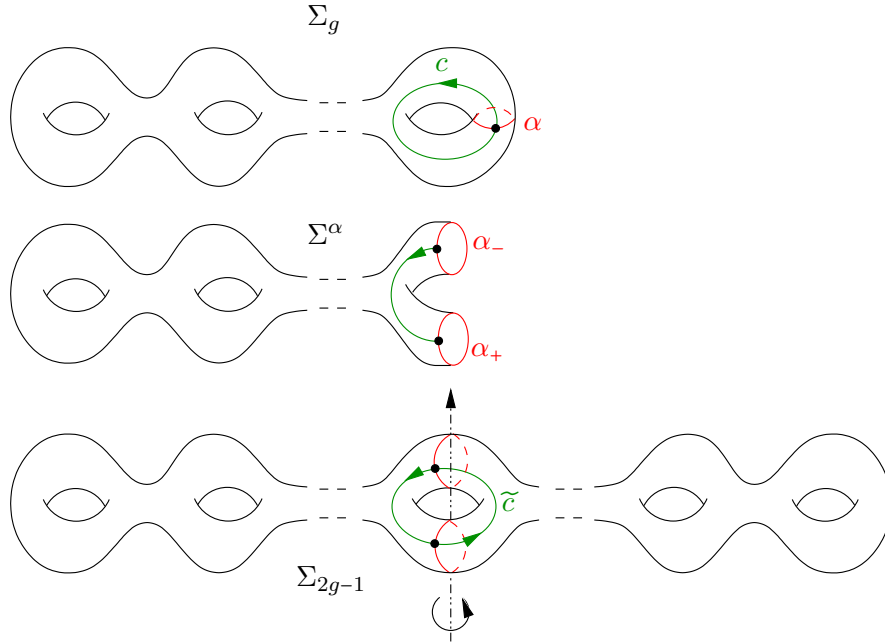
La dernière affirmation de l'assertion (5) découle de l'assertion (2) et du lemme de Cerf-Palais 7.5.

(6) Nous avons déjà vu cela dans la question (2), où, en reprenant les notations, nous avons montré que le sous-groupe $c_*(\pi_1(\mathbb{S}_1, 1))$ est l'image par le morphisme de groupes $\pi_1(\Sigma_{g_-,1}, x_-) \rightarrow \pi_1(\Sigma_g, c(1))$ du sous-groupe $([a_1^-, b_1^-] \dots [a_{g_-}^-, b_{g_-}^-])^{\mathbb{Z}}$, et puisque l'image d'un commutateur par un morphisme de groupes est un commutateur.

(7) Par la classification des surfaces lisses compactes connexes orientables à bord et la question (5), nous pouvons supposer que c est la courbe du dessin ci-dessous.

Soit alors α la courbe fermée simple non séparante dans Σ_g comme sur le dessin, rencontrant transversalement c en un et un seul point. Soit Σ^α la surface lisse compacte

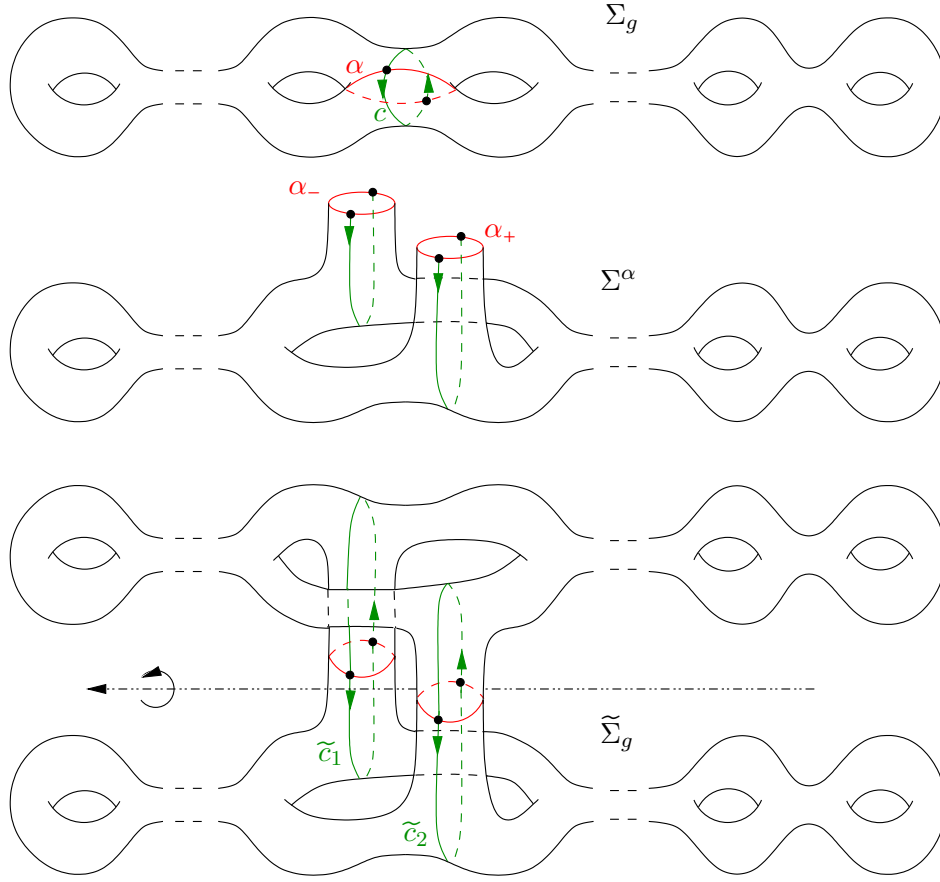
connexe, ayant deux composantes connexes de bord α_- et α_+ , obtenue en découpant Σ_g le long de α , et soit $f : \alpha_- \rightarrow \alpha_+$ le C^∞ -difféomorphisme renversant l'orientation par la direction sortante et permettant de recoller Σ^α pour obtenir Σ_g . Soit $\tilde{\Sigma}_g$ la surface obtenue en recollant le long du bord deux copies Σ_1^α et Σ_2^α de Σ^α par le C^∞ -difféomorphisme valant $f : \alpha_{-,1} \rightarrow \alpha_{+,2}$ et $f^{-1} : \alpha_{-,2} \rightarrow \alpha_{+,1}$, en notant de manière évidente les composantes connexes de bord des deux copies Σ_1^α et Σ_2^α . Il existe un revêtement double $p : \tilde{\Sigma}_g \rightarrow \Sigma_g$ galoisien (même si c'est automatique) de groupe des automorphismes de revêtement constitué, outre de l'identité, du C^∞ -difféomorphisme de $\tilde{\Sigma}_g$ qui envoie Σ_i^α et Σ_{3-i}^α pour $i \in \{1, 2\}$ par l'identité (et vaut la rotation d'angle π autour de l'axe dessiné sur le dessin ci-dessous).



La préimage $p^{-1}(c)$ de c par p est alors la courbe fermée simple non séparante $\tilde{c}$ (qui est l'image des deux relèvements du chemin $c \cdot c$, la courbe c parcourue deux fois) du dessin ci-dessus. Notons que $\tilde{\Sigma}_g$ est une surface compacte connexe orientable de genre $2g - 1$ (ce qui découle aussi du fait que $\chi(\tilde{\Sigma}_g) = 2\chi(\Sigma_g)$, voir l'exercice E.77).

(8) Par la classification des surfaces lisses compactes connexes orientables à bord et la question (5), nous pouvons supposer que c est la courbe du dessin ci-dessous.

Soit alors α la courbe fermée simple non séparante dans Σ_g comme sur le dessin, rencontrant transversalement c en exactement deux points, et telle que α ne soit pas isotope à une courbe fermée simple disjointe de c . Soit Σ^α la surface lisse compacte connexe, ayant deux composantes connexes de bord α_- et α_+ , obtenue en découpant Σ_g le long de α , et soit $f : \alpha_- \rightarrow \alpha_+$ le C^∞ -difféomorphisme renversant l'orientation par la direction sortante et permettant de recoller Σ^α pour obtenir Σ_g . Soit $\tilde{\Sigma}_g$ la surface obtenue en recollant le long du bord deux copies Σ_1^α et Σ_2^α de Σ^α par le difféomorphisme valant $f : \alpha_{-,1} \rightarrow \alpha_{+,2}$ et $f^{-1} : \alpha_{-,2} \rightarrow \alpha_{+,1}$, en notant de manière évidente les composantes connexes de bord des deux copies Σ_1^α et Σ_2^α . Il existe un revêtement double $p : \tilde{\Sigma}_g \rightarrow \Sigma_g$ galoisien (même si c'est automatique), de groupe des automorphismes de revêtement constitué, outre de l'identité, du C^∞ -difféomorphisme de $\tilde{\Sigma}_g$ qui envoie Σ_i^α et Σ_{3-i}^α pour $i \in \{1, 2\}$ par l'identité (et vaut la rotation d'angle π autour de l'axe dessiné sur le dessin ci-dessous).



La préimage $p^{-1}(c)$ de c par p est alors la réunion disjointe de deux courbes fermées simples non séparantes $\tilde{c}_1$ et $\tilde{c}_2$ (qui sont les images des deux relèvements possibles du chemin c) du dessin ci-dessous. Notons que la réunion $\tilde{c} = \tilde{c}_1 \cup \tilde{c}_2$ est, elle, séparante dans $\tilde{\Sigma}_g$ car $p : \tilde{\Sigma}_g \setminus \tilde{c} \rightarrow \Sigma_g \setminus c$ est continue, d'image non connexe. Par ailleurs, notons que $\tilde{\Sigma}_g$ est une surface compacte connexe orientable de genre $2g - 1$ (ce qui découle aussi du fait que $\chi(\tilde{\Sigma}_g) = 2\chi(\Sigma_g)$, voir l'exercice E.77).

Correction de l'exercice E.89. (1) Considérons une structure de CW-complexe fini sur $\Sigma_{g,b}$ ayant c_0 , c_1 et c_2 cellules de dimension 0, 1 et 2 respectivement. Considérons une structure de CW-complexe fini sur $\Sigma_{g',b'}$ ayant c'_0 , c'_1 et c'_2 cellules de dimension 0, 1 et 2 respectivement. Comme la caractéristique d'Euler du cercle est nulle, la structure de CW-complexe induite sur la composante connexe du bord D de $\Sigma_{g,b}$ possède d cellules de dimension 0 et 1, et celle sur D' possède d' cellules de dimension 0 et 1. Quitte à subdiviser, nous pouvons supposer que d et d' sont égaux. Puisque la classe de C^∞ -difféomorphisme du recollement S ne dépend que de la classe de C^∞ -isotopie de f (voir le lemme 7.1 (2)), nous pouvons supposer que le C^∞ -difféomorphisme f envoie les 0-cellules de D sur les 0-cellules de D' (et de même pour les 1-cellules). Alors S admet une structure de CW-complexe fini ayant $c_0 + c'_0 - d$ cellules de dimension 0, $c_1 + c'_1 - d$ cellules de dimension 1, et $c_2 + c'_2$ cellules de dimension 2. Par l'invariance de la caractéristique d'Euler en la structure de CW-complexe fini, nous avons donc

$$\chi(S) = (c_0 + c'_0 - d) - (c_1 + c'_1 - d) + (c_2 + c'_2) = \chi(\Sigma_{g,b}) + \chi(\Sigma_{g',b'}) .$$

Voir la formule d'additivité (28) de la caractéristique d'Euler pour une généralisation.

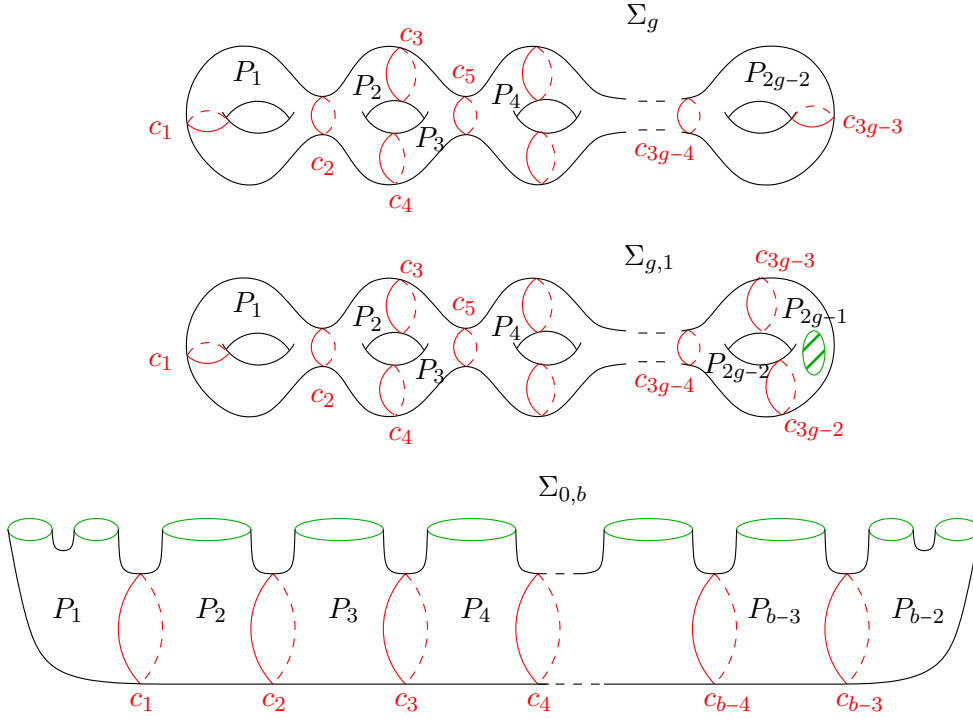
(2) Un raisonnement similaire utilisant le fait que la caractéristique d'Euler du cercle est nulle donne

$$\chi(S) = \chi(\Sigma_{g,b}) .$$

(3) Il découle des questions (1) et (2) et de la proposition 7.11 que si la surface $\Sigma_{g,b}$ admet une décomposition en n pantalons, alors

$$2 - 2g - b = \chi(\Sigma_{g,b}) = n \chi(\Sigma_{0,3}) = n(2 - 3) = -n < 0 .$$

En particulier, ceci exclu exactement la sphère $\Sigma_{0,0}$, le disque $\Sigma_{0,1}$, l'anneau $\Sigma_{0,2}$ et le tore $\Sigma_{1,0}$.



Réciproquement, si $\chi(\Sigma_{g,b}) < 0$, comme $\Sigma_{g,b} = \Sigma_{g,0} \# \Sigma_{0,b}$, comme $\Sigma_{g,0}$ avec $g \geq 2$ admet une décomposition en $2g - 2$ pantalons, comme $\Sigma_{g,1}$ avec $g \geq 1$ admet une décomposition en $2g - 1$ pantalons, et comme $\Sigma_{0,b}$ avec $b \geq 3$ admet une décomposition en $b - 2$ pantalons (voir les dessins ci-dessus), le résultat en découle.

(4) Fixons une décomposition en n pantalons $\{c_1, \dots, c_k\}$. Comme chaque pantalon de cette décomposition a trois composantes connexes de bord, comme sur chaque cercle c_i se recollent exactement deux bords de pantalons, comme chaque composante connexe du bord de $\Sigma_{g,b}$ appartient à un et un seul pantalon, en comptant de deux manières le nombre avec multiplicité de bords de pantalons, nous avons $2k + b = 3n$. Puisque le nombre n de pantalons est égal à l'opposé de la caractéristique d'Euler comme vu dans la question (3), nous avons

$$2k + b = 3n = -3 \chi(\Sigma_{g,b}) = 3(2g + b - 2) .$$

D'où comme cherché $k = 3g - 3 + b$ et

$$n = 2g + b - 2 .$$

8 Courbure des courbes et surfaces de l'espace euclidien

ΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ ¹⁴⁰

Dans ce dernier chapitre, nous allons considérer certains aspects métriques des sous-variétés, ¹⁴¹ lorsque nous les munissons des structures métriques induites par celles de l'espace euclidien ambiant. Nous introduirons des quantités numériques permettant, à reparamétrage et isométrie près, de caractériser les sous-variétés considérées en tant qu'objets métriques : la courbure pour les courbes planes, les courbure et torsion pour les courbes gauches, et la courbure de Gauss pour les surfaces de l'espace euclidien de dimension 3. Dans ce chapitre, nous suivrons les références [BG, doC]. Pour compléter la brève introduction à la géométrie riemannienne qui suit, nous renvoyons par exemple à [Pau4, GaHL, Spi].

Soient $r, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous noterons dans tout ce chapitre $\| \cdot \|$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la norme et le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^m$. Nous identifions tout élément de $\mathbb{R}^m$ avec la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Nous pouvons remplacer $\mathbb{R}^m$ dans ce qui suit par un espace vectoriel réel euclidien de dimension m (muni d'une base orthonormée fixée lorsque besoin).

Exercice E.90. Montrer que le sous-espace de $(\mathbb{R}^m)^m$ formé des bases orthonormées (respectivement des bases orthonormées directes) de $\mathbb{R}^m$ est une sous-variété lisse de $(\mathbb{R}^m)^m$, qui est C^∞ -difféomorphe à $O(m)$ (respectivement $SO(m)$). En particulier, le sous-espace des bases orthonormées directes de $\mathbb{R}^2$ est C^∞ -difféomorphe au cercle $\mathbb{S}_1$.

8.1 Courbure des courbes planes et gauches

La courbe de tes yeux fait le tour de mon coeur,
Un rond de danse et de douceur,
Auréole du temps, berceau nocturne et sûr,
Et si je ne sais plus tout ce que j'ai vécu
C'est que tes yeux ne m'ont pas toujours vu.

Feuilles de jour et mousse de rosée,
Roseaux du vent, sourires parfumés,
Ailes couvrant le monde de lumière,
Bateaux chargés du ciel et de la mer,
Chasseurs des bruits et sources des couleurs,

Parfums éclos d'une couvée d'aurores
Qui gît toujours sur la paille des astres,
Comme le jour dépend de l'innocence
Le monde entier dépend de tes yeux purs
Et tout mon sang coule dans leurs regards.

Paul Eluard, Capitale de la douleur, 1926

Une *courbe régulière* de classe C^r dans $\mathbb{R}^m$ est une application $c : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^r , où I est un intervalle de longueur non nulle de $\mathbb{R}$, telle que $\dot{c}(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Nous

140. La tradition veut que cette phrase, signifiant « Que nul n'entre ici s'il n'a l'esprit géomètre » fut gravée à l'entrée de l'Académie, l'école fondée à Athènes par Platon.

141. donc après la topologie homotopique des chapitres 1, 2 et 3, et la topologie différentielle des chapitres 4, 5 et 7, nous effectuons pour la première fois de la vraie géométrie différentielle, en renvoyant au sens étymologique du mot « géométrie » de mesurer les mondes

dirons que c est une courbe *plane* si $m = 2$ et une courbe *gauche* si $m = 3$. Sa *longueur* est

$$\text{long}(c) = \int_I \|\dot{c}(t)\| dt ,$$

qui est un élément de $[0, +\infty]$.

Nous dirons que deux courbes régulières $c : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $d : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont *équivalentes modulo paramétrage* (respectivement *modulo paramétrage orienté*) s'il existe un C^r -difféomorphisme (respectivement C^r -difféomorphisme préservant l'orientation) $\varphi : I \rightarrow J$ tel que

$$d = c \circ \varphi^{-1} .$$

Nous dirons alors que d est un *reparamétrage* (respectivement *reparamétrage orienté*) de c .

Nous dirons que deux courbes régulières $c : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $d : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont *équivalentes modulo isométrie* (respectivement *modulo déplacement*) s'il existe une isométrie (respectivement un déplacement, c'est-à-dire une isométrie préservant l'orientation) ϕ de l'espace métrique $\mathbb{R}^m$ muni de la distance euclidienne usuelle, et de son orientation usuelle (en tant qu'espace vectoriel réel de dimension finie) telle que

$$d = \phi \circ c .$$

Rappelons que toute isométrie (respectivement tout déplacement) de $\mathbb{R}^m$ est la composition d'une transformation orthogonale (respectivement une rotation) $x \mapsto Ax$ où $A \in \text{O}(m)$ (respectivement $A \in \text{SO}(m)$) avec une translation $x \mapsto x + t$ où $t \in \mathbb{R}^m$. Cette écriture montre que le groupe des isométries (respectivement déplacements) de $\mathbb{R}^m$ est isomorphe au produit semi-direct de son sous-groupe des isométries vectorielles $\text{O}(m)$ (respectivement $\text{SO}(m)$) par le groupe $\mathbb{R}^m$ de ses vecteurs de translations.

Rappelons que c est *paramétrée par longueur d'arc* si pour tout $s \in I$ son vecteur vitesse $\dot{c}(s)$ est unitaire, c'est-à-dire s'il vérifie $\|\dot{c}(s)\| = 1$. Rappelons que toute courbe régulière admet un reparamétrage (respectivement reparamétrage orienté) par longueur d'arc, unique à isométrie (respectivement translation) près à la source (voir le lemme 5.8). La longueur d'une courbe paramétrée par longueur d'arc $c : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est égale à la longueur de son intervalle de définition I .

8.1.1 Classification à déplacement près des courbes planes

Supposons que $r \geq 2$ et $m = 2$. Nous identifierons le plan réel $\mathbb{R}^2$ et la droite complexe $\mathbb{C}$ par l'application $(x, y) \mapsto x + iy$. Soit $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée par longueur d'arc. Le *repère (mobile) de Frenet* de c est l'application de classe C^{r-1} de l'intervalle I dans le sous-espace de $(\mathbb{R}^2)^2$ des bases orthonormées directes de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$s \mapsto (\tau(s) = \dot{c}(s), \nu(s) = i \dot{c}(s)) .$$

Les vecteurs unitaires $\tau(s)$ et $\nu(s)$ sont aussi appelés les *vecteurs tangents et normaux* à la courbe c au temps s . Les applications $\tau = \tau_c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\nu = \nu_c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ainsi définies sont de classe C^{r-1} .

La *courbure* de c est l'application $\kappa = \kappa_c : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-2} définie par

$$\kappa : s \mapsto \langle \dot{\tau}(s), \nu(s) \rangle .$$

Pour tout $s \in I$ tel que $\kappa(s) \neq 0$, le nombre $\frac{1}{\kappa(s)}$ est appelé le *rayon de courbure* de la courbe plane c en $c(s)$. Le *cercle osculateur* à la courbe plane c au point $c(s)$ est le cercle de centre $c(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \nu(s)$ et de rayon $\frac{1}{\kappa(s)}$. Nous renvoyons à la partie 8.1.2 pour une explication de la terminologie.

En dérivant la formule $\|\dot{c}(s)\|^2 = 1$, nous obtenons que les vecteurs $\tau(s)$ et $\dot{\tau}(s)$ sont orthogonaux, donc que $\dot{\tau}(s)$ et $\nu(s)$ sont colinéaires, et comme $\nu(s)$ est un vecteur unitaire, nous avons

$$\forall s \in I, \quad \dot{\tau}(s) = \kappa(s) \nu(s). \quad (29)$$

Cette formule, appelée *l'équation de Frenet*, redonne la définition de κ en prenant le produit scalaire avec $\nu(s)$. Attention, il est important que la courbe soit paramétrée par longueur d'arc pour utiliser cette formule afin de calculer la courbure. Il convient donc de ne pas oublier de reparamétriser les courbes par longueur d'arc si ce n'est pas déjà le cas.

Remarquons que $\dot{\tau}(s) = \ddot{c}(s)$ est le vecteur accélération de la courbe c au temps s . La formule (29) dit en particulier que l'accélération d'une courbe paramétrée par longueur d'arc est normale (c'est-à-dire colinéaire au vecteur normal en tout temps).

Exemple. Par exemple, la courbure du cercle de centre z_0 et de rayon R paramétré dans le sens trigonométrique (et par longueur d'arc) par $c : s \mapsto z_0 + R e^{i \frac{s}{R}}$ est $\frac{1}{R}$. En effet, en remarquant que $\dot{c}(s)$ est bien de module 1, nous avons

$$\tau(s) = \dot{c}(s) = i e^{i \frac{s}{R}}, \quad \nu(s) = -e^{i \frac{s}{R}} \quad \text{et} \quad \dot{\tau}(s) = -\frac{1}{R} e^{i \frac{s}{R}}.$$

Attention, si ce cercle est paramétré dans le sens des aiguilles d'une montre, la courbure est alors constante égale à $-\frac{1}{R}$. La proposition 8.1 dit en particulier que les courbes planes régulières de courbure constante sont ainsi les arcs de droites et les arcs de cercles (avec leurs deux classes de paramétrage orienté, pouvant faire plusieurs tours et fractions de tours!).

Remarque. Pour toute courbe plane régulière $f : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^r , pour tout reparamétrage orienté par longueur d'arc $c = f \circ s^{-1}$ de f , nous pouvons définir le repère (mobile) de Frenet $t \mapsto (\tau(t) = \tau_f(t), \nu(t) = \nu_f(t))$ de f par

$$\forall t \in J, \quad \tau(t) = \frac{\dot{f}(t)}{\|\dot{f}(t)\|} = \tau_{f \circ s^{-1}}(s(t)) \quad \text{et} \quad \nu(t) = i \tau(t) = \nu_{f \circ s^{-1}}(s(t)),$$

et la courbure $\kappa = \kappa_f : J \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$\forall t \in J, \quad \kappa(t) = \langle \dot{\tau}(t), \nu(t) \rangle = \kappa_{f \circ s^{-1}}(s(t)).$$

Comme deux tels reparamétrages ne diffèrent que d'une translation à la source et puisque $s'(t) = \|\dot{f}(t)\|$, les formules ci-dessus sont bien vérifiées.

Remarquons que la courbure des courbes planes régulières est invariante par reparamétrage orienté (par construction) et par déplacements, et qu'elle est changée en son opposé par un reparamétrage non orienté. En effet, si $f : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^r est une courbe plane régulière, si $\varphi : J \rightarrow I$ est un C^r -difféomorphisme, si ϵ est le signe du jacobien de φ (c'est-à-dire $\epsilon = +1$ si φ préserve l'orientation et $\epsilon = -1$ sinon), et si $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un déplacement (de la forme $x \mapsto Ax + b$ avec $A \in \text{SO}(2)$ et $b \in \mathbb{R}^2$), de partie vectorielle ϕ' (de la forme correspondante $x \mapsto Ax$), alors nous avons

$$\tau_{f \circ \varphi^{-1}} = \epsilon \tau_f \circ \varphi^{-1}, \quad \nu_{f \circ \varphi^{-1}} = \epsilon \nu_f \circ \varphi^{-1} \quad \text{et} \quad \kappa_{f \circ \varphi^{-1}} = \epsilon \kappa_f \circ \varphi^{-1},$$

et

$$\tau_{\phi \circ f} = \phi' \circ \tau_f, \quad \nu_{\phi \circ f} = \phi' \circ \nu_f \quad \text{et} \quad \kappa_{\phi \circ f} = \kappa_f .$$

Même s'il est fortement conseillé de passer d'abord par un reparamétrage par longueur d'arc, comme celui-ci n'est pas toujours une fonction élémentaire, il est bien entendu possible de donner une expression intrinsèque de la courbure : en dérivant la formule $\dot{f}(t) = \|\dot{f}(t)\| \tau(t)$, nous obtenons

$$\ddot{f}(t) = (\|\dot{f}(t)\|)' \tau(t) + \|\dot{f}(t)\| \dot{\tau}(t) .$$

Donc

$$\kappa_f(t) = \frac{\det(\dot{f}(t), \ddot{f}(t))}{\|\dot{f}(t)\|^2} .$$

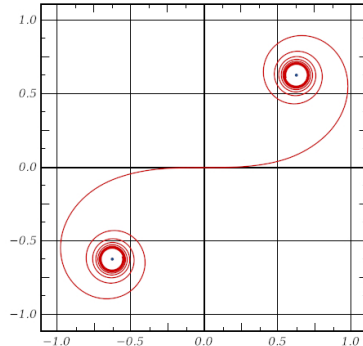
Proposition 8.1. *Pour toute application $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-2} , il existe une courbe plane paramétrée par longueur d'arc $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^r et de courbure égale à κ , unique modulo déplacement.*

Démonstration. Si $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe de classe C^r paramétrée par longueur d'arc, alors sa vitesse $\tau = \dot{c} : I \rightarrow \mathbb{S}_1$ est une application à valeurs dans le cercle (puisque ses vecteurs tangents sont unitaires). Par le théorème du relèvement 2.27 (qui fournit des applications aussi régulières que l'application à relever, lorsque le revêtement est de classe C^∞ , donc un C^∞ -difféomorphisme local), appliqué au revêtement universel $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1$ de classe C^∞ défini par $t \mapsto e^{it}$, il existe une application $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} , unique modulo constante additive dans $2\pi\mathbb{Z}$, telle que pour tout $s \in I$, nous ayons

$$\dot{c}(s) = \tau(s) = e^{i\theta(s)} ,$$

et donc $\kappa(s) = \dot{\theta}(s)$. La donnée de l'application κ de classe C^{r-2} (donc au moins continue car nous avons supposé que $r \geq 2$) détermine par intégration l'application θ de classe C^{r-1} à constante additive près, qui détermine l'application τ de classe C^{r-1} à une constante multiplicative de module 1 près, qui détermine par intégration l'application c de classe C^r modulo déplacement (rotation-translation), le terme de translation venant de la constante d'intégration. $\square$

Par exemple, les arcs de droites et cercles sont les courbes régulières de courbure constante, et les *clothoïdes* sont les courbes régulières dont la courbure est linéaire croissante $\kappa : s \mapsto \lambda s$ où $\lambda > 0$. Le dessin ci-dessous est extrait de Wikipedia, auquel nous renvoyons pour l'historique.



Clothoïde
de courbure
 $\kappa : s \mapsto s$

8.1.2 Classification à déplacement près des courbes gauches

Supposons maintenant que $r \geq 3$ et $n = 3$. Une courbe gauche $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^r est dite *bi-régulière* si pour tout $t \in I$, ses vecteurs vitesse $\dot{c}(t)$ et accélération $\ddot{c}(t)$ au temps t sont linéairement indépendants (ce qui ne dépend pas du paramétrage). Nous renvoyons par exemple à [Ber, Pau5] pour des rappels sur le produit vectoriel¹⁴² dans l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathbb{R}^3$.

Fixons une courbe gauche bi-régulière paramétrée par longueur d'arc $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^r . Le *repère (mobile) de Frenet* de c est l'application de classe C^{r-2} de l'intervalle I dans la sous-variété lisse de $(\mathbb{R}^3)^3$ constituée des bases orthonormées directes de $\mathbb{R}^3$ (voir l'exercice E.90), définie par

$$s \mapsto \left(\tau(s) = \dot{c}(s), \nu(s) = \frac{\dot{\tau}(s)}{\|\dot{\tau}(s)\|}, \beta(s) = \tau(s) \wedge \nu(s) \right). \quad (30)$$

Ces trois vecteurs sont appelés respectivement les vecteurs *tangent*, *normal*, *binormal* de la courbe c au temps s . Ce sont des vecteurs unitaires (car c est paramétrée par longueur d'arc). Le plan vectoriel engendré par $\tau(s)$ et $\nu(s)$ est appelé le *plan osculateur* de la courbe c . Il contient toute l'information au second ordre de la courbe c . Nous noterons $\tau = \tau_c$, $\nu = \nu_c$ et $\beta = \beta_c$ lorsqu'il convient de préciser la courbe c . Ces applications sont en effet de classe C^{r-2} (τ est même de classe C^{r-1}), et en dérivant la relation $\langle \tau(s), \tau(s) \rangle = 1$, nous obtenons que $\tau(s)$ et $\nu(s)$ sont orthogonaux, donc par les propriétés du produit vectoriel, que le triplet $(\tau(s), \nu(s), \beta(s))$ est bien une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

Lemme 8.2. *Il existe des uniques fonctions $K = K_c : I \rightarrow]0, +\infty[$ de classe C^{r-2} et $T = T_c : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-3} , respectivement appelée la courbure de c et la torsion de c , telles que le système d'équations différentielles suivant, dit de Frenet,¹⁴³ soit vérifié en tout point s de I :*

$$\begin{cases} \dot{\tau}(s) &= K(s) \nu(s) \\ \dot{\nu}(s) &= -K(s) \tau(s) - T(s) \beta(s) \\ \dot{\beta}(s) &= T(s) \nu(s) . \end{cases} \quad (31)$$

De plus, pour tout $s \in I$, nous avons

$$\begin{cases} K(s) = \|\dot{\tau}(s)\| = \langle \nu(s), \dot{\tau}(s) \rangle = -\langle \dot{\nu}(s), \tau(s) \rangle \\ T(s) = \langle \dot{\beta}(s), \nu(s) \rangle = -\langle \dot{\nu}(s), \beta(s) \rangle . \end{cases} \quad (32)$$

142. Rappelons que pour tous les vecteurs u et v dans l'espace vectoriel euclidien orienté usuel $\mathbb{R}^3$, leur produit vectoriel $u \wedge v$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tous les $w \in \mathbb{R}^3$, nous ayons

$$\langle u \wedge v, w \rangle = \det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$$

où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Le vecteur $u \wedge v$ est nul si et seulement si u et v sont colinéaires. Si u et v sont orthogonaux non nuls, alors $u \wedge v$ est le vecteur directement orthogonal à u et à v , de norme égale à $\|u\| \|v\|$. Enfin, si $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$, alors les composantes de $u \wedge v$ sont

$$u \wedge v = \left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right) = \left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right).$$

143. ou parfois de Frenet-Serret

Démonstration. La définition de ν dans la formule (30) permet d'obtenir la première égalité du système (31) en posant $K(s) = \|\dot{\tau}(s)\| = \|\ddot{c}(s)\|$, qui est bien strictement positive¹⁴⁴ et de classe C^{r-2} en s .

L'orthogonalité entre $\dot{\nu}(s)$ et $\nu(s)$, obtenue en dérivant l'égalité $\langle \nu(s), \nu(s) \rangle = 1$,¹⁴⁵ implique que $\dot{\nu}(s)$ est une combinaison linéaire de $\tau(s)$ et $\beta(s)$. Ceci permet d'écrire

$$\dot{\nu}(s) = a(s) \tau(s) + b(s) \beta(s), \quad (33)$$

avec $a(s) = \langle \dot{\nu}(s), \tau(s) \rangle$ et $b(s) = \langle \dot{\nu}(s), \beta(s) \rangle$, puisque $\tau(s)$ et $\beta(s)$ sont orthogonaux.

En dérivant les égalités $\langle \nu(s), \tau(s) \rangle = 0$ et $\langle \nu(s), \beta(s) \rangle = 0$, nous pouvons respectivement écrire

$$a(s) = \langle \dot{\nu}(s), \tau(s) \rangle = -\langle \nu(s), \dot{\tau}(s) \rangle = -K(s)$$

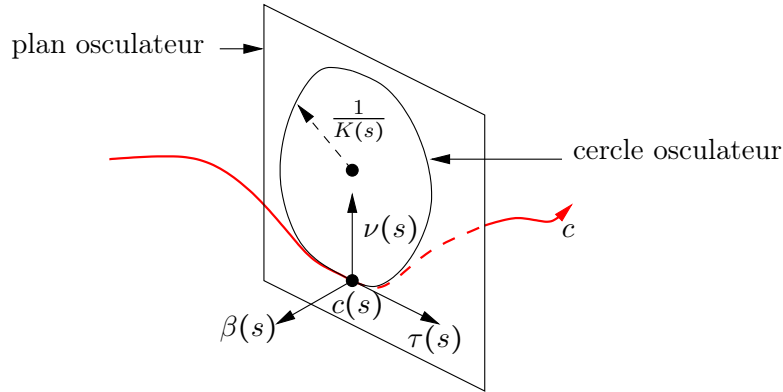
et poser

$$T(s) = -b(s) = -\langle \dot{\nu}(s), \beta(s) \rangle = \langle \nu(s), \dot{\beta}(s) \rangle.$$

Ceci permet d'obtenir la deuxième égalité du système (31). Notons que T est bien de classe C^{r-3} car $\nu(s)$ et $\beta(s)$ sont C^{r-2} .

Par la définition de $\beta(s) = \tau(s) \wedge \nu(s)$ et en dérivant, le caractère bilinéaire et alterné du produit vectoriel permet d'écrire $\dot{\beta}(s) = \tau(s) \wedge \dot{\nu}(s)$. En utilisant la formule centrée (33) et le fait que $\tau(s) \wedge \beta(s) = -\nu(s)$, nous obtenons la dernière égalité du système (31). $\square$

Pour tout $s \in I$, puisque $K(s) \neq 0$, le nombre $\frac{1}{K(s)}$ est bien défini, appelé le *rayon de courbure* de la courbe gauche c en $c(s)$.¹⁴⁶ Le *cercle osculateur* à la courbe gauche c au point $c(s)$ est le cercle de centre $c(s) + \frac{1}{K(s)} \nu(s)$ et de rayon $\frac{1}{K(s)}$ tangent à $\tau(s)$ en $c(s)$. Il est contenu dans le plan osculateur, qui est, comme défini ci-dessus, le plan affine $c(s) + \mathbb{R} \tau(s) + \mathbb{R} \nu(s)$.



Pour tout $s_0 \in I$, alors que la droite affine tangente $c(s_0) + \mathbb{R} \tau(s_0)$ a un contact d'ordre 1 avec la courbe gauche c en $c(s_0)$ (ceci signifie que

$$\|c(s_0 + t) - (c(s_0) + t \tau(s_0))\| = O(t^2)$$

144. L'hypothèse que la courbe c est birégulière implique en particulier que le vecteur accélération $\ddot{c}(s)$ est non nul pour tout $s \in I$.

145. Par la formule (30), le vecteur $\nu(s)$ est unitaire pour tout $s \in I$.

146. Par convention compatible avec des arguments de passage à la limite (et de convergence de grands cercles vers des droites), si c n'est pas supposée birégulière (mais toujours paramétrée par longueur d'arc), il est possible de continuer de définir le vecteur tangent $\tau(s) = \dot{c}(s)$ et la courbure $K(s) = \|\ddot{c}(s)\|$. Si $K(s) = 0$, le rayon de courbure est $+\infty$, le centre du cercle osculateur est à l'infini, et le cercle osculateur coïncide avec la droite tangente $\mathbb{R} \tau(s)$.

quand $t \rightarrow 0$), le cercle osculateur a un contact d'ordre 2 avec c , au sens suivant. Posons $R = \frac{1}{K(s_0)}$ et paramétrons par longueur d'arc le cercle osculateur en $c(s_0)$ par

$$f : \theta \mapsto c(s_0) + R \left(1 - \cos \frac{\theta}{R}\right) \nu(s_0) + R \left(\sin \frac{\theta}{R}\right) \tau(s_0) .$$

Nous avons

$$f(0) = c(s_0), \quad \dot{f}(0) = \tau(s_0) = \dot{c}(s_0), \quad \ddot{f}(0) = \frac{1}{R} \nu(s_0) = K(s_0) \nu(s_0) = \ddot{c}(s_0) .$$

Dire que le cercle osculateur de c en $c(s_0)$ a un contact d'ordre 2 avec la courbe gauche c en $c(s_0)$ signifie que

$$\|c(s_0 + \theta) - f(\theta)\| = O(\theta^3)$$

quand $\theta \rightarrow 0$, ce qui se vérifie en développant au second ordre les fonctions $\theta \mapsto c(s_0 + \theta)$ et f en $\theta = 0$.

Remarquons que si $\varphi : I \rightarrow J$ est une (restriction d'une) isométrie (pour la distance euclidienne), si ϵ est la dérivée (constante) de φ (c'est-à-dire $\epsilon = +1$ si φ préserve l'orientation et $\epsilon = -1$ sinon), alors $c \circ \varphi^{-1}$ est encore une courbe paramétrée par longueur d'arc, et nous avons

$$\tau_{c \circ \varphi^{-1}} = \epsilon \tau_c \circ \varphi^{-1}, \quad \nu_{c \circ \varphi^{-1}} = \nu_c \circ \varphi^{-1}, \quad \beta_{c \circ \varphi^{-1}} = \epsilon \beta_c \circ \varphi^{-1},$$

$$K_{c \circ \varphi^{-1}} = K_c \circ \varphi^{-1} \quad \text{et} \quad T_{c \circ \varphi^{-1}} = T_c \circ \varphi^{-1} .$$

De plus, soit $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une isométrie, qui est une transformation affine, de la forme $x \mapsto Ax + b$ avec $A \in O(3)$ et $b \in \mathbb{R}^3$. Sa différentielle, de la forme $x \mapsto Ax$ (constante, notée ϕ'), est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$, donc préserve la norme. L'application linéaire ϕ' préserve le produit vectoriel si et seulement si ϕ est un déplacement. En notant $\epsilon' = \det A$, qui vaut $+1$ si ϕ préserve l'orientation, et -1 sinon, nous avons

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3, \quad \phi'(x \wedge y) = \epsilon' \phi'(x) \wedge \phi'(y) .$$

Alors $\phi \circ c$ est encore une courbe paramétrée par longueur d'arc, et nous avons

$$\tau_{\phi \circ c} = \phi' \circ \tau_c, \quad \nu_{\phi \circ c} = \phi' \circ \nu_c, \quad \beta_{\phi \circ c} = \epsilon' \phi' \circ \beta_c ,$$

$$K_{\phi \circ c} = K_c \quad \text{et} \quad T_{\phi \circ c} = \epsilon' T_c .$$

Attention, comme dans le cas planaire, il est important que la courbe soit paramétrée par longueur d'arc pour utiliser les équations de Frenet afin de calculer la courbure et la torsion. Il convient donc a priori de ne pas oublier de reparamétriser les courbes par longueur d'arc si ce n'est pas déjà le cas.

Mais il est néanmoins possible de calculer la courbure et la torsion sans passer par une explicitation du paramétrage par longueur d'arc. En effet, si $f : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un reparamétrage orienté quelconque d'une courbe gauche bi-régulière $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ paramétrée par longueur d'arc et si $s : t \mapsto s_t$ est le changement de variable¹⁴⁷ tel que $f = c \circ s$, alors

$$\dot{f}(t) = s'(t) \dot{c}(s_t) = \|\dot{f}(t)\| \tau(s_t) ,$$

147. qui vérifie $s'(t) = |s'(t)| = \|\dot{f}(t)\|$ puisque c est paramétrée par longueur d'arc et puisque le changement de variable est strictement croissant

et

$$\ddot{f}(t) = s''(t) \tau(s_t) + (s'(t))^2 \dot{\tau}(s_t) = s''(t) \tau(s_t) + \|\dot{f}(t)\|^2 K(s_t) \nu(s_t)$$

et

$$\begin{aligned} \ddot{\dot{f}}(t) = & (s'''(t) - \|\dot{f}(t)\|^3 K(s_t)^2) \tau(s_t) + (s''(t) s'(t) K(s_t) + (\|\dot{f}(t)\|^2 K(s_t))') \nu(s_t) \\ & - (\|\dot{f}(t)\|^3 K(s_t) T(s_t) \beta(s_t)). \end{aligned}$$

Donc en utilisant le caractère multilinéaire et alterné du produit vectoriel et du déterminant, nous avons

$$K(s(t)) = \frac{\|\dot{f}(t) \wedge \ddot{f}(t)\|}{\|\dot{f}(t)\|^3}$$

et

$$T(s(t)) = - \frac{\det(\dot{f}(t), \ddot{f}(t), \ddot{\dot{f}}(t))}{\|\dot{f}(t) \wedge \ddot{f}(t)\|^2}.$$

Le résultat suivant dit que la courbure et la torsion déterminent une courbe birégulière à isométrie et reparamétrage près.

Proposition 8.3. *Pour tout intervalle I et pour toutes les applications $K : I \rightarrow]0, +\infty[$ de classe C^{r-2} et $T : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-3} , il existe une courbe gauche paramétrée par longueur d'arc bi-régulière $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^r de courbure égale à K et de torsion égale à T , unique modulo déplacement.*

Démonstration. Soient $s_0 \in I$ et $F_0 = (\tau_0, \nu_0, \beta_0)$ une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. Rappelons que le groupe $SO(3)$ des rotations agit simplement transitivement sur l'ensemble des bases orthonormées directes de $\mathbb{R}^3$.

Lemme 8.4. *Le système d'équations différentielles (31) admet une unique solution*

$$F : s \mapsto (\tau(s), \nu(s), \beta(s))$$

définie sur tout I ¹⁴⁸ à valeurs dans ¹⁴⁹ $(\mathbb{R}^3)^3$, de classe C^{r-2} , qui vérifie la condition initiale $F(s_0) = (\tau_0, \nu_0, \beta_0)$, et telle que le triplet $F(s)$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ pour tout $s \in I$.

Montrons tout d'abord que ce lemme permet de terminer la démonstration de la proposition 8.3. Pour toute constante d'intégration $c_0 \in \mathbb{R}^3$, la courbe gauche $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$c : s \mapsto c_0 + \int_{s_0}^s \tau(t) dt \tag{34}$$

est paramétrée par longueur d'arc (car $\dot{c}(s) = \tau(s)$ est un vecteur unitaire). Elle est birégulière (car $\dot{c}(s) = \tau(s)$ et $\ddot{c}(s) = \dot{\tau}(s) = K(s) \nu(s)$ sont linéairement indépendants puisque $\tau(s)$ et $\nu(s)$ le sont et puisque la courbure K est strictement positive). La courbe gauche est de courbure égale à K et de torsion égale à T par définition. Elle est de plus de classe C^r par itération (« bootstrap » en anglais) : les applications K et ν sont de classe C^{r-2}

148. Tutti Frutti, Little Richard, <https://www.youtube.com/watch?v=F13JNjpNW6c>

149. Il convient de bien faire attention qu'un point dans l'image de F est un triplet de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, pas un triplet de réels.

par hypothèse et construction, donc la première équation du système (31) montre que τ est de classe C^{r-1} , et donc par la nouvelle intégration (34) ci-dessus, l'application c est de classe C^r . Ceci montre que la courbe gauche cherchée c existe, et qu'elle est unique, à déplacement (rotation-translation)¹⁵⁰ près.

Démonstration du lemme 8.4. Le système d'équations (31) est un système d'équations différentielles linéaires (sans second membre) du premier ordre à coefficients continus, et nous savons alors (voir par exemple [Car, Theo. 1.9.1]), qu'il admet une et une seule solution $F : s \mapsto (\tau(s), \nu(s), \beta(s))$ de classe C^1 à valeurs dans $(\mathbb{R}^3)^3$, définie sur l'intervalle I tout entier,¹⁵¹ et valant F_0 en $s = s_0$.

Pour tout $s \in I$, notons $B(s) = \begin{pmatrix} \tau_1(s) & \nu_1(s) & \beta_1(s) \\ \tau_2(s) & \nu_2(s) & \beta_2(s) \\ \tau_3(s) & \nu_3(s) & \beta_3(s) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice réelle 3×3 dont les colonnes sont les coordonnées de

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \tau_1(s)\tau_0 + \tau_2(s)\nu_0 + \tau_3(s)\beta_0, \\ \nu(s) &= \nu_1(s)\tau_0 + \nu_2(s)\nu_0 + \nu_3(s)\beta_0, \\ \beta(s) &= \beta_1(s)\tau_0 + \beta_2(s)\nu_0 + \beta_3(s)\beta_0 \end{aligned}$$

dans la base F_0 . En particulier, la matrice $B(s_0)$ est la matrice identité I_3 . Si nous posons

$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & K(s) & 0 \\ -K(s) & 0 & -T(s) \\ 0 & T(s) & 0 \end{pmatrix}$, alors le système d'équations (31) s'écrit, par un calcul élémentaire

$$\forall s \in I, \quad \frac{d}{ds} B(s) = B(s) {}^t A(s). \quad (35)$$

Comme l'application A est de classe C^{r-3} , l'application B (et donc l'application F) est de classe C^{r-2} .

L'application de I dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $s \mapsto {}^t B(s) B(s)$ vaut I_3 en $s = s_0$ et vérifie l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{d}{ds} ({}^t B(s) B(s)) = A(s) {}^t B(s) B(s) + {}^t B(s) B(s) A(s).$$

Comme la matrice $A(s)$ est antisymétrique, les deux applications $s \mapsto I_3$ (qui est constante) et $s \mapsto {}^t B(s) B(s)$, qui vérifient toutes les deux sur I la même équation différentielle du premier ordre

$$\frac{d}{ds} X(s) = A(s) X(s) - X(s) A(s)$$

avec la même condition initiale en $s = s_0$, sont égales. Donc $B(s)$ appartient à $O(3)$ pour tout $s \in I$, et puisque $SO(3)$ est la composante connexe par arcs de $I_3 = B(s_0)$ dans $O(3)$, la matrice $B(s)$ appartient à $SO(3)$ pour tout $s \in I$. Donc F est bien à valeurs dans l'ensemble des bases orthonormées directes de $\mathbb{R}^3$. Ceci montre le lemme 8.4, donc la proposition 8.3.

□ □

150. La rotation correspond au choix de la condition initiale (τ_0, ν_0, β_0) du système (31), qui est une base orthonormée directe (on passe de l'une à l'autre par un élément de $SO(3)$). La translation correspond au choix de la constante d'intégration dans la formule (34).

151. C'est une propriété remarquable des systèmes d'équations différentielles linéaires.

Remarque. Supposons que $A(t)$ et $A(s)$ commutent pour tous les $s, t \in I$ (ce qui est le cas si et seulement si le rapport $T(s)/K(s)$ est constant, comme le montre un petit calcul). Notons $\cdot$ l'action linéaire naturelle de $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ sur $(\mathbb{R}^3)^3$ définie par

$$(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} \cdot (v_k)_{1 \leq k \leq 3} = \left(\sum_{j=1}^3 a_{i,j} v_j \right)_{1 \leq i \leq 3}.$$

Remarquons que l'équation différentielle (35) est équivalente à

$$\frac{d}{ds} {}^t B(s) = {}^t B(s) A(s) \iff \dot{F}(s) = A(s) \cdot F(s).$$

Alors par unicité, l'unique solution maximale du système (31) valant F_0 en $s = s_0$ est définie sur I , en utilisant l'application exponentielle $\exp : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_3(\mathbb{R})$ des matrices, par

$$F : s \mapsto \exp \left(\int_{s_0}^s A(t) dt \right) \cdot F_0.$$

Mais une telle formule n'est pas valable en général lorsqu'une telle hypothèse de commutation n'est pas vérifiée.

Exemples. (1) Les courbes gauches birégulières de torsion nulle sont les courbes planaires, car après reparamétrage par longueur d'arc, leur vecteur binormal $\beta(s)$ est constant, égal à $\beta(s_0)$ pour tout $s_0 \in I$ fixé, et donc la courbe est contenue dans le plan affine orthogonal à $\beta(s_0)$ et passant par $c(s_0)$ pour un temps initial s_0 , donc contenue dans le plan osculateur $c(s_0) + \mathbb{R} \tau(s_0) + \mathbb{R} \nu(s_0)$.

(2) Les courbes gauches birégulières de torsion K et de courbure T toutes deux constantes non nulles sont appelées les *hélices circulaires*.

Théorème 8.5. (Théorème de Puiseux) *À reparamétrage et déplacement près, les hélices circulaires maximales sont les courbes définies sur $\mathbb{R}$ de la forme*

$$f : t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt),$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$ et $b \neq 0$, de courbure $K = \frac{a}{a^2+b^2}$ et torsion $T = \frac{b}{a^2+b^2}$.

Le réel strictement positif a est appelé le *rayon* de l'hélice circulaire f , et le réel $2\pi b$ le *pas* de l'hélice circulaire f .

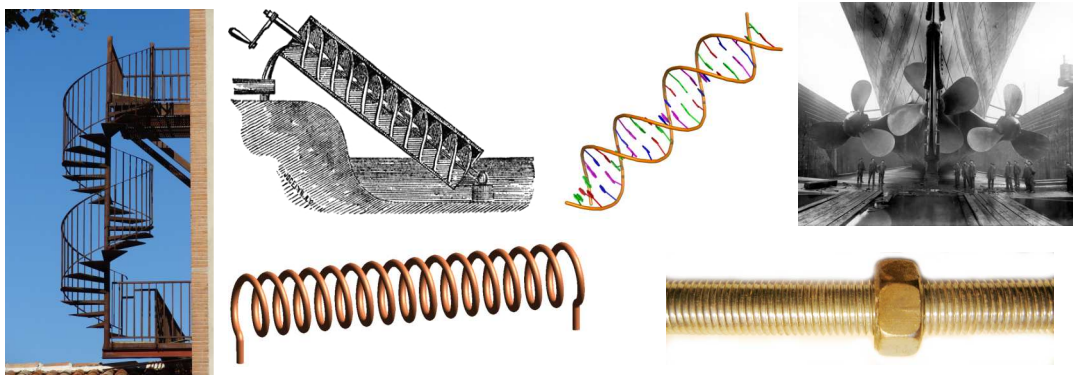
En posant $\lambda = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{K^2 + T^2}$, un reparamétrage par longueur d'arc de cette courbe f est

$$c : s \mapsto (a \cos(\lambda s), a \sin(\lambda s), b \lambda s). \quad (36)$$

Ses vecteurs tangents et normaux sont

$$\tau(s) = (-a \lambda \sin(\lambda s), a \lambda \cos(\lambda s), b \lambda) \quad \text{et} \quad \nu(s) = (-\cos(\lambda s), -\sin(\lambda s), 0).$$

Les dessins ci-dessous sont extraits de Wikipedia. Ils montrent que les hélices circulaires sont extrêmement fréquentes dans la vraie vie.



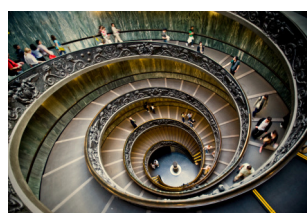
Si nous demandons que le pas $2\pi b$ d'une hélice soit strictement positif, alors il convient de distinguer les hélices circulaires

$$\text{dextres} \quad t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt) \quad \text{et} \quad \text{senestres} \quad t \mapsto (a \cos t, -a \sin t, bt).$$

Cette dernière se ramène par déplacement (demi-tour autour du premier axe de coordonnée) à l'hélice circulaire $t \mapsto (a \cos t, a \sin t, -bt)$. Par exemple, le temple d'Aphrodite ci-dessous en haut à gauche contient à la fois des colonnes (dites torses) à hélices dextres et des colonnes à hélices senestres.



Escalier à double hélice
de Chambord



Escalier à double hélice
du musée du Vatican



Parking à double hélice
de Noisy-le-Grand



Puit Saint-Patrice à double hélice
d'Orvieto

Il existe des plantes qui s'enroulent sur des tuteurs en hélices dextres, s'enroulant pour l'observateur de bas en haut et de gauche à droite (comme le liseron et le haricot) et d'autre en hélices sénestres (comme le houblon).



Houblon



Colonne torse



Haricot



Liseron

Démonstration du théorème de Puiseux 8.5. Par la réduction des matrices antisymétriques (donc normales, c'est-à-dire commutantes avec leur matrice adjointe, voir

par exemple [Pau5, Coro. 1.17 (3)], la matrice (constante) $A = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ -K & 0 & -T \\ 0 & T & 0 \end{pmatrix}$ de la démonstration du lemme 8.4 ci-dessus s'écrit $A = QBQ^{-1}$ où $Q \in \text{SO}(3)$ (la matrice d'un changement de base orthonormée directe) et B est de la forme $B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Les valeurs propres complexes de B sont $i\lambda$, $-i\lambda$ et 0. Celles de A , dont le polynôme caractéristique est

$$\det(X \text{id} - A) = X(X^2 + T^2 + K^2),$$

sont $i\sqrt{K^2 + T^2}$, $-i\sqrt{K^2 + T^2}$ et 0. Puisque deux matrices conjuguées ont les mêmes valeurs propres complexes, nous avons $|\lambda| = \sqrt{K^2 + T^2}$.

Il est bien connu que les solutions maximales d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants $\dot{Y} = AY$, d'inconnue Y à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, sont les applications $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la forme $t \mapsto \exp(tA)Y_0$ où $Y_0 \in \mathbb{R}^3$. En prenant l'exponentielle et en supposant que $s_0 = 0 \in I$, nous avons donc

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{R}, \quad F(s) &= \exp(sA) \cdot F(0) = Q \exp(sB) Q^{-1} \cdot F(0) = Q \exp(sB) Q^{-1} \cdot F(0) \\ &= Q \begin{pmatrix} \cos(\lambda s) & \sin(\lambda s) & 0 \\ -\sin(\lambda s) & \cos(\lambda s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1} \cdot F(0). \end{aligned}$$

Donc le premier vecteur du triplet $F(s)$ est de la forme $\tau(s) = \cos(\lambda t)u_0 + \sin(\lambda t)v_0 + w_0$ où $u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{R}^3$. Par conséquent, la courbe gauche c s'écrit, à translation près,

$$c : s \mapsto \sin(\lambda s)u + \cos(\lambda s)v + sw$$

avec $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Quitte à remplacer s par $-s$ et w par $-w$, nous pouvons supposer que $\lambda = \sqrt{K^2 + T^2}$. Nous avons $\tau(0) = \dot{c}(0) = \lambda u + w$, $K\nu(0) = \dot{\tau}(0) = \dot{c}(0) = -\lambda^2 v$, et

$$-K^2\tau(0) - KT\beta(0) = K\dot{\nu}(0) = \ddot{\tau}(0) = \ddot{c}(0) = -\lambda^3 u.$$

Donc, comme $\lambda^2 - K^2 = T^2$, nous avons

$$\begin{aligned} c(s) &= \cos(\lambda s) \frac{-K\nu(0)}{\lambda^2} + \sin(\lambda s) \frac{K^2\tau(0) + KT\beta(0)}{\lambda^3} + s \left(\tau(0) - \frac{K^2\tau(0) + KT\beta(0)}{\lambda^2} \right) \\ &= \frac{K}{\lambda^2} \cos(\lambda s) (-K\nu(0)) + \frac{K}{\lambda^2} \sin(\lambda s) \frac{K\tau(0) + T\beta(0)}{\lambda} + \frac{T}{\lambda^2} (\lambda s) \frac{T\tau(0) - K\beta(0)}{\lambda}. \quad (37) \end{aligned}$$

Posons

$$a = \frac{K}{\lambda^2}, \quad b = \frac{T}{\lambda^2}, \quad e_1 = -\nu(0), \quad e_2 = \frac{K\tau(0) + T\beta(0)}{\lambda}, \quad \text{et} \quad e_3 = \frac{T\tau(0) - K\beta(0)}{\lambda}.$$

Alors $a > 0$ et $a^2 + b^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ donc $K = \frac{a}{a^2 + b^2}$ et $T = \frac{b}{a^2 + b^2}$. Le triplet (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe, comme le montre un calcul élémentaire d'orthonormalité des colonnes et de déterminant 1 de la matrice de passage de la base orthonormée directe

$$(\tau(0), \nu(0), \beta(0)) \text{ au triplet } (e_1, e_2, e_3), \text{ qui est } \begin{pmatrix} 0 & \frac{K}{\lambda} & \frac{T}{\lambda} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T}{\lambda} & -\frac{K}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

La formule (37) permet de retrouver l'équation (36) à changement de base orthonormée directe près, en utilisant que $\lambda^2 = K^2 + T^2$. $\square$

Exercice E.91. (Théorème de Lancret) Montrer que les courbes gauches paramétrées par longueur d'arc birégulières de classe C^3 de torsion non nulle vérifiant l'une des conditions suivantes :

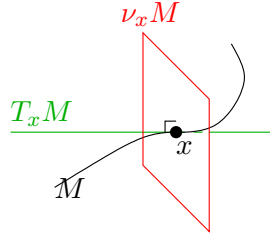
- ses vecteurs tangents font un angle constant avec une direction donnée,
- ses vecteurs normaux sont orthogonaux à un vecteur non nul constant,
- ses vecteurs binormaux font un angle constant avec une direction donnée,

sont les courbes gauches paramétrées par longueur d'arc birégulières dont le rapport $\frac{T}{K}$ de la torsion T par la courbure K est constant non nul. Ces courbes sont appelées des *hélices*.

8.2 Formes fondamentales et courbures des sous-variétés

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. Soit M une sous-variété de classe C^∞ de dimension p de l'espace vectoriel euclidien orienté usuel $\mathbb{R}^m$, muni de sa base canonique. Nous pouvons remplacer dans ce qui suit $\mathbb{R}^m$ par n'importe quel espace vectoriel réel euclidien orienté de dimension m , muni d'une base lorsque nécessaire.

8.2.1 Fibré normal et point focaux



Notons

$$\nu M = \{(x, v) \in \mathbb{R}^{2m} : x \in M, v \in \nu_x M = (T_x M)^\perp\}$$

le sous-espace de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{2m}$ des couples (x, v) où x est un point de M et v un vecteur dit *normal* à M , c'est-à-dire appartenant à l'orthogonal $\nu_x M = (T_x M)^\perp$ (pour le produit scalaire euclidien usuel de $\mathbb{R}^m$) du plan tangent $T_x M$ à M en x . Nous représenterons souvent sur les dessins l'espace normal $\nu_x M$ en un point x de M , qui est un espace vectoriel, comme l'espace affine passant par x correspondant. Remarquons que $\nu_x M$ est un sous-espace vectoriel de dimension $m - p$ de $\mathbb{R}^m$. En particulier, si M est une hypersurface de $\mathbb{R}^m$ (c'est-à-dire si $p = m - 1$), alors les espaces normaux $\nu_x M$ aux points x de M sont des droites vectorielles.

Le sous-espace νM muni de la projection canonique $\pi^\nu : (x, v) \mapsto x$ de νM dans M s'appelle le *fibré normal* à la sous-variété M . Par une démonstration assez semblable à celle pour le fibré tangent (voir la proposition 4.13) et le fibré cotangent (voir la partie 6.2), c'est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^{2m}$ de dimension $p + (m - p) = m$ et l'application $\pi^\nu : \nu M \rightarrow M$ est une submersion C^∞ .¹⁵² Contrairement au cas des fibrés tangents et cotangents, il dépend

152. Identifions $\mathbb{R}^p$ avec le sous-espace vectoriel des p premières coordonnées de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^{m-p}$ avec le sous-espace vectoriel des $m - p$ dernières coordonnées. Pour tout $x \in M$, soit $\phi : U \rightarrow V$ un redressement local de M en x (voir le théorème 4.5 (1)), c'est-à-dire un C^∞ -difféomorphisme ϕ d'un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^m$ tel que $\phi(x) = 0$ et $\phi(M \cap U) = V \cap \mathbb{R}^p$. Pour tout $y \in M$, notons $\pi_y^\perp : \mathbb{R}^m \rightarrow (T_y M)^\perp$ la projection orthogonale de $\mathbb{R}^m$ sur l'orthogonal du plan tangent $T_y M$. Alors l'application de $(V \cap \mathbb{R}^p) \times \mathbb{R}^{m-p}$ dans $\mathbb{R}^{2m}$ définie par

$$(z, v) \mapsto (\phi^{-1}(z), \pi_{\phi^{-1}(z)}^\perp \circ d(\phi^{-1})_z(v))$$

à C^∞ -difféomorphisme près du plongement de M dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^m$.

Un *champ de vecteurs normaux* est une section lisse de la projection canonique π^ν du fibré normal νM , c'est-à-dire une application lisse $\tilde{n} : M \rightarrow \nu M$ telle que $\pi^\nu \circ \tilde{n} = \text{id}_M$. Comme elle est de la forme $x \mapsto (x, v(x))$ avec $v : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application de classe C^∞ , telle que $v(x) \perp T_x M$ pour tout $x \in M$ (qui détermine complètement $\tilde{n}$), nous identifierons souvent l'application $\tilde{n}$ avec sa seconde projection v .

Si $p < m$ (c'est-à-dire si la codimension de M dans $\mathbb{R}^m$ est au moins 1), pour tout point fixé x de M , il existe des champs de vecteurs normaux qui sont définis sur tout M et ne s'annulent pas sur un voisinage ouvert assez petit de x . Les paramétrages locaux de νM et les partitions de l'unité permettent même de construire $m-p$ champs de vecteurs normaux linéairement indépendants en tout point d'un voisinage ouvert assez petit de x .

Exemple. Le fibré normal $\nu \mathbb{S}_p$ à la sphère $\mathbb{S}_p$ de dimension p dans $\mathbb{R}^{p+1}$ est C^∞ -difféomorphe à $\mathbb{S}_p \times \mathbb{R}$, car l'application de $\mathbb{S}_p \times \mathbb{R}$ dans $\nu \mathbb{S}_p$ définie par

$$(x, t) \mapsto (x, tx)$$

est un C^∞ -difféomorphisme d'inverse $(x, v) \mapsto (x, \langle x, v \rangle)$. De plus, l'application $\tilde{n} : x \mapsto (x, -x)$ est un champ de vecteurs normaux unitaires lisse sur $\mathbb{S}_p$. Contrairement aux champs de vecteurs tangents (voir le théorème de peignage des sphères 5.18), il existe donc des champs de vecteurs normaux ne s'annulant pas sur toute sphère, mais ce n'est pas forcément vrai pour toute sous-variété.

Nous avons une application lisse $f_M : \nu M \rightarrow \mathbb{R}^m$ (dite *d'évaluation en leur extrémité des vecteurs normaux*) définie par $f_M : (x, v) \mapsto x + v$. Nous dirons qu'un point $y \in \mathbb{R}^m$ est un *point focal* de M en x s'il existe $v \in \nu_x M$ tel que $f_M(x, v) = y$ et telle que le point (x, v) soit un point critique de f_M , ou, de manière équivalente puisque les sous-variétés νM et $\mathbb{R}^m$ sont toutes deux de dimension m , telle que l'application tangente $T_{(x,v)} f_M$ ait un noyau non nul. La *multiplicité* k d'un point focal y de M en x est alors la dimension du noyau de $T_{(x,y-x)} f_M$.

Exemples. (1) Soit $y \in \mathbb{R}^n$. S'il existe une courbe $c : I \rightarrow M$ de classe C^1 non constante tracée sur M et un champ de vecteurs normaux $v : I \rightarrow \nu M$ lisse le long de c (c'est-à-dire tel que $v(s) \in \nu_{c(s)} M$ pour tout $s \in I$, ou, de manière équivalente, tel que $\pi^\nu \circ v = c$), qui vérifient

$$\forall s \in I, \quad c(s) + v(s) = y,$$

alors y est un point focal de M . Mais cette condition suffisante n'est pas équivalente à être un point focal, qui est une propriété infinitésimale.

(2) Si $p \geq 1$, le seul point focal de la sphère $\mathbb{S}_p$ (et plus généralement de tout ouvert non vide de $\mathbb{S}_p$) est son centre, point en lequel se concentrent les rayons lumineux normaux intérieurs émis par une sphère. Sa multiplicité est égale à p . En effet, nous avons $f_{\mathbb{S}_p}(x, -x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{S}_p$, donc $(x, -x)$ est un point critique de $f_{\mathbb{S}_p}$ car $p \geq 1$. Une variation (utilisant le principe de réflexion de Descartes, avec réflexion symétrique de part et d'autre de la normale, et non pas le long de la normale) sur le phénomène de concentration des rayons est à la base des fours solaires, ci-dessous celui parabolique d'Odeillo (Pyrénées Orientales).

est un paramétrage local de νM en tout point de $\{x\} \times (T_x M)^\perp$.



Proposition 8.6. *Presque aucun point $y \in \mathbb{R}^m$ n'est un point focal de M .*

Démonstration. Puisque les sous-variétés νM et $\mathbb{R}^m$ sont toutes les deux de dimension m et par définition, les points focaux de M sont les valeurs critiques de l'application lisse f_M ci-dessus, et il suffit donc d'appliquer le théorème de Sard 5.3. $\square$

8.2.2 La première forme fondamentale

Notons $TM \times_M TM = \{(x, v, w) \in \mathbb{R}^{3m} : x \in M, v, w \in T_x M\}$, qui est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{3m}$ de dimension $3p$, ¹⁵³ appelée l'espace des *bivecteurs tangents* à M .

La *première forme fondamentale* de la sous-variété M de l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$ est l'application $I : TM \times_M TM \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$I : (x, v, w) \mapsto I_x(v, w) = \langle v, w \rangle,$$

en rappelant que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^m$. Le réel $I_x(v, w)$ est parfois noté $g_x(v, w)$ ou $\langle v, w \rangle_x$. Remarquons que l'application I est de classe C^∞ , et que l'application de $T_x M \times T_x M$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(v, w) \mapsto I_x(v, w)$ est un produit scalaire sur l'espace tangent $T_x M$ en x , c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $T_x M$. Nous noterons $\| \cdot \|_x$ la norme euclidienne sur $T_x M$ associée au produit scalaire euclidien I_x . La première forme fondamentale, qui dépend du plongement dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^m$, donne un exemple de métrique riemannienne sur la sous-variété M , mais nous n'en ferons pas de théorie générale dans ce cours, en renvoyant aux apprentissages de seconde année (M2) de master (voir par exemple [Pau4, GaHL, Spi]).

Nous pouvons exprimer la première forme fondamentale à l'aide de paramétrages locaux. Soit $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ un paramétrage local de M (où W est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $\varphi(W)$ un ouvert de M). Pour tout $x \in W$, le p -uplet

$$\mathcal{B}_{\varphi, x} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_p}(x) \right)$$

de vecteurs tangents à M en $\varphi(x)$ est une base de l'espace tangent $T_{\varphi(x)} M$. Elle ne dépend pas seulement de $\varphi(x)$, mais aussi de la différentielle de φ en x . La matrice $G(x) = G_\varphi(x)$

^{153.} En effet, comme dans la démonstration de la proposition 4.13, si (W, φ) est un paramétrage local lisse de M , d'image $U \cap M$, où U est un voisinage ouvert dans $\mathbb{R}^m$ d'un point $x'_0 \in M$, alors

$$(W \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p, \psi : (x, v, w) \mapsto (\varphi(x), d\varphi_x(v) + v'_0, d\varphi_x(w) + w'_0))$$

est un paramétrage local lisse de $TM \times_M TM$ au voisinage de (x'_0, v'_0, w'_0) pour tous les $v'_0, w'_0 \in T_{x'_0} M$.

de la première forme fondamentale $I_{\varphi(x)}$ de M en $\varphi(x)$ dans cette base est la matrice de Gram ¹⁵⁴ du p -uplet de vecteurs $\mathcal{B}_{\varphi,x}$ pour le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^m$, c'est-à-dire

$$G(x) = (g_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq p} = \left(\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle \right)_{1 \leq i,j \leq p}. \quad (38)$$

Notons Sym_p^{++} l'ensemble des matrices réelles de taille $p \times p$ symétriques définies positives, qui est un ouvert (donc une sous-variété lisse) de l'espace vectoriel réel Sym_p de dimension $\frac{p(p+1)}{2}$ des matrices réelles de taille $p \times p$ symétriques. L'application $G = G_\varphi : x \mapsto G(x)$ ainsi définie de W dans Sym_p^{++} est de classe C^∞ . Notons $(v_1, \dots, v_p)$ les composantes d'un vecteur tangent $v \in T_{\varphi(x)}M$ dans la base $\mathcal{B}_{\varphi,x}$, de sorte que

$$v = \sum_{i=1}^p v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x).$$

Nous identifions de manière usuelle un vecteur de $T_{\varphi(x)}M$ avec la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_{\varphi,x}$. Nous obtenons l'expression en coordonnées locales de la première forme fondamentale

$$\forall v, w \in T_{\varphi(x)}M, \quad I_{\varphi(x)}(v, w) = {}^t v G(x) w = \sum_{i,j=1}^p g_{i,j}(x) v_i w_j.$$

La formule de changement de paramétrage local est la suivante (voir la formule (40)). Soit $\psi : W' \rightarrow W$ un C^∞ -difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^p$, de matrice jacobienne $J\psi_y$ en $y \in W'$. Considérons l'application $\varphi \circ \psi : W' \rightarrow \mathbb{R}^m$, qui est encore un paramétrage local C^∞ de M (et tout paramétrage local de M en tout point de $\varphi(W)$ est localement de cette forme). Rappelons la formule

$$Z = (J\psi_y) Z' \quad (39)$$

reliant la matrice colonne Z' des nouvelles coordonnées d'un vecteur de $T_{\varphi \circ \psi(y)}M$ dans la nouvelle base $\mathcal{B}_{\varphi \circ \psi, y}$ des dérivées partielles de $\varphi \circ \psi$ en y , en fonction de la matrice colonne Z de ses anciennes coordonnées dans l'ancienne base $\mathcal{B}_{\varphi, \psi(y)}$ des dérivées partielles de φ en $\psi(y)$. ¹⁵⁵ Alors la matrice de la première forme fondamentale pour le (nouveau) paramétrage local $\varphi \circ \psi : W' \rightarrow \mathbb{R}^m$ de M est

$$G_{\varphi \circ \psi}(y) = {}^t (J\psi_y) G_\varphi(\psi(y)) (J\psi_y). \quad (40)$$

Comme le montre la formule (38), la première forme fondamentale de M est un invariant d'ordre 1 de la sous-variété M . Nous allons maintenant définir la seconde forme fondamentale II de M , en tant qu'invariant du second ordre de M .

154. Voir par exemple [Pau5] pour des généralités sur les matrices de Gram, dont nous n'aurons pas besoin ici.

155. En effet, notons $\psi_1, \dots, \psi_p$ les coordonnées de ψ et rappelons que $J\psi_y = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(y) \right)_{1 \leq i,j \leq p}$. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la i -ème composante de $(J\psi_y)Z'$ est $\sum_{j=1}^p \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j} z'_j$. Soient $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ et $Z' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix}$ les matrices colonnes des coordonnées de $v \in T_{\varphi \circ \psi(y)}M$ dans $\mathcal{B}_{\varphi, \psi(y)}$ et $\mathcal{B}_{\varphi \circ \psi, y}$ respectivement. Alors,

$$\sum_{i=1}^p z_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\psi(y)) = v = \sum_{j=1}^p z'_j \frac{\partial \varphi \circ \psi}{\partial y_j}(y) = \sum_{j=1}^p z'_j \sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\psi(y)) \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(y) = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^p \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(y) z'_j \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\psi(y)).$$

D'où $Z = (J\psi_y) Z'$ par l'unicité des coordonnées dans une base.

8.2.3 La seconde forme fondamentale et les courbures

Notons $\pi^\perp$ l'application de $M \times \mathbb{R}^m$ dans νM qui à (x, v) associe $(x, \pi_x^\perp(v))$ où, comme déjà défini dans la note de bas de page 152, nous notons $\pi_x^\perp : \mathbb{R}^m \rightarrow \nu_x M = (T_x M)^\perp$ la projection orthogonale de $\mathbb{R}^m$ sur le sous-espace vectoriel $\nu_x M$. Remarquons que $\pi^\perp$ est de classe C^∞ .

La *seconde forme*¹⁵⁶ *fondamentale* de la sous-variété M de $\mathbb{R}^m$ est l'application notée $\Pi : TM \times_M TM \rightarrow \nu M$ définie par

$$\Pi : (x, v, w) \mapsto \Pi_x(v, w) = \sum_{i,j=1}^p \pi_x^\perp \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi^{-1}(x)) \right) v_i w_j \quad (41)$$

où $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ est un paramétrage local de M , avec W un ouvert de $\mathbb{R}^p$ tel que $x \in \varphi(W)$, et $(v_1, \dots, v_p)$ et $(w_1, \dots, w_p)$ sont les coordonnées de v et w respectivement dans la base $\mathcal{B}_{\varphi, \varphi^{-1}(x)} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(x)), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_p}(\varphi^{-1}(x)) \right)$ des dérivées partielles de φ en $\varphi^{-1}(x)$. Notons que par le lemme de Schwarz, pour tout $x \in M$, l'application bilinéaire $\Pi_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \nu_x M$ est symétrique.

Cette définition ne dépend pas du choix du paramétrage local φ de M en x . En effet, soient $\psi : W' \rightarrow W$ un C^∞ -difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^p$, et $\psi_1, \dots, \psi_p$ les composantes de ψ . Par la formule (16) de la note de bas de page 108, si $y = (\varphi \circ \psi)^{-1}(x)$, nous avons

$$\frac{\partial^2(\varphi \circ \psi)}{\partial y_i \partial y_j}(y) = \sum_{1 \leq k, \ell \leq p} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_\ell}(\psi(y)) \frac{\partial \psi_k}{\partial y_i}(y) \frac{\partial \psi_\ell}{\partial y_j}(y) + \sum_{1 \leq \ell \leq p} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell}(\psi(y)) \frac{\partial^2 \psi_\ell}{\partial y_i \partial y_j}(y).$$

Puisque la seconde somme du membre de droite de l'égalité ci-dessus est une combinaison linéaire de vecteurs tangents à M en $\varphi(\psi(y)) = x$, elle disparaît en prenant la projection orthogonale¹⁵⁷ par $\pi_x^\perp$. La formule (39) de changement de coordonnées des vecteurs tangents montre alors l'indépendance cherchée. En particulier, l'application Π , qui peut localement être définie en prenant un même paramétrage local, est de classe C^∞ .

Si $\vec{n}$ est un champ de vecteurs normaux sur M , la *seconde forme*¹⁵⁸ *fondamentale dans la direction* $\vec{n}$ de la sous-variété M est l'application $\Pi^{\vec{n}} : TM \times_M TM \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ définie par

$$\Pi^{\vec{n}} : (x, v, w) \mapsto \Pi_x^{\vec{n}}(v, w) = \langle \vec{n}(x), \Pi_x(v, w) \rangle.$$

Pour tout $x \in M$, la forme bilinéaire $\Pi_x^{\vec{n}} : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ est symétrique (et à valeurs maintenant scalaires, et non plus vectorielles), et elle ne dépend que de la valeur de $\vec{n}$ en x . Si $v = \vec{n}(x)$, nous la noterons aussi Π_x^v .

Les valeurs propres (qui sont réelles) de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}} \Pi_x^{\vec{n}}$ de la forme bilinéaire $\Pi_x^{\vec{n}}$ dans n'importe quelle base orthonormée $\mathcal{B}$ de $T_x M$ pour la première forme fondamentale I_x sont appelées les *courbures principales* de M en x dans la direction $\vec{n}$.¹⁵⁹ Elles sont

156. Le terme « forme » n'est pas approprié, car l'application bilinéaire Π_x n'est pas à valeurs dans $\mathbb{R}$, mais est à valeurs vectorielles. Pour des raisons d'usage, nous l'emploierons tout de même.

157. C'est la raison pour laquelle nous prenons cette projection orthogonale, sinon la définition de la formule (41) ne serait pas indépendante du paramétrage local φ .

158. Cette fois-ci, la terminologie de forme est appropriée

159. Attention à ne pas oublier de prendre une base orthonormée de l'espace euclidien $T_x M$ pour calculer la matrice de la forme bilinéaire $\Pi_x^{\vec{n}}$ (et il convient de se souvenir que la formule de changement linéaire de coordonnées $M \mapsto {}^t P M P$ pour les matrices de formes bilinéaires n'est pas la même que la formule de changement linéaire de coordonnées $M \mapsto P^{-1} M P$ pour les matrices d'endomorphismes linéaires, sauf précisément quand P est une matrice de changement de base orthonormée, donc vérifiant $P^{-1} = {}^t P$).

notées

$$\lambda_1 = \lambda_1^{\bar{n}}(x), \dots, \lambda_p = \lambda_p^{\bar{n}}(x),$$

et sont bien définies modulo l'ordre.

Les *rayons de courbure principaux* de M en x dans la direction $\bar{n}$ sont les réels

$$R_i = R_i^{\bar{n}}(x) = \lambda_i^{-1}$$

pour tous les $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tels que $\lambda_i \neq 0$. Lorsque $\lambda_i = 0$, on pose parfois $R_i = \infty$ par continuité dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, mais il vaut mieux dire que le rayon de courbure n'est alors pas défini.

La *courbure de Gauss* de M en x dans la direction $\bar{n}$ est

$$K = K^{\bar{n}}(x) = \lambda_1 \dots \lambda_p.$$

La *courbure moyenne* de M en x dans la direction $\bar{n}$ est

$$H = H^{\bar{n}}(x) = \frac{1}{p} (\lambda_1 + \dots + \lambda_p).$$

Les courbures de Gauss et courbures moyennes sont indépendantes du choix de l'ordre des courbures principales, et définissent des fonctions de classe C^∞ sur M .¹⁶⁰

Par le théorème de Riesz-Fréchet,¹⁶¹ pour tout $x \in M$, puisque I_x est un produit scalaire sur $T_x M$ et puisque $\Pi_x^{\bar{n}}$ est une forme bilinéaire symétrique sur $T_x M$, il existe une unique application linéaire $L_x^{\bar{n}} : T_x M \rightarrow T_x M$, auto-adjointe pour ce produit scalaire, telle que pour tous les $v, w \in T_x M$, nous ayons

$$\Pi_x^{\bar{n}}(v, w) = I_x(L_x^{\bar{n}}(v), w).$$

160. En effet, pour tout $x \in M$, soit $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ un paramétrage local de M en x , et pour tout $y \in \varphi(W)$, soit $\widehat{\mathcal{B}}_{\varphi, \varphi^{-1}(y)}$ la base orthonormée de $T_y M$ obtenue par le procédé de Gram-Schmidt (voir par exemple [Pau5, Prop. 1.11]) appliqué à la base $\mathcal{B}_{\varphi, \varphi^{-1}(y)}$ des dérivées partielles de φ en $\varphi^{-1}(y)$. Alors par les formules de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la base $\widehat{\mathcal{B}}_{\varphi, \varphi^{-1}(y)}$ dépend de manière C^∞ de y dans $\varphi(W)$, et donc

$$K^{\bar{n}}(y) = \det \left(\text{Mat}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\varphi, \varphi^{-1}(y)}} \Pi_y^{\bar{n}} \right) \quad \text{et} \quad H^{\bar{n}}(y) = \frac{1}{p} \text{tr} \left(\text{Mat}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\varphi, \varphi^{-1}(y)}} \Pi_y^{\bar{n}} \right).$$

dépendent de manière C^∞ de y dans $\varphi(W)$.

161. Le *théorème de Riesz-Fréchet* (en dimension finie, sur le corps $\mathbb{R}$) dit que si E est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, si $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est son espace vectoriel réel dual, alors l'application linéaire $E \rightarrow E^*$ définie par $x \mapsto \{y \mapsto \langle x, y \rangle\}$ est un isomorphisme linéaire, car elle est linéaire injective entre espaces vectoriels de même dimension finie. Soit $x \in M$. Notons $\Psi_x : T_x M \rightarrow (T_x M)^*$ l'isomorphisme de Riesz-Fréchet pour $T_x M$ muni du produit scalaire I_x . Pour tout $v \in T_x M$, notons $\ell_{(x,v)} : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire $w \mapsto \Pi_x^{\bar{n}}(v, w)$. Alors l'application $L_x^{\bar{n}} : T_x M \rightarrow T_x M$ définie par $v \mapsto \Psi_x^{-1}(\ell_{(x,v)})$ est une application linéaire, vérifiant $\Pi_x^{\bar{n}}(v, w) = I_x(L_x^{\bar{n}}(v), w)$ pour tous les $v, w \in T_x M$. C'est l'unique telle application par construction, et comme la forme bilinéaire $\Pi_x^{\bar{n}}$ est symétrique, l'opérateur $L_x^{\bar{n}}$ est auto-adjoint pour le produit scalaire I_x .

En prenant les cartes locales données dans les formules (9) et (19) dans les parties 4.4.2 et 6.2 respectivement, on peut vérifier que l'application $\psi : TM \rightarrow T^*M$ défini par $(x, v) \mapsto (x, \psi_x(v))$ est un C^∞ -difféomorphisme.

L'application linéaire $L_x^{\vec{n}}$ est appelée *l'opérateur de Weingarten dans la direction $\vec{n}$ en x* (« shape operator » en anglais, parfois notée $W_x^{\vec{n}}$).¹⁶² Les courbures principales dans la direction $\vec{n}$ en tout point de M sont les valeurs propres de l'opérateur de Weingarten dans la direction $\vec{n}$ en tout point de M . De plus, nous avons

$$K^{\vec{n}}(x) = \det L_x^{\vec{n}} \quad \text{et} \quad H^{\vec{n}}(x) = \frac{1}{p} \operatorname{tr} L_x^{\vec{n}}.$$

Remarques. (1) Les courbures de Gauss et moyennes sont invariantes par isométries de l'espace ambiant $\mathbb{R}^m$, au sens suivant. Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ une isométrie (pour la distance euclidienne), donc de la forme $x \mapsto Ax + b$ avec $A \in \operatorname{O}(m)$ et $b \in \mathbb{R}^m$, de partie vectorielle $f' : x \mapsto Ax$. Puisque f est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^m$, l'image $\widetilde{M} = f(M)$ de M par f est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^m$. L'application $\nu f : \nu M \rightarrow \nu(f(M))$ définie par

$$(x, v) \mapsto (f(x), f'(v))$$

est un C^∞ -difféomorphisme, car $f'(v) \in \nu_{f(x)}(f(M))$ si et seulement si $v \in \nu_x M$ puisque f' préserve l'orthogonalité et envoie $T_x M$ sur $T_{f(x)} f(M)$ (par linéarité, $T_x f = f'|_{T_x M}$). Soit $\vec{n} : M \rightarrow \nu M$ un champ de vecteurs normaux lisse sur M . Alors

$$f_* \vec{n} = \nu f \circ \vec{n} \circ f^{-1} : f(M) \rightarrow \nu(f(M))$$

est un champ de vecteurs normaux lisse sur $f(M)$, et $f_* \vec{n}$ est unitaire si et seulement si $\vec{n}$ l'est car $\|f'(v)\| = \|v\|$ pour tout $v \in \mathbb{R}^m$. Les première $\widetilde{\Gamma}$ et seconde $\widetilde{\Pi}$ formes fondamentales de la sous-variété lisse $\widetilde{M} = f(M)$, la seconde forme fondamentale $\widetilde{\Pi}^{f_* \vec{n}}$ dans la direction du champs de vecteurs normaux $f_* \vec{n}$, l'opérateur de Weingarten $\widetilde{L}_{f(x)}^{f_* \vec{n}}$, ainsi que la courbure de Gauss $\widetilde{K}^{f_* \vec{n}}$ et la courbure moyenne $\widetilde{H}^{f_* \vec{n}}$, au point $f(x)$ de la sous-variété lisse $\widetilde{M} = f(M)$

162. Nous identifions comme d'habitude l'espace vectoriel réel $\operatorname{End}(\mathbb{R}^m)$ des endomorphismes linéaires de $\mathbb{R}^m$ avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{m^2}$, par l'isomorphisme linéaire qui à un endomorphisme associe sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Si E est un sous-espace vectoriel de l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$, d'orthogonal $E^\perp$, alors tout endomorphisme linéaire $f \in \operatorname{End}(E)$ de E s'étend de manière canonique en un endomorphisme linéaire $\widehat{f} \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^m)$ de $\mathbb{R}^m$ tel que $\widehat{f}|_E = f$ et $\widehat{f}|_{E^\perp} = 0$. Ainsi, $\operatorname{End}(E)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $\operatorname{End}(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^{m^2}$ par l'application $f \mapsto \widehat{f}$. Notons

$$\operatorname{End}(TM) = \{(x, \widehat{f}) \in \mathbb{R}^m \times \operatorname{End}(\mathbb{R}^m) : x \in M \text{ et } f \in \operatorname{End}(T_x M)\}$$

la réunion disjointe pour tous les $x \in M$ des espaces vectoriels $\operatorname{End}(T_x M)$ des endomorphismes linéaires des espaces tangents à M . Muni de l'application $\pi^{\operatorname{End}} : (x, \widehat{f}) \mapsto x$, le sous-espace $\operatorname{End}(TM)$ s'appelle le *fibré des endomorphismes du fibré tangent de M* . Montrons que le sous-espace topologique $\operatorname{End}(TM)$ de $\mathbb{R}^m \times \operatorname{End}(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m^2} = \mathbb{R}^{m+m^2}$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^{m(m+1)}$ de dimension $p(p+1)$. Soient $(y_0, \widehat{f}_0) \in \operatorname{End}(TM)$ et (W, φ) un paramétrage local C^∞ de M au voisinage ouvert de $y_0 = \varphi(0)$ par un ouvert W de $\mathbb{R}^p$ contenant 0. Notons que pour tout $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^p)$, l'application $f_x = d\varphi_x \circ f \circ d\varphi_x^{-1}$ est un endomorphisme linéaire de $T_x M$. Alors par une démonstration semblable à celle de la proposition 4.13, l'application

$$\psi : (x, f) \mapsto (\varphi(x), \widehat{f}_x + \widehat{f}_0)$$

définie sur l'ouvert $W \times \operatorname{End}(\mathbb{R}^p)$ de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{p^2}$, est un paramétrage local lisse de $\operatorname{End}(TM)$ au voisinage de $(y_0, \widehat{f}_0) = \psi(0, 0)$.

Par les formules explicites de la note de bas de page 161, l'application $L^{\vec{n}} : M \rightarrow \operatorname{End}(TM)$ définie par $x \mapsto L_x^{\vec{n}}$ est une section de classe C^∞ du fibré $\operatorname{End}(TM)$, c'est-à-dire une application C^∞ telle que $\pi^{\operatorname{End}} \circ L^{\vec{n}} = \operatorname{id}_M$.

vérifient, ¹⁶³ pour tous les $x \in M$ et $v, w \in T_x M$,

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{f(x)}(f'(v), f'(w)) &= \mathbf{I}_x(v, w), \quad \tilde{\Pi}_{f(x)}(f'(v), f'(w)) = f'(\Pi_x(v, w)), \\ \tilde{\Pi}_{f(x)}^{f_*\tilde{n}}(f'(v), f'(w)) &= \Pi_x^{\tilde{n}}(v, w), \quad \tilde{L}_{f(x)}^{f_*\tilde{n}} = f' \circ L_x^{\tilde{n}} \circ (f')^{-1}, \\ \tilde{K}^{f_*\tilde{n}}(f(x)) &= K^{\tilde{n}}(x), \quad \tilde{H}^{f_*\tilde{n}}(f(x)) = H^{\tilde{n}}(x).\end{aligned}\tag{42}$$

(2) Tout polynôme symétrique P en p variables définit aussi une fonction lisse sur M par $x \mapsto P(\lambda_1(x), \dots, \lambda_p(x))$.

(3) Soit $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'homothétie $x \mapsto \lambda x$ de rapport $\lambda > 0$ dans $\mathbb{R}^m$. Remarquons que $T_x M = T_{h(x)} h(M)$ pour tout $x \in M$ car h préserve toute droite vectorielle. Si $\tilde{n} : M \rightarrow \nu M$ est un champ de vecteurs normaux lisse sur M , alors en définissant maintenant

$$h_*\tilde{n} : x \in h(M) \mapsto (x, \tilde{n}(h^{-1}(x))) \in \nu(h(M)),$$

l'application $h_*\tilde{n}$ est un champ de vecteurs normaux lisse sur $f(M)$ car l'homothétie h préserve l'orthogonalité et l'espace tangent en tout point de M , et $h_*\tilde{n}$ est unitaire si et seulement si $\tilde{n}$ l'est. Par des calculs similaires à ceux de la remarque (1), les première $\tilde{\Gamma}$ et seconde $\tilde{\Pi}$ formes fondamentales, la seconde forme fondamentale $\tilde{\Pi}^{h_*\tilde{n}}$ dans la direction du champs de vecteurs normaux $h_*\tilde{n}$, l'opérateur de Weingarten $\tilde{L}_{h(x)}^{h_*\tilde{n}}$, ainsi que la courbure de Gauss $\tilde{K}^{h_*\tilde{n}}$ et la courbure moyenne $\tilde{H}^{h_*\tilde{n}}$, au point $h(x)$ de la sous-variété lisse $h(M)$ vérifient, ¹⁶⁴ pour tous les $x \in M$ et $v, w \in T_x M$,

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{h(x)}(h(v), h(w)) &= \lambda^2 \mathbf{I}_x(v, w), \quad \tilde{\Pi}_{h(x)}(h(v), h(w)) = h(\Pi_x(v, w)), \\ \tilde{\Pi}_{h(x)}^{h_*\tilde{n}}(h(v), h(w)) &= \lambda \Pi_x^{\tilde{n}}(v, w), \quad \tilde{L}_{h(x)}^{h_*\tilde{n}} = \frac{1}{\lambda} L_x^{\tilde{n}}, \\ \tilde{K}^{h_*\tilde{n}}(f(x)) &= \frac{1}{\lambda^p} K^{\tilde{n}}(x), \quad \tilde{H}^{h_*\tilde{n}}(f(x)) = \frac{1}{\lambda} H^{\tilde{n}}(x).\end{aligned}\tag{43}$$

Exemple. Supposons que I soit un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, et que M soit l'image d'une courbe plane régulière (respectivement d'une courbe gauche birégulière) $c : I \rightarrow \mathbb{R}^m$

163. La première égalité découle du fait que l'application linéaire f' préserve le produit scalaire de $\mathbb{R}^m$. Montrons la seconde égalité, les deux suivantes en découlant par les définitions des divers objets et les deux dernières découlant de la quatrième car deux endomorphismes conjugués ont même déterminant et même trace. Si $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ est un paramétrage local de M , alors $f \circ \varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ est un paramétrage local de $f(M)$. Soit $x \in W$. Nous avons $\frac{\partial f \circ \varphi}{\partial x_i}(x) = f' \circ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Donc si $v = \sum_{i=1}^p v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \in T_{\varphi(x)} M$, alors $f'(v) = \sum_{i=1}^p v_i \frac{\partial f \circ \varphi}{\partial x_i}(x)$. Nous avons $\frac{\partial^2 f \circ \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) = f' \circ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ et $\pi_{f(x)}^\perp \circ f' = f' \circ \pi_x^\perp$. Par la définition (41) de $\tilde{\Pi}_{f(x)}$, la seconde égalité de la formule (42) en découle.

164. Pour la troisième égalité, il convient de remarquer que par la seconde égalité, nous avons maintenant

$$\tilde{\Pi}_{h(x)}^{h_*\tilde{n}}(h(v), h(w)) = \langle \tilde{\Pi}_{h(x)}(h(v), h(w)), h_*\tilde{n}(h(x)) \rangle = \langle \lambda \Pi_x(v, w), \tilde{n}(x) \rangle = \lambda \Pi_x^{\tilde{n}}(v, w).$$

La quatrième égalité en découle alors, car par les première et troisième égalités et puisque les homothéties commutent avec toutes les applications linéaires, pour tous les $x \in M$ et $v, w \in T_x M = T_{h(x)} h(M)$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_x(L_{h(x)}^{h_*\tilde{n}}(v), w) &= \frac{1}{\lambda^2} \tilde{\Gamma}_{h(x)}(h(L_{h(x)}^{h_*\tilde{n}}(v)), h(w)) = \frac{1}{\lambda^2} \tilde{\Gamma}_{h(x)}(L_{h(x)}^{h_*\tilde{n}}(h(v)), h(w)) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \tilde{\Pi}_{h(x)}^{h_*\tilde{n}}(h(v), h(w)) = \frac{1}{\lambda} \Pi_x^{\tilde{n}}(v, w) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{I}_x(L_x^{\tilde{n}} v, w).\end{aligned}$$

avec $m = 2$ (respectivement $m = 3$), paramétrée par longueur d'arc, qui est un plongement lisse de I dans $\mathbb{R}^m$. Nous reprenons les notations de la partie 8.1. Notons $\vec{n}$ le champ de vecteurs normaux unitaires le long de c défini par $\vec{n}(c(s)) = \nu(s)$. Alors pour tout $s \in I$, nous avons

$$T_{c(s)}M = \mathbb{R} \tau(s), \quad \nu_{c(s)}M = \begin{cases} \mathbb{R} \nu(s) & \text{si } m = 2 \\ \mathbb{R} \nu(s) + \mathbb{R} \beta(s) & \text{si } m = 3, \end{cases}$$

et pour tous les $a, b \in \mathbb{R}$, puisque $\tau(s)$ est unitaire, et puisque l'accélération $\ddot{c}(s) = \dot{\tau}(s)$ est normale à M en $c(s)$, nous avons

$$I_{c(s)}(a \tau(s), b \tau(s)) = ab, \quad \Pi_{c(s)}(a \tau(s), b \tau(s)) = ab \ddot{c}(s),$$

$$\Pi_{c(s)}^{\vec{n}}(a \tau(s), b \tau(s)) = ab \langle \nu(s), \ddot{c}(s) \rangle = \begin{cases} ab \kappa(s) & \text{si } m = 2 \\ ab K(s) & \text{si } m = 3, \end{cases}$$

de sorte que $K^{\vec{n}}(c(s)) = \lambda_1^{\vec{n}}(c(s)) = \begin{cases} \kappa(s) & \text{si } m = 2 \\ K(s) & \text{si } m = 3 \end{cases}$. Ainsi la courbure de Gauss dans la direction du vecteur normal à la courbe ν coïncide avec la courbure des courbes planes et gauches.

Si $m = 3$, pour tout s_0 dans l'intérieur de I , pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, tout champ de vecteurs normaux unitaires le long de $c|_{]s_0-\epsilon, s_0+\epsilon[}$ s'écrit

$$\vec{n}_\theta : c(s) \mapsto \cos(\theta(s)) \nu(s) + \sin(\theta(s)) \beta(s),$$

où $\theta :]s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ est une application lisse. Auquel cas, puisque nous avons $\ddot{c}(s) = \dot{\tau}(s) = K(s) \nu(s)$, pour tout $s \in]s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon[$, nous avons

$$\Pi_{c(s)}^{\vec{n}_\theta}(a \tau(s), b \tau(s)) = ab \langle \vec{n}_\theta(c(s)), \ddot{c}(s) \rangle = ab \cos(\theta(s)) K(s).$$

8.2.4 Le cas des hypersurfaces orientées

Supposons dans cette partie que la sous-variété lisse M soit une hypersurface de l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^m$ (en particulier $p = m-1$). Lorsque M est munie d'un champ de vecteurs normaux unitaires lisse $\vec{n}$, il est traditionnel de noter Π la seconde forme fondamentale $\Pi^{\vec{n}}$ dans la direction $\vec{n}$, et de l'appeler la *seconde forme fondamentale* de M . De même, nous notons $L_x = L_x^{\vec{n}}$, que nous appelons *l'opérateur de Weingarten* de M .

Lemme 8.7. *Il existe un champ de vecteurs normaux unitaires lisse $\vec{n}$ défini sur tout M si et seulement si M est orientable.*

Démonstration. Si M est orientable, pour tout choix d'orientation de M , nous pouvons définir $\vec{n}$ en demandant que pour tout $x \in M$, si $(v_1, \dots, v_{m-1})$ est une base orthonormée (pour la première forme fondamentale) orientée de $T_x M$, alors $(v_1, \dots, v_{m-1}, \vec{n}(x))$ est une base orthonormée orientée de $\mathbb{R}^m$ (voir l'exemple ci-dessous pour l'explication du choix de positionnement de $\vec{n}(x)$).

Réciproquement, s'il existe un champ $\vec{n}$ comme dans l'énoncé, nous pouvons définir une orientation (lisse) sur TM , en demandant pour tout $x \in M$ qu'une base $(v_1, \dots, v_{m-1})$ de $T_x M$ soit directe si et seulement si la base $(v_1, \dots, v_{m-1}, \vec{n}(x))$ de $\mathbb{R}^m$ est directe. $\square$

En particulier, un champ de vecteurs normaux unitaires lisse existe localement : pour tout paramétrage local $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ de M , où W est un ouvert W de $\mathbb{R}^{m-1}$, nous pouvons

munir l'ouvert $\varphi(W)$ de M de l'orientation qui fait de φ un C^∞ -difféomorphisme préservant l'orientation.

Si M est connexe et s'il existe un champ de vecteurs normaux unitaires lisse $\vec{n}$ sur M , il est, par continuité, unique modulo changement global de signe, auquel cas la seconde forme fondamentale est bien définie au signe près. Et particulier si $p = m - 1$ est pair, comme ce sera le cas pour les surfaces dans $\mathbb{R}^3$ traitées dans la partie 8.4, alors la courbure de Gauss est indépendante du choix de $\vec{n}$, car changer toutes les courbures principales en leur opposée ne change pas leur produit si leur nombre est pair.

Lorsque M est une hypersurface orientée, nous utiliserons sauf mention contraire le champ de vecteurs normaux unitaires lisse $\vec{n}$ du lemme ci-dessus, dit *orienté*, pour définir la seconde forme fondamentale $\Pi = \Pi^{\vec{n}}$, parfois appelée la *seconde forme fondamentale scalaire*, qui est alors invariante par déplacement de $\mathbb{R}^m$ par la formule (42), ainsi que pour définir l'opérateur de Weingarten scalaire $L = L^{\vec{n}}$.

L'application de classe C^∞ ainsi définie $\vec{n} : M \rightarrow \mathbb{S}_{m-1}$ est appelée *l'application de Gauss* de l'hypersurface orientée M .¹⁶⁵ Pour tout $x \in M$, puisque l'orthogonal de $\vec{n}(x)$ est le plan tangent $T_x M$ à l'hypersurface M en x , nous avons

$$T_x M = \vec{n}(x)^\perp = T_{\vec{n}(x)} \mathbb{S}_{m-1} .$$

En dérivant l'égalité $\langle \vec{n}(x), \vec{n}(x) \rangle = 1$ exprimant le caractère unitaire du champ de vecteurs normaux $\vec{n}$, pour tout $v \in T_x M$, nous avons que $T_x \vec{n}(v)$ est orthogonal à $\vec{n}(x)$, donc appartient à $T_{\vec{n}(x)} \mathbb{S}_{m-1} = T_x M$. Par conséquent, l'application $T_x \vec{n} : T_x M \rightarrow T_x M$ est un endomorphisme linéaire de $T_x M$.

Proposition 8.8. *Pour tout $x \in M$, l'opérateur de Weingarten L_x de l'hypersurface orientée M en x est égal à l'opposé de l'application tangente $T_x \vec{n}$ en x de l'application de Gauss :*

$$\forall x \in M, \forall v, w \in T_x M, \quad L_x = -T_x \vec{n} \quad \text{et} \quad \Pi_x(v, w) = -\mathrm{I}_x(T_x \vec{n}(v), w) .$$

De nombreux ouvrages, dont [BG], utilisent malencontreusement une convention de signe différente.

Démonstration. Fixons $x \in M$ et $v, w \in T_x M$. Soit $\varphi : W \rightarrow M$ un paramétrage local de M préservant l'orientation tel que $x \in \varphi(W)$. Nous pouvons étendre la donnée du vecteur tangent w en x à M en un champ de vecteurs tangents $x' \mapsto w(x')$ sur un voisinage ouvert $U \subset \varphi(W)$ de x dans M de sorte que l'application $x' \mapsto d(\varphi^{-1})_{x'}(w(x')) \in T_{\varphi^{-1}(x')} W = \mathbb{R}^{m-1}$ soit constante sur U' , en posant $w(x') = d\varphi_{\varphi^{-1}(x')}(d(\varphi^{-1})_x(w)) \in T_{x'} M$. En différentiant par rapport à $x' \in U$ la relation d'orthogonalité

$$\langle \vec{n}(x'), d\varphi_{\varphi^{-1}(x')}(d(\varphi^{-1})_x(w)) \rangle = \langle \vec{n}(x'), w(x') \rangle = 0 ,$$

nous avons, pour tout $v' \in T_{x'} M$

$$\langle T_{x'} \vec{n}(v'), d\varphi_{\varphi^{-1}(x')}(d(\varphi^{-1})_x(w)) \rangle + \langle \vec{n}(x'), d^2 \varphi_{\varphi^{-1}(x')}(d(\varphi^{-1})_{x'}(v'), d(\varphi^{-1})_x(w)) \rangle = 0 .$$

165. La *troisième forme fondamentale* $\text{III} : TM \times_M TM \rightarrow \mathbb{R}$ d'une hypersurface orientée M , dont nous ne nous servirons pas dans ces notes, est définie comme étant l'opposée de l'image réciproque de la première forme fondamentale de $\mathbb{S}_{m-1}$ par l'application tangente à l'application de Gauss de M :

$$\forall x \in M, \forall v, w \in T_x M, \quad \text{III}_x(v, w) = -\langle T_x \vec{n}(v), T_x \vec{n}(w) \rangle .$$

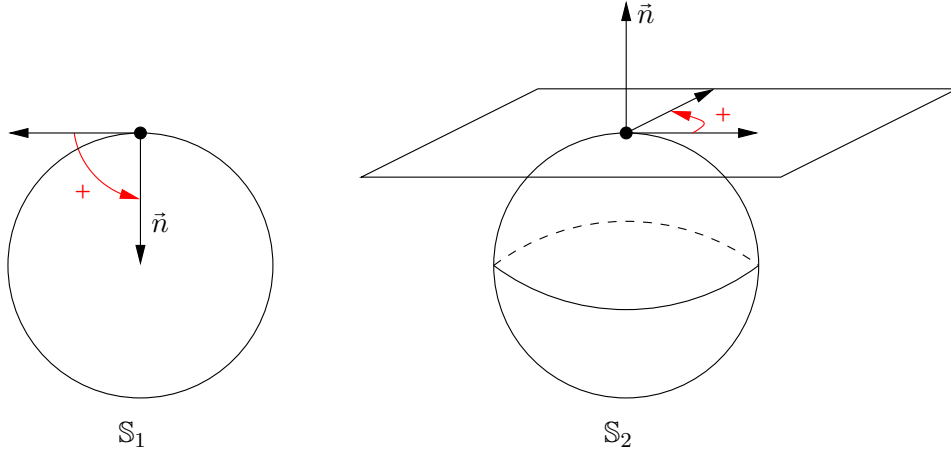
Nous avons donc $\text{III}_x(v, w) = -\Pi_x(v, L_x(w))$.

Considérons $(x', v') = (x, v)$ dans la suite. Notons que $\langle \vec{n}(x), \pi_x^\perp(u) \rangle = \langle \vec{n}(x), u \rangle$ pour tout $u \in \mathbb{R}^m$, et que $d\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(d(\varphi^{-1})_x(w)) = w$. Par la formule (41), nous avons donc

$$\begin{aligned}\Pi_x^{\vec{n}}(v, w) &= \langle \vec{n}(x), \Pi_x(v, w) \rangle = \langle \vec{n}(x), d^2\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(d(\varphi^{-1})_x(v), d(\varphi^{-1})_x(w)) \rangle \\ &= -\langle T_x \vec{n}(v), w \rangle = \mathbf{I}_x(-T_x \vec{n}(v), w) .\end{aligned}$$

Ceci étant vérifié pour tous les $x \in M$ et $v, w \in T_x M$, le résultat en découle, par l'unicité de l'opérateur de Weingarten. $\square$

Exemple. Pour tous les $n \in \mathbb{N}$ et $R \in]0, +\infty[$, la sphère $S_R = S_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R)$ de centre 0 et de rayon R dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^{n+1}$ est une hypersurface lisse de $\mathbb{R}^{n+1}$, orientée par la normale sortante de la boule fermée $B_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R)$ comme dans la partie 5.4, en mettant un vecteur sortant en première position. Son champ de vecteurs normaux unitaires orienté est, par la construction dans le lemme 8.7 mettant le vecteur normal en dernière position, le champ de vecteurs normaux $x \mapsto (-1)^n \frac{x}{R}$, rentrant dans la boule $B_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R)$ si n est impair, et sortant de cette boule si n est pair.



Comme remplacer ce champ de vecteurs par son opposé ne change pas la courbure de Gauss si n est pair, nous utiliserons dans la suite le champ de vecteurs normaux unitaires rentrant $\vec{n} : x \mapsto -\frac{x}{R}$ pour calculer la seconde forme fondamentale.

Au voisinage de tout point de S_R de première coordonnée strictement positive, l'application $\varphi : \mathring{B}_{\mathbb{R}^n}(0, R) \rightarrow S_R$ définie sur la boule ouverte de rayon R et de centre 0 dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ par

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \varphi(x) = (x_0 = \sqrt{R^2 - \|x\|^2}, x_1, \dots, x_n)$$

est un paramétrage local. En notant $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, pour tout $x \in \mathring{B}_{\mathbb{R}^n}(0, R)$, la base $\mathcal{B}_{\varphi, x}$ de $T_{\varphi(x)} S_R$ définie par ce paramétrage local est

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) = e_1 - \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - \|x\|^2}} e_0, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) = e_n - \frac{x_n}{\sqrt{R^2 - \|x\|^2}} e_0 \right).$$

Pour tous les $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le coefficient (i, j) de la matrice de Gram $G(x) = (g_{i,j}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$ de la première forme fondamentale de S_R en x dans cette base est donc

$$g_{i,j}(x) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle = \begin{cases} \frac{x_i x_j}{R^2 - \|x\|^2} & \text{si } i \neq j \\ 1 + \frac{x_i^2}{R^2 - \|x\|^2} & \text{si } i = j . \end{cases}$$

En particulier, au pôle Nord $P = (R, 0, \dots, 0) = \varphi(0)$, l'espace tangent $T_P S_R$ à la sphère S_R a pour base $(e_1, \dots, e_n)$, qui est orthonormée pour la première forme fondamentale de S_R en P , et donc $G(0) = I_n$ est la matrice identité $n \times n$. De plus, le coefficient (i, j) de la matrice de la seconde forme fondamentale de S_R en P dans cette base est

$$\pi^\perp \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} (0) \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} (0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ -\frac{1}{R} e_0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Puisque le champ de vecteurs normaux unitaires rentrant de S_R vaut $\bar{n}(0) = -\frac{\varphi(0)}{R} = -e_0$ au pôle Nord $P = \varphi(0)$, la seconde forme fondamentale (scalaire) en P de l'hypersurface orientée S_R vérifie donc, pour tous les $v, w \in T_P S_R$,

$$\Pi_P(v, w) = \frac{1}{R} I_P(v, w).$$

Par invariance par rotation (voir la remarque (1) de la partie 8.2.3), pour tous les $x \in S_R$ et $v, w \in T_x S_R$, nous avons $\Pi_x(v, w) = I_x(\frac{1}{R}v, w)$. Donc l'opérateur de Weingarten en tout point x de S_R est l'application linéaire $v \mapsto \frac{1}{R}v$, c'est-à-dire l'homothétie de rapport $\frac{1}{R}$ de l'espace tangent $T_x S_R$.

Par invariance par rotation, les courbures principales, les rayons de courbure principaux, les courbures de Gauss et moyennes de la sphère $\mathbb{S}_n$ sont constantes, égales respectivement à

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{R}, \quad R_1 = \dots = R_n = R, \quad K = \frac{1}{R^n} \quad \text{et} \quad H = \frac{1}{R}.$$

Remarquons qu'en dimension impaire, le choix opposé du champ de vecteurs normaux unitaires sortant de la boule (qui est celui utilisé pour définir l'orientation de la sphère) conduirait à des sphères de courbures principales strictement négatives, ce qui ne collerait pas avec l'intuition.

8.3 Points focaux et courbures principales

Soit M une sous-variété de classe C^∞ et de dimension p dans $\mathbb{R}^m$. Le but de cette partie est de caractériser les points focaux de M en terme des courbures principales et d'en déduire une nouvelle construction de fonctions de Morse lisses sur M .

Proposition 8.9. *Pour tout point $y \in M$ et tout vecteur normal unitaire $v \in \nu_y M$ à M en y , les points focaux de M sur la droite affine normale $\ell = \{y + tv : t \in \mathbb{R}\}$ sont les points $y + R_i v$ où $R_i = \frac{1}{\lambda_i}$ est un rayon de courbure principale de M en y dans la direction v , pour tous les $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tels que $\lambda_i \neq 0$.*

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $\lambda_i \neq 0$, la multiplicité du point focal $y + R_i v$ est égale à $\text{Card}\{j \in \llbracket 1, p \rrbracket : R_j = R_i\}$.

Comptés avec multiplicité, il y a donc au plus p points focaux le long de la droite affine normale ℓ .

Lorsque M est l'image d'une courbe plane régulière ou d'une courbe gauche birégulière c , ce résultat dit, par le calcul de la courbure principale de M dans l'exemple en fin de la partie 8.2.3, que l'unique point focal de M en un point $x = c(s)$ dans la direction $\nu(s)$ du vecteur normal en s est le centre $c(s) + \frac{1}{K(s)}\nu(s)$ du cercle osculateur de M en x (lorsqu'il existe, c'est-à-dire lorsque la courbure $K(s)$ de c au temps s est non nulle).

Démonstration. Nous pouvons supposer que $p < m$. Soient $y \in M$ et $v \in \nu_y M$ tel que $\|c\|_x = 1$. Soit $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ un paramétrage local de M en y , où W est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et $\varphi(0) = y$. Quitte à réduire l'ouvert W , il existe, pour tout élément $x = (x_1, \dots, x_p) \in W$, une base orthonormée $(\tilde{n}_{p+1}(x), \dots, \tilde{n}_m(x))$ du sous-espace vectoriel euclidien $\nu_{\varphi(x)} M$, dépendant de manière lisse de x , telle que $\tilde{n}_{p+1}(0) = v$. Alors l'application $\tilde{\varphi}$ de $W \times \mathbb{R}^{m-p}$ dans νM définie par

$$\tilde{\varphi} : (x = (x_1, \dots, x_p), u = (x_{p+1}, \dots, x_m)) \mapsto \left(\varphi(x), \sum_{k=p+1}^m x_k \tilde{n}_k(x) \right)$$

est un paramétrage local lisse de νM en (y, v) . L'expression dans ce paramétrage local de l'application $f_M : \nu M \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie par $(z, w) \mapsto z + w$ est

$$\psi = f_M \circ \tilde{\varphi} : (x = (x_1, \dots, x_p), u = (x_{p+1}, \dots, x_m)) \mapsto \varphi(x) + \sum_{k=p+1}^m x_k \tilde{n}_k(x).$$

Ses dérivées partielles en $(x, u) \in W \times \mathbb{R}^{m-p}$ sont, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x, u) = \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) + \sum_{k=p+1}^m x_k \frac{\partial \tilde{n}_k}{\partial x_i}(x) & \text{si } i \leq p, \\ \tilde{n}_i(x) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (44)$$

Pour tout $x \in W$, puisque les vecteurs $\tilde{n}_k(x)$ pour $k \in \llbracket p+1, m \rrbracket$ sont orthogonaux aux vecteurs $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)$ pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, nous avons

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{n}_k}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle + \left\langle \tilde{n}_k(x), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \tilde{n}_k(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle = 0.$$

Quitte à effectuer un changement de variable linéaire dans W , nous pouvons supposer que la base $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_p}(0) \right)$ de $T_y M$ est orthonormée, c'est-à-dire que la matrice de Gram $(g_{i,j}(0) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(0), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(0) \right\rangle)_{1 \leq i,j \leq p}$ est la matrice identité $p \times p$.

Par la formule (44), pour tout $u \in \mathbb{R}^{m-p}$, l'application différentielle $d_{(0,u)} \psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ en $(0, u)$ de ψ , qui est linéaire, admet pour matrice dans la base canonique de l'espace de départ $\mathbb{R}^m$ et dans la base orthonormée $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_p}(0), \tilde{n}_{p+1}(0), \dots, \tilde{n}_m(0) \right)$ de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^m$, une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A(0, u) & B \\ 0 & I_{m-p} \end{pmatrix}$ avec $A(0, u) = (a_{ij}(0, u))_{1 \leq i,j \leq p}$ où

$$\begin{aligned} a_{ij}(0, u) &= \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(0), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(0) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(0), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(0) \right\rangle + \sum_{k=p+1}^m x_k \left\langle \frac{\partial \tilde{n}_k}{\partial x_i}(0), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(0) \right\rangle \\ &= g_{i,j}(0) - \sum_{k=p+1}^m x_k \left\langle \tilde{n}_k(0), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right\rangle \end{aligned}$$

et $B \in \mathcal{M}_{p, m-p}$ une matrice qu'il n'est pas besoin de préciser. En particulier, la dimension du noyau de $d_{(0,u)} \psi$ est égale à la dimension du noyau de $A(0, u)$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, en posant $u_0 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m-p}$ de sorte que $\psi(0, tu_0) = y + tv$, le point $y + tv$ est un point focal de M en y si et seulement si la différentielle $d_{(0, tu_0)} \psi$ n'est pas injective, et alors la multiplicité du point focal $y + tv$ est égale à la dimension du noyau de la matrice

$$\left(a_{ij}(0, tu_0) = g_{i,j}(0) - t \left\langle v, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right\rangle \right)_{1 \leq i,j \leq p}.$$

Donc $y + tv$ est un point focal de M de multiplicité μ si et seulement si $\frac{1}{t}$ est une valeur propre de multiplicité μ de la matrice de la seconde forme fondamentale de M en y dans la direction v . Ceci montre le résultat. $\square$

Le résultat suivant redémontre l'existence d'une fonction de Morse lisse sur toute variété (voir la partie 6.2), en utilisant le théorème de plongement de Whitney (voir la partie 4.6) pour se ramener à une sous-variété d'un espace euclidien $\mathbb{R}^m$.

Théorème 8.10. *Pour presque tout point $z \in \mathbb{R}^m$, l'application $\delta_z : M \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y \mapsto d(y, z)^2 = \|y - z\|^2$ est une fonction de Morse lisse sur M .*

Démonstration. Remarquons que l'application $\delta_z : y \mapsto \langle y - z, y - z \rangle$ est en effet une fonction lisse sur M . Le lemme clef est la caractérisation suivante des points critiques non dégénérés de la fonction δ_z .

Lemme 8.11. (1) *Un point $y \in M$ est un point critique dégénéré de la fonction δ_z si et seulement si z est un point focal de M en y . La dimension du noyau de la matrice hessienne de δ_z en y est alors égale à la multiplicité du point focal z .*

(2) *Si $y \in M$ est un point critique non dégénéré de la fonction δ_z , alors l'indice de y est égal au nombre de points focaux de M (comptés avec multiplicité) sur le segment $]y, z[$ normal à M .*

Démonstration. (1) Soit $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ un paramétrage local de M en y , où W est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et $\varphi(0) = y$. L'application δ_z lue dans ce paramétrage local est l'application $\psi = \delta_z \circ \varphi : W \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\psi : x \mapsto \|\varphi(x) - z\|^2.$$

Ses dérivées partielles premières sont, pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) = 2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x), \varphi(x) - z \right\rangle.$$

En particulier, puisque les vecteurs $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_p}(0)$ engendrent l'espace vectoriel $T_y M$, le point y est un point critique de δ_z si et seulement si le vecteur $y - z$ est normal à M en y .

La matrice hessienne de ψ en 0 vérifie, pour tous les $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, l'égalité

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(0) = 2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(0), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(0) \right\rangle + 2 \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(0), \varphi(0) - z \right\rangle.$$

Donc si $z = y + tv$ avec v un vecteur normal unitaire à M en $y = \varphi(0)$, nous avons

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(0) = 2 \left(g_{i,j}(0) - t \left\langle v, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right\rangle \right).$$

Le résultat découle donc de la fin de la démonstration de la proposition 8.9.

(2) Nous renvoyons par exemple à [Mil2]. $\square$

Ce lemme et la proposition 8.6 démontrent le théorème 8.10. $\square$

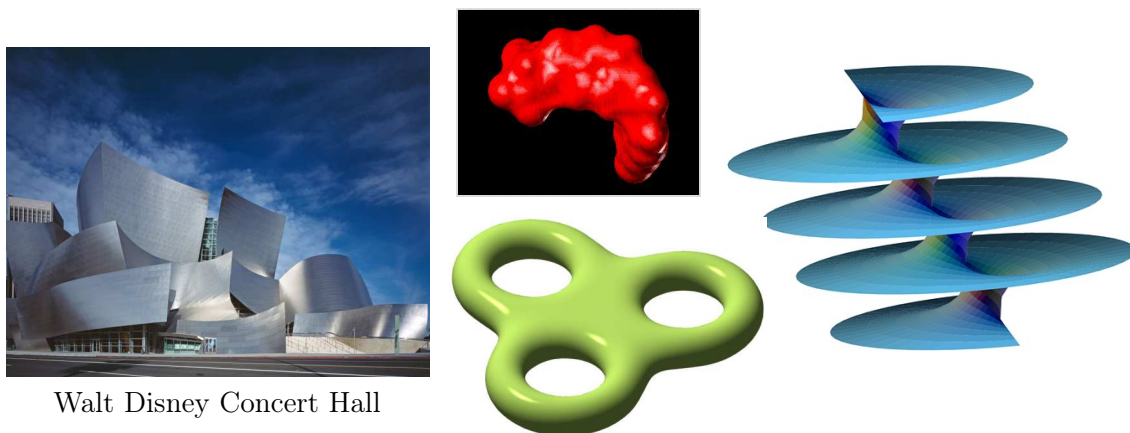
Exercice E.92. *Calculer la courbure et les points focaux des ellipses planes et des hyperboles planes d'équation $ax^2 + by^2 = 1$, où $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et des paraboles planes d'équation $y = ax^2$, où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

8.4 Courbures des surfaces de $\mathbb{R}^3$

Le but de cette partie est de décrire les propriétés locales de courbure des surfaces plongées dans $\mathbb{R}^3$. Nous supposons donc que $d = 2$ et $m = 3$ dans cette partie, et que M est une sous-variété lisse orientée de dimension 2 (donc une surface) de $\mathbb{R}^3$.

Comme nous n'allons effectuer qu'une étude locale, la restriction sur l'orientation n'est pas contraignante : nous nous restreindrons à l'image d'un paramétrage local, et nous supposerons que celui-ci préserve l'orientation. Rappelons aussi que la courbure de Gauss $K : M \rightarrow \mathbb{R}$, produit des deux courbures principales, ne dépend pas du choix local d'un champ de vecteurs normaux unitaires lisse, car le choix opposé donne la même valeur. Nous prendrons les champs de vecteurs normaux unitaires définis par les paramétrages locaux préservant l'orientation.

Les images de surfaces sont légion sur la toile internet, et nous n'en donnons que quelques exemples ci-dessous, essentiellement issus de Wikipedia.



Walt Disney Concert Hall

Soit M une hypersurface lisse orientée de $\mathbb{R}^m$. Nous allons mettre en œuvre ci-dessous, dans le cas particulier $m = 3$, la méthodologie introduite dans la partie 8.2 pour calculer les invariants géométriques de M .

- (1) Trouver de « bons » paramétrages locaux $\varphi : W \rightarrow M$ (préservant l'orientation) de « bons » voisinages de tout point de M , qui rendront les calculs les plus agréables possibles et reflèteront les éventuelles symétries de M (il est souvent utile d'utiliser des arguments de symétrie pour simplifier, voire éviter, certains calculs).
- (2) Calculer une base de champs de vecteurs tangents (les $(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \circ \varphi^{-1})_{1 \leq i \leq m-1}$ étant une base du $C^\infty(\varphi(W))$ -module des champs de vecteurs tangents sur $\varphi(W)$).
- (3) Calculer la première forme fondamentale, par exemple par la matrice de Gram de la base précédente.
- (4) Calculer le champ de vecteurs normaux unitaires $\vec{n}$ orienté (c'est-à-dire donné par l'orientation de la variété et de l'espace ambiant), par exemple en prenant le produit vectoriel (renormalisé) de la base précédente, et qui déterminera donc l'application de Gauss de l'hypersurface orientée M de $\mathbb{R}^m$.
- (5) Calculer la seconde forme fondamentale de M , que ce soit en utilisant (sans oublier de prendre le produit scalaire avec $\vec{n}$ pour avoir la seconde forme fondamentale « scalaire ») la différentielle seconde du paramétrage $d^2\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(d\varphi_x^{-1}(v), d\varphi_x^{-1}(w))$ ou de manière équivalente sa matrice hessienne (à valeurs vectorielles) $(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \circ \varphi^{-1})_{1 \leq i, j \leq m-1}$ ou que ce soit en utilisant l'opérateur de Weingarten $-T_x \vec{n}$, de matrice de taille $(m-1) \times m$ donnée par $(\frac{\partial(\vec{n} \circ \varphi)}{\partial x_i} \circ \varphi^{-1})_{1 \leq i \leq m-1}$, en fonction de ce qui minimise les calculs.
- (6) Enfin, calculer les invariants de courbure souhaités, dont courbures principales, courbure de Gauss, courbure moyenne, points focaux (par la proposition 8.9), etc.

Calcul de la première forme fondamentale dans un paramétrage local

Soit $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ un paramétrage local de M (préservant l'orientation), où W est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in W$, posons

$$E(x, y) = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right\|^2, \quad F(x, y) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right\rangle, \quad \text{et} \quad G(x, y) = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right\|^2.$$

Alors la matrice de la première forme fondamentale $I_{\varphi(x, y)}$ de M en $\varphi(x, y)$ dans la base $\mathcal{B}_{\varphi(x, y)} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right)$ est la matrice de Gram

$$\begin{pmatrix} E(x, y) & F(x, y) \\ F(x, y) & G(x, y) \end{pmatrix},$$

de sorte que la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique $I_{\varphi(x, y)}$ s'écrive, pour tout $v = X \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + Y \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \in T_{\varphi(x, y)} M$,

$$\begin{aligned} I_{\varphi(x, y)}(v, v) &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(x, y) & F(x, y) \\ F(x, y) & G(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= X^2 E(x, y) + 2XY F(x, y) + Y^2 G(x, y). \end{aligned}$$

Pour tout borélien B contenu dans l'image $\varphi(W)$ de φ , nous définissons l'aire de B par

$$\begin{aligned}\text{Aire}(B) &= \int_{\varphi^{-1}(B)} \sqrt{\det(I_{\varphi(x,y)})} \, dx \, dy = \int_{\varphi^{-1}(B)} \sqrt{\det(g_{i,j}(x,y))_{1 \leq i,j \leq 2}} \, dx \, dy \\ &= \int_{\varphi^{-1}(B)} \sqrt{EG - F^2} \, dx \, dy = \int_{\varphi^{-1}(B)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \right\| \, dx \, dy ,\end{aligned}$$

qui est un élément de $[0, +\infty]$. Par la formule de changement de variable des intégrales pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ et par la formule (40), ceci ne dépend pas du paramétrage local. Nous pouvons alors définir l'aire $\text{Aire}(B)$ de tout borélien B d'une surface lisse M' (orientable ou pas) de $\mathbb{R}^3$, en écrivant $B = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ comme une réunion dénombrable de boréliens B_i deux à deux disjoints, chacun d'eux étant contenu dans l'image d'un paramétrage local de M , en posant

$$\text{Aire}(B) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{Aire}(B_i) .$$

Par la σ -additivité de la mesure de Lebesgue, ceci ne dépend pas du choix d'une telle décomposition de B . L'application $B \mapsto \text{Aire}(B)$ est une mesure (positive, borélienne) finie sur les compacts, sur l'espace localement compact M' , appelée la *mesure d'aire* de M' .

La première formule ci-dessus permet de définir une mesure, dite *riemannienne*, sur toute variété riemannienne, nous renvoyons pour cela aux apprentissages de seconde année (M2) de master (voir par exemple [Pau4, GaHL, Spi]).

Exemples. (1) **Graphes.** Soit $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse sur un ouvert W de $\mathbb{R}^2$. L'application *graphe de f* de W dans $\mathbb{R}^3$, définie par $\varphi : (x,y) \mapsto (x,y,f(x,y))$, est un C^∞ -plongement (voir le théorème 4.5 (3)). Donc son image

$$M = \varphi(W) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in W, \, z = f(x,y)\}$$

est une surface de $\mathbb{R}^3$. Nous orientons la surface M en demandant que le C^∞ -difféomorphisme $\varphi : W \rightarrow M$ préserve l'orientation. Pour tous les $(x,y) \in W$, la base $(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y))$ de l'espace vectoriel $T_{\varphi(x,y)}M$ définie par ce paramétrage local est donnée par

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) .$$

Alors

$$E(x,y) = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2, \quad F(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \quad \text{et} \quad G(x,y) = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 . \quad (45)$$

En particulier, si B est un borélien de $M = \varphi(W)$, alors l'aire de B est

$$\text{Aire}(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy . \quad (46)$$

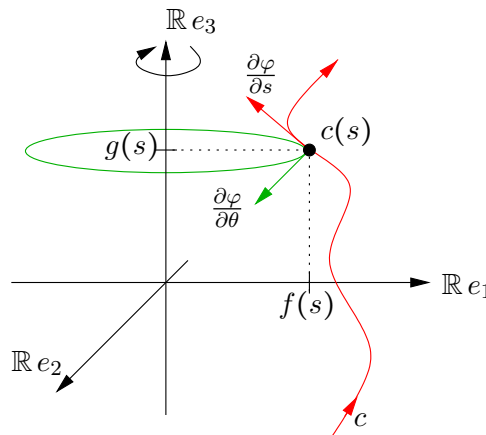
(2) **Surfaces de révolution.** Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Rappelons que le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ s'écrit dans cette décomposition, pour tous les $z, z' \in \mathbb{C}$ et $t, t' \in \mathbb{R}$,

$$\langle (z,t), (z',t') \rangle = \text{Re}(z \overline{z'}) + t t' .$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, posons $e^{i\theta} = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$, qui est un vecteur unitaire de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Soit I un intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$. Soit $c : I \rightarrow \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_3$, définie par $s \mapsto f(s)e_1 + g(s)e_3$, une courbe plane lisse paramétrée par longueur d'arc (c'est-à-dire $f'(s)^2 + g'(s)^2 = 1$ pour tout $s \in I$), qui est un C^∞ -plongement de I dans $\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_3$, et telle que f soit strictement positive.¹⁶⁶ Alors l'application $\varphi : I \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$, définie par

$$\varphi(s, \theta) = f(s) e^{i\theta} + g(s) e_3 ,$$

est un C^∞ -plongement de $I \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}^3$, dont l'image M est appelée la *surface de révolution d'axe $\mathbb{R}e_3$ et de méridienne c* . L'image de toute telle surface M par tout déplacement de $\mathbb{R}^3$ est appelée une *surface de révolution* dans $\mathbb{R}^3$. Par définition, une surface de révolution est connexe, même si la définition pourrait être modifiée pour admettre plusieurs composantes connexes. En restriction à $I \times J$ pour tout intervalle ouvert J de longueur strictement inférieure à 2π (vu comme un ouvert de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$), l'application φ est un paramétrage local lisse d'un ouvert de M . Nous munirons M de l'orientation faisant de φ un C^∞ -difféomorphisme préservant l'orientation de $I \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dans M .

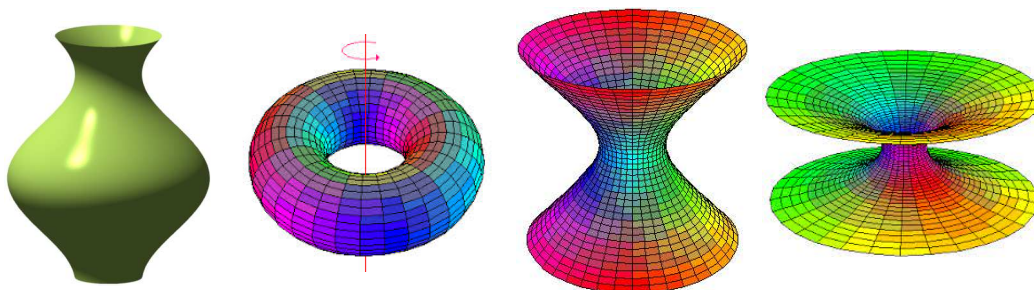


Il est important de penser aux surfaces de révolution comme obtenues en faisant tourner autour de son axe sa courbe méridienne, de la même manière qu'un artisan ou une artisane ébéniste tourne son bois, ou qu'un artisan potier ou une artisane potière tourne son argile.

166. Cette hypothèse implique que la courbe c ne rencontre pas l'axe vertical $\mathbb{R}e_3$, ce qui est nécessaire comme le montre l'exemple du cône de révolution $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ qui n'est pas une sous-variété différentielle en $(0, 0, 0)$.



Voici quelques dessins représentant des surfaces de révolution, essentiellement extraits de Wikipedia.



Alors, pour tous les $s \in I$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, en n'indiquant pas les évaluations en (s, θ) des dérivées partielles pour alléger les notations, nous avons

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = f'(s) e^{i\theta} + g'(s) e_3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = i f(s) e^{i\theta}, \quad (47)$$

de sorte que, puisque c est paramétrée par longueur d'arc,

$$E(s, \theta) = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right\| = 1, \quad F(s, \theta) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\rangle = 0, \quad \text{et} \quad G(s, \theta) = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\| = f(s)^2. \quad (48)$$

Si B est un borélien de M , alors l'aire de B est

$$\text{Aire}(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} f(s) \, ds \, d\theta. \quad (49)$$

En particulier, nous avons

$$\text{Aire}(M) = 2\pi \int_I f(s) \, ds \in]0, +\infty].$$

Comme la sphère $\mathbb{S}_2$ (privée de ses pôles Nord et Sud) est la surface de révolution d'axe de révolution $\mathbb{R}e_3$ obtenue en prenant $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f : s \mapsto \cos s$ et $g : s \mapsto \sin s$, nous retrouvons la formule bien connue

$$\text{Aire}(\mathbb{S}_2) = 4\pi.$$

Calcul de la seconde forme fondamentale dans un paramétrage local

Nous avons vu qu'un paramétrage local $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ de M définit une orientation de son image dans la surface M , et le choix du champ de vecteurs normaux unitaires orienté sur $\varphi(W)$ est alors l'application lisse $\vec{\nu} = \vec{\nu}_\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$, à valeurs dans la sphère $\mathbb{S}_2$, appelée *l'application de Gauss* de φ , définie par

$$\vec{\nu} : (x, y) \mapsto \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right\|}.$$

La matrice de la seconde forme fondamentale (scalaire) $\Pi_{\varphi(x, y)} = \Pi_{\varphi(x, y)}^{\vec{\nu}}$ dans la base $\mathcal{B}_{\varphi(x, y)}$ est alors

$$\begin{pmatrix} \ell(x, y) & m(x, y) \\ m(x, y) & n(x, y) \end{pmatrix},$$

où, en n'indiquant pas les évaluations en (x, y) pour raccourcir les formules, et en dérivant par rapport à x ou à y les égalités $\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \vec{\nu} \rangle = \langle \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \vec{\nu} \rangle = 0$ afin d'obtenir les égalités de droite ci-dessous,

$$\begin{aligned} \ell &= \Pi_{\varphi(x, y)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right) = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \vec{\nu} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \vec{\nu}}{\partial x} \right\rangle, \\ m &= \Pi_{\varphi(x, y)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right) = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \vec{\nu} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \vec{\nu}}{\partial y} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \vec{\nu}}{\partial x} \right\rangle, \\ n &= \Pi_{\varphi(x, y)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right) = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \vec{\nu} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \vec{\nu}}{\partial y} \right\rangle. \end{aligned}$$

(50)

Notons qu'il est parfois plus rapide de calculer les dérivées partielles du champ de vecteurs normaux que de calculer les dérivées partielles secondes du paramétrage local. Donc il convient de choisir la formule la plus appropriée afin de calculer les quantités ℓ, m, n .

Remarquons que la base $\mathcal{B}_{\varphi(x, y)}$ n'est pas forcément orthonormée. Rappelons que la matrice de l'opérateur de Weingarten dans cette base $\mathcal{B}_{\varphi(x, y)}$, dont le déterminant et la moitié de la trace donnent la courbure de Gauss et la courbure moyenne respectivement, est égale au produit de l'inverse de la matrice dans la base $\mathcal{B}_{\varphi(x, y)}$ de la première forme fondamentale par la matrice dans la base $\mathcal{B}_{\varphi(x, y)}$ de la seconde forme fondamentale. La courbure de Gauss de M au point $\varphi(x, y)$ est alors

$$K(\varphi(x, y)) = \det \left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} \right) = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} \quad (51)$$

et la courbure moyenne de M au point $\varphi(x, y)$ est

$$H(\varphi(x, y)) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} \right) = \frac{\ell G - 2mF + nE}{2(EG - F^2)}. \quad (52)$$

Exemples. (1) **Graphes.** Soit $\varphi : (x, y) \mapsto (x, y, z = f(x, y))$ l'application graphe d'une fonction lisse $f : W \rightarrow \mathbb{R}^3$. Notons $A : W \rightarrow]0, +\infty[$ la fonction lisse

$$A = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{EG - F^2} = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\|$$

sur l'ouvert W . Nous avons $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ et

$$\vec{\nu} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\|} = \frac{1}{A} \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right).$$

Donc

$$\ell = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \vec{\nu} \right\rangle = \frac{1}{A} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad m = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \vec{\nu} \right\rangle = \frac{1}{A} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \text{et} \quad n = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \vec{\nu} \right\rangle = \frac{1}{A} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad (53)$$

Ainsi, la matrice de la seconde forme fondamentale $\Pi_{\varphi(x,y)}$ dans la base $\mathcal{B}_{\varphi(x,y)}$ est la matrice hessienne de f en (x, y) multipliée par le scalaire $\frac{1}{A(x,y)}$. En particulier, par la formule (51), toujours avec évaluations implicites des fonctions en (x, y) pour raccourcir les expressions, nous avons

$$K(\varphi(x, y)) = \frac{1}{A(x, y)^4} \det \text{Hess } f_{(x,y)} = \frac{1}{A^4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \right).$$

Par les formules (52) et (45), nous avons

$$H(\varphi(x, y)) = \frac{1}{2A^3} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right) \right). \quad (54)$$

(2) **Surfaces de révolution.** Soit M une surface de révolution d'axe $\mathbb{R}e_3$ et de courbe méridienne $c : s \mapsto f(s)e_1 + g(s)e_3$ (définie sur un intervalle ouvert I , paramétrée par longueur d'arc avec $f > 0$, et étant un C^∞ -plongement), donc de paramétrage local $\varphi : (s, \theta) \mapsto f(s)e^{i\theta} + g(s)e_3$. Alors par les formules (47) et la note de bas de page 142, et après simplification par $f(s) \neq 0$, nous avons

$$\vec{\nu}(s, \theta) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\|} = -g'(s)e^{i\theta} + f'(s)e_3. \quad (55)$$

Notons $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ la courbure de la courbe c dans le plan euclidien orienté $\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_3$ de base directe (e_1, e_3) . L'équation de Frenet (29) s'écrit $\ddot{c}(s) = \kappa(s)J(\dot{c}(s))$ où J est la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ dans le plan euclidien orienté $\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_3$. Par l'égalité $f'(s)^2 + g'(s)^2 = 1$ qui découle du fait que la courbe c est paramétrée par longueur d'arc, nous avons, pour tout $s \in I$, les relations

$$f''(s) = -\kappa(s)g'(s) \quad \text{et} \quad g''(s) = \kappa(s)f'(s).$$

Par les formules (47) et (55), nous avons alors aisément

$$\ell = -\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \right\rangle = \kappa(s), \quad m = -\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} \right\rangle = 0, \quad \text{et} \quad n = -\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} \right\rangle = f(s)g'(s). \quad (56)$$

En particulier, comme les matrices des première et seconde formes fondamentales sont diagonales, nous avons immédiatement par les formules (48) et (56) que

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(s)^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa(s) & 0 \\ 0 & f(s)g'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa(s) & 0 \\ 0 & \frac{g'(s)}{f(s)} \end{pmatrix}.$$

Donc les courbures principales de la surface de révolution M au point $\varphi(s, \theta)$ sont

$$\lambda_1 = \kappa(s) \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{g'(s)}{f(s)},$$

la courbure de Gauss est

$$K(\varphi(s, \theta)) = \kappa(s) \frac{g'(s)}{f(s)},$$

et la courbure moyenne est

$$H(\varphi(s, \theta)) = \frac{1}{2} \left(\kappa(s) + \frac{g'(s)}{f(s)} \right).$$

En particulier, le signe de la courbure de Gauss de M est égal au signe de la courbure de sa méridienne en tout point où g est strictement croissante (nous avons supposé que f était strictement positive). En un point où la dérivée de g s'annule (c'est le cas pour les cercles de hauteur maximale et de minimale sur un tore de révolution, voir le dessin ci-dessous juste au-dessus de la description des points paraboliques), la courbure de Gauss de la surface est nulle.

Par la proposition 8.9, les points focaux de la surface de révolution M en $\varphi(s, \theta)$ sont donc, respectivement si $\kappa(s) \neq 0$ (c'est-à-dire si la courbure de la méridienne ne s'annule pas au temps s) et si $g'(s) \neq 0$ (c'est-à-dire si la hauteur de la méridienne n'a pas de point extrémal au temps s)

$$\begin{aligned} \varphi(s, \theta) + \frac{1}{\lambda_1} \vec{v}(s, \theta) &= \left(f(s) - \frac{g'(s)}{\kappa(s)} \right) e^{i\theta} + \left(g(s) + \frac{f'(s)}{\kappa(s)} \right) e_3 \\ \varphi(s, \theta) + \frac{1}{\lambda_2} \vec{v}(s, \theta) &= \left(g(s) + \frac{f(s)f'(s)}{g'(s)} \right) e_3. \end{aligned}$$

Les points focaux donnés par la seconde courbure principale λ_2 sont donc sur l'axe vertical, et si la composante horizontale de la méridienne a un extrémum au temps s (c'est-à-dire si $f'(s) = 0$), alors les deux points focaux sont dans le même plan horizontal que $\varphi(s, \theta)$.

Allure locale des surfaces par rapport à leur plan tangent.

Nous dirons qu'un point a_0 d'une surface lisse M dans $\mathbb{R}^3$ est

- un *point elliptique* si $K(a_0) > 0$,
- un *point hyperbolique* si $K(a_0) < 0$,

- un *point parabolique* si $K(a_0) = 0$,
- un *méplat* si la seconde forme fondamentale scalaire de M s'annule en a_0 , c'est-à-dire si $\Pi_{a_0} = 0$,
- un *ombilic* si l'opérateur de Weingarten en a_0 est une homothétie, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Pi_{a_0} = \lambda \text{ I}_{a_0}$ c'est-à-dire si les deux courbures principales en a_0 sont égales :

$$\lambda_1(a_0) = \lambda_2(a_0) .$$

Toutes ces définitions sont indépendantes du choix d'une des deux orientations dans un voisinage ouvert connexe de a_0 (et donc du choix d'un des deux champs de vecteurs normaux unitaires lisses sur un tel voisinage). Remarquons qu'un méplat est un point parabolique et un ombilic. Nous allons décrire la position locale de la surface par rapport à chacun de ses plans tangents.

Reprenons les notations de l'exemple (1) ci-dessus et supposons que nous ayons un point (x_0, y_0) dans W tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $d_{(x_0, y_0)}f = 0$ (ce que nous pouvons toujours supposer en écrivant localement M comme un graphe au-dessus de son plan tangent, voir le théorème 4.5 (3)). Les dessins ci-dessous sont essentiellement extraits de Wikipedia.

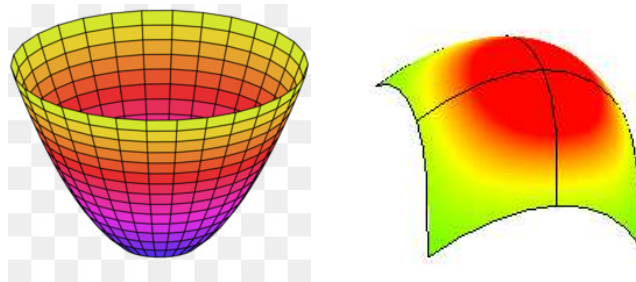
Alors par les formules (45) et (53), puisque $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, la matrice de la première forme fondamentale en $a_0 = \varphi(x_0, y_0)$ est la matrice identité, et la matrice de la seconde forme fondamentale (scalaire) en a_0 est la matrice hessienne de f . En particulier

$$K(a_0) = \det \text{Hess } f_{(x_0, y_0)} \quad \text{et} \quad H(a_0) = \frac{1}{2} \text{tr Hess } f_{(x_0, y_0)} .$$

Point elliptique. Si $K(a_0) > 0$, alors la matrice $\text{Hess } f_{(x_0, y_0)}$ est de valeurs propres non nulles de même signe, donc inversible, et (x_0, y_0) est un point critique non dégénéré de f , d'indice 0 ou 2. Le lemme de Morse 6.1 appliqué à la fonction f et à son point critique (x_0, y_0) nous dit qu'il existe donc $\epsilon = \pm 1$ et des fonctions lisses u et v de (x, y) , définies sur un voisinage ouvert de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$, telles que $u(x_0, y_0) = 0$ et $v(x_0, y_0) = 0$, et $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ soit un C^∞ -difféomorphisme entre deux voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{R}^2$, de sorte que

$$f(x, y) = \epsilon(u(x, y)^2 + v(x, y)^2) .$$

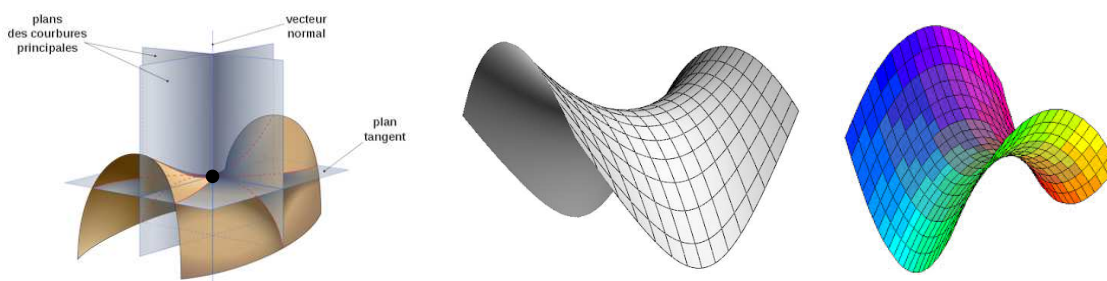
La seconde forme fondamentale en a_0 est donc ou bien définie positive ou bien définie négative. En particulier, M est, dans un voisinage assez petit de a_0 , d'un seul côté de son plan tangent $T_{a_0}M$ en a_0 . Par la proposition 8.9, la surface admet deux points focaux en a_0 (confondus si et seulement si a_0 est un ombilic, voire ci-dessous), du même côté du plan tangent $T_{a_0}M$ qu'un voisinage assez petit de a_0 dans M .



Point hyperbolique. Si $K(a_0) < 0$, le lemme de Morse 6.1 appliqué à la fonction f et à son point critique (x_0, y_0) nous dit qu'il existe des fonctions lisses u et v de (x, y) , définies sur un voisinage ouvert de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$, telles que $u(x_0, y_0) = 0$ et $v(x_0, y_0) = 0$, et $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ soit un C^∞ -difféomorphisme entre deux voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{R}^2$, de sorte que

$$f(x, y) = u(x, y)^2 - v(x, y)^2.$$

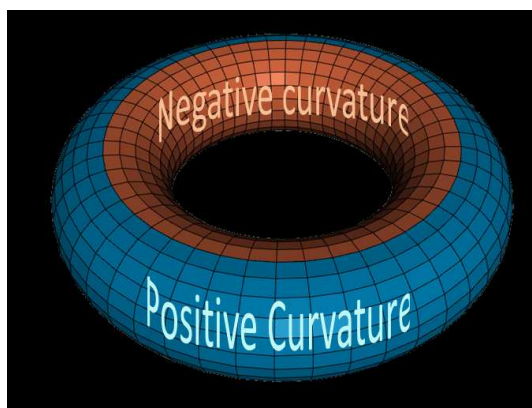
Nous dirons que la surface M est une *selle de cheval* au voisinage de a_0 par rapport à son plan tangent $T_{a_0}M$ en a_0 . Elle contient des points de part et d'autre de son plan tangent. Par la proposition 8.9, la surface admet deux points focaux en a_0 , de part et d'autre du plan tangent $T_{a_0}M$.



Par exemple, le tore de révolution dans $\mathbb{R}^3$ paramétré par

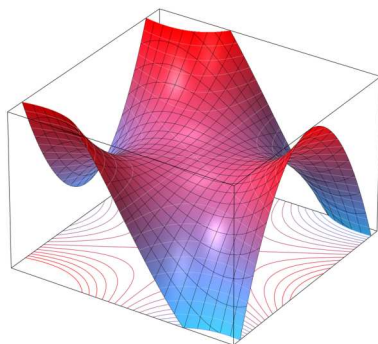
$$(s, t) \mapsto ((2 + \sin s) \cos t, (2 + \sin s) \sin t, \cos s)$$

comporte deux cercles de points à courbure de Gauss nulle (le long desquels exactement une courbure principale s'annule), séparant deux demi-tores ouverts, l'un à courbure strictement positive, l'autre à courbure strictement négative (voir le calcul ci-dessus de la courbure de Gauss des surfaces de révolution).



Point parabolique. Lorsque $K(a_0) = 0$, de nombreuses positions relatives sont possibles, que ce soit des sphères quadratiquement aplaties comme la surface d'équation $z = (x^2 + y^2)^2$ voire infiniment aplaties comme la surface d'équation $z = e^{-\frac{1}{(x^2+y^2)}}$ (pour lesquelles $(0, 0, 0)$ est un minimum local et un méplat), ou des selles de singes (voire de pieuvres!) comme la surface d'équation $z = x^3 - 3xy^2$, pour laquelle $(0, 0, 0)$ est aussi un méplat.

Les points du cylindre $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ sont des points paraboliques qui ne sont pas des méplats. Pour tous les $z \in \mathbb{S}_1$ et $t \in \mathbb{R}$, le point focal d'un point (z, t) de $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$ (il en existe un et un seul, car il existe exactement une courbure principale non nulle) est le point $(0, t)$ de $\mathbb{R}^3$.



Selle de singe

Point ombilic. En un ombilic a_0 de courbure de Gauss non nulle (donc strictement positive car $K(a_0) = (\lambda_1)^2$), la surface admet une *sphère osculatrice*, une sphère ayant un contact d'ordre 2 avec la surface en ce point, qui est la sphère de centre $a_0 + \frac{1}{\sqrt{K(a_0)}} \vec{n}(a_0)$, où $\vec{n}(a_0)$ est le vecteur unitaire normal en a_0 , du même côté du plan tangent que la surface au voisinage de a_0 . Le centre de ce cercle est par ailleurs l'unique point focal de la surface en a_0 , par la proposition 8.9.

Exercice E.93. Montrer qu'une surface lisse M de $\mathbb{R}^3$ dont tout point est un ombilic est une union dénombrable d'ouverts de sphères pour la distance euclidienne de $\mathbb{R}^3$ ou d'ouverts de plans affines de $\mathbb{R}^3$.

Exercice E.94. Soient $a, b, c > 0$. Calculer les courbures principales, les points focaux et les ombilics de l'ellipsoïde

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax^2 + by^2 + cz^2 = 1\}$$

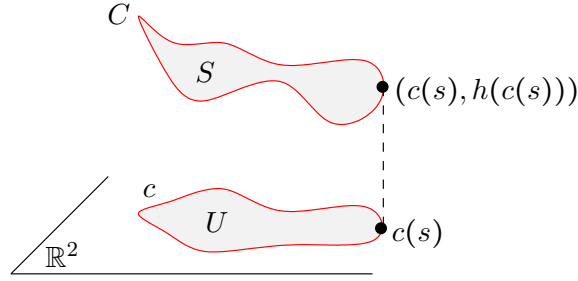
en les points $(x_0, y_0, 0)$ de E .

8.5 Surfaces minimales

Soit C une courbe fermée lisse ¹⁶⁷ dans $\mathbb{R}^3$, image d'un plongement lisse du cercle $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{R}^3$. Le problème des bulles de savon consiste à essayer de trouver des surfaces S compactes, lisses, à bord, plongées dans $\mathbb{R}^3$, dont le bord est C et dont l'aire est minimale parmi toutes les telles surfaces.

Nous allons supposer que C et S sont des graphes au-dessus du plan horizontal, et déterminer une équation différentielle partielle vérifiée par S nécessaire à l'existence de S .

¹⁶⁷. Il est possible de diminuer la régularité de C , par exemple en C^2 par morceaux. Mais nous ne regarderons que le cas lisse dans ces notes. Des conditions de régularité encore moindre posent des problèmes fort intéressants sur le problème de Plateau en analyse sur les espaces singuliers, voir par exemple [Dav] et ses références.



Soient donc $c : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe de Jordan lisse (un C^∞ -plongement plan du cercle unité). Alors le théorème de Jordan (voir par exemple [Pau3] ou l'exercice E.88 (2)) dit que $\mathbb{R}^2 \setminus c(\mathbb{S}_1)$ admet exactement deux composantes connexes, une bornée que nous notons U (dont l'adhérence $\bar{U} = U \cup c(\mathbb{S}_1)$ est un disque plongé dans $\mathbb{R}^2$, et en particulier une sous-variété à bord), et une non bornée, dont le bord commun est $c(\mathbb{S}_1)$. Nous supposons qu'il existe $h : c(\mathbb{S}_1) \rightarrow \mathbb{R}$ une application lisse telle que $C = \{(c(s), h(c(s))) : s \in \mathbb{S}_1\}$, et nous cherchons une fonction $f \in C^\infty(\bar{U})$ à valeurs réelles telle que la surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \bar{U}, z = f(x, y)\}$$

lisse à bord ait pour bord exactement C et minimise l'aire parmi toutes les surfaces de bord C qui sont des graphes au-dessus de $\bar{U}$.

Par la formule (46), il s'agit donc de minimiser

$$\mathcal{A}(f) = \int_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et toute fonction $g \in C_c^\infty(U)$, le graphe de la fonction $f + tg$ est encore une surface lisse à bord, de bord égal à C . L'application $t \mapsto \mathcal{A}(f + tg)$ est dérivable en $t = 0$, par les théorèmes de dérivation des intégrales à paramètres sur le compact $\bar{U}$. Si S minimise l'aire à bord donné, alors $\mathcal{A}(f) \leq \mathcal{A}(f + tg)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et donc

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{A}(f + tg) = 0.$$

Cette équation s'écrit

$$\int_U \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} dx dy = 0.$$

Puisque g est à support compact dans U et par intégration par partie, nous avons

$$\int_U g \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \right) dx dy = 0.$$

Ceci étant vrai pour toute fonction $g \in C_c^\infty(U)$, la fonction f vérifie donc l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} = 0,$$

ou encore, avec les notations condensées usuelles,

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \right) = 0 .$$

Or, par les formules (54), la courbure moyenne $H = H(x, y)$ de la surface S au point $(x, y, f(x, y))$ vérifie

$$2 H = \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right) \right)}{\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right)^{3/2}} . \quad (57)$$

Le second membre de cette formule est égal, par un calcul élémentaire, au premier membre de la formule centrée précédente. Donc (comme montré dès 1776 par Meusnier) la surface S , qui minimise l'aire de toutes les surfaces s'appuyant sur la courbe C et s'exprimant comme graphe, vérifie l'équation

$$H = 0 .$$

Cette condition n'est qu'une condition nécessaire pour ce problème de minisation d'aire, ¹⁶⁸ mais elle justifie la définition suivante.

Nous dirons qu'une surface lisse dans $\mathbb{R}^3$ est une *surface minimale* si sa courbure moyenne est nulle. ¹⁶⁹

Nous concluons cette partie en donnant des exemples de surfaces minimales, les dessins étant extraits de Wikipedia. Nous renvoyons aussi à

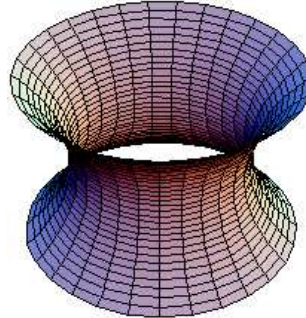
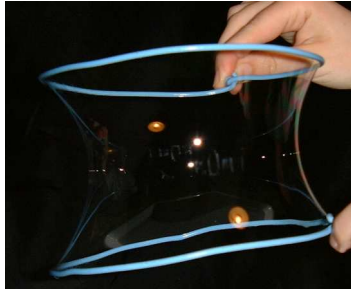
<https://www.youtube.com/watch?v=YdneSMKObls>

Exemples. (1) **(Plan)** Tout ouvert non vide d'un plan affine de $\mathbb{R}^3$, étant à courbures principales nulles, donc de courbure moyenne nulle, est une surface minimale.

(2) **(Caténoïde)** Les *caténoïdes* (Euler, 1744) sont les images par les isométries de $\mathbb{R}^3$ des surfaces de révolution d'axe $\mathbb{R}e_3$ et de méridiennes (non paramétrées par longueur d'arc) $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_3$ définies par $t \mapsto f(t)e_1 + te_3$ où

$$f : t \mapsto \frac{1}{a} \cosh(at + b)$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. En bulle de savon, elles sont obtenues en plongeant deux cercles parallèles dans un produit tensioactif et en perçant les éventuels disques horizontaux.



¹⁶⁸. Similaire au fait que si une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I vérifie $f'(s_0) = 0$ en un point s_0 de I , alors $f(s_0)$ n'est pas forcément un minimum local de f , mais juste un extrémum local de f .

¹⁶⁹. Il vaudrait mieux dire surface extrémale, mais nous suivons l'usage commun.

Proposition 8.12. (*Meunier, 1776*) *Les surfaces de révolution minimales M sont les ouverts non vides, invariants par rotations autour de l'axe de révolution, des plans affines époinetés et des caténoïdes.*

Démonstration. Nous pouvons supposer que l'axe de rotation de M est $\mathbb{R}e_3$, et que sa méridienne est un C^∞ -plongement $c : I \rightarrow \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_3$ d'un intervalle ouvert I , défini par $s \mapsto f(s)e_1 + g(s)e_3$, paramétré par longueur d'arc, avec f strictement positive.

Si la dérivée de g est nulle sur tout I , alors la fonction g est constante. À translation verticale près, nous pouvons supposer qu'elle est nulle. La fonction $f : I \rightarrow]0, +\infty[$ est alors un paramétrage par longueur d'arc d'un intervalle ouvert $f(I)$ de $\mathbb{R}$ contenu dans $]0, +\infty[$, et donc M est l'ouvert

$$M = \{(x, y, 0) : \sqrt{x^2 + y^2} \in f(I)\}$$

du plan horizontal, invariant par rotation autour de l'axe vertical.

Supposons que la dérivée de g soit non nulle en un point x_0 de I . Alors g est strictement monotone sur un voisinage ouvert maximal I_0 de t_0 dans I . Nous verrons in fine que la dérivée g' ne s'annule en fait en aucun point de $I \cap \overline{I_0}$, ce qui montrera que $I = I_0$ et que nous avons traité tous les cas. Après changement de variable (éventuellement renversant l'orientation) à la source, nous pouvons donc supposer¹⁷⁰ que la courbe c est une application $t \mapsto f(t)e_1 + te_3$ où $f : I \rightarrow]0, +\infty[$ est de classe C^∞ . Les dérivées partielles de l'application $\varphi : (t, \theta) \mapsto f(t)e^{i\theta} + te_3$ (qui est un C^∞ -plongement de $I_0 \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}^3$) sont

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f'(t)e^{i\theta} + e_3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = if(t)e^{i\theta}.$$

Donc les coefficients de la première forme fondamentale de M en $\varphi(t, \theta)$ sont

$$E = 1 + f'(t)^2, \quad F = 0, \quad \text{et} \quad G = f(t)^2.$$

Le champ de vecteurs normaux unitaires associé à φ est, au point $\varphi(t, \theta)$ (la courbe c n'étant plus paramétrée par longueur d'arc),

$$\vec{\nu}(t, \theta) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\|} = \frac{-e^{i\theta} + f'(t)e_3}{\sqrt{1 + f'(t)^2}}.$$

Les coefficients de la seconde forme fondamentale sont, outre $m = -\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \vec{\nu}}{\partial \theta} \right\rangle = 0$,

$$\ell = -\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \vec{\nu}}{\partial t} \right\rangle = -\frac{f''(t)}{\sqrt{1 + f'(t)^2}} \quad \text{et} \quad n = -\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{\partial \vec{\nu}}{\partial \theta} \right\rangle = \frac{f(t)}{\sqrt{1 + f'(t)^2}}.$$

Donc la courbure moyenne est

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{1 + f'(t)^2}} \left(\frac{-f''(t)}{1 + f'(t)^2} + \frac{1}{f(t)} \right).$$

Ainsi, la fonction f vérifie l'équation différentielle

$$f''(t)f(t) - f'(t)^2 - 1 = 0.$$

170. Remarquons que la courbe c n'est alors plus paramétrée par longueur d'arc, donc que les formules (47), (48), (55) et (56) ne s'appliquent plus directement, donc qu'il convient de revenir à la méthodologie donnée au début de la partie 8.4.

À changement de variable à la source près, nous pouvons supposer que $0 \in I$. Par unicité, l'unique solution de cette équation différentielle de valeurs initiales $f(0) = f_0 \in]0, +\infty[$ et $f'(0) = f'_0 \in \mathbb{R}$ est

$$f : t \mapsto \frac{1}{a} \cosh(at + b)$$

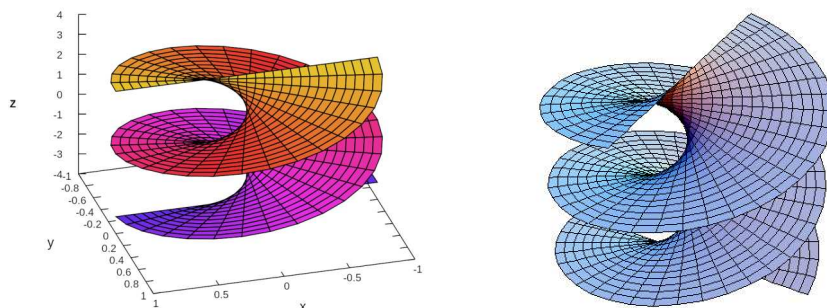
où $b = \operatorname{argsinh} f'_0$ et $a = \frac{\cosh(\operatorname{argsinh} f'_0)}{f_0}$.

Notons que le reparamétrage $s \mapsto t(s)$ rendant la méridienne c paramétrée par longueur d'arc vérifie $(\dot{f}(t(s))\dot{t}(s))^2 + \dot{t}(s)^2 = 1$, donc $\dot{t}(s) = \frac{1}{\cosh(at(s)+b)}$, qui n'admet pas de limite nulle en temps fini. Ainsi la dérivée de la composante verticale de la méridienne paramétrée par longueur d'arc ne s'annule en aucun point de I . $\square$

(3) (**Hélicoïde**) Les *hélicoïdes* (Euler, 1744) sont, à isométrie près de $\mathbb{R}^3$, les surfaces paramétrées

$$M = \{(u \cos(av), u \sin(av), v) : u, v \in \mathbb{R}\},$$

où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. L'hélicoïde est *dextre* si $a > 0$ et *sénestre* si $a < 0$. Un calcul montre que les hélicoïdes sont bien des surfaces minimales.



Il existe une famille continue de surfaces minimales passant de la caténoïde à l'hélicoïde, voir par exemple l'animation de Wikipedia

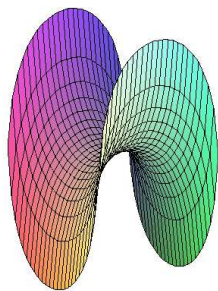
<https://en.wikipedia.org/wiki/Helicoid#/media/File:Helicatenoid.gif>

(4) (**Surface de Scherk**) La *surface de Scherk* (1834) est la surface connexe lisse M de $\mathbb{R}^3$ d'équation

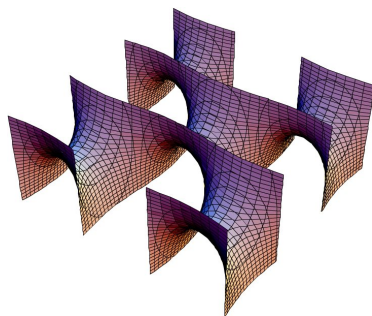
$$M = \left\{ (x, y, z) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[{}^2 \times \mathbb{R} : e^z \cos x = \cos y \right\}.$$

Il est élémentaire de vérifier que l'application $(x, y, z) \mapsto e^z \cos x - \cos y$ est une submersion sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[{}^2 \times \mathbb{R}$, donc M est bien une surface, qui s'écrit comme le graphe de la fonction $f : (x, y) \mapsto \ln \frac{\cos x}{\cos y}$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[{}^2$. La surface de Scherk admet une droite verticale asymptote en chacun des coins du carré $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[{}^2$. Un petit calcul utilisant la formule (57) montre que sa courbure moyenne est nulle. Une bonne approximation consiste à tremper dans un liquide tensioactif le contour de la figure de droite suivante, voir

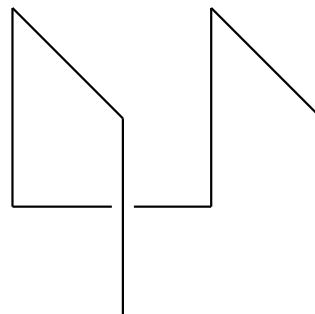
<https://www.youtube.com/watch?v=ZN9rmVKwbak>



disque de Scherk



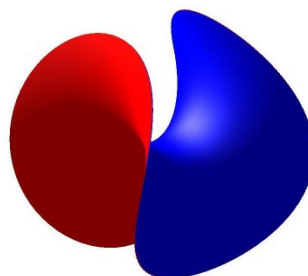
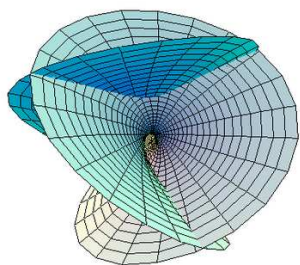
quintuplet de surfaces de Scherk
recollées par demi-tour le long
de droites verticales



contour pour bulle à savon
(presque) de Scherk

(5) **(Surface d'Enneper)** La *surface d'Enneper* est la surface minimale M immergée dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par

$$M = \left\{ \left(x = u - \frac{u^3}{3} + uv^2, y = v - \frac{v^3}{3} + vu^2, z = u^2 - v^2 \right) : u, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

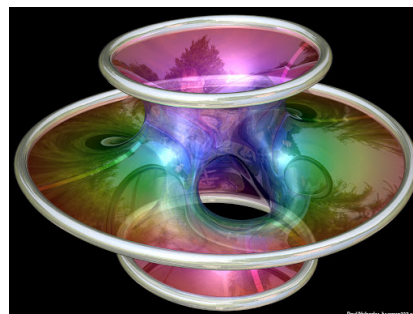
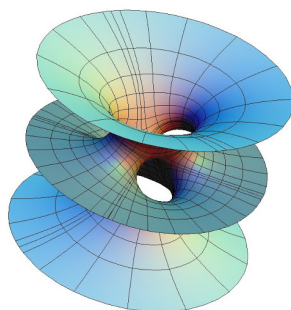
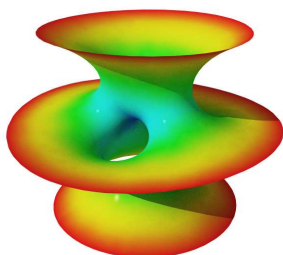


Voir aussi

https://en.wikipedia.org/wiki/Enneper_surface#/media/File:EnneperSurfaceAnimated.gif

Exercice E.95. Montrer que la surface d'Enneper est en effet une surface immergée lisse minimale.

(6) **(Surface de Costa)** La *surface de Costa* est une surface minimale plongée dans $\mathbb{R}^3$ homéomorphe au tore privé de trois points.



8.6 Géodésiques

Nous allons étudier dans cette partie les propriétés des courbes lisses tracées sur les surfaces lisses plongées dans $\mathbb{R}^3$. Nous fixons une surface M lisse connexe dans l'espace euclidien orienté usuel $\mathbb{R}^3$. Nous donnons quelques définitions avant d'énoncé le résultat principal de cette partie.

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, nous dirons qu'une courbe $c : I \rightarrow M$ de classe C^1 par morceaux tracée sur M est *paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc* si la norme $\|\dot{c}\|$ de son vecteur vitesse est constante. Par exemple, toute courbe constante est paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc. Toute courbe non constante est paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc si et seulement si elle admet un reparamétrage par longueur d'arc par homothétie à la source.

Rappelons que la longueur d'une courbe $c : I \rightarrow M$ de classe C^1 par morceaux tracée sur M est

$$\text{long}(c) = \int_I \|\dot{c}(t)\| dt .$$

Par le théorème de changement de variable de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$ et le théorème de dérivation des fonctions composées, la longueur d'une courbe est invariante par changement de variable de classe C^1 à la source : si $\phi : J \rightarrow I$ est un C^1 -difféomorphisme, alors

$$\text{long}(c \circ \phi) = \text{long}(c) \quad (58)$$

La *distance riemannienne* sur M est la fonction $d : M \times M \rightarrow [0, +\infty[$ définie, pour tous les $x, y \in M$, en demandant que $d(x, y)$ soit la borne inférieure des longueurs des courbes $c : [a, b] \rightarrow M$ de classe C^1 par morceaux tracées sur M allant de $x = c(a)$ à $y = c(b)$.

Lemme 8.13. *La distance riemannienne d est une distance sur M , induisant la topologie de M .*

Démonstration. Comme M est connexe, il existe au moins un chemin lisse tracé sur M entre deux points quelconques de M , donc l'application d est bien définie. Comme une longueur est positive ou nulle, l'application d est à valeurs positives ou nulles, et $d(x, y) = 0$ si $x = y$, en prenant un chemin constant de x à y , défini sur $[0, 1]$ par exemple.

Comme la concaténation de deux chemins (concaténables) de classe C^1 par morceaux est encore de classe C^1 par morceaux, et comme la longueur des chemins de classe C^1 par morceaux est additive par concaténation et invariante par parcours dans le sens inverse, l'application d est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire. Si $x \neq y$, alors tout chemin de x à y de classe C^1 par morceaux et tracé sur M est de longueur supérieure ou égale à la distance euclidienne entre x et y , qui est strictement positive. Donc d vérifie l'axiome de séparation des distances.

Toute suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans M qui converge dans M vers $x \in M$ (pour la topologie de M induite par la distance de $\mathbb{R}^3$) converge aussi pour la distance riemannienne, car en travaillant dans un paramétrage local, il est élémentaire de trouver des courbes de classe C^1 de x_i à x dont la longueur tend vers 0 quand $i \rightarrow +\infty$. Comme la distance riemannienne de M est supérieure ou égale à la restriction à M de la distance euclidienne de $\mathbb{R}^3$, ceci montre que les topologies induites par ces deux distances sont les mêmes. $\square$

Nous dirons qu'une courbe $c : I \rightarrow M$ de classe C^1 par morceaux tracée sur M *minimise localement la distance* si pour tout $t_0 \in I$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tous les temps $s < t$

dans $I \cap]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$, nous avons $d(c(s), c(t)) = \text{long}(c|_{[s,t]})$, c'est-à-dire si la restriction $c|_{[s,t]}$ réalise la borne inférieure des longueurs des chemins C^1 par morceaux tracés sur M allant de $c(s)$ à $c(t)$.

Nous définissons *l'énergie* de c comme

$$\text{En}(c) = \int_I \|\dot{c}(t)\|^2 dt .$$

Contrairement à la longueur, l'énergie d'une courbe n'est en général pas invariante par changement de variable de classe C^1 à la source. Parcourir très doucement une courbe puis accélérer brutalement vers la fin n'est pas un procédé le plus économe en énergie. ¹⁷¹

Une courbe $c : I \rightarrow M$ de classe C^1 par morceaux tracée sur M *minimise localement l'énergie* si pour tout $t_0 \in I$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tous les temps $s < t$ dans $I \cap]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$, la restriction $c|_{[s,t]}$ réalise la borne inférieure des énergies des chemins C^1 par morceaux tracés sur M allant de $c(s)$ à $c(t)$.

Soient $k, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ avec $k \leq r$ et $c : I \rightarrow M$ une courbe de classe C^r tracée sur M .

Un *champs de vecteurs tangents* à M le long de c de classe C^k est une application $X : I \rightarrow TM$ de classe C^k telle que pour tout $t \in I$ le vecteur $X(t)$ soit tangent à M en $c(t)$, c'est-à-dire

$$\forall t \in I, \quad X(t) \in T_{c(t)}M .$$

Par exemple, si $Y : M \rightarrow TM$ est un champ de vecteurs lisse sur M , alors Y définit un champ $X : I \rightarrow TM$ de classe C^r de vecteurs tangents à M le long de c par précomposition, en posant $X(t) = Y(c(t))$ pour tout $t \in I$. Un autre exemple est donné par les vecteurs vitesses de c : si $r \geq 1$, alors l'application $\dot{c}$ de I dans TM définie par $t \mapsto \dot{c}(t) = \frac{d}{ds}|_{s=t} c(s)$ est un champ de vecteurs tangents à M le long de c de classe C^{r-1} . Par partition de l'unité, au voisinage de tout temps t tel que $\dot{c}(t) \neq 0$, tout champ de vecteurs tangents à M le long de c se prolonge en un champ de vecteurs lisse sur M .

Soit X un champ de vecteurs tangents à M le long de c , de classe C^1 . Pour tout $x \in M$, notons $\pi_x^\parallel : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_x M$ la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur $T_x M$. Remarquons qu'il n'y a pas de raison en général pour que le vecteur vitesse $\dot{X}(t)$ à l'instant t de la courbe $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ soit encore tangent à M . La *dérivée covariante de X le long de c* , notée $\nabla_{\dot{c}} X$, est le champ de vecteurs tangents à M le long de c défini par

$$\nabla_{\dot{c}} X : t \mapsto \pi_{c(t)}^\parallel(\dot{X}(t)) .$$

Le résultat suivant, pour lequel nous renvoyons par exemple à [Pau4], justifie en particulier la notation $\nabla_{\dot{c}} X$.

Proposition 8.14. *Pour tout $x \in M$, pour toute courbe lisse c tracée sur M , définie sur un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$ et telle que $c(0) = x$, et pour tout champ de vecteurs lisse X sur M le long de c , le vecteur tangent $\nabla_{\dot{c}} X(0)$ à M en x ne dépend que du vecteur tangent $\dot{c}(0)$ de c au temps $t = 0$, et est linéaire en $\dot{c}(0)$. $\square$*

Si $r \geq 2$, la *courbure géodésique* de la courbe c dans M est l'application $\kappa_g = \kappa_g^c$ de I dans $[0, +\infty[$ définie par

$$\kappa_g : t \mapsto \|(\nabla_{\dot{c}} \dot{c})(t)\| .$$

171. Le Lièvre et la Tortue, Jean de la Fontaine, Livre VI, 10.

Expression en paramétrage local de la dérivée covariante. Soit $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ un paramétrage local de M . Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et (x_1, x_2) les coordonnées dans W . Pour tous les $a \in W$ et $i, j \in \{1, 2\}$, l'application $c_i : t \mapsto \varphi(a + te_i)$ est une courbe lisse tracée sur M (définie sur un intervalle ouvert assez petit contenant 0), et l'application $X_j : t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(a + te_i)$ est un champ de vecteurs tangents à M le long de c_i . Puisque $\mathcal{B}_{\varphi, a} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(a) \right)$ est une base de l'espace tangent $T_{\varphi(a)}M$, le vecteur tangent $\nabla_{\dot{c}_i} X_j(0)$ en $\varphi(a)$ s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de cette base : pour $k \in \{1, 2\}$, il existe $\Gamma_{ij}^k(\varphi(a)) \in \mathbb{R}$ tels que

$$\nabla_{\dot{c}_i} X_j(0) = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\varphi(a)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(a).$$

Les fonctions $\Gamma_{ij}^k : \varphi(W) \rightarrow \mathbb{R}$ sont lisses et sont appelées les *symboles de Christoffel* du paramétrage local φ .

Rappelons que $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \circ \varphi^{-1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \circ \varphi^{-1} \right)$ est une base du $C^\infty(\varphi(W))$ -module libre des champs de vecteurs tangents lisses sur $\varphi(W)$. Soit c une courbe lisse définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 telle que $c(0) = x$, et soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\dot{c}(0) = \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(x)) + \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\varphi^{-1}(x))$. Soient

$$Y = f_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \circ \varphi^{-1} + f_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \circ \varphi^{-1}$$

un champ de vecteurs tangents lisse sur $\varphi(W)$ où $f_1, f_2 \in C^\infty(\varphi(W))$, et $X : t \mapsto Y(c(t))$ le champ de vecteurs lisse le long de c défini par Y . Nous avons alors

$$\nabla_{\dot{c}} X(0) = \sum_{i,j,k=1}^2 \left(\lambda_i \frac{\partial f_j \circ \varphi}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(x)) + \Gamma_{ij}^k(x) \lambda_i f_j(x) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(x)).$$

Théorème 8.15. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1) **(Minimisation locale de la distance)** La courbe c est de classe C^1 par morceaux, paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc, et minimise localement la distance.
- (2) **(Minimisation locale de l'énergie)** La courbe c est de classe C^1 par morceaux et minimise localement l'énergie.
- (3) **(Accélération normale)** La courbe c est de classe C^2 et l'accélération de c est normale à la surface M :

$$\forall t \in I, \quad \ddot{c}(t) \perp T_{c(t)}M.$$

- (4) **(Courbure géodésique nulle)** La courbe c est de classe C^2 et à courbure géodésique nulle.
- (5) **(Auto-dérivée covariante nulle)** La courbe c est de classe C^2 et la dérivée covariante du vecteur vitesse de c le long de c est nulle :

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0.$$

Si la courbe c vérifie l'une des propriétés ci-dessus, nous dirons que c est une *géodésique* de M . Nous verrons dans la démonstration qu'elle est alors de classe C^∞ , et que pour tous

les $x_0 \in M$ et $v_0 \in T_{x_0}M$, il existe une et une seule géodésique maximale¹⁷² $c : I \rightarrow M$ telle que $0 \in I$, $c(0) = x_0$ et $\dot{c}(0) = v_0$. En particulier, c est paramétrée par longueur d'arc si et seulement si le vecteur v_0 est unitaire. Nous reparamétriserons souvent les géodésiques non constantes par homothétie à la source afin qu'elles soient paramétrées exactement par longueur d'arc (c'est-à-dire à vecteurs vitesses unitaires).

Démonstration. L'équivalence des assertions (3), (4) et (5) découle des définitions de la courbure géodésique et de la dérivée covariante.

Toute courbe de classe C^1 par morceaux qui n'est pas de classe C^1 admet une courbe de classe C^1 entre les mêmes extrémités de longueur et d'énergie strictement plus petite, par raccourcissement des angles. Nous pouvons donc supposer que les applications c dans les assertions (1) et (2) sont de classe C^1 .

Montrons l'équivalence entre les assertions (1) et (2). La longueur d'une courbe ne dépend pas de son paramétrage par le théorème de changement de variable (voir la formule (58)). Pour tous les $x, y \in M$, nous avons en particulier

$$d(x, y) = \inf \{ \text{long}(c) : c \in C^1([0, 1], M), c(0) = x, c(1) = y \} .$$

Pour tout $c \in C^1([0, 1], M)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne l'inégalité

$$\text{long}(c)^2 \leq \text{En}(c) ,$$

avec égalité si et seulement si c est paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc. Donc

$$d(x, y)^2 \leq \inf \{ \text{En}(c) : c \in C^1([0, 1], M), c(0) = x, c(1) = y \} .$$

Montrons l'inégalité inverse, ce qui donnera l'équivalence entre les assertions (1) et (2). Pour tout $\epsilon > 0$, soit $c \in C^1([0, 1], M)$ telle que $c(0) = x$, $c(1) = y$ et

$$\ell = \text{long}(c) \leq d(x, y) + \epsilon .$$

Notons

$$\phi : t \mapsto \frac{1}{\ell + \epsilon} \int_0^t (\|\dot{c}(s)\| + \epsilon) ds .$$

Alors ϕ est de classe C^1 , de dérivée $\phi'(t) = \frac{\|\dot{c}(t)\| + \epsilon}{\ell + \epsilon} > 0$ et vérifie $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 1$. Donc ϕ est un C^1 -difféomorphisme de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, dont l'inverse a pour dérivée

$$(\phi^{-1})'(t) = \frac{1}{\phi' \circ \phi^{-1}(t)} = \frac{\ell + \epsilon}{\|\dot{c}(\phi^{-1}(t))\| + \epsilon} .$$

Donc $\tilde{c} = c \circ \phi^{-1}$ est une courbe de classe C^1 tracée sur M , de même longueur que c (par invariance de la longueur par reparamétrage) et de mêmes extrémités que c . Par le théorème de dérivation des fonctions composées, nous avons

$$\begin{aligned} \text{En}(\tilde{c}) &= \int_0^1 \|\tilde{c}'(s)\|^2 ds = (\ell + \epsilon)^2 \int_0^1 \frac{\|\dot{c}(\phi^{-1}(t))\|^2}{(\|\dot{c}(\phi^{-1}(t))\| + \epsilon)^2} ds \leq (\ell + \epsilon)^2 \\ &\leq (d(x, y) + 2\epsilon)^2 . \end{aligned}$$

172. c'est-à-dire que pour toute géodésique $d : J \rightarrow M$ telle que $0 \in J$, $d(0) = x_0$ et $\dot{d}(0) = v_0$, nous avons $J \subset I$ et $d = c|_J$

En faisant tendre ϵ vers 0, nous obtenons donc l'inégalité cherchée

$$d(x, y)^2 \geq \inf \{ \text{En}(c) : c \in C^1([0, 1], M), c(0) = x, c(1) = y \} .$$

L'étape essentielle pour montrer que l'assertion (2) implique l'assertion (3) est la résolution d'un problème variationnel par ses équations d'Euler-Lagrange, que nous allons considérer dans un cas élémentaire adapté à notre situation (voir par exemple [ET, DaL, GF, Str, Eva] pour des développements). Soit $f : U_1 \times \cdots \times U_p \rightarrow U_0$ une application de classe C^1 où U_i est un ouvert de $\mathbb{R}^{n_i}$ pour tout $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$. Pour tous les $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $x \in U_1 \times \cdots \times U_p$, nous noterons $d_k f_x : \mathbb{R}^{n_k} \rightarrow \mathbb{R}^{n_0}$ la k -ème différentielle partielle de f en x , définie par

$$v \mapsto d_k f_x(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x + t(0, \dots, 0, v, 0, \dots, 0)) ,$$

où $(0, \dots, 0, v, 0, \dots, 0)$ est l'élément du produit $\mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_p}$ dont la k -ème composante est égale à v et les autres composantes sont nulles. Rappelons que $(\mathbb{R}^n)^*$ est le dual de l'espace vectoriel réel de dimension finie $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire l'espace vectoriel réel des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$.

Lemme 8.16. *Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, W un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et x_0, x_1 deux points de W . Soit $J \in C^1([0, 1] \times W \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Si $\Omega = \{c \in C^1([0, 1], W) : c(0) = x_0, c(1) = x_1\}$, et si c est un minimum local¹⁷³ de la fonctionnelle $\mathcal{J} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\mathcal{J} : c \mapsto \int_0^1 J(t, c(t), \dot{c}(t)) dt ,$$

alors l'application de $[0, 1]$ dans $(\mathbb{R}^n)^*$ définie par $t \mapsto d_3 J_{(t, c(t), \dot{c}(t))}$ est de classe C^1 et c vérifie les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} d_3 J_{(t, c(t), \dot{c}(t))} = d_2 J_{(t, c(t), \dot{c}(t))} .$$

Démonstration. Soient $c \in \Omega$ et $h \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$ telle que $h(0) = h(1) = 0$. Alors par compacité de $[0, 1]$, si $|s|$ est assez petit, nous avons $c + s h \in \Omega$ et $c + s h$ converge vers c quand $s \rightarrow 0$ pour la topologie C^1 . Par le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres sur le compact $[0, 1]$, l'application $s \mapsto \mathcal{J}(c + s h)$ est de classe C^1 au voisinage de $s = 0$, et admet un minimum en $s = 0$ si c est un minimum local de la fonctionnelle $\mathcal{J}$. Donc $\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{J}(c + s h) = 0$.

Cette équation est équivalente à

$$\int_0^1 \left(d_2 J_{(t, c(t), \dot{c}(t))}(h(t)) + d_3 J_{(t, c(t), \dot{c}(t))}(\dot{h}(t)) \right) dt = 0 .$$

Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Le résultat suivant, appliqué, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, aux fonctions h de la forme $h : t \mapsto f(t) e_i$ pour $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, termine la démonstration du lemme 8.16.

^{173.} Nous munissons l'ensemble $C^1([0, 1], W)$ de la *topologie* C^1 , c'est-à-dire de la topologie de la convergence uniforme sur $[0, 1]$ des applications et de leur dérivée première, induite par la distance

$$\forall c, \gamma \in C^1([0, 1], W), \quad d(c, \gamma) = \inf_{t \in [0, 1]} d(c(t), \gamma(t)) + \inf_{t \in [0, 1]} d(\dot{c}(t), \dot{\gamma}(t)) ,$$

en utilisant la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. Ces deux bornes inférieures sont des minima.

Lemme 8.17. (Lemme de Du Bois-Reymond) Soient $u, v \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ telles que pour toute application $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, nous ayons

$$\int_0^1 (u(t) f(t) + v(t) f'(t)) dt = 0. \quad (59)$$

Alors v est de classe C^1 et $v' = u$.

Démonstration. Considérons la constante $\kappa = \int_0^1 (v(t) - \int_0^t u(s) ds) dt$. L'application

$$U : t \mapsto \int_0^t u(s) ds + \kappa$$

est une primitive de u , donc de classe C^1 et de dérivée égale à u . Posons

$$f : t \mapsto \int_0^t (v(s) - U(s)) ds,$$

qui vérifie $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$ par la définition de la constante κ . Par intégration par partie, nous avons, puisque f est nulle en 0 et 1,

$$\int_0^1 u(t) f(t) dt = - \int_0^1 U(t) f'(t) dt.$$

Ainsi, la formule (59) s'écrit

$$0 = \int_0^1 (v(t) - U(t)) f'(t) dt = \int_0^1 |v(t) - U(t)|^2 dt.$$

Donc $v = U$ et le résultat en découle. $\square \square$

Montrons maintenant que l'assertion (2) implique l'assertion (3). Le problème étant local, fixons un paramétrage local $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ de M , et écrivons les courbes γ de classe C^1 dans $\varphi(W)$ entre deux points y_0 et y_1 de $\varphi(W)$ comme $\gamma = \varphi \circ c$ où $c : [0, 1] \rightarrow W$ est une courbe de classe C^1 dans W entre $c(0) = \varphi^{-1}(y_0)$ et $c(1) = \varphi^{-1}(y_1)$, de sorte que

$$\dot{\gamma} = d\varphi_c(\dot{c}).$$

Posons $J : [0, 1] \times W \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $(t, u, v) \mapsto \|d\varphi_u(v)\|^2$, de sorte que la fonctionnelle d'énergie est

$$\text{En}(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt = \int_0^1 \|d\varphi_{c(t)}(\dot{c}(t))\|^2 dt = \int_0^1 J(t, c(t), \dot{c}(t)) dt.$$

Nous allons minimiser cette fonctionnelle en la courbe c de classe C^1 , avec des conditions au bord $c(0) = \varphi^{-1}(y_0)$ et $c(1) = \varphi^{-1}(y_1)$, en utilisant le lemme 8.16. Par le théorème de différentiation des fonctions composées, et puisque la différentielle d'une application linéaire est elle-même, la différentielle par rapport à la troisième variable de la fonctionnelle J , prise au point $(t, u, v) \in [0, 1] \times W \times \mathbb{R}^2$, est la forme linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$d_3 J_{(t, u, v)} : h \mapsto 2 \langle d\varphi_u(v), d\varphi_u(h) \rangle.$$

En particulier, nous avons, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$d_3 J_{(t, c(t), \dot{c}(t))} : h \mapsto 2 \langle \dot{\gamma}(t), d\varphi_{c(t)}(h) \rangle.$$

Notons qu'un champ de vecteurs tangents est lisse si et seulement si ses coordonnées, dans la base de champs de vecteurs tangents donnée par le paramétrage local, sont lisses. La première affirmation du lemme 8.16 montre donc que si γ minimise à extrémités données l'énergie comme demandé par l'assertion (2), alors l'application $\dot{\gamma}$ est de classe C^1 . Donc γ est de classe C^2 . Nous avons alors, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\frac{d}{dt}d_3J_{(t,c(t),\dot{c}(t))} : h \mapsto 2 \langle \ddot{\gamma}(t), d\varphi_{c(t)}(h) \rangle + 2 \langle \dot{\gamma}(t), d^2\varphi_{c(t)}(\dot{c}(t), h) \rangle.$$

De même, la différentielle par rapport à la deuxième variable de la fonctionnelle J au point $(t, u, v) \in [0, 1] \times W \times \mathbb{R}^2$ est la forme linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$d_2J_{(t,u,v)} : h \mapsto 2 \langle d\varphi_u(v), d^2\varphi_u(h, v) \rangle.$$

Donc $d_2J_{(t,c(t),\dot{c}(t))} : h \mapsto 2 \langle \dot{\gamma}(t), d^2\varphi_{c(t)}(h, \dot{c}(t)) \rangle$ pour tout $t \in [0, 1]$. Ainsi l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}d_3J_{(t,c(t),\dot{c}(t))} = d_2J_{(t,c(t),\dot{c}(t))}$$

obtenue par le lemme 8.16, qui est une égalité entre applications linéaires, s'écrit (en utilisant la symétrie de la différentielle seconde, donnée par le lemme de Schwarz)

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, \quad \langle \ddot{\gamma}(t), d\varphi_{c(t)}(h) \rangle = 0.$$

Comme l'image de l'application linéaire $d\varphi_{c(t)}$ est l'espace tangent $T_{c(t)}M$ par la proposition 4.12, ceci dit exactement que l'accélération de γ doit être normale à la surface M . Nous avons bien démontré que l'assertion (2) implique l'assertion (3).

Lemme 8.18. *Si $c : I \rightarrow M$ est de classe C^2 et d'accélération normale à M , alors c est paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc et de classe C^∞ . Pour tous les $x \in M$ et $v \in T_xM$, il existe une et une seule géodésique c définie sur un intervalle ouvert maximal contenant 0 telle que $c(0) = x$ et $\dot{c}(0) = v$.*

Démonstration. La dérivée de l'application $t \mapsto \|\dot{c}(t)\|^2$, qui est $t \mapsto 2 \langle \ddot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle$, est nulle puisque l'accélération $\ddot{c}(t)$ est orthogonale au vecteur tangent $\dot{c}(t)$. Donc l'application $t \mapsto \|\dot{c}(t)\|^2$ est constante, et c est paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc.

La condition d'accélération normale à la surface s'écrit, tant que c reste dans l'image d'un paramétrage local φ , comme le système d'équations différentielles du second ordre

$$\begin{aligned} \langle \ddot{c}(t), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\varphi^{-1}(c(t))) \rangle &= 0 \\ \langle \ddot{c}(t), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\varphi^{-1}(c(t))) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Comme les fonctions sont de classe C^∞ , le théorème de Cauchy-Lipschitz donne l'existence, l'unicité à conditions initiales d'ordres 0 et 1 données, et la régularité des solutions maximales c de ce système. $\square$

Nous renvoyons par exemple à [Pau4] pour la démonstration que l'assertion (3) implique l'assertion (2). $\square$

Exemples. (1) **(Géodésiques du plan)** L'accélération d'une courbe tracée sur un plan affine P appartient au plan vectoriel $\vec{P}$ associé à P , et doit être normale au plan vectoriel

$\vec{P}$ (égal à $T_x P$ pour tout $x \in P$) si la courbe est une géodésique de P . Donc les géodésiques de P sont les courbes de P d'accélération nulle. Les géodésiques non constantes d'un plan affine sont par conséquent les arcs de droites paramétrés de manière affine par un intervalle ouvert I contenant un temps t_0 , de la forme

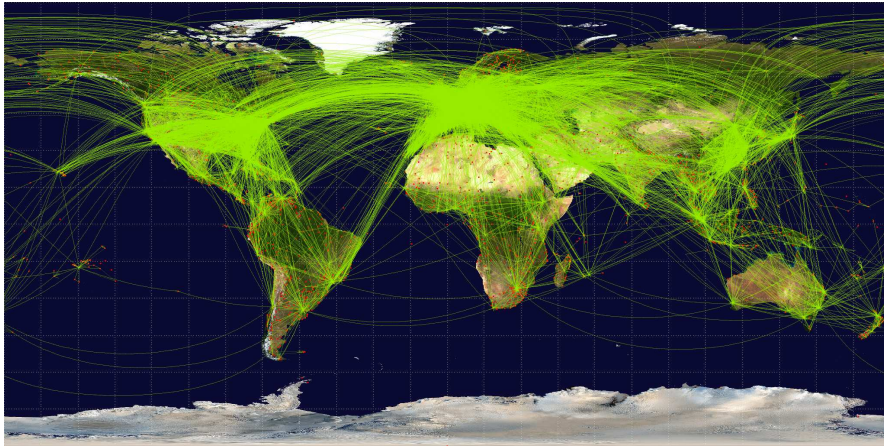
$$c : t \mapsto a(t - t_0)v + b$$

où $b = c(t_0)$ est un point de P , v est un vecteur unitaire du plan vectoriel $\vec{P}$ associé à P , tel que $av = \dot{c}(t_0)$ et $a = \|\dot{c}(t_0)\| > 0$.

(2) **(Géodésiques de la sphère)** Soit $c : I \rightarrow \mathbb{S}_2$ une géodésique de la sphère $\mathbb{S}_2$. Puisque $s \mapsto c(s)$ est un champs de vecteurs unitaires normaux à $\mathbb{S}_2$ lisse le long de $c(s)$, et puisque l'accélération d'une géodésique sur $\mathbb{S}_2$ est normale à $\mathbb{S}_2$, il existe une application lisse $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\ddot{c}(s) = \lambda(s) c(s)$ pour tout $s \in I$, et nous avons $\lambda(s) = \langle \ddot{c}(s), c(s) \rangle$. En dérivant deux fois la relation $\|c(s)\|^2 = 1$, nous obtenons l'égalité $\langle \ddot{c}(s), c(s) \rangle + \|\dot{c}(s)\|^2 = 0$. Puisque la norme du vecteur vitesse de c est constante, l'application λ est constante négative ou nulle. En écrivant $\lambda = -a^2$, nous avons donc $\ddot{c}(s) + a^2 c(s) = 0$. Si $a = 0$, comme les seuls segments de droites contenus dans la sphère sont des singletons, l'application c est constante. Supposons donc $a \neq 0$. Par l'unicité des solutions des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, pour tout $s_0 \in I$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ tels que $c : s \mapsto \alpha \cos(a(s - s_0)) + \beta \sin(a(s - s_0))$. De plus $\alpha = c(s_0)$ et $\beta = \frac{\dot{c}(s_0)}{a}$ sont orthogonaux (car le vecteur vitesse $\dot{c}(s_0)$ est tangent à la sphère) et unitaires (car $c(s_0) \in \mathbb{S}_2$ et $a = \|\dot{c}(s)\|$ pour tout $s \in I$). Nous avons donc montré le résultat suivant.

Proposition 8.19. *Les géodésiques non constante de $\mathbb{S}_2$ sont les arcs de grands cercles de $\mathbb{S}_2$ paramétrés proportionnellement à la longueur d'arc.* $\square$

Ce résultat explique pourquoi les avions ne suivent pas des parallèles (à latitude constante) pour aller d'un point à un autre de la terre.



(3) **(Géodésiques des surfaces de révolution)** Soit M une surface de révolution d'axe $\mathbb{R}e_3$ et de méridienne $c : s \mapsto f(s)e_1 + g(s)e_3$ (paramétrée par longueur d'arc par un intervalle ouvert J , donc nous avons $\dot{f}(s)^2 + \dot{g}(s)^2 = 1$ et en dérivant $\dot{f}(s)\ddot{f}(s) + \dot{g}(s)\ddot{g}(s) = 0$, pour tout $s \in J$), donc de paramétrage local $\varphi : (s, \theta) \mapsto f(s)e^{i\theta} + g(s)e_3$. Rappelons que f est supposée strictement positive.

Cherchons les applications lisses $t \mapsto s(t)$ et $t \mapsto \theta(t)$ définies sur un intervalle ouvert I , la première à valeurs dans J et la seconde dans $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, telles que la courbe γ définie par $\gamma : t \mapsto \varphi(s(t), \theta(t))$ soit une géodésique paramétrée par longueur d'arc. Puisque le vecteur vitesse de γ est

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{s}(t) \dot{f}(s(t)) e^{i\theta(t)} + \dot{s}(t) \dot{g}(s(t)) e_3 + \dot{\theta}(t) f(s(t)) i e^{i\theta(t)},$$

et qu'il est unitaire, nous avons donc

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = (\dot{s}(t) \dot{f}(s(t)))^2 + (\dot{s}(t) \dot{g}(s(t)))^2 + (\dot{\theta}(t) f(s(t)))^2 = \dot{s}(t)^2 + f(s(t))^2 \dot{\theta}(t)^2 = 1.$$

L'accélération de γ est donc

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(t) = & (\ddot{s}(t) \dot{f}(s(t)) + \dot{s}(t)^2 \ddot{f}(s(t)) - \dot{\theta}(t)^2 f(s(t))) e^{i\theta(t)} \\ & + (\ddot{s}(t) \dot{g}(s(t)) + \dot{s}(t)^2 \ddot{g}(s(t))) e_3 + (2\dot{\theta}(t) \dot{s}(t) \dot{f}(s(t)) + \ddot{\theta}(t) f(s(t))) i e^{i\theta(t)}, \end{aligned}$$

Les équations (d'Euler-Lagrange du problème de minimisation de l'énergie) disant qu'elle est orthogonale aux vecteurs tangents de base $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \dot{f}(s) e^{i\theta} + \dot{g}(s) e_3$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = f(s) i e^{i\theta}$ s'écrivent donc (en utilisant encore les égalités $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$ et par dérivation $\ddot{f} \dot{f} + \ddot{g} \dot{g} = 0$, ainsi que $f > 0$)

$$\begin{aligned} \ddot{s}(t) - f(s(t)) \dot{f}(s(t)) \dot{\theta}(t)^2 &= 0 \\ 2\dot{\theta}(t) \dot{s}(t) \dot{f}(s(t)) + \ddot{\theta}(t) f(s(t)) &= 0. \end{aligned}$$

La deuxième équation, qui s'écrit aussi $\frac{d}{dt}(\dot{\theta}(t) f(s(t))^2) = 0$, dit qu'il existe une constante $J_0 \in \mathbb{R}$ (le moment cinétique) telle que $\dot{\theta}(t) f(s(t))^2 = J_0$. L'équation $\dot{s}(t)^2 + f(s(t))^2 \dot{\theta}(t)^2 = 1$ s'écrit alors $\dot{s}(t)^2 + \frac{J_0^2}{f(s(t))^2} = 1$. La fonction $t \mapsto s(t)$ vérifie donc l'équation différentielle

$$\dot{s}(t)^2 = 1 - \frac{J_0^2}{f(s(t))^2}.$$

Si $J_0 = 0$, alors l'application $t \mapsto \theta(t)$ est égale à une constante θ_0 , et $(t) = \pm t + s_0$ où $s_0 \in \mathbb{R}$ est une constante d'intégration. Donc γ est un reparamétrage isométrique de l'image par la rotation d'angle θ_0 autour de l'axe $\mathbb{R}e_3$ de la courbe méridienne c . Réciproquement, la courbe méridienne c et ses images par rotation autour de l'axe $\mathbb{R}e_3$ sont donc des géodésiques. ¹⁷⁴

Si $J_0 \neq 0$, alors l'application $t \mapsto \theta(t)$ est strictement monotone. En reparamétrisant la courbe γ par θ (ce qui lui fait certes perdre le fait qu'elle est paramétrée proportionnellement par longueur d'arc), nous obtenons donc

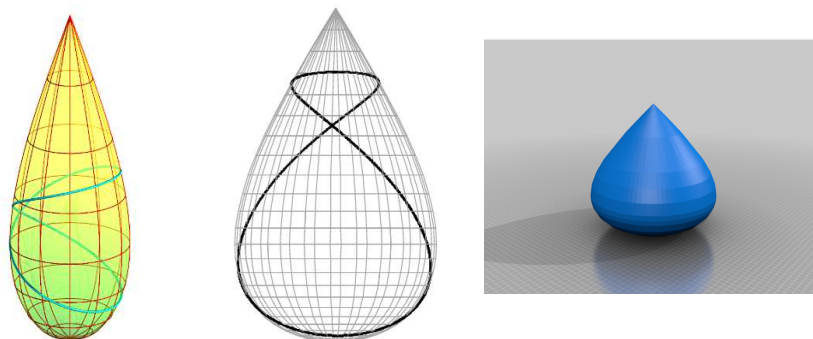
$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}}\right)^2 = f(s)^2 \frac{f(s)^2 - J_0^2}{J_0^2}.$$

Notons qu'en particulier $|J_0| \leq \min_s f(s)$. Cette équation est certes à variable séparable, mais n'a pas de solution explicite en général. Voir le théorème de Clairaut pour une caractérisation. Par exemple, le dessin ci-dessous indique que les géodésiques maximales ni verticales ni horizontales sur la poire de Tannery (1892)

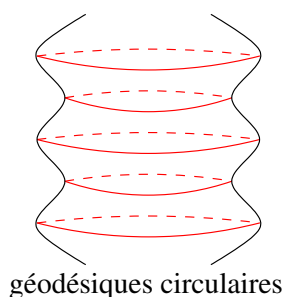
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 16a^2(x^2 + y^2) = z^2(2a^2 - z^2), \quad 0 < z < \sqrt{2}a\},$$

où $a > 0$, sont périodiques de longueur $2\pi a$, en forme de 8.

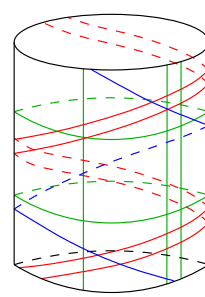
174. Un autre argument consiste à voir que si une courbe lisse entre deux points d'un méridien n'est pas l'arc de méridien entre ces deux points, on pourrait la raccourcir strictement en utilisant une symétrie par rapport à un plan vertical et en raccourcissant les angles.



Notons que les parallèles critiques (les cercles d'équation $s = s_0$, intersections de la surface de révolution avec les plans horizontaux affines passant par $(f(s_0), 0, g(s_0))$ pour tout s_0 dans le domaine de définition de la méridienne tels que $\dot{f}(s_0) = 0$, par exemple lorsque f a un minimum local) sont aussi des géodésiques, voir le dessin de gauche ci-dessous.



géodésiques circulaires



géodésiques du cylindre

Exemple. Sur un cylindre, les géodésiques non constantes sont les arcs de droites directrices, les arcs de cercles perpendiculaires aux droites directrices et les arcs d'hélices circulaires tracées sur le cylindre (toutes paramétrées proportionnellement à la longueur d'arc).

En effet, nous pouvons à isométrie près supposer que l'axe du cylindre est l'axe vertical $\mathbb{R}e_3$, et que la méridienne est une courbe $c : s \mapsto f(s)e_1 + g(s)e_3$ paramétrée par longueur d'arc, définie sur un intervalle I . Alors la fonction f est constante, égale au rayon R du cylindre, donc g est de la forme $s \mapsto \varepsilon s + a_0$ où $\varepsilon = \pm 1$ et $a_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $s \in I$, la fonction f a un point critique en s , donc tous les arcs de cercles paramétrés proportionnellement à la longueur d'arc $\theta \mapsto Re^{i\lambda\theta + \theta_0}$, où $\lambda \neq 0$ et θ_0 sont des constantes, sont des géodésiques. Supposons à translation à la source près que $0 \in I$. Si γ est la géodésique maximale de données initiales $\gamma(0)$ et $\dot{\gamma}(0)$ telle que la vitesse initiale $\dot{\gamma}(s_0)$ ne soit ni horizontale ni verticale (en particulier non nulle), alors par ce qui précède, nous avons

$$\gamma : s \mapsto Re^{i(\lambda_0 s + \theta_0)} + (\varepsilon s + a_0)e_3,$$

où $\lambda_0 = \pm \frac{J_0}{R\sqrt{R^2 - J_0^2}} \neq 0$ pour $J_0 \in]0, R[$ le moment cinétique défini ci-dessus. Si $\lambda_0 > 0$, cette hélice est dextre ou senestre en fonction de la valeur de ε . Les constantes λ_0, θ_0, a_0 sont uniquement déterminées par les conditions initiales, par

$$\gamma(0) = Re^{i\theta_0} + a_0 e_3 \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}(0) = R\lambda_0 i e^{i\theta_0} + \varepsilon e_3.$$

Ce caractère géodésique (et le fait que la nature est fainéante et cherche à économiser son énergie afin d'atteindre ses objectifs ...) explique pourquoi les plantes grimpantes, comme le haricot, le liseron ou le houblon (voir les photos en fin de partie 8.1.2) s'enroulent en des hélices circulaires le long de tuteurs.

Exercice E.96. Soient S une surface lisse dans $\mathbb{R}^3$ et d_S la distance riemannienne sur S . Pour tous les $x \in S$ et $\epsilon > 0$, notons $S(x, \epsilon) = \{y \in S : d_S(x, y) = \epsilon\}$ la sphère de centre x et de rayon ϵ dans S pour la distance riemannienne. Montrer que si $\epsilon > 0$ est assez petit, alors $S(x, \epsilon)$ est un cercle lisse de $\mathbb{R}^3$ de longueur euclidienne vérifiant

$$\ell(S(x, \epsilon)) = 2\pi \epsilon - \frac{\pi}{3} K(x) \epsilon^3 + o(\epsilon^3) .$$

Cette formule permet d'exprimer la courbure de Gauss (qui est un invariant de nature C^2) en fonction uniquement de la distance riemannienne (qui est un invariant de nature C^0).

8.7 La formule de Gauss-Bonnet

Le résultat suivant, que nous ne démontrerons pas dans ces notes, donne un lien entre la courbure de Gauss et la caractéristique d'Euler des surfaces lisses dans $\mathbb{R}^3$.

Théorème 8.20. (Formule de Gauss-Bonnet) Soit M une surface compacte lisse plongée dans $\mathbb{R}^3$, de courbure de Gauss $K = K_M : M \rightarrow \mathbb{R}$, de caractéristique d'Euler $\chi(M)$ et de mesure d'aire Aire_M . Alors

$$\int_M K(x) d\text{Aire}_M(x) = 2\pi \chi(M) .$$

Ce résultat admet de nombreuses variations et extensions. Notons qu'il lie une quantité topologique (et même homotopique), la caractéristique d'Euler $\chi(M)$ à une quantité géométrique, la courbure de Gauss K_M , qui est intrinsèque à la géométrie de la surface, comme expliqué dans la partie suivante.

8.8 Le remarquable théorème de Gauss

Le résultat suivant de Gauss, que nous ne démontrerons pas dans ces notes, dit « theorem egregium », montre que la courbure de Gauss d'une surface lisse dans $\mathbb{R}^3$ est indépendante du plongement de la surface M tant que celui-ci soit isométrique pour la première forme fondamentale.

Théorème 8.21. (Théorème de Gauss) Soit M une surface lisse plongée dans $\mathbb{R}^3$, et $\varphi : W \rightarrow M$ un paramétrage local. Alors la courbure de Gauss s'exprime en fonction des coefficients E, F, G de la première forme fondamentale et de ses dérivées partielles

premières et secondes, par la formule

$$K = \frac{1}{4(EG - F^2)} \left(E \left(\frac{\partial E}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y} - 2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} + \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 \right) \right. \\ + G \left(\frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} - 2 \frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} + \left(\frac{\partial E}{\partial y} \right)^2 \right) \\ + F \left(\frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial E}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x} - 2 \frac{\partial E}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} + 4 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} - 2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} \right) \\ \left. - 2(EG - F^2) \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) \right).$$

Soient M et M' deux surfaces lisses dans $\mathbb{R}^3$. Nous appellerons *isométrie riemannienne* de M dans M' un C^∞ -difféomorphisme $\psi : M \rightarrow M'$ qui préserve les premières formes fondamentales, c'est-à-dire qui vérifie, pour tous les points $x \in M$ et les vecteurs tangents $v, w \in T_x M$, l'égalité

$$I_{\psi(x)}(T_x \psi(v), T_x \psi(w)) = I_x(v, w).$$

Notons que dans cette formule la première forme fondamentale $I_{\psi(x)}$ est celle de la surface M' et la première forme fondamentale I_x est celle de la surface M .

Puisque la longueur des chemins C^1 par morceaux est définie par intégration de la norme de leur vecteur vitesse, puisque les isométries riemanniennes, préservant les produits scalaires sur les espaces tangents, préservent aussi les normes, et par le théorème de dérivation des fonctions composées $(\psi \circ c)'(t) = T_{c(t)} \psi(\dot{c}(t))$, une isométrie riemannienne ψ préserve la longueur des chemins : pour tout chemin C^1 par morceaux $c : I \rightarrow M$ tracé sur M , la longueur du chemin $\psi \circ c : I \rightarrow M'$ tracé sur M' est égale à la longueur de c :

$$\text{long}(\psi \circ c) = \text{long}(c).$$

Lorsque M et M' sont connexes,¹⁷⁵ puisque la distance riemannienne est définie comme la borne inférieure de longueurs de chemins C^1 par morceaux entre les deux points, une isométrie riemannienne ψ préserve les distances riemanniennes d_M de M et $d_{M'}$ de M' :

$$\forall x, y \in M, \quad d_{M'}(\psi(x), \psi(y)) = d_M(x, y).$$

La réciproque, que nous ne démontrons pas dans ces notes, est vraie.

Proposition 8.22. *Si M et M' sont connexes, une bijection $\psi : M \rightarrow M'$ qui est une isométrie pour les distances riemanniennes de M et de M' est une isométrie riemannienne.*

Nous dirons que les surfaces lisses M et M' sont *isométriques* s'il existe une isométrie riemannienne de M dans M' . La relation « être isométrique à » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des surfaces lisses de $\mathbb{R}^3$.

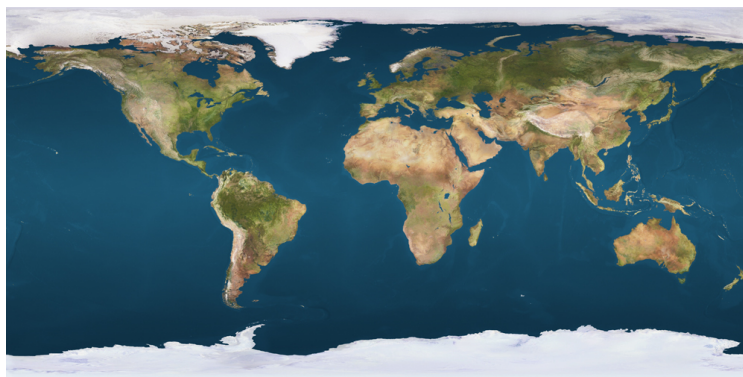
Il découle du théorème de Gauss 8.21 que si $\psi : M \rightarrow M'$ est une isométrie riemannienne, alors

$$\forall x \in M, \quad K_{M'}(\psi(x)) = K_M(x).$$

En particulier, un ouvert non vide de la sphère S_2 , à courbure de Gauss constante 1, n'est pas isométrique à un ouvert non vide du plan horizontal $\mathbb{R}^2$, à courbure de Gauss constante

175. Cette condition est juste là pour assurer que la distance riemannienne soit bien définie.

0. Ce fait explique la difficulté d'avoir de bonnes cartes géographiques (à grandes échelles, pour les cartes IGN au 1:25 000-ème, pas de souci!), et en particulier pourquoi une carte de la terre pertinente au niveau de l'équateur est très distordue quand on s'approche des pôles.



8.9 Autres exercices

Exercice E.97. Soient S une surface lisse dans $\mathbb{R}^3$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 dans son intérieur. Soit $c : I \rightarrow S$ une courbe lisse dans $\mathbb{R}^3$ tracée sur S , paramétrée par longueur d'arc, birégulière, et passant par $x = c(0) \in S$ au temps $s = 0$ avec vecteur tangent unitaire $v = \dot{c}(0) \in T_x S$. Soit $s \mapsto (\tau(s), \nu(s), \beta(s))$ le repère mobile de Frenet de c . Soit $\vec{n}$ un champs de vecteurs normaux unitaires sur un voisinage de x dans S . Notons $\theta \in [0, \pi]$ l'angle entre le vecteur normal $\nu(0)$ de c au temps $s = 0$ et $\vec{n}(x)$. Notons κ la courbure de la courbe gauche c au temps $s = 0$. Montrer la *formule de Meusnier*

$$\Pi_x^{\vec{n}}(v, v) = \kappa \cos(\theta) .$$

Exercice E.98. Soient S une surface lisse dans $\mathbb{R}^3$ de courbure de Gauss strictement positive et I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 dans son intérieur. Soit $c : I \rightarrow S$ une courbe lisse dans $\mathbb{R}^3$ tracée sur S , paramétrée par longueur d'arc et birégulière. Soit κ la courbure de la courbe c au temps $s = 0$ et λ_1, λ_2 les courbures principales de S en $c(0)$. Montrer que

$$\kappa \geq \min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} .$$

Quand cette égalité est-elle une égalité ?

8.10 Indications pour la résolution des exercices

Correction de l'exercice E.90. Notons $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}^+$) le sous-espace topologique de $(\mathbb{R}^m)^m$ constitué des bases orthonormées (respectivement des bases orthonormées directes) de $\mathbb{R}^m$. Notons $(e_1, \dots, e_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Considérons l'application

$\Phi : O(m) \rightarrow (\mathbb{R}^m)^m$ définie par $g \mapsto (ge_1, \dots, ge_m)$ et $\Phi^+ = \Phi|_{SO(m)}$, qui est la restriction de Φ à l'ouvert $SO(m)$ de $O(m)$. L'application Φ , et donc Φ^+ , est de classe C^∞ , car chacune de ses composantes est une restriction d'une application linéaire à la sous-variété lisse $O(m)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application Φ (respectivement Φ^+) est injective et son image est exactement $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}^+$), par la simple transitivité de l'action de $O(m)$ (respectivement $SO(m)$) sur l'ensemble des bases orthonormées (respectivement des bases orthonormées directes) de $\mathbb{R}^m$. Puisque $O(m)$ et $SO(m)$ sont compacts et $(\mathbb{R}^m)^m$ séparé, les injections continues Φ et Φ^+ sont des homéomorphismes sur leur image. Enfin, Φ , et donc Φ^+ , est une immersion, car par un argument de linéarité, son application tangente $T_g\Phi : T_g O(m) \rightarrow (\mathbb{R}^m)^m$ est $X \mapsto (Xe_1, \dots, Xe_m)$, qui est injective car une application linéaire est déterminée par les valeurs qu'elle prend sur la base canonique. Donc Φ et Φ^+ sont des plongements lisses, et par la proposition 4.11, les sous-espaces $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^+$ de $(\mathbb{R}^m)^m$ sont des sous-variétés lisses de $(\mathbb{R}^m)^m$, qui sont C^∞ -difféomorphes à $O(m)$ et $SO(m)$ respectivement.

Correction de l'exercice E.91. Soit $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe gauche paramétrée par longueur d'arc birégulière de classe C^3 et de torsion non nulle. Notons $s \mapsto (\tau(s), \nu(s), \beta(s))$ le repère (mobile) de Frenet de c , ainsi que $K : I \rightarrow]0, +\infty[$ et $T : I \rightarrow \mathbb{R}$ la courbure et la torsion de c . Notons J une composante connexe de l'ouvert (non vide par l'hypothèse que T n'est pas l'application nulle) $\{s \in I : T(s) \neq 0\}$ de I .

Si nous montrons qu'il existe une constante $C_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ telle que $\frac{T}{K} = C_3$ sur J , ceci montrera d'une part que $c|_J$ est une hélice, d'autre part, puisque T doit s'annuler sur une extrémité de J qui appartient à I par maximalité, que $J = I$.

Notons v un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. Dire que les vecteurs tangents de c (qui sont unitaires) font un angle constant avec la direction $\mathbb{R}v$ signifie qu'il existe une constante $C_1 \in [-1, 1]$ (le cosinus du tel angle) telle que pour tout $s \in J$, nous ayons $\langle \tau(s), v \rangle = C_1$. Comme J est connexe, l'existence d'un tel C_1 est équivalente, par dérivation et par la première équation de Frenet (31), au fait que nous ayons

$$0 = \langle \dot{\tau}(s), v \rangle = K(s) \langle \nu(s), v \rangle$$

Comme $K(s) = \|\dot{\tau}(s)\| = \|\ddot{c}(s)\| \neq 0$ puisque la courbe est birégulière, ceci est équivalent à $\langle \nu(s), v \rangle = 0$. Comme la torsion ne s'annule pas sur J , ceci est équivalent, par la troisième équation de Frenet (31) au fait que

$$\langle \dot{\beta}(s), v \rangle = T(s) \langle \nu(s), v \rangle = 0.$$

Comme J est connexe, et par dérivation, ceci équivaut au fait qu'il existe une constante $C_2 \in [-1, 1]$ telle que pour tout $s \in J$, nous ayons $\langle \beta(s), v \rangle = C_2$, c'est-à-dire ses vecteurs binormaux font un angle constant avec une direction donnée. Donc les trois conditions de l'énoncé de l'exercice E.91 sont équivalentes, du moins sur l'intervalle J . De plus, la direction v est alors uniquement définie.

Si ces trois conditions sont satisfaites, comme $\langle \dot{\nu}(s), v \rangle = 0$ en dérivant la relation $\langle \nu(s), v \rangle = 0$, en prenant le produit scalaire avec v de la deuxième équation de Frenet (31) $\dot{\nu}(s) = -K(s) \tau(s) - T(s) \beta(s)$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle \dot{\nu}(s), v \rangle &= -K(s) \langle \tau(s), v \rangle - T(s) \langle \beta(s), v \rangle \\ \iff 0 &= K(s) C_1 + T(s) C_2. \end{aligned}$$

Notons que comme K ne s'annule pas sur I , ceci implique que si $C_2 = 0$, alors $C_1 = 0$, et donc que les vecteurs $\tau(s), \nu(s), \beta(s)$ sont tous les trois orthogonaux au vecteur non nul v , ce qui n'est pas possible puisqu'ils forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Donc $\frac{T(s)}{K(s)} = -\frac{C_1}{C_2}$ est constant non nul.

Réciproquement, s'il existe une constante $C_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ telle que pour tout $s \in I$, nous ayons $\frac{T(s)}{K(s)} = C_3$, alors les première et troisième équations de Frenet (31) donnent, pour tout $s \in I$,

$$\dot{\tau}(s) = C_3 \dot{\beta}(s) .$$

Par intégration et puisque I est connexe, il existe donc un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\tau(s) = C_3 \beta(s) + v$ pour tout $s \in I$. Notons que v est non nul, car $\tau(s)$ et $\beta(s)$ ne sont pas colinéaires. En prenant le produit scalaire de cette égalité avec $\nu(s)$, qui est orthogonal à $\tau(s)$ et à $\beta(s)$, nous obtenons donc que $\langle \nu(s), v \rangle = 0$ pour tout $s \in I$, ce qui est la deuxième condition de l'énoncé de l'exercice E.91.

Correction de l'exercice E.92. Considérons la conique réelle E d'équation $ax^2 + by^2 = 1$ avec $a, b \neq 0$. Supposons-la non vide, c'est-à-dire supposons que a et b ne sont pas tous les deux négatifs. Fixons $(x_0, y_0) \in E$. Par les symétries $(x, y) \mapsto (y, x)$ et $(x, y) \mapsto (-x, y)$, nous pouvons supposer que $a > 0$ et $x_0 \geq 0$. Nous pouvons supposer que $x_0 > 0$, le résultat lorsque $x_0 = 0$ s'obtiendra par continuité. L'application $c : t \mapsto \left(\sqrt{\frac{1-bt^2}{a}}, t \right)$, définie sur un voisinage ouvert I de $t = y_0$ dans $\mathbb{R}$, est un paramétrage lisse de E au voisinage de (x_0, y_0) . Pour tout $t \in I$, nous avons $\dot{c}(t) = \left(-\frac{bt}{\sqrt{a(1-bt^2)}}, 1 \right)$ et $\ddot{c}(t) = \left(-\frac{b}{\sqrt{a(1-bt^2)^{3/2}}}, 0 \right)$. De plus,

$$\vec{n} : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2 t^2}{a(1-bt^2)}}} \left(-1, -\frac{bt}{\sqrt{a(1-bt^2)}} \right)$$

est un champ de vecteurs normaux unitaires lisse le long de c . La seconde forme fondamentale $\Pi^{\vec{n}}$ de E dans la direction de $\vec{n}$ est donc l'application bilinéaire sur $T_{c(t)}E = \mathbb{R}\dot{c}(t)$ définie par

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, \quad \Pi_{c(t)}^{\vec{n}}(u\dot{c}(t), v\dot{c}(t)) = \lambda_1 uv$$

où la (première et seule) courbure principale en $c(t)$ est

$$K = \lambda_1 = \langle \ddot{c}(t), \vec{n}(t) \rangle = \frac{b}{\sqrt{a(1-bt^2)^{3/2}} \sqrt{1 + \frac{b^2 t^2}{a(1-bt^2)}}} .$$

Le point focal de E en $c(t)$ est alors

$$c(t) + \frac{1}{\lambda_1} \vec{n} = \left(-\frac{b2t + a(1+bt^2)^2}{b\sqrt{a(1-bt^2)}}, 1 - t(1-bt^2) \right) .$$

Correction de l'exercice E.93. Supposons que M soit connexe, et montrons que M est un ouvert d'une sphère ou d'un plan affine de $\mathbb{R}^3$, ce qui conclut (par la séparabilité de M). Soit $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ un paramétrage local de M , où W est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées notées (x, y) , et soit $\vec{\nu} : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs normaux unitaires sur $\varphi(W)$ associé. Par l'hypothèse, il existe donc une application $\lambda : W \rightarrow \mathbb{R}$ (sans aucune condition de régularité a priori) telle que pour tous les $(x, y) \in W$, nous ayons

$$\Pi_{\varphi(x,y)} = \lambda(x, y) \text{ I}_{\varphi(x,y)} .$$

Puisque $\vec{\nu}$ est unitaire en tout point de W , et en dérivant par rapport à x puis à y l'équation $\langle \vec{\nu}, \vec{\nu} \rangle = 1$, nous avons $\langle \frac{\partial \vec{\nu}}{\partial x}, \vec{\nu} \rangle = \langle \frac{\partial \vec{\nu}}{\partial y}, \vec{\nu} \rangle = 0$. Donc les dérivées partielles $\frac{\partial \vec{\nu}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \vec{\nu}}{\partial y}$, qui sont orthogonales au vecteur normal, sont des vecteurs tangent à M en $\varphi(x, y)$.

Par les formules (50), et puisque les vecteurs de $T_{\varphi(x, y)}M$ sont déterminés par leur produit scalaire avec les vecteurs de base $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)$, nous avons donc le système d'équations

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \vec{\nu}}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \vec{\nu}}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} . \end{aligned}$$

En particulier, l'application $\lambda : W \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ . En dérivant la première équation par rapport à y et la seconde par rapport à x et en soustrayant, le lemme de Schwarz montre que

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} .$$

Puisque les vecteurs $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)$ sont linéairement indépendants, nous obtenons donc que les différentielles partielles de λ sont nulles, donc par connexité de W que λ est constante.

Si λ est nulle, alors le vecteur normal ν est constant, donc les plans vectoriels $T_{\varphi(x, y)}M$ le long de la surface $\varphi(W)$ sont constants, et, par connexité, la surface $\varphi(W)$ est contenue dans le plan affine $\varphi(x_0, y_0) + T_{\varphi(x_0, y_0)}M$ pour tout $(x_0, y_0) \in W$ fixé.

Si λ est non nulle, alors la fonction $\varphi + \frac{1}{\lambda} \vec{\nu}$, dont les dérivées partielles sont nulles, est constante sur l'ouvert connexe W . Notons c sa valeur. Donc $\|\varphi(x, y) - c\| = \frac{1}{\lambda}$ est constant et $\varphi(W)$ est contenue dans la sphère de centre c et de rayon $\frac{1}{\lambda}$.

Dans les deux cas ci-dessus, par le théorème d'invariance du domaine, la surface $\varphi(W)$ est un ouvert du plan affine ou de la sphère qui la contient. Par connexité, il en est de même de M .

Correction de l'exercice E.94. Fixons un point $(x_0, y_0, z_0) \in E$. Par la symétrie $(x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$ et l'homothétie $(x, y, z) \mapsto (\frac{1}{\sqrt{a}}x, \frac{1}{\sqrt{a}}y, \frac{1}{\sqrt{a}}z)$, nous pouvons supposer que $x_0 \geq 0$ et $a = 1$ (voir les formules (43) de la remarque (3) de la partie 8.2.3). Nous avons en particulier $x_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 = 1$. Nous pouvons supposer que $x_0 > 0$, le résultat lorsque $x_0 = 0$ s'obtiendra par continuité. L'application

$$\varphi : (y, z) \mapsto (x = \sqrt{1 - by^2 - cz^2}, y, z) ,$$

définie sur un voisinage ouvert W assez petit de (y_0, z_0) dans $\mathbb{R}^2$, est alors un paramétrage lisse de E au voisinage de (x_0, y_0, z_0) . Pour tout $(y, z) \in W$, en omettant les évaluations des dérivées partielles en (y, z) , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \left(-\frac{by}{\sqrt{1 - by^2 - cz^2}}, 1, 0 \right) = (-byx^{-1}, 1, 0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \left(-\frac{cz}{\sqrt{1 - by^2 - cz^2}}, 0, 1 \right) = (-czx^{-1}, 0, 1) . \end{aligned}$$

La matrice $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ de la première forme fondamentale de S en $\varphi(y, z)$ dans la base $\mathcal{B}_{\varphi, (x, y)} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$ est donc donnée par

$$E = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\|^2 = 1 + b^2 y^2 x^{-2}, \quad F = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\rangle = b c y z x^{-2}, \quad G = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\|^2 = 1 + c^2 z^2 x^{-2}.$$

Nous avons

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \left(-b \frac{(1 - b y^2 - c z^2) + b y^2}{(1 - b y^2 - c z^2)^{3/2}}, 0, 0 \right) = (-b(x^2 + b y^2)x^{-3}, 0, 0),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \left(-c \frac{(1 - b y^2 - c z^2) + c z^2}{(1 - b y^2 - c z^2)^{3/2}}, 0, 0 \right) = (-c(x^2 + c z^2)x^{-3}, 0, 0)$$

et

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = \left(-\frac{b c y z}{(1 - b y^2 - c z^2)^{3/2}}, 0, 0 \right) = (-b c y z x^{-3}, 0, 0).$$

De plus,

$$\begin{aligned} \vec{\nu} : \varphi(x, y) &\mapsto \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2 y^2 x^{-2} + c^2 z^2 x^{-2}}} (1, b y x^{-1}, c z x^{-1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2}} (x, b y, c z) \end{aligned}$$

est un champ de vecteurs normaux unitaires lisse sur $\varphi(U)$ (qu'il était aussi possible de retrouver, modulo son signe, par une dérivation de l'équation $x^2 + b y^2 + c z^2 = 1$ de E). La seconde forme fondamentale $\Pi^{\vec{\nu}}$ de E dans la direction de $\vec{\nu}$ est donc l'application bilinéaire sur $T_{c(t)}E$ de matrice $\begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_{\varphi, (x, y)}$ où, par les formules (50), nous avons

$$\begin{aligned} \ell &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \vec{\nu} \right\rangle = -\frac{b(x^2 + b y^2)x^{-2}}{\sqrt{x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2}}, \\ m &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}, \vec{\nu} \right\rangle = -\frac{b c y z x^{-2}}{\sqrt{x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2}}, \\ n &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \vec{\nu} \right\rangle = -\frac{c(x^2 + c z^2)x^{-2}}{\sqrt{x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2}}, \end{aligned}$$

Posons $\alpha = -\frac{1}{x^2(x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2)^{3/2}}$ et $\beta = -\frac{1}{(x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2)^{3/2}}$. La matrice de l'opérateur de Weingarten en $\varphi(y, z)$ dans la base $\mathcal{B}_{\varphi, (x, y)}$ est donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} x^2 + c^2 z^2 & -b c y z \\ -b c y z & x^2 + b^2 y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(x^2 + b y^2) & b c y z \\ b c y z & c(x^2 + c z^2) \end{pmatrix} \\ &= \beta \begin{pmatrix} b(1 - c z^2 + c^2 z^2) & b c y z(1 - c) \\ b c y z(1 - b) & c(1 - b y^2 + b^2 y^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Supposons dans ce qui suit que $z_0 = 0$, de sorte que $x_0^2 = 1 - by_0^2$. Les courbures principales de E en $\varphi(y_0, 0)$ sont les valeurs propres de la matrice ci-dessus, qui est alors diagonale. Elles sont alors

$$\lambda_1 = \beta b \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \beta c(1 - by_0^2 + b^2 y_0^2) .$$

Le point $\varphi(y_0, 0)$ est alors un ombilic de E si et seulement si nous avons $\lambda_1 = \lambda_2$, c'est-à-dire

$$b - c = bc(b - 1)y_0^2 . \quad (60)$$

Si $b = 1$, alors l'équation (60) d'inconnue y_0 admet une solution si et seulement si $c = 1$, c'est-à-dire si E est la sphère $\mathbb{S}_2$, auquel cas tous les points sont des ombilics. Si $b = 1$ et $c \neq 1$, l'ellipsoïde E n'admet pas d'ombilic sur le plan horizontal.

Supposons donc que $b \neq 1$. Si $b = c$, alors l'équation (60) admet comme seule solution $y_0 = 0$, et par symétrie, l'ellipsoïde E admet exactement deux ombilics sur le plan horizontal, qui sont $(\pm 1, 0, 0)$.

Supposons donc que $b \neq c$. Si $\frac{b-c}{b-1} < 0$, alors l'équation (60) n'admet pas de solution et l'ellipsoïde E n'admet pas d'ombilic sur le plan horizontal. Si $\frac{b-c}{b-1} > 0$, alors l'équation (60) admet comme seules solutions $y_0 = \pm \sqrt{\frac{b-c}{bc(b-1)}}$, et nous avons

$$1 - by_0^2 = \frac{b(c-1)}{c(b-1)} . \quad (61)$$

Si $\frac{c-1}{b-1} > 0$, alors par symétrie, l'ellipsoïde E admet exactement quatre ombilics sur le plan horizontal, qui sont $(\pm \sqrt{\frac{b(c-1)}{c(b-1)}}, \pm \sqrt{\frac{b-c}{bc(b-1)}}, 0)$. Si $c = 1$, alors par continuité, l'ellipsoïde E admet exactement deux ombilics sur le plan horizontal, qui sont $(0, \pm \frac{1}{\sqrt{b}}, 0)$. Enfin, si $\frac{c-1}{b-1} < 0$, alors $1 - by_0^2$ est strictement négatif, donc ne peut pas être le carré de x_0 . Par conséquent, l'ellipsoïde E n'admet pas d'ombilic sur le plan horizontal.

Notons que $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 = \beta c(x_0^2 + b^2 y_0^2) \neq 0$. Par la proposition 8.9 et par symétrie et continuité, les points focaux des points $(x_0, y_0, 0)$ de E sont donc

$$\begin{aligned} (x_0, y_0, 0) + \frac{1}{\lambda_1} \vec{\nu}(\varphi(y_0, 0)) &= \left(x_0 \left(1 + \frac{1}{b(x_0^2 + b^2 y_0^2)^2} \right), y_0 \left(1 + \frac{1}{(x_0^2 + b^2 y_0^2)^2} \right), 0 \right) \\ (x_0, y_0, 0) + \frac{1}{\lambda_2} \vec{\nu}(\varphi(y_0, 0)) &= \left(x_0 \left(1 + \frac{1}{c(x_0^2 + b^2 y_0^2)^3} \right), y_0 \left(1 + \frac{1}{(x_0^2 + b^2 y_0^2)^3} \right), 0 \right) . \end{aligned}$$

Correction de l'exercice E.95. L'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$(u, v) \mapsto \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right)$$

est polynomiale donc de classe C^∞ . Sa matrice jacobienne en tout point (u, v) de $\mathbb{R}^2$ est

$$J\varphi_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 - u^2 + v^2 & 2uv \\ 2uv & 1 - v^2 + u^2 \\ 2u & -2v \end{pmatrix} .$$

La matrice extraite des deux premières lignes est de déterminant $1 - (u^2 + v^2)^2$, qui est inversible si $u^2 + v^2 \neq 1$. Si $u^2 + v^2 = 1$, en ajoutant u fois la dernière ligne à la première et en enlevant v fois la dernière ligne à la deuxième, nous

obtenons la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$. Donc le noyau de $d\varphi_{(u,v)}$ est nul, et φ est une immersion en tout point de $\mathbb{R}^2$.

La norme au carré du premier vecteur colonne de $J\varphi_{(u,v)}$, le produit scalaire de ses deux vecteurs colonnes et la norme au carré de son second vecteur colonne sont respectivement (en échangeant u et v pour éviter le dernier calcul)

$$E = (1 - u^2 + v^2)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 = (1 + u^2 + v^2)^2, \quad F = 0, \quad G = (1 + u^2 + v^2)^2.$$

La matrice de la première forme fondamentale en $\varphi(u, v)$ dans la base $\mathcal{B} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)$ est donc $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = (1 + u^2 + v^2)^2 I_2$, où I_2 est la matrice identité 2×2 .

Le champs de vecteurs normaux unitaires défini par ce paramétrage est donc

$$\begin{aligned} \vec{\nu}(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2} (-2u(1 + u^2 + v^2), 2v(1 + u^2 + v^2), 1 - (u^2 + v^2)^2) \\ &= \frac{1}{1 + u^2 + v^2} (-2u, 2v, 1 - u^2 - v^2). \end{aligned}$$

Notons que

$$\frac{\partial\vec{\nu}}{\partial u} = \frac{-2}{(1 + u^2 + v^2)^2} (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u) = \frac{-2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \frac{\partial\varphi}{\partial u}$$

et

$$\frac{\partial\vec{\nu}}{\partial v} = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2} (2uv, 1 + u^2 - v^2, -2v) = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

La matrice de la seconde forme fondamentale en $\varphi(u, v)$ dans la base $\mathcal{B} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)$ est donc $\begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix}$, où

$$\ell = -\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\vec{\nu}}{\partial u} \right\rangle = -2$$

$$m = -\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\vec{\nu}}{\partial u} \right\rangle = 0,$$

et

$$n = -\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\vec{\nu}}{\partial v} \right\rangle = 2,$$

Par définition, les courbures principales λ_1, λ_2 de M au point $\varphi(u, v)$ sont les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\ell}{E} & 0 \\ 0 & \frac{n}{G} \end{pmatrix}$ donc, à permutation près,

$$\lambda_1 = \frac{-2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}.$$

En particulier, la courbure moyenne de la surface d'Enneper est $H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = 0$, donc M est une surface minimale.

Correction de l'exercice E.97. Puisque la courbe c est tracée sur la surface S , nous avons $\dot{c}(s) \in T_{c(s)}S$ pour tout $s \in I$, donc

$$\langle \dot{c}(s), \vec{n}(c(s)) \rangle = 0 .$$

Puisque l'opérateur de Weingarten est l'opposé de l'application tangente de l'application de Gauss par la proposition 8.8, en dérivant l'égalité précédente en $s = 0$, puisque nous avons $\ddot{c}(0) = \dot{\tau}(0) = K(0)\nu(0)$ par la première des équations de Frenet (31), et puisque le produit scalaire de deux vecteurs unitaires est le cosinus de leur angle, nous avons

$$\begin{aligned} \Pi_x^{\vec{n}}(v, v) &= \langle -T_x \vec{n}(v), v \rangle = -\langle \dot{c}(0), T_x \vec{n}(\dot{c}(0)) \rangle = \langle \ddot{c}(0), \vec{n}(c(0)) \rangle \\ &= \langle K(0)\nu(0), \vec{n}(c(0)) \rangle = \kappa \cos(\theta) , \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice E.98. Comme les courbures principales sont bien définies à l'ordre près, nous pouvons supposer que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$. Fixons un champ de vecteurs normaux unitaires $\vec{n}$ sur un voisinage de $x = c(0)$, le résultat ne dépendant pas de ce choix. Soient e_1 et e_2 des vecteurs propres orthonormés de l'opérateur de Weingarten $L_x^{\vec{n}}$ associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2 , de sorte que la matrice de $L_x^{\vec{n}}$ dans la base (e_1, e_2) de $T_x S$ soit égale à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Puisque le vecteur $v = \dot{c}(0) \in T_x S = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$ est unitaire, il existe $\theta' \in \mathbb{R}$ tel que $v = \cos \theta' e_1 + \sin \theta' e_2$. Alors, avec les notations de l'exercice E.97 et par sa conclusion, nous avons

$$\kappa \cos \theta = \Pi_x^{\vec{n}}(v, v) = \langle v, L_x^{\vec{n}}(v) \rangle = \lambda_1 \cos^2 \theta' + \lambda_2 \sin^2 \theta' .$$

Puisque la courbure de Gauss de S en $c(0)$, égale à $K(x) = \lambda_1 \lambda_2$ est strictement positive, et quitte à remplacer $\vec{n}$ par $-\vec{n}$, ce qui ne change pas le résultat, nous avons $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$. Donc

$$\kappa \cos \theta \geq \lambda_2 \cos^2 \theta' + \lambda_2 \sin^2 \theta' = \lambda_2 = \min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} > 0 .$$

Le résultat en découle puisque $\kappa = \|\ddot{c}(0)\| \geq 0$, donc l'inégalité précédente implique d'une part que $\cos \theta > 0$ et d'autre part, en la divisant par $\cos \theta$, que $\kappa \geq \min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$ puisque $\cos(\theta) \leq 1$.

Si $\cos \theta' \neq 0$, alors il y a égalité si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2$, c'est-à-dire si x est un point ombilic de S , et si $\cos \theta = 1$, c'est-à-dire si le vecteur normal à la courbe c en x est égale au vecteur normal à S en x dans la direction de son point focal.

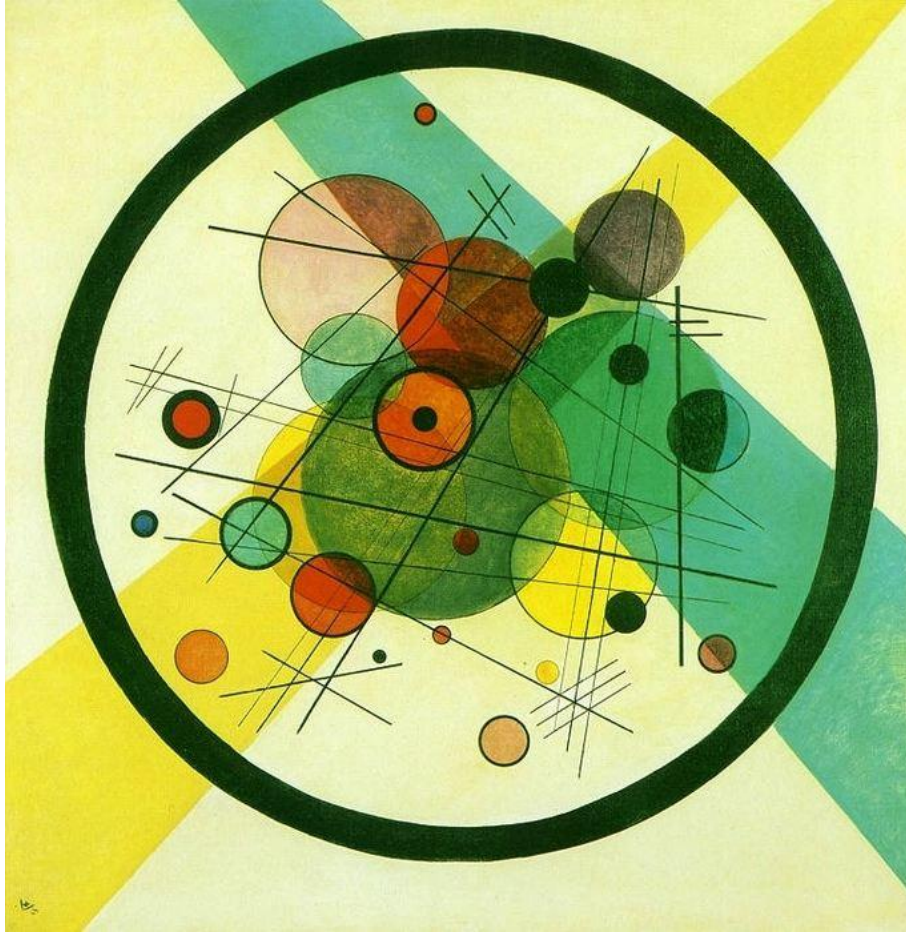
Si $\cos \theta' = 0$ (c'est-à-dire si la courbe c est au point x tangente au premier ordre avec la ligne de courbure principale de S en x), alors il y a égalité si et seulement si $\cos \theta = 1$, c'est-à-dire si le vecteur normal à la courbe c en x est égale au vecteur normal à S en x dans la direction de son point focal.

Donc il y a égalité si et seulement si la courbe c est au point x est tangente au second ordre avec la ligne de courbure principale de S en x , ou si x est un point ombilic de S et le vecteur normal à la courbe c en x est égale au vecteur normal à S en x dans la direction de son point focal.

C'est en particulier le cas si S est la sphère $\mathbb{S}_2$ et si c est un arc de grand cercle.

A Annexe : rappels de topologie générale

Les références pour cet appendice sont [Bou2, Dug, Dix, Pau2]. Nous supposons connues, essentiellement pour des exemples, les notions d'espaces vectoriels normés et d'espaces métriques. Les démonstrations qui ne sont pas données ci-dessous sont les mêmes que dans le cas particulier des espaces métriques, ou sont laissées en exercice.



Cercles dans un cercle, W. Kandisky, 1923, Philadelphia Museum of Art

A.1 Généralités

Un *espace topologique* est un ensemble X muni d'un ensemble $\mathcal{O}$ de parties de X tel que

- (1) toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$,
- (2) toute union d'éléments de $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$.

Par abus, nous notons souvent X le couple $(X, \mathcal{O})$. Par convention, une intersection vide de parties d'un ensemble E est égal à E , et une union vide de parties de E est égale à la partie vide. Donc $\emptyset$ et X appartiennent à $\mathcal{O}$. Les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés les *ouverts* de X , et $\mathcal{O}$ une *topologie* sur l'ensemble X . Les complémentaires de ces ouverts s'appellent les *fermés* de la topologie $\mathcal{O}$. Toute union finie de fermés est fermée, toute intersection de fermés est fermée, $\emptyset$ et X sont fermés. Étant donné un ensemble de parties d'un ensemble

E , stable par intersections et par unions finies, l'ensemble des complémentaires de ces parties est une topologie sur E .

Une bijection $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces topologiques est un *homéomorphisme* si l'image réciproque par f de la topologie de Y est la topologie de X . Deux espaces topologiques X et Y sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme de X dans Y . « Être homéomorphe à » est une relation d'équivalence sur tout ensemble d'espaces topologiques. Une propriété P sur la collection des espaces topologiques est dite *invariante par homéomorphismes* si tout espace topologique homéomorphe à un espace topologique ayant la propriété P admet aussi la propriété P .

Exemple 1 : Si X est un ensemble, alors $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ est une topologie sur X , appelée la *topologie grossière* de X . L'espace $(X, \mathcal{O})$ est alors dit *grossier*. L'ensemble $\mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X est une topologie sur X , appelée la *topologie discrète* de X . L'espace topologique $(X, \mathcal{P}(X))$ est alors dit *discret*. « Être grossier » et « être discret » sont des propriétés invariantes par homéomorphismes.

Exemple 2 : Si (X, d) est un espace métrique, en notant $B(x, r)$ la boule ouverte de centre $x \in X$ et de rayon $r > 0$, alors l'ensemble des parties U de X telles que

$$\forall x \in U, \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset U$$

est une topologie sur X , appelée la *topologie induite par la distance d* . Sauf mention contraire, tout espace métrique sera muni de la topologie induite par sa distance.

A.1.1 Topologie engendrée, prébase et base d'ouverts

Soit X un ensemble. Pour toute partie Σ de $\mathcal{P}(X)$, il existe une unique topologie la plus petite (pour l'inclusion) contenant Σ . C'est l'ensemble $\mathcal{O}$ des unions d'intersections finies d'éléments de Σ . C'est l'intersection de toutes les topologies contenant Σ . Nous dirons que $\mathcal{O}$ est la *topologie engendrée* par Σ , et que Σ est une *prébase* de $\mathcal{O}$.

Démonstration. Il est clair que toute topologie contenant Σ contient $\mathcal{O}$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{O}$ est une topologie. Ceci découle de la propriété de distributivité

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (A_i \cap B_j). \quad \square \quad (62)$$

Une *base d'ouverts* d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{O}$ telle que tout ouvert de X soit une union d'éléments de $\mathcal{B}$. Par exemple, l'ensemble des intersections finies d'éléments d'une prébase de $\mathcal{O}$ est une base d'ouverts de $\mathcal{O}$. Si (X, d) est un espace métrique, alors $\{B(x, \frac{1}{n+1}) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ est une base d'ouverts de la topologie de (X, d) .

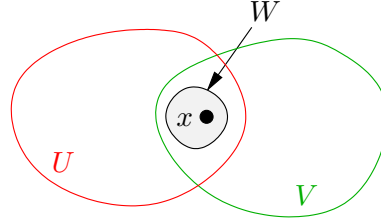
Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est à *base dénombrable* s'il admet une base d'ouverts dénombrable.

Proposition A.1. (Critère pour qu'une prébase soit une base) Soit X un ensemble. Soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$ telle que $\bigcup \mathcal{B} = X$ et

$$\forall U, V \in \mathcal{B}, \forall x \in U \cap V, \exists W \in \mathcal{B}, \quad x \in W \subset U \cap V. \quad (63)$$

Alors l'ensemble $\mathcal{O}$ des unions d'éléments de $\mathcal{B}$ est la topologie engendrée par $\mathcal{B}$. En particulier, $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de sa topologie engendrée.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathcal{O}$ est une topologie. Comme $X \in \mathcal{O}$ et par la formule de distributivité (62), il suffit de montrer que l'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ est une union d'éléments de $\mathcal{B}$. Ceci découle de la condition (63). $\square$



Si $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme, si $\mathcal{B}$ est une prébase (respectivement une base) d'ouverts dans X , alors $f(\mathcal{B})$ est une prébase (respectivement une base) d'ouverts dans Y .

Exemple. Soient $+\infty, -\infty$ deux ensembles distincts n'appartenant pas à $\mathbb{R}$. L'ensemble des parties de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ de la forme $]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$ ou $\{-\infty\} \cup]-\infty, -n[$ ou $]n, +\infty[\cup \{+\infty\}$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est une base d'ouverts pour une topologie sur $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Cet ensemble muni de cette topologie est noté $\overline{\mathbb{R}}$. L'inclusion $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est un homéomorphisme sur son image (celle-ci étant munie de la topologie induite, voir la partie A.2.3), et $\mathbb{R}$ est dense dans $\overline{\mathbb{R}}$ (voir la définition d'une partie dense dans la partie A.1.3).

A.1.2 Voisinages, systèmes fondamentaux de voisinages

Soit X un espace topologique. Un *voisinage* d'une partie A de X est une partie de X contenant un ouvert contenant A . Nous appelons *voisinage* d'un point x de X un voisinage de la partie $\{x\}$.

Une partie A de X est ouverte si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points, car elle est alors égale à la réunion des ouverts qu'elle contient.

Si $\mathcal{V}(x)$ est l'ensemble des voisinages de x , alors

- toute partie de X contenant un élément de $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$;
- toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$.

Un *système fondamental de voisinages* d'un point x d'un espace topologique X est une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{V}(x)$ (ou par extension une famille de parties de $\mathcal{V}(x)$) telle que tout voisinage de x contienne un élément de $\mathcal{P}$. Par exemple, pour toute suite de réels strictement positifs $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0, si (X, d) est un espace métrique, alors $\{B(x, r_n) : n \in \mathbb{N}\}$ est un système fondamental de voisinages de $x \in X$.

Si $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme et $x \in X$, alors $f(\mathcal{V}(x)) = \mathcal{V}(f(x))$, et l'image par f d'un système fondamental de voisinages de x est un système fondamental de voisinages de $f(x)$.

A.1.3 Intérieur, adhérence, frontière

Soient X un espace topologique et A une partie de X . L'*intérieur* de A est l'ensemble, noté $\overset{\circ}{A}$, des points de A dont A est un voisinage. L'*adhérence* de A est l'ensemble, noté $\overline{A}$, des points de X dont tout voisinage rencontre A . La *frontière* de A est l'ensemble, noté ∂A , des points de X adhérents à A et à son complémentaire. Une partie de X est *dense* dans X si son adhérence est égale à X , et *nulle part dense* si l'intérieur de son adhérence est vide.

Si A et B sont des parties de X , alors

- A est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$;
- A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$;
- $\overline{\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
- $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overline{\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}}$, $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$;
- $X \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{X \setminus A}$, $X \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{X \setminus A}$;
- l'intérieur de A est la réunion des ouverts contenus dans A , c'est le plus grand ouvert contenu dans A ;
- l'adhérence de A est l'intersection des fermés contenant A , c'est le plus petit fermé contenant A ;
- si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue et A' une partie de Y , alors

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \quad \text{et} \quad f^{-1}(\overset{\circ}{A'}) \subset \overset{\circ}{f^{-1}(A')}.$$

- si $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme, alors

$$f(\overline{A}) = \overline{f(A)}, \quad f(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{f(A)} \quad \text{et} \quad f(\partial A) = \partial(f(A)).$$

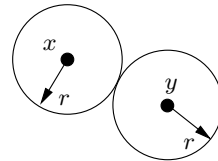
A.1.4 Séparation

Un espace topologique est *séparé* si deux points distincts de X admettent des voisinages disjoints. La propriété « être séparé » est invariante par homéomorphismes. Dans un espace séparé, les singletons sont fermés. Un espace discret est séparé. Un espace grossier est séparé si et seulement s'il ne contient qu'au plus un point.

Un espace topologique est *métrisable* si sa topologie est induite par une distance. La propriété « être métrisable » est invariante par homéomorphismes. Tout espace vectoriel réel ou complexe normé est métrisable (et en fait muni de la distance induite par sa norme).

Proposition A.2. *Tout espace topologique métrisable est séparé.*

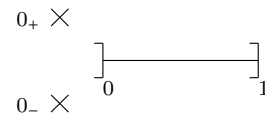
Démonstration. Soient d une distance sur un ensemble X , et x et y deux points distincts de X . Nous avons alors $r = \frac{1}{2}d(x, y) > 0$. Si par l'absurde $B(x, r) \cap B(y, r)$ est non vide, soit z un de ses points. Alors $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2r = d(x, y)$, impossible. $\square$



Exercice E.A.99. Soient 0_- et 0_+ deux ensembles distincts, qui n'appartiennent pas à l'ensemble $[0, 1]$. Notons X l'ensemble $\{0_+\} \cup \{0_-\} \cup]0, 1]$. Pour $x \in]0, 1]$, notons

$$\mathcal{B}(x) = \left\{ \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \cap]0, 1] \right] : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

$$\text{et} \quad \mathcal{B}(0_{\pm}) = \left\{ \{0_{\pm}\} \cup \left] 0, \frac{1}{n} \right[: n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$



Montrer que $\mathcal{B} = \bigcup_{u \in X} \mathcal{B}(u)$ est une base d'ouverts d'une topologie non séparée sur X .

A.1.5 Continuité

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application. Si $x_0 \in X$, nous dirons que f est *continue en x_0* si, pour tout voisinage V de $f(x_0)$ dans Y , il existe un voisinage U de x_0 dans X tel que $f(U) \subset V$.

Soient $\mathcal{U}$ un système fondamental de voisinages de x_0 , et $\mathcal{V}$ un système fondamental de voisinages de $f(x_0)$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $f(U) \subset V$.

En particulier, si la topologie de X est induite par une distance d et si celle de Y est induite par une distance d' , alors f est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, d(x, x_0) < \eta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) pour tout ouvert O de Y , la partie $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X ;
- (2) pour tout fermé F de Y , la partie $f^{-1}(F)$ est un fermé de X ;
- (3) pour tout $x \in X$, l'application f est continue en x ;
- (4) pour tout $A \subset X$, nous avons $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Nous dirons que l'application f est *continue* si elle vérifie l'une de ces conditions. Si l'espace de départ X est discret, alors f est continue. Si l'espace d'arrivée Y est grossier, alors f est continue. Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont deux applications continues, alors $g \circ f : X \rightarrow Z$ est continue. Une bijection $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme si et seulement si f et f^{-1} sont continues.

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application. Nous dirons que f est *ouverte* si l'image par f de tout ouvert de X est un ouvert de Y . Nous dirons que f est *fermée* si l'image par f de tout fermé de X est un fermé de Y .

A.1.6 Connexité

Un espace topologique X est *connexe* si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée.

- (1) Les seules parties ouvertes et fermées de X sont $\emptyset$ et X .
- (2) Il n'existe pas de partition de X en deux ouverts non vides.
- (3) Il n'existe pas de partition de X en deux fermés non vides.
- (4) Toute application continue de X à valeurs dans un espace discret est constante.
- (5) Toute application continue de X à valeurs dans l'espace discret $\{0, 1\}$ est constante.

Une partie A d'un espace topologique X est dite *connexe* si le sous-espace topologique A (voir la partie A.2.3 pour une définition) est connexe. Par exemple, les convexes de (l'espace vectoriel normé usuel) $\mathbb{R}^n$ sont connexes. Une *composante connexe* d'un espace topologique X est une partie connexe maximale (pour l'inclusion) de X . Un espace topologique X est *localement connexe* si tout point de X admet un système fondamental de voisinages connexes.

L'image d'un espace connexe par une application continue est connexe. Pour toute partie connexe C d'un espace topologique X , si $C \subset D \subset \overline{C}$, alors D est connexe.¹⁷⁶ Si

176. Ce résultat est parfois appelé le théorème de l'arbre et de l'écorce.

A est une partie connexe non vide de X , la réunion de toutes les parties connexes de X contenant A est la composante connexe de X contenant A . Une composante connexe est fermée, et deux composantes connexes sont disjointes. Dans un espace localement connexe, les composantes connexes sont ouvertes et fermées.

Un espace topologique X est *connexe par arcs* si pour tous les x et y dans X , il existe une application continue $f : [0, 1] \rightarrow X$ telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$. Une partie A d'un espace topologique X est dite *connexe par arcs* si le sous-espace topologique A (voir la partie A.2.3 pour une définition) est connexe par arcs. Par exemple, les convexes de $\mathbb{R}^n$ sont connexes par arcs. Une *composante connexe par arcs* d'un espace topologique X est une partie connexe par arcs maximale (pour l'inclusion) de X . Un espace topologique X est *localement connexe par arcs* si tout point de X admet un système fondamental de voisinages connexes par arcs.

Un espace topologique connexe par arcs est connexe. L'image d'un espace topologique connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs. Si un espace topologique X est réunion d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties connexes par arcs dont l'intersection $\bigcap_{i \in I} A_i$ est non vide, alors X est connexe par arcs. Dans un espace topologique X localement connexe par arcs, les composantes connexes par arcs C sont ouvertes.¹⁷⁷ Un espace topologique X connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.¹⁷⁸ Dans un espace topologique localement connexe par arcs, les composantes connexes et les composantes connexes par arcs coïncident.

Par exemple, l'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ du graphe de la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$, définie sur $]0, +\infty[$, est connexe, mais ni connexe par arcs, ni localement connexe (voir dessin juste avant la partie A.4).

A.2 Constructions de topologies

A.2.1 Comparaison de topologies

Soit X un ensemble. Une topologie $\mathcal{O}_1$ sur X est *moins fine* qu'une topologie $\mathcal{O}_2$ sur X si $\mathcal{O}_1$ est contenue dans $\mathcal{O}_2$, et *plus fine* si $\mathcal{O}_1$ contient $\mathcal{O}_2$. La topologie grossière est la topologie la moins fine sur X , et la topologie discrète est la topologie la plus fine sur X .

Exercice E.A.100. Soient X un ensemble, et $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ deux topologies sur X . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{T}_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_2$;
- tout fermé pour $\mathcal{T}_2$ est fermé pour $\mathcal{T}_1$;
- l'application identique $(X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ est continue ;
- pour tout x dans X , tout voisinage de x pour $\mathcal{T}_2$ est un voisinage de x pour $\mathcal{T}_1$.

A.2.2 Topologie initiale

Soient X un ensemble et $(Y_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour tout $i \in I$, soit $f_i : X \rightarrow Y_i$ une application. La *topologie initiale* sur X définie par la famille $(f_i)_{i \in I}$

^{177.} En effet, si $x \in C$ et si V est un voisinage connexe par arcs de x , alors par concaténation de chemins (voir la partie 1.2), la partie V est contenue dans C .

^{178.} En effet, si C est une composante connexe de X , alors C est ouverte comme nous venons de le voir, et son complémentaire, qui est la réunion des composantes connexes par arcs de X différentes de C est ouvert comme union d'ouverts. Donc C , étant ouverte et fermée dans X , est égal à tout X par connexité de X .

est la topologie engendrée par $\{f_i^{-1}(U_i) : i \in I, U_i \text{ ouvert de } Y_i\}$. C'est la topologie sur X la moins fine rendant continue les applications f_i pour tout $i \in I$. Si Z est un espace topologique et si $g : Z \rightarrow X$ est une application, alors g est continue si et seulement si chacune des applications $f_i \circ g$ est continue. Si $\mathcal{B}_i$ est une base d'ouverts de Y_i pour tout $i \in I$, alors l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\{f_i^{-1}(U_i) : i \in I, U_i \in \mathcal{B}_i\}$ est une base d'ouverts de X . Si $x \in X$ et $\mathcal{V}_i$ est un système fondamental de voisinages de $f_i(x)$ dans Y_i pour tout $i \in I$, alors l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\{f_i^{-1}(V_i) : i \in I, V_i \in \mathcal{V}_i\}$ est un système fondamental de voisinages de x dans X .

A.2.3 Sous-espace topologique

Soient X un espace topologique, A une partie de X et $i : A \hookrightarrow X$ l'inclusion. La topologie initiale sur A définie par (la famille réduite à un élément) i est appelée la *topologie induite* sur A . L'ensemble A muni de cette topologie est appelé un *sous-espace topologique* de X (ou sous-espace par abus). Sauf mention contraire, toute partie d'un espace topologique sera munie de la topologie induite.

Les propriétés suivantes découlent de celles des topologies initiales, ou sont laissées en exercice.

- Une partie U de A est ouverte dans A si et seulement s'il existe un ouvert U' de X tel que $U = U' \cap A$.
- Une partie F de A est fermée dans A si et seulement s'il existe un fermé F' de X tel que $F = F' \cap A$.
- L'inclusion i est continue, et la topologie induite sur A est la moins fine rendant continue i .
- Les voisinages d'un point x de A sont les traces dans A des voisinages de x dans X .
- Tout ouvert de A est un ouvert de X si et seulement si A est ouvert dans X .
- Tout fermé de A est un fermé de X si et seulement si A est fermé dans X .
- Si $A \subset B \subset X$, alors l'adhérence $\overline{A}^B$ de A dans B est la trace dans B de l'adhérence $\overline{A}^X$ de A dans X : nous avons $\overline{A}^B = B \cap \overline{A}^X$.

Tout sous-espace d'un espace topologique séparé est séparé.

Exercice E.A.101. Soient X un espace topologique et $A \subset X$. Nous dirons que $x \in A$ est un point isolé de A s'il existe un voisinage V de x dans X tel que $V \cap A = \{x\}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- le sous-espace topologique A est discret ;
- tout point de A est isolé.

Exercice E.A.102. Soient X un espace topologique et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X . Nous supposons vérifiée au moins l'une des deux conditions suivantes :

- $(\overset{\circ}{A}_i)_{i \in I}$ est un recouvrement (voir la définition dans la partie [A.4.1](#)) de X ;
- $(A_i)_{i \in I}$ est un recouvrement fermé de X localement fini (c'est-à-dire, pour tout x dans X , il existe un voisinage V de x tel que $\{i \in I : V \cap A_i \neq \emptyset\}$ soit fini).

Montrer qu'une partie B de X est fermée (resp. ouverte) si et seulement si la partie $A_i \cap B$ est fermée (resp. ouverte) dans A_i .

A.2.4 Topologie produit

Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et

$$X = \prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} \in (\bigcup_{i \in I} X_i)^I : \forall i \in I, x_i \in X_i\}$$

l'ensemble produit, muni de ses projections canoniques $\text{pr}_i : X \rightarrow X_i$ pour tout $i \in I$, définies par $\text{pr}_i(x) = x_i$ si $x = (x_i)_{i \in I}$. La topologie initiale sur X définie par la famille $(\text{pr}_i)_{i \in I}$ est appelée la *topologie produit* sur X . Sauf mention contraire, l'ensemble produit d'une famille d'espaces topologiques sera muni de la topologie produit.

Un *ouvert élémentaire* de X est une partie de X de la forme

$$V_{J, (U_j)_{j \in J}} = \{(x_i)_{i \in I} \in X : \forall j \in J, x_j \in U_j\} = \bigcap_{j \in J} \text{pr}_j^{-1}(U_j)$$

pour J une partie **finie** de I et U_j un ouvert de X_j pour tout j dans J . Par exemple, si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, alors un ouvert élémentaire de X est une partie de la forme $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ avec U_i un ouvert de X_i .

Les propriétés suivantes découlent des propriétés des topologies initiales, ou sont laissées en exercice.

- Les projections pr_i sont continues, et la topologie produit est la topologie la moins fine rendant continue les projections pr_i .
- L'ensemble des ouverts élémentaires de X est une base de la topologie produit de X .
- Si $a = (a_i)_{i \in I} \in X$, si $\mathcal{V}_i$ est un système fondamental de voisinages de a_i dans X_i pour tout i dans I , alors l'ensemble des parties de X de la forme

$$\{(x_i)_{i \in I} \in X : \forall j \in J, x_j \in V_j\} = \bigcap_{j \in J} \text{pr}_j^{-1}(V_j)$$

lorsque J est une partie finie de I et $V_j \in \mathcal{V}_j$ pour $j \in J$, est un système fondamental de voisinages de a dans X pour la topologie produit.

- Soient Y un espace topologique et $f : Y \rightarrow X$ une application. Notons $f_i = \text{pr}_i \circ f$ la i -ème composante de f , de sorte que $f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$. Alors f est continue en x si et seulement si $f_i : Y \rightarrow X_i$ est continue en x pour tout i dans I . De même, f est continue si et seulement si $f_i : Y \rightarrow X_i$ est continue pour tout i dans I .
- (Associativité de la topologie produit) Si $I = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$ est une partition de I , et si $Y_\alpha = \prod_{i \in I_\alpha} X_i$, alors l'application canonique

$$\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$$

définie par $(y_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto (x_i)_{i \in I}$ si $y_\alpha = (x_i)_{i \in I_\alpha}$, est un homéomorphisme.

- (Commutativité de la topologie produit) Si $\sigma : I \rightarrow I$ est une bijection, alors l'application $\prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_{\sigma(i)}$, définie par $(x_i)_{i \in I} \mapsto (x_{\sigma(i)})_{i \in I}$, est un homéomorphisme.
- Si A_i est une partie de X_i , alors

$$\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}.$$

- Si A_i est une partie de X_i pour tout i dans I , alors la partie produit $\prod_{i \in I} A_i$ est fermée dans X si et seulement si la partie A_i est fermée dans X_i pour tout i dans I .

Remarque. En particulier, si X , Y et Z sont des espaces topologiques, alors les applications $(X \times Y) \times Z \rightarrow X \times (Y \times Z)$ définie par $((x, y), z) \mapsto (x, (y, z))$, et $X \times Y \rightarrow Y \times X$ définie par $(x, y) \mapsto (y, x)$, sont des homéomorphismes. Attention il existe des ouverts dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui ne sont pas des ouverts élémentaires (c'est-à-dire pas produits de deux ouverts). La dernière propriété de la liste ci-dessus est fausse pour les ouverts : $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ n'est pas ouvert dans $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Proposition A.3. *Un produit d'espaces topologiques séparés est séparé. Si un produit d'espaces topologiques non vides est séparé, alors chacun des facteurs est séparé.*

Démonstration. Soit $X = \prod_{i \in I} X_i$ un espace topologique produit. Si $x = (x_i)_{i \in I}$ est différent de $y = (y_i)_{i \in I}$, alors il existe au moins un j dans I tel que $x_j \neq y_j$. Si les X_i sont séparés, il existe deux ouverts disjoints U et V dans X_j tels que $x_j \in U$ et $y_j \in V$. Alors $\text{pr}_j^{-1}(U)$ et $\text{pr}_j^{-1}(V)$ sont deux ouverts (élémentaires) de X , disjoints, et contenant respectivement x et y . Donc X est séparé.

Réciproquement, si X est séparé et si les X_i sont non vides, choisissons a_i dans X_i pour tout i dans I . Soit j dans I . L'application $\phi : X_j \rightarrow X$ définie par $x \mapsto (x_i)_{i \in I}$, où $x_j = x$ et $x_i = a_i$ pour tout $i \neq j$, est un homéomorphisme sur son image. En effet, elle est injective, et continue car $\text{pr}_i \circ \phi$ est continue pour tout i . Sa réciproque est la restriction à l'image de ϕ de la j -ème projection, donc est continue. Le résultat découle alors du fait que tout sous-espace d'un espace topologique séparé est séparé. $\square$

Exercice E.A.103. Définissons par récurrence une suite de fermés C_n de $[0, 1]$, en posant $C_0 = [0, 1]$, en supposant que C_n soit la réunion disjointe de 2^n intervalles de longueur $\frac{1}{3^n}$, et en construisant C_{n+1} en divisant chaque composante connexe de C_n en trois intervalles de longueurs égales, et en enlevant l'intérieur de celui du milieu. L'ensemble triadique de Cantor C est défini par $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Munissons l'ensemble $\{0, 1\}$ de la topologie discrète et $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} &\rightarrow C \\ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} &\mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2x_i}{3^{i+1}} \end{aligned}$$

est un homéomorphisme. Montrer que $C^{\mathbb{N}}$ et C sont homéomorphes.

Exercice E.A.104. Montrer que le produit d'une famille d'espaces topologiques connexes (resp. connexes et localement connexes, connexes par arcs, connexes et localement connexes par arcs) est connexe (resp. localement connexe, connexe par arcs, localement connexe par arcs). Montrer que le produit d'une famille finie d'espaces topologiques localement connexes (resp. localement connexes par arcs) est localement connexe (resp. localement connexe par arcs).

A.2.5 Topologie finale

Soient X un ensemble et $(Y_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour tout $i \in I$, soit $f_i : Y_i \rightarrow X$ une application. La *topologie finale* sur X définie par la famille $(f_i)_{i \in I}$ est la topologie dont les ouverts sont les parties O de X telles que pour tout i dans I , le

sous-ensemble $f_i^{-1}(O)$ soit un ouvert de Y_i . C'est la topologie sur X la plus fine rendant continue toutes les applications f_i . Les fermés de cette topologie sont les parties F de X telles que pour tout i dans I , le sous-ensemble $f_i^{-1}(F)$ soit un fermé de Y_i . Si Z est un espace topologique et si $g : X \rightarrow Z$ est une application, alors g est continue si et seulement si chacune des applications $g \circ f_i$ est continue.

Exemple 1 : Topologie somme disjointe. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Rappelons qu'un ensemble X muni d'applications $f_i : X_i \rightarrow X$ est une *somme disjointe* des X_i si pour tout ensemble Y muni d'applications $g_i : X_i \rightarrow Y$, il existe une unique application $\phi : X \rightarrow Y$ telle que le diagramme suivant commute pour tout i :

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f_i} & X \\ & g_i \searrow & \downarrow \phi \\ & & Y. \end{array}$$

L'ensemble $\{(x, i) \in (\bigcup_{i \in I} X_i) \times I : x \in X_i\}$, muni des applications $f_i : X_i \rightarrow X$ définies par $f_i(x) = (x, i)$, convient. Il est unique modulo bijection faisant commuter les diagrammes ci-dessus. Nous identifions $x \in X_i$ avec son image par f_i et nous notons $X = \coprod_{i \in I} X_i$, muni des inclusions $X_i \hookrightarrow X$, la somme disjointe des X_i pour $i \in I$.

La topologie finale sur X définie par la famille $(f_i)_{i \in I}$ est appelée la *topologie somme disjointe*. Sauf mention contraire, un ensemble somme disjointe sera muni de la topologie somme disjointe.

Exemple 2 : Topologie faible. Soient X un ensemble et $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X . Supposons chaque X_i munie d'une topologie, et notons $f_i : X_i \rightarrow X$ l'inclusion. La topologie finale sur X définie par $(f_i)_{i \in I}$ est appelée la *topologie faible* définie par $(X_i)_{i \in I}$. Les propriétés suivantes découlent de celles des topologies finales :

- une partie F de X est fermée si et seulement si $F \cap X_i$ est fermée dans X_i pour tout i dans I ;
- une partie O de X est ouverte si et seulement si $O \cap X_i$ est ouverte dans X_i pour tout i dans I ;
- pour tout espace topologique Y , une application $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si sa restriction $f|_{X_i} : X_i \rightarrow Y$ à X_i est continue pour tout i dans I .

Par exemple, si $X = \mathbb{R}^2$, et si $(X_i)_{i \in I}$ est la famille des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, munies de leur topologie usuelle, alors la topologie faible définie par $(X_i)_{i \in I}$ est strictement plus fine que la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice E.A.105. Soit X un espace topologique. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- X est discret ;
- la topologie de X est la topologie faible définie par la famille des singletons (un singleton possède une et une seule topologie) ;
- la bijection canonique $\coprod_{x \in X} \{x\} \rightarrow X$ est un homéomorphisme.

Exercice E.A.106. Soit X un ensemble, muni de la topologie faible définie par une famille $(X_i)_{i \in I}$ de parties de X munies chacune d'une topologie. Montrer que si, pour tous les i, j dans I , les topologies induites sur $X_i \cap X_j$ par celles de X_i et de X_j coïncident, et si la partie $X_i \cap X_j$ est fermée dans X_i et dans X_j , alors

- la topologie de X_i coïncide avec la topologie induite sur X_i par la topologie de X ;
- X_i est fermé dans X .

A.2.6 Topologie quotient

Soient X un ensemble et $\mathcal{R} \subset X \times X$ une relation d'équivalence sur X . Notons $Y = X/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{R}$ et

$$\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R} = Y$$

la projection canonique, qui à $x \in X$ associe sa classe d'équivalence $\mathcal{R}(x)$, que nous noterons souvent $[x]$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Rappelons la propriété universelle des quotients : pour tout ensemble Z et pour toute application $f : X \rightarrow Z$ constante sur chaque classe d'équivalence de $\mathcal{R}$, il existe une et une seule application $f' : X/\mathcal{R} \rightarrow Z$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ \pi \downarrow & & \nearrow f' \\ X/\mathcal{R} & & \end{array}$$

commute.

Si X est un espace topologique, la topologie finale sur $Y = X/\mathcal{R}$ définie par (la famille réduite à un élément) π est appelée la *topologie quotient*. Sauf mention contraire, tout ensemble quotient sera muni de la topologie quotient.

Les propriétés suivantes découlent de celles des topologies finales :

- une partie U de Y est ouverte si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans X ;
- une partie F de Y est fermée si et seulement si $\pi^{-1}(F)$ est fermé dans X ;
- la projection canonique π est continue, et la topologie quotient est la topologie la plus fine sur Y rendant continue π ;
- pour tout espace topologique Z , une application $f : Y \rightarrow Z$ est continue si et seulement si $f \circ \pi : X \rightarrow Z$ est continue.

Si A est une partie de X , le *saturé* de A par $\mathcal{R}$ est $\mathcal{R}A = \bigcup_{a \in A} \mathcal{R}(a) = \pi^{-1}(\pi(A))$; la partie A est *saturée* si $A = \mathcal{R}A$.

Remarque. (1) Si A est ouvert (resp. fermé) et saturé dans X , alors $\pi(A)$ est ouvert (resp. fermé) dans Y . En général, l'hypothèse « saturé » ne peut être omise.

(2) L'image réciproque par la projection canonique est une bijection entre les parties de $X/\mathcal{R}$ et les parties saturées de X , qui préserve les opérations booléennes usuelles.

Proposition A.4. *L'espace topologique quotient Y est séparé si et seulement si pour tous les x et y dans X n'appartenant pas à la même classe d'équivalence, il existe deux ouverts U et V saturés disjoints contenant x et y respectivement.*

Démonstration. Supposons la condition vérifiée. Soient x' et y' dans Y tels que $x' \neq y'$. Soient x et y dans X tels que $\pi(x) = x'$ et $\pi(y) = y'$. Soient U et V comme ci-dessus. Alors $\pi(U)$ et $\pi(V)$ sont des ouverts (car leurs préimages par π sont U et V , qui sont ouverts), disjoints, et contenant x' et y' respectivement. Donc Y est séparé.

Réciproquement, si Y est séparé, si les points x et y dans X ne sont pas équivalents, alors $x' = \pi(x) \neq \pi(y) = y'$. Soient U' et V' deux ouverts disjoints de Y contenant x' et y' respectivement. Alors $U = \pi^{-1}(U')$ et $V = \pi^{-1}(V')$ conviennent. $\square$

Un espace topologique quotient d'un espace topologique séparé n'est pas toujours séparé. Regarder si un quotient est séparé ou non doit devenir un **réflexe**.

Exemple. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$x \mathcal{R} y \iff x - y \in \mathbb{Z}^n.$$

Notons $\mathbb{T}^n$ ou $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ l'espace topologique quotient $\mathbb{R}^n/\mathcal{R}$, que nous appelons le *tore de dimension n* . Soit $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ la projection canonique. Identifions de manière usuelle $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$ par l'application $(x, y) \mapsto x + iy$. L'application

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow (\mathbb{S}_1)^n \\ (t_1, \dots, t_n) &\mapsto (e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n}) \end{aligned}$$

est continue, surjective, et induit par passage au quotient une bijection

$$\begin{aligned} \bar{\phi} : \quad \mathbb{T}^n &\longrightarrow (\mathbb{S}_1)^n \\ [(t_1, \dots, t_n)] &\mapsto (e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n}). \end{aligned}$$

Cette bijection est continue, car $\bar{\phi} \circ \pi = \phi$ l'est. L'espace quotient $\mathbb{T}^n$ est séparé par l'exercice **E.A.107** (2). Il découle de la remarque suivant la démonstration du théorème **A.23** que $\bar{\phi}$ est un homéomorphisme.

Exercice E.A.107. Soient X un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X .

- (1) Montrer que si $X/\mathcal{R}$ est séparé, alors $\mathcal{R} \subset X \times X$ est fermé.
- (2) Montrer que si X' est un espace topologique séparé, si $f : X \rightarrow X'$ est une application continue et si $x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$, alors $X/\mathcal{R}$ est séparé.

Exercice E.A.108. Soient X un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X . Montrer que si l'une des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ est dense, et si $\text{Card}(X/\mathcal{R}) \geq 2$, alors la topologie quotient sur $X/\mathcal{R}$ n'est pas séparée. Montrer que si toutes les classes d'équivalence sont denses, alors la topologie quotient sur $X/\mathcal{R}$ est la topologie grossière.

Exercice E.A.109. Soient X un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X . Notons $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ la projection canonique. Soient A une partie de X et notons $\mathcal{R}_A = \mathcal{R} \cap (A \times A)$ la relation d'équivalence induite sur A . Nous avons une inclusion continue évidente $A/\mathcal{R}_A \hookrightarrow X/\mathcal{R}$. Montrer que sous l'une des conditions suivantes, la topologie quotient de $A/\mathcal{R}_A$ coïncide avec la topologie induite par la topologie quotient de $X/\mathcal{R}$:

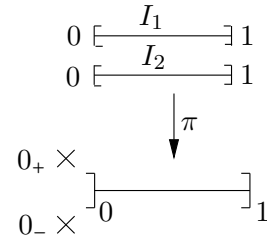
- (1) tout ouvert saturé de A est la trace sur A d'un ouvert saturé de X ;
- (2) A est ouvert et π est ouverte ;
- (3) A est fermé et π est fermée ;
- (4) $\pi|_A : A \rightarrow X/\mathcal{R}$ est fermée.

Que se passe-t-il si $X = \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} y \iff x - y \in \mathbb{Z}$, et $A = [0, 1[$ ou $[0, 1]$?

Soient X un ensemble, et $\sim \subset X \times X$ une relation sur X (nous notons souvent $x \sim y$ au lieu de $(x, y) \in \sim$). Nous appelons *relation d'équivalence engendrée par $\sim$* l'intersection de toutes les relations d'équivalence contenant $\sim$. C'est la plus petite (pour l'inclusion) relation d'équivalence contenant $\sim$. Nous pouvons montrer facilement que c'est la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par $x \mathcal{R} y$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, x_1, \dots, x_n$ dans X tels que $x_0 = x, x_n = y$ et, pour tout $i = 1, \dots, n$,

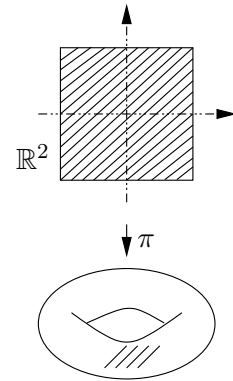
$$x_{i-1} \sim x_i \quad \text{ou} \quad x_i \sim x_{i-1} \quad \text{ou} \quad x_i = x_{i-1}.$$

Exemple. Soient I_1 et I_2 deux copies de l'intervalle $[0, 1]$. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur la somme disjointe $I_1 \sqcup I_2$ engendrée par la relation $t \in I_1 \sim t \in I_2$ pour $t > 0$. Alors l'espace topologique $(I_1 \sqcup I_2)/\mathcal{R}$ (pour la topologie quotient de la topologie somme disjointe) n'est pas séparé (et est homéomorphe à l'espace de l'exercice E.A.99).



Exercice E.A.110. Soient $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ la projection canonique, et $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

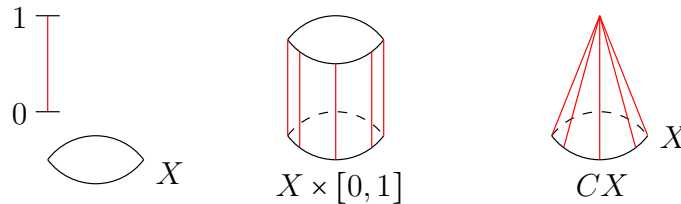
- (1) Soit D une droite affine de pente α dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, alors $\pi(D)$ est homéomorphe à un cercle. Montrer que si $\alpha \notin \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, alors $\pi(D)$ est dense dans $\mathbb{T}^2$ et $\pi|_D : D \rightarrow \pi(D)$ est une bijection continue. Est-ce que $\pi|_D$ est un homéomorphisme sur son image ?
- (2) Soit $\sim$ la relation sur $\mathbb{T}^2$ définie par $x' \sim y'$ si et seulement s'il existe une droite affine D de pente α dans $\mathbb{R}^2$ et x et y dans D tels que $\pi(x) = x'$ et $\pi(y) = y'$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence, et que l'espace topologique quotient $\mathbb{T}^2/\sim$ est séparé si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, montrer que l'espace topologique quotient $\mathbb{T}^2/\sim$ est homéomorphe à un cercle. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, montrer que la topologie quotient de $\mathbb{T}^2/\sim$ est la topologie grossière.



Exemple (1). Soit X un espace topologique. Le *cône sur X* est l'espace topologique quotient

$$CX = (X \times [0, 1])/\mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x, 1) \sim (x', 1)$ pour tous les x et x' dans X .



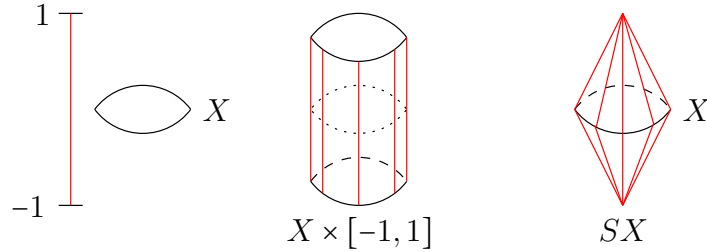
Nous pouvons vérifier que l'application $x \mapsto [(x, 0)]$ de X dans CX est un homéomorphisme sur son image, permettant d'identifier X avec une partie de CX , et que si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, alors l'application $Cf : CX \rightarrow CY$ définie par $[(x, t)] \mapsto [(f(x), t)]$

est continue. L'image de $X \times \{1\}$ dans CX est réduite à un point, appelé le *sommet* du cône CX . Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont des applications continues, alors $C(g \circ f) = (Cg) \circ (Cf)$ et $C(\text{id}_X) = \text{id}_{CX}$.

Exemple (2). Soit X un espace topologique. La *suspension* de X est l'espace topologique quotient

$$SX = (X \times [-1, 1]) / \mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x, 1) \sim (x', 1)$ et $(x, -1) \sim (x', -1)$ pour tous les x et x' dans X .



Les images de $X \times \{+1\}$ et $X \times \{-1\}$ dans SX sont réduites à un point, appelés les *pôles nord et sud* de la suspension SX . Nous pouvons vérifier que l'application $x \mapsto [(x, 0)]$ de X dans SX est un homéomorphisme sur son image, permettant d'identifier X avec une partie de SX , et que si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, alors l'application $Sf : SX \rightarrow SY$ définie par $[(x, t)] \mapsto [(f(x), t)]$ est continue. Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont des applications continues, alors $S(g \circ f) = (Sg) \circ (Sf)$ et $S(\text{id}_X) = \text{id}_{SX}$.

Exemple (3). Soient X un espace topologique et A une partie de X . L'*écrasement* de A dans X , noté $X/\langle A \rangle$, est l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $x \sim x'$ pour tous les x et x' dans A .



Nous pouvons vérifier que si A est ouvert ou fermé, alors la restriction à $X \setminus A$ de la projection canonique $\pi : X \rightarrow X/\langle A \rangle$ est un homéomorphisme sur son image. Par exemple, $CX/\langle X \rangle$ et SX sont homéomorphes.

Exemple (4). Si $(X_i, x_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces topologiques pointés, la *somme pointée* de cette famille est l'espace topologique quotient

$$\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) = \left(\coprod_{i \in I} X_i \right) / \mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $x_i \sim x_j$ pour tous les i et j dans I , muni du point base égal à la classe d'équivalence commune des x_i pour $i \in I$.

Lemme A.5. L'inclusion $X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$ induit un homéomorphisme sur son image, de X_i dans $\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$.

Pour tout $i \in I$, nous identifions à partir de dorénavant X_i avec son image dans $\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$ par cet homéomorphisme.

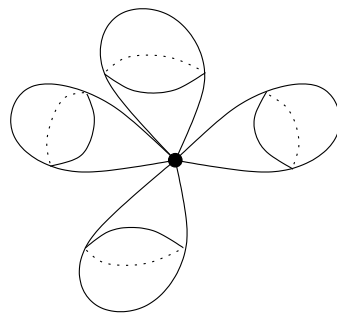
Démonstration. Soit $i \in I$. Notons $\pi : \coprod_{j \in I} X_j \rightarrow \bigvee_{j \in I} (X_j, x_j)$ la projection canonique. L'application $f = \pi|_{X_i} : X_i \rightarrow \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$ est continue comme restriction d'une application continue (et puisque la restriction à X_i de la topologie somme disjointe de $\coprod_{j \in I} X_j$ est la topologie originelle de X_i). Elle est clairement injective, car deux points distincts de X_i ne sont pas équivalents par $\mathcal{R}$, et d'image $\pi(X_i)$. Montrons que l'inverse $g = f^{-1} : \pi(X_i) \rightarrow X_i$ est continue. Soit F un fermé de X_i .

Si $x_i \notin F$, alors F est un fermé de $\coprod_{j \in I} X_j$ par la définition de la topologie somme disjointe, qui est saturé par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Donc par la définition de la topologie quotient, $g^{-1}(F) = \pi(F)$ est un fermé de $\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$, contenu dans $\pi(X_i)$, donc un fermé de $\pi(X_i)$.

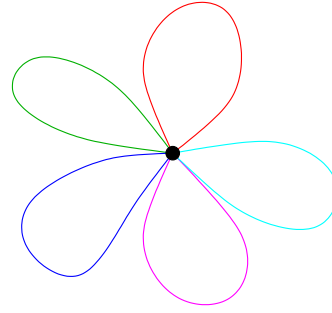
Supposons maintenant que $x_i \in F$, alors par la définition de la topologie somme disjointe, la partie $F' = F \sqcup \coprod_{j \in I \setminus \{i\}} X_j$ est un fermé de $\coprod_{j \in I} X_j$ saturé par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Donc $\pi(F')$ est un fermé de $\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$ par la définition de la topologie quotient. Par conséquent, $g^{-1}(F) = \pi(F) = \pi(F') \cap \pi(X_i)$ est un fermé de $\pi(F')$ par la définition de la topologie induite sur une partie. $\square$

Nous appelons *bouquet de sphères* de dimension n (ou *bouquet de cercles* si $n = 1$) une somme pointée de copies de la sphère de dimension n (pointée en $(1, 0, \dots, 0)$).

Exercice E.A.111. Montrer que deux bouquets de sphères sont homéomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension et si leurs ensembles de sphères ont le même cardinal.



bouquet de 4 sphères

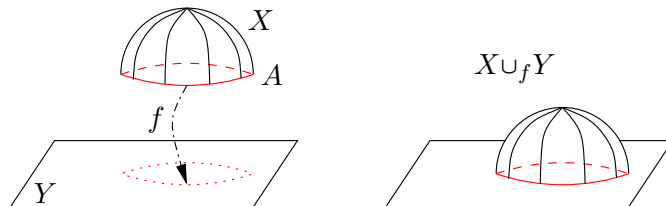


bouquet de 5 cercles

Exemple (5). Soient X et Y deux espaces topologiques, A une partie de X et $f : A \rightarrow Y$ une application continue. Le *recollement de X sur Y par f* est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y = (X \coprod Y) / \mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $x \sim f(x)$ pour tout x dans A .



Nous pouvons vérifier que si A est un fermé (resp. ouvert) dans X , et si nous notons $\pi : (X \amalg Y) \rightarrow X \cup_f Y$ la projection canonique, alors l'application $\pi|_Y : Y \rightarrow X \cup_f Y$ est un homéomorphisme sur son image, qui est fermée (resp. ouverte). De même, si A est un fermé dans X , l'application $\pi|_{X \setminus A} : X \setminus A \rightarrow X \cup_f Y$ est un homéomorphisme sur son image, qui est ouverte dans $X \cup_f Y$. Nous pouvons vérifier que si A est non vide, et si X et Y sont connexes (resp. connexes par arcs), alors $X \cup_f Y$ l'est aussi. Si $u : X \rightarrow Z$ et $v : Y \rightarrow Z$ sont deux applications continues, telles que $u(x) = v(f(x))$ pour tout x dans A , il existe une unique application continue $\bar{w} : X \cup_f Y \rightarrow Z$ telle que $w \circ \pi|_X = u$ et $\bar{w} \circ \pi|_Y = v$. Si A est non vide et si Y est réduit à un point $*$, alors l'inclusion de X dans $X \amalg \{*\}$ induit un homéomorphisme

$$X/\langle A \rangle \simeq X \cup_f \{*\}.$$

Exercice E.A.112. Vérifier les affirmations des cinq exemples ci-dessus.

Exercice E.A.113. Pour tout $i \in \mathbb{S}_1$, soit R_i une copie de $[0, +\infty[$. Sur la somme disjointe $X = \coprod_{i \in \mathbb{S}_1} R_i$, nous notons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence engendrée par $0 \in R_i \sim 0 \in R_j$ pour tous les i et j dans $\mathbb{S}_1$. Montrer que l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est homéomorphe à l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie faible définie par la famille des rayons vectoriels fermés de $\mathbb{R}^2$.

A.2.7 Topologie de l'ordre

Soit E un ensemble. Rappelons qu'un *ordre* sur E est une relation $\leq$ qui est réflexive ($\forall x \in E, x \leq x$), antisymétrique ($\forall x, y \in E$, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$) et transitive ($\forall x, y, z \in E$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$). Nous noterons $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$. Un ensemble muni d'un ordre est un *ensemble ordonné*. Un *ordre total* sur E est un ordre $\leq$ tel que pour tous les x et y dans E , nous ayons $x \leq y$ ou $y \leq x$. Un ensemble muni d'un ordre total est un *ensemble totalement ordonné*. Un ordre total sur E est un *bon ordre* si toute partie non vide de E admet un plus petit élément (c'est-à-dire si

$$\forall A \subset E, (A \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists x \in A, \forall y \in A, x \leq y).$$

Un ensemble muni d'un bon ordre est un *ensemble bien ordonné* (par définition, ceci implique qu'il est totalement ordonné).

Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}$ muni de son ordre usuel est bien ordonné. Par exemple, si E et F sont deux ensembles totalement ordonnés (resp. bien ordonnés), alors l'ensemble produit $E \times F$ muni de l'*ordre lexicographique*

$$(x, y) \leq (x', y') \text{ si et seulement si } (x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y'))$$

est totalement ordonné (resp. bien ordonné).

Une application $f : E \rightarrow F$ entre deux ensembles ordonnés E et F *préserve l'ordre* si pour tous les x et y dans E , si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$. Deux ensembles ordonnés sont dit *isomorphes* s'il existe une bijection de l'un dans l'autre préservant l'ordre, ainsi que son inverse. Un *ordinal* est une classe d'isomorphisme d'ensembles bien ordonnés. Comme un *cardinal* est une classe d'équivalence d'ensembles pour la relation « être en bijection », le cardinal d'un ordinal est bien défini. Un ordinal est dit *dénombrable* si son cardinal l'est (c'est-à-dire si son cardinal est le cardinal d'une partie de $\mathbb{N}$). Par un théorème de Zermelo (voir [Kri]), tout ensemble admet un bon ordre, et donc il existe un ordinal non dénombrable (voir ci-dessous pour un exemple ne dépendant pas de l'axiome du choix).

Soit E un ensemble bien ordonné. Un *segment initial* de E est une partie de la forme $\{y \in E : y < x\}$ pour un x dans E . Muni de l'ordre induit de celui de E , un segment initial de E est bien ordonné. Soient α et β deux ordinaux, nous dirons que $\alpha < \beta$ si α est isomorphe à un segment initial de β (ce qui ne dépend pas des choix des représentants). Nous noterons $\alpha \leq \beta$ si $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$. Il est possible de montrer que tout ensemble d'ordinaux, muni de cet ordre $\leq$, est bien ordonné. En particulier, la classe d'isomorphisme de l'ensemble (qui en est bien un) bien ordonné des ordinaux dénombrables est un ordinal non dénombrable, qui est le plus petit ordinal non dénombrable.

Soit E un ensemble totalement ordonné. La *topologie de l'ordre* sur E est la topologie dont une base d'ouverts est l'ensemble des

$$]x, y[= \{z \in E : x < z < y\}$$

pour les x et y dans E (l'ensemble de ces parties vérifie le critère pratique (63)). Cette topologie est séparée.

Exercice E.A.114. Montrer que l'ensemble ordonné des ordinaux inférieurs ou égaux à un ordinal donné, muni de la topologie de l'ordre, est compact.

A.3 Limites et valeurs d'adhérence

Soient X et Y deux espaces topologiques, A une partie de X , $a \in \overline{A}$ et $f : B \rightarrow Y$ une application avec $A \subset B \subset X$.

A.3.1 Limites

Nous dirons que $f(x)$ admet une limite quand x tend vers a dans A s'il existe $\ell \in Y$ tel que pour tout voisinage V de ℓ , il existe un voisinage U de a tel que

$$f(U \cap A) \subset V.$$

Notons alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = \ell$. Lorsque A est sous-entendu, par exemple quand A vaut X ou le domaine de définition de f , nous dirons aussi que f admet pour limite ℓ en a , et nous notons $\lim_a f = \ell$.

Exemple 1. Si $X = \mathbb{R}$ et $A = \begin{cases} [x_0, x_0 + \alpha[\\]x_0, x_0 + \alpha[\\ [x_0 - \alpha, x_0[\\]x_0 - \alpha, x_0[\end{cases}$, nous notons alors $\ell = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0, x \geq x_0} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0, x \leq x_0} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \end{cases}$ et

nous appelons respectivement *limite à droite* et *limite à gauche* les deuxième et quatrième cas.

Exemple 2. Si $X = \overline{\mathbb{R}}$, si A est une partie non majorée de $\mathbb{R}$ et si $a = +\infty$, nous notons (si elle existe) $\lim_{x \rightarrow +\infty, x \in A} f(x)$ (ou $\lim_{+\infty} f$ lorsque A est sous-entendu) la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ dans A . De même pour $-\infty$. Bien sûr,

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty, x \in A} f(x) \iff \forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists R \in \mathbb{R}, \forall x > R \quad (x \in A \Rightarrow f(x) \in V).$$

Si $X = \overline{\mathbb{R}}$, si $A = \mathbb{N}$ et si $a = +\infty$, une application $f : A \rightarrow Y$ est une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans Y , et nous notons $\ell = \lim_{+\infty} x_n$ ou $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ si f admet ℓ pour limite en $+\infty$. Bien sûr,

$$\ell = \lim_{+\infty} x_n \iff \forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \in V.$$

La proposition suivante dit que l'on ne change pas la définition d'une limite en demandant aux voisinages U et V de la définition de rester dans des systèmes fondamentaux de voisinages prescrits de a et ℓ .

Proposition A.6. *Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$ deux systèmes fondamentaux de voisinages de a et ℓ dans X et Y respectivement. Alors*

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} \ell \iff \forall V' \in \mathcal{W}, \exists U' \in \mathcal{U} \quad f(U' \cap A) \subset V'.$$

Démonstration. Si l'assertion de gauche est vérifiée, pour tout V' dans $\mathcal{W}$, il existe U dans $\mathcal{V}(a)$ tel que $f(U \cap A) \subset V'$. Soit U' dans $\mathcal{U}$ tel que $U' \subset U$. Alors $f(U' \cap A) \subset V'$, ce qui montre l'assertion de droite.

Réciproquement, si l'assertion de droite est vérifiée, pour tout V dans $\mathcal{V}(\ell)$, soit V' dans $\mathcal{W}$ tel que $V' \subset V$, et soit U' dans $\mathcal{U}$ tel que $f(U' \cap A) \subset V'$. Alors $U' \in \mathcal{V}(a)$ et $f(U' \cap A) \subset V$, ce qui montre l'assertion de gauche. $\square$

Exemple. Si X et Y sont des espaces métriques, de distances respectivement d_X et d_Y , alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} \ell \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \quad d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), \ell) < \epsilon.$$

Nous pouvons caractériser la continuité par les limites. Soient X et Y deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ une application et $x_0 \in X$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x_0} f$ existe et vaut $f(x_0)$.

A.3.2 Propriétés des limites

Une limite n'est pas toujours unique. Si Y est l'espace topologique construit dans l'exercice E.A.99, alors la suite $(x_n = \frac{1}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge à la fois vers 0_+ et 0_- . Pour les espaces topologiques séparés (par exemple métrisables), ce problème n'arrive pas, comme le montre le résultat suivant.

Proposition A.7. *Si Y est séparé, si $f(x)$ admet une limite quand x tend vers a dans A , alors cette limite est unique.*

Démonstration. Si ℓ et ℓ' sont deux limites distinctes, alors soient V et V' deux voisinages disjoints de ℓ et ℓ' respectivement. Par définition d'une limite, il existe deux voisinages U et U' de a tels que $f(U \cap A) \subset V$ et $f(U' \cap A) \subset V'$. Comme $U \cap U'$ est un voisinage de a et puisque a est adhérent à A , l'ensemble $U \cap U' \cap A$ est non vide. Donc $f(U \cap U' \cap A)$ est non vide. Comme $f(U \cap U' \cap A) \subset V \cap V'$, l'ensemble $V \cap V'$ est non vide, contradiction. $\square$

Proposition A.8. *Si $f(x)$ admet pour limite ℓ quand x tend vers a dans A , alors $\ell \in \overline{f(A)}$.*

Démonstration. Pour tout voisinage V de ℓ , soit U un voisinage de a tel que $f(U \cap A) \subset V$. Comme $a \in \overline{A}$, l'ensemble $U \cap A$ est non vide, donc $f(A) \cap V$, qui contient $f(U \cap A)$, est aussi non vide. $\square$

Proposition A.9. (Composition des limites) Soient X, Y, Z trois espaces topologiques, A une partie de X , B une partie de Y , $f : A \rightarrow Y$ et $g : B \rightarrow Z$ deux applications telles que $f(A) \subset B$, et $a \in \overline{A}$. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} b$ et si $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b, y \in B} \ell$, alors $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} \ell$.

Démonstration. Remarquons d'abord que, par la proposition précédente, $b \in \overline{f(A)} \subset \overline{B}$. Soit W un voisinage de ℓ . Il existe un voisinage V de b tel que $g(V \cap B) \subset W$. Il existe un voisinage U de a tel que $f(U \cap A) \subset V$. Donc

$$g \circ f(U \cap A) \subset g(V \cap f(A)) \subset g(V \cap B) \subset W. \quad \square$$

Corollaire A.10. Soient X, Y, Z trois espaces topologiques, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux applications. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y_0$ et si g est continue en y_0 , alors nous avons

$$g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g(y_0). \quad \square$$

Exercice E.A.115. Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques, Y un espace topologique, A une partie de Y et $a \in \overline{A}$.

- (1) Soit X un ensemble muni de la topologie initiale définie par une famille d'applications $(f_i : X \rightarrow X_i)_{i \in I}$. Soit $f : B \rightarrow X$ une application avec $A \subset B \subset Y$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} \ell$ si et seulement si $f_i \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} f_i(\ell)$ pour tout i dans I .
- (2) Soient $X = \prod_{i \in I} X_i$, muni de ses projections canoniques $\text{pr}_i : (x_i)_{i \in I} \mapsto x_i$, et $f : Y \rightarrow X$ une application, de i -ème composante f_i . En déduire que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} (\ell_i)_{i \in I}$ si et seulement si $f_i(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} \ell_i$ pour tout i dans I .

A.3.3 Valeurs d'adhérence

Nous dirons que $\ell \in Y$ est une *valeur d'adhérence* de $f(x)$ quand x tend vers a dans A (ou de f en a si A est sous-entendu) si pour tout voisinage V de ℓ , pour tout voisinage U de a , l'ensemble $f(U \cap A) \cap V$ est non vide.

Remarque. Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux systèmes fondamentaux de voisinages de a et ℓ dans X et Y respectivement, alors il est immédiat que $\ell \in Y$ est valeur d'adhérence de f en a si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}$, pour tout $U \in \mathcal{U}$, l'ensemble $f(U \cap A) \cap V$ est non vide.

Exemple 1. Si X et Y sont deux espaces métriques, alors $\ell \in Y$ est valeur d'adhérence de f en a si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in A \quad d_X(a, x) < \delta \text{ et } d_Y(f(x), \ell) < \epsilon.$$

Exemple 2. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans X , si $x \in X$, alors x est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \quad x_n \in V.$$

En particulier, toute limite d'une sous-suite est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si X est un espace métrique (il suffit que tout point de X admette un système fondamental dénombrable de voisinages), alors x est valeur d'adhérence de la suite si et seulement si x est limite d'une sous-suite.

Proposition A.11.

- (1) Pour tout système fondamental $\mathcal{U}$ de voisinages de a (par exemple $\mathcal{U} = \mathcal{V}(a)$), l'ensemble des valeurs d'adhérence de f en a dans A est égal à

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{f(U \cap A)}.$$

- (2) Si f admet pour limite ℓ en a dans A , alors ℓ est une valeur d'adhérence de f en a dans A . Si de plus Y est séparé, cette valeur d'adhérence est unique.

Démonstration. (1) Soit $\ell \in Y$. Alors

$$\ell \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{f(U \cap A)} \iff \forall U \in \mathcal{U}, \ell \in \overline{f(U \cap A)} \iff$$

$$\forall U \in \mathcal{U}, \forall V \in \mathcal{V}(\ell) \quad f(U \cap A) \cap V \neq \emptyset \iff \ell \text{ est valeur d'adhérence de } f \text{ en } a.$$

(2) Supposons que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} \ell$. Soient V un voisinage de ℓ dans Y et U un voisinage de a dans X . Alors il existe un voisinage U' de a dans X tel que $f(U' \cap A) \subset V$. Comme $U \cap U'$ est un voisinage de $a \in \overline{A}$, l'ensemble $U \cap U' \cap A$ est non vide. Donc

$$f(U \cap A) \cap V \supset f(U \cap U' \cap A) \cap V = f(U \cap U' \cap A) \neq \emptyset.$$

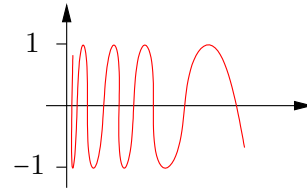
Supposons que Y soit séparé. Si ℓ' est une valeur d'adhérence de f en a dans A , distincte de ℓ , soient V et V' deux voisinages disjoints de ℓ et ℓ' respectivement. Soit U un voisinage de a tel que $f(U \cap A) \subset V$. Alors $f(U \cap A) \cap V'$ est vide, ce qui contredit le fait que ℓ' est une valeur d'adhérence de f en a dans A . $\square$

Exemple. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans X , alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

$$\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n : n \geq N\}}.$$

Si X est séparé et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$, alors x est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple. Si $X = \mathbb{R}$, $A =]0, +\infty[$, $a = 0 \in \overline{A}$ et si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est l'application $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$, alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de f en 0 est $[-1, 1]$.



A.4 Compacité

A.4.1 Espace compact

Si X est un ensemble, une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de X est un *recouvrement* de X (ou *recouvre* X) si $\bigcup_{i \in I} A_i = X$. Un *sous-recouvrement* est une sous-famille $(A_j)_{j \in J}$ (avec $J \subset I$) qui recouvre encore X . Si X est un espace topologique, un recouvrement $(A_i)_{i \in I}$ est dit *ouvert* ou *fermé* si tous les A_i le sont.

Définition A.12. *Un espace topologique X est dit compact s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini.*

Voir par exemple [Pau2] pour des conditions équivalentes dans le cas des espaces métrisables, dont la plus importante est : « toute suite admet une sous-suite convergente ».

Exemple. Un espace discret est compact si et seulement s'il est fini, car la famille de ses singletons est un recouvrement ouvert.

Par passage au complémentaire, il est immédiat qu'un espace topologique séparé X est compact si et seulement si toute famille de fermés de X d'intersection vide admet une sous-famille finie d'intersection vide.

Soient X un espace topologique et A une partie de X . Comme les ouverts du sous-espace topologique A sont les traces sur A des ouverts de X , les assertions suivantes sont équivalentes :

- le sous-espace topologique A est compact.
- le sous-espace topologique A est séparé, et tout recouvrement de A par des ouverts de X admet un sous-recouvrement fini.

Nous dirons alors que A est une *partie compacte* de X .

Proposition A.13.

- (1) *Si X est un espace topologique séparé, si A est une partie compacte de X , alors A est fermée dans X .*
- (2) *Un sous-espace fermé d'un espace compact est compact.*
- (3) *Si X est un espace topologique séparé, alors une réunion finie de parties compactes $K_1, \dots, K_n$ de X est un compact.*

Démonstration. (1) Montrons que $X \setminus A$ est ouvert. Soit $x \in X \setminus A$. Comme X est séparé, pour tout y dans A , il existe U_y et V_y deux ouverts disjoints de X avec $x \in U_y$ et $y \in V_y$. En particulier, $(V_y)_{y \in A}$ est un recouvrement de A par des ouverts de X . Par compacité de A , il existe $y_1, \dots, y_n$ dans A tels que $A \subset V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$. Alors $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ est un ouvert de X , tel que $U \cap A = \emptyset$ et $x \in U$. Donc $X \setminus A$ est ouvert.

(2) Nous avons déjà démontré qu'un sous-espace d'un espace séparé est séparé. Soit A un fermé d'un espace compact X . Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de A , d'intersection vide. Puisque A est fermé, F_i est aussi fermé dans X , donc par compacité de X , il existe une sous-famille finie d'intersection vide.

(3) Comme tout sous-espace d'un espace séparé est séparé, ceci découle du fait que la réunion pour $i \in \{1, \dots, n\}$ de recouvrement ouverts finis de K_i est un recouvrement ouvert fini de $K_1 \cup \dots \cup K_n$. $\square$

Cette assertion (3) est surtout là pour montrer qu'il ne faut pas oublier l'hypothèse de séparation sur X . Par exemple, l'espace topologique grossier $\{0, 1\}$ est la réunion de deux parties compactes $\{0\}$ et $\{1\}$, mais n'est pas compact.

Exercice E.A.116. *Soit X un espace topologique séparé. Montrer que deux compacts disjoints de X ont des voisinages disjoints.*

A.4.2 Compacité et valeurs d'adhérence

Soient X et Y deux espaces topologiques, A une partie de X , $a \in \overline{A}$ et $f : B \rightarrow Y$ une application avec $A \subset B \subset X$.

Proposition A.14. *Si Y est compact, alors f admet au moins une valeur d'adhérence en a . De plus, si f admet une unique valeur d'adhérence ℓ en a , alors f admet ℓ pour limite en a .*

Méthodologie : Pour montrer que ℓ est la limite en a dans A d'une application f à valeurs dans un espace compact, on pourra montrer que toute valeur d'adhérence de f en a dans A est égale à ℓ .

Démonstration. Par la proposition A.11, l'ensemble des valeurs d'adhérence est égal à $\bigcap_{U \in \mathcal{V}(a)} \overline{f(U \cap A)}$. Si cet ensemble est vide, par compacité de X , comme les $\overline{f(U \cap A)}$ sont fermés, il existe des voisinages $U_1, \dots, U_n$ de a tels que $\overline{f(U_1 \cap A)} \cap \dots \cap \overline{f(U_n \cap A)} = \emptyset$. Comme

$$f(U_1 \cap \dots \cap U_n \cap A) \subset f(U_1 \cap A) \cap \dots \cap f(U_n \cap A) \subset \overline{f(U_1 \cap A)} \cap \dots \cap \overline{f(U_n \cap A)},$$

nous avons donc $U_1 \cap \dots \cap U_n \cap A = \emptyset$. Comme $U_1 \cap \dots \cap U_n$ est un voisinage de a , ceci contredit le fait que $a \in \overline{A}$.

Si ℓ est l'unique valeur d'adhérence, soit V un voisinage ouvert de ℓ . Alors l'intersection $(Y \setminus V) \cap \bigcap_{U \in \mathcal{V}(a)} \overline{f(U \cap A)}$ est vide, et les parties $Y \setminus V$ et $\overline{f(U \cap A)}$ pour tout U dans $\mathcal{V}(a)$ sont fermées. Par compacité, il existe donc des voisinages $U_1, \dots, U_n$ de a tels que $(Y \setminus V) \cap \overline{f(U_1 \cap A)} \cap \dots \cap \overline{f(U_n \cap A)} = \emptyset$. Si $U = U_1 \cap \dots \cap U_n$, qui est un voisinage de A , alors $f(U \cap A) \subset \overline{f(U_1 \cap A)} \cap \dots \cap \overline{f(U_n \cap A)} \subset V$. Donc f admet ℓ pour limite en a . $\square$

Corollaire A.15. *Dans un espace topologique compact, toute suite admet au moins une valeur d'adhérence. Si elle est unique, alors la suite converge vers elle.* $\square$

A.4.3 Compacité et produits

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre (partielle) $<$. Un élément x de E est dit *maximal* si

$$\forall y \in E \quad x < y \Rightarrow y = x.$$

Si F est une partie de E , un élément x de E est un *majorant* de F si

$$\forall y \in F \quad y < x.$$

Une partie F de E est *totalement ordonnée* si

$$\forall x, y \in F \quad x < y \text{ ou } y < x.$$

L'ensemble E muni de $<$ est dit *inductif* si toute partie totalement ordonnée admet un majorant.

Théorème A.16. (Théorème de Zorn) *Tout ensemble ordonné inductif non vide possède un élément maximal.* $\square$

Ce théorème est admis (voir par exemple [Kri]), il est équivalent à l'axiome du choix.

Lemme A.17. Soit X un espace topologique. Un mauvais recouvrement de X est un recouvrement n'admettant pas de sous-recouvrement fini. Soit $\mathcal{A}$ une prébase d'ouverts de X . Si X admet un mauvais recouvrement ouvert, alors il admet un mauvais recouvrement par des éléments de $\mathcal{A}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble supposé non vide des mauvais recouvrements ouverts de X , partiellement ordonné par l'inclusion. Montrons qu'il est inductif. Soit $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{M}$. Soit $\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$. Alors $\mathcal{U}$ est un majorant des $\mathcal{U}_\alpha$. C'est un mauvais recouvrement ouvert de X , sinon il contiendrait un sous-recouvrement fini $\{V_1, \dots, V_n\}$; si $V_i \in \mathcal{U}_{\alpha_i}$ et si $\beta \in A$ vérifie $\mathcal{U}_{\alpha_i} \subset \mathcal{U}_\beta$ pour tout i , alors $\mathcal{U}_\beta$ aurait un sous-recouvrement ouvert fini, contradiction.

Par le théorème de Zorn, soit $\mathcal{U}^*$ un élément maximal de $\mathcal{M}$. En particulier, pour tout ouvert $V \notin \mathcal{U}^*$, le recouvrement $\mathcal{U}^* \cup \{V\}$ n'est pas mauvais, donc il existe $U_1, \dots, U_n$ dans $\mathcal{U}^*$ tels que $\{V, U_1, \dots, U_n\}$ recouvre X .

Lemme A.18. Pour tous les ouverts V et V' de X , si $V \notin \mathcal{U}^*$ et $V' \notin \mathcal{U}^*$, alors nous avons $V \cap V' \notin \mathcal{U}^*$.

Démonstration. Soient $U_1, \dots, U_n, U'_1, \dots, U'_{n'}$ des éléments de $\mathcal{U}^*$ tels que $\{V, U_1, \dots, U_n\}$ et $\{V', U'_1, \dots, U'_{n'}\}$ recouvrent X . Alors $\{V \cap V', U_1, \dots, U_n, U'_1, \dots, U'_{n'}\}$ recouvre X , et comme $\mathcal{U}^*$ est mauvais, $V \cap V' \notin \mathcal{U}^*$. $\square$

Lemme A.19. Pour tous les ouverts V et V' de X , si $V \notin \mathcal{U}^*$ et $V \subset V'$, alors $V' \notin \mathcal{U}^*$.

Démonstration. Si $\{V, U_1, \dots, U_n\}$ recouvre X , alors $\{V', U_1, \dots, U_n\}$ recouvre X aussi. $\square$

Montrons maintenant que $\mathcal{A} \cap \mathcal{U}^*$ recouvre X . Soit x_0 dans X . Comme $\mathcal{U}^*$ recouvre X , il existe $U \in \mathcal{U}^*$ tel que $x_0 \in U$. Comme $\mathcal{A}$ est une prébase, il existe $V_1, \dots, V_n$ dans $\mathcal{A}$ tels que $x_0 \in V_1 \cap \dots \cap V_n \subset U$. Par les lemmes précédents, il existe i tel que $V_i \in \mathcal{U}^*$. Donc $x_0 \in V_i \in \mathcal{A} \cap \mathcal{U}^*$. Enfin, comme $\mathcal{U}^*$ est mauvais, $\mathcal{A} \cap \mathcal{U}^*$ l'est aussi. $\square$

Théorème A.20. (Théorème de Tychonov) Tout produit d'espaces compacts est compact.

Démonstration. Nous avons déjà vu qu'un produit d'espaces séparés est séparé (proposition A.3). Soit $X = \prod_{i \in I} X_i$ un produit d'espaces compacts. Par les propriétés de la topologie produit, $\mathcal{A} = \{\text{pr}_j^{-1}(V) : j \in I, V \text{ ouvert de } X_j\}$ est une prébase d'ouverts de X . Supposons par l'absurde que X ne soit pas compact. Par le lemme technique A.17, il existe un mauvais recouvrement $\mathcal{U}$ de X par des éléments de $\mathcal{A}$. Pour $j \in I$, soit $\mathcal{A}_j$ l'ensemble des ouverts V de X_j tels que $\text{pr}_j^{-1}(V) \in \mathcal{U}$. Si par l'absurde $\mathcal{A}_j$ recouvrait X_j , par compacité de X_j , il existerait $V_1, \dots, V_n$ dans $\mathcal{A}_j$ recouvrant X_j . Mais alors $\text{pr}_j^{-1}(V_1) \cup \dots \cup \text{pr}_j^{-1}(V_n) = \text{pr}_j^{-1}(X_j) = X$, ce qui contredirait le fait que $\mathcal{U}$ est mauvais. Soit donc x_j dans X_j tel que $x_j \notin \bigcup \mathcal{A}_j$. Nous posons $x = (x_j)_{j \in I}$. Comme $\mathcal{U}$ recouvre X , il existe $j \in I$ et V ouvert de X_j tel que $x \in \text{pr}_j^{-1}(V) \in \mathcal{U}$. Ceci contredit le fait que $x_j \notin \bigcup \mathcal{A}_j$. $\square$

A.4.4 Espaces localement compacts

Un espace topologique X est

- *localement compact* s'il est séparé et si tout point de X admet un voisinage compact. ¹⁷⁹
- σ -compact s'il est séparé et union dénombrable de compacts,
- *dénombrable à l'infini* s'il est séparé et s'il existe une suite (dite *exhaustive*) de compacts $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de réunion X tels que K_i soit contenu dans l'intérieur de K_{i+1} ,
- *paracompact* s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert admet un recouvrement ouvert localement fini plus fin.

Attention à ne pas confondre la *séparation* (c'est-à-dire le fait d'être séparé) et la *séparabilité* (c'est-à-dire le fait d'être séparable, voir l'exercice E.A.124). La séparation est cruciale pour montrer qu'un sous-espace compact d'un espace topologique séparé est fermé, ainsi que pour montrer qu'une application continue bijective d'un espace compact dans un espace séparé est un homéomorphisme, voir ci-dessous. Certains ouvrages, surtout de langue anglaise, omettent, à tort, l'hypothèse de séparation dans la définition de la compacité, locale compacité, σ -compacité, dénombrabilité à l'infini, paracompacité.

Exemples.

- (1) Tout espace discret est localement compact.
- (2) Tout espace compact est localement compact.
- (3) (Théorème de Riesz) Un espace vectoriel normé est localement compact si et seulement s'il est de dimension finie. En particulier, $\mathbb{R}$ est localement compact (mais pas compact).
- (4) Un sous-espace fermé d'un espace localement compact est localement compact.
- (5) Un produit fini d'espaces localement compacts est localement compact.
- (6) L'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas localement compact, car si V est un voisinage compact de l'élément $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors V contient un voisinage élémentaire de la forme $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\times \cdots \times]x_n - \epsilon, x_n + \epsilon[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$. Alors $\text{pr}_{n+1}(V) = \mathbb{R}$ qui est non compact, ce qui contredit la continuité de pr_{n+1} .

Proposition A.21. *Un espace topologique séparé X est localement compact si et seulement si tout point de X admet un système fondamental de voisinages compacts.*

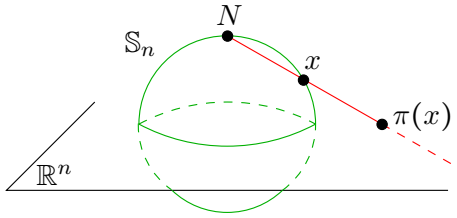
Démonstration. Soient $x \in X$ et F un voisinage compact de x . Pour tout ouvert U tel que $x \in U \subset F$, il suffit de montrer qu'il existe un voisinage W de x fermé, contenu dans U donc dans F , et par conséquent compact.

Comme X est séparé, si $y \neq x$, soient V et V' des voisinages de x et y respectivement tels que $V \cap V' = \emptyset$. Alors $y \notin \overline{V}$, donc $\bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} \overline{V} = \{x\}$. Par conséquent, nous avons $(X \setminus U) \cap \bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} \overline{V} = \emptyset$. Par compacité de F , il existe des voisinages $V_1, \dots, V_n$ de x tels que $(X \setminus U) \cap \overline{V_1} \cap \cdots \cap \overline{V_n} \cap F = \emptyset$. Alors $W = \overline{V_1} \cap \cdots \cap \overline{V_n} \cap F$ est un voisinage fermé de x contenu dans U . $\square$

Corollaire A.22. *Tout ouvert d'un espace localement compact est localement compact. En particulier, si X est localement compact et $x \in X$, alors $X \setminus \{x\}$ est un espace localement compact.* $\square$

Exercice E.A.117. (Compactifié d'Alexandrov) Soient X un espace localement compact, ∞ un ensemble n'appartenant pas à X et $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$.

179. Voir la proposition A.21 pour la "vraie" définition d'espace localement compact, disant qu'il s'agit vraiment (hormis la condition de séparation) d'une propriété locale, analogue aux propriétés d'être localement connexe, localement connexe par arcs, etc.

- (1) Montrer que l'ensemble des parties de $\widehat{X}$ de la forme U , avec U ouvert de X , ou $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$, avec K compact de X , est une topologie sur $\widehat{X}$. (L'espace $\widehat{X}$, muni de cette topologie, est appelé le compactifié d'Alexandrov de X et ∞ son point à l'infini.)
 - (2) Montrer que la topologie induite sur X par celle de $\widehat{X}$ est la topologie usuelle de X , et que X est un ouvert dense de $\widehat{X}$ si X n'est pas compact.
 - (3) Montrer que $\widehat{X}$ est compact.
 - (4) (Extension) Montrer que si Y est un espace localement compact, et si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue propre (voir la partie A.4.5 pour une définition), alors l'application $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$ définie par $\widehat{f}|_X = f$ et $\widehat{f}(\infty) = \infty$ est continue.
 - (5) (Unicité) Si Y est un espace topologique compact et s'il existe $y \in Y$ et $\phi : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme sur son image tels que $\phi(X) = Y \setminus \{y\}$, montrer que l'application $\widehat{\phi} : \widehat{X} \rightarrow Y$ définie par $x \mapsto \phi(x)$ si $x \in X$ et $\infty \mapsto y$, est un homéomorphisme.
 - (6) (Fonctorialité) Montrer que si Y est un espace localement compact, et si $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme, alors l'application $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$ définie par $\widehat{f}|_X = f$ et $\widehat{f}(\infty) = \infty$ est un homéomorphisme.
 - (7) Montrer que si X est compact, alors $\widehat{X}$ est homéomorphe à $X \sqcup \{\infty\}$, muni de la topologie somme disjointe.
 - (8) Montrer que le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{S}_n$. (Nous regardons $\mathbb{R}^n$ contenu dans $\mathbb{R}^{n+1}$ comme l'hyperplan des n premières coordonnées. Si N est le pôle nord de $\mathbb{S}_n$, on utilisera la propriété (5) d'unicité, en montrant que la projection stéréographique de pôle nord $\pi : \mathbb{S}_n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, qui à x associe le point d'intersection avec $\mathbb{R}^n$ de la droite passant par N et x , est un homéomorphisme.)
- 
- (9) (Fonctions nulles à l'infini) Soient $C_b(X)$ l'espace de Banach complexe des fonctions continues bornées sur X muni de la norme uniforme $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, et $C_c(X)$ le sous-espace vectoriel des fonctions continues à support compact sur X . Soit $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes.
 - (a) La fonction f est nulle à l'infini, c'est-à-dire pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K dans X tel que pour tout $x \in X \setminus K$, nous ayons $|f(x)| < \epsilon$.
 - (b) La fonction f appartient à l'adhérence de $C_c(X)$ dans $C_b(X)$.
 - (c) La fonction f s'étend continûment (de manière unique) en une application continue $g : \widehat{X} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $g(\infty) = 0$.

A.4.5 Compacité et continuité

Théorème A.23. Soient X un espace compact, Y un espace séparé et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors

- (1) l'espace $f(X)$ est compact;
- (2) si f est bijective, alors f est un homéomorphisme.

Démonstration. (1) D'abord, le sous-espace $f(X)$ est séparé car Y l'est. Pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de $f(X)$, la famille $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X , donc admet un sous-recouvrement fini $(f^{-1}(U_j))_{j \in J}$. D'où $f(X) \subset \bigcup_{j \in J} U_j$. Par conséquent, $f(X)$ est compact.

(2) Il suffit de montrer que f^{-1} est continue, c'est-à-dire que f est fermée. Si F est un fermé de X , alors F est compact dans X , donc $f(F)$ est compact dans Y par (1), donc fermé dans Y car Y est séparé, par la proposition A.13 (1). $\square$

Du résultat précédent, il découle que l'application $\bar{\phi} : \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \rightarrow (\mathbb{S}_1)^n$, définie par $[(t_1, \dots, t_n)] \mapsto (e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n})$, qui est continue, bijective, de but séparé, de source compacte (car séparée par l'exercice E.A.107 (2) et image du compact $[0, 1]^n$ par la projection canonique $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ qui est continue), est un homéomorphisme.

Soient X et Y deux espaces topologiques séparés, et $f : X \rightarrow Y$ une application. Nous dirons que f est *propre* si f est fermée et si l'image réciproque par f de tout point de Y est un compact de X . La condition que l'application f soit fermée est, dans la pratique, difficile à vérifier. Lorsque les espaces sont localement compacts, nous utiliserons presque exclusivement la caractérisation suivante : une application continue entre espaces topologiques localement compacts est propre si et seulement si l'image réciproque de tout compact est compact.

Proposition A.24. *Si f est propre, alors l'image réciproque par f de tout compact de Y est un compact de X . Si Y est localement compact, et si l'image réciproque par f de tout compact de Y est un compact de X , alors f est propre.*

Démonstration. Si f est propre, soit K un compact de Y et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de $f^{-1}(K)$, d'intersection vide. Supposons par l'absurde que $C_J = \bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset$ pour toute partie finie J de I . Alors $f(C_J)$ est un fermé de Y , donc de K . Pour toute famille finie $(J_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de parties finies de I , nous avons

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} f(C_{J_\alpha}) \supset f\left(\bigcap_{j \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} J_\alpha} F_j\right) \neq \emptyset.$$

Comme K est compact, il existe au moins un point y dans l'intersection des ensembles $f(C_J)$ pour toutes les parties finies J dans I . Pour toute partie finie J dans I , nous avons donc

$$f^{-1}(y) \cap \bigcap_{j \in J} F_j = f^{-1}(y) \cap C_J \neq \emptyset.$$

Puisque $f^{-1}(y)$ est compact, nous avons donc $f^{-1}(y) \cap \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$, ce qui contredit le fait que la famille $(F_i)_{i \in I}$ est d'intersection vide.

Réciproquement, supposons que Y soit localement compact, et que l'image réciproque par f de tout compact de Y soit un compact de X . Alors le singleton $\{y\}$ est compact dans Y , donc $f^{-1}(y)$ est compact. Soit F un fermé de X et $y \in \overline{f(F)}$. Soit W un voisinage compact de y . Soit $(V_i)_{i \in I}$ un système fondamental de voisinages compacts de y contenus dans W . Le fermé $F_i = f^{-1}(V_i) \cap F$ de X est contenu dans le compact $f^{-1}(W) \cap F$. L'intersection $\bigcap_{j \in J} F_j$ est non vide pour toute partie finie J de I , car $\bigcap_{j \in J} V_j$ est un voisinage de y . Par compacité de $f^{-1}(W) \cap F$, il existe donc un point x dans $\bigcap_{i \in I} F_i$. Donc $f(x) \in \bigcap_{i \in I} V_i = \{y\}$. D'où $f(x) = y$ et f est fermée. $\square$

Exemple. Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, et $f : E \rightarrow F$ une application continue. Alors f est propre si et seulement si pour toute suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans E telle que $\|x_i\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} +\infty$, nous avons $\|f(x_i)\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} +\infty$. Ceci découle du fait que les compacts de E et F sont leurs fermés bornés.

Proposition A.25. Soient X et Y deux espaces séparés, et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Si f est bijective et propre, alors f est un homéomorphisme.

Démonstration. Si f est propre, elle est fermée, donc f^{-1} est continue. (Voici aussi, lorsque X, Y sont localement compacts, ce qui est le cas dans la plupart des applications, une démonstration utilisant la caractérisation des applications propres entre espaces topologiques localement compacts. Il suffit de montrer que f^{-1} est continue en tout point y de Y . Soit V un voisinage compact de y . Alors $U = f^{-1}(V)$ est un voisinage de $f^{-1}(y)$ car f est continue, qui est compact car f est propre. Donc $f|_U : U \rightarrow V$ est une bijection continue entre espaces compacts, donc un homéomorphisme par le théorème A.23. Comme U et V sont des voisinages de $f^{-1}(y)$ et y respectivement, ceci implique que f^{-1} est continue en y .) $\square$

Remarque. L'application identité de l'espace $X = \{0, 1\}$ muni de la topologie discrète dans l'espace $Y = \{0, 1\}$ muni de la topologie grossière est une bijection continue telle que l'image réciproque par f de tout compact de Y soit un compact de X (car toute partie de X est compacte et les seuls compacts de Y sont $\emptyset$, $\{0\}$ et $\{1\}$). Mais f n'est pas propre (car pas fermée), et n'est pas un homéomorphisme. L'hypothèse de locale compacité de Y est importante pour la seconde assertion de la proposition A.24.

A.4.6 Topologie compacte-ouverte

Soient X et Y deux espaces topologiques, avec X localement compact. Notons $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y . Nous appelons *topologie compacte-ouverte* sur $\mathcal{C}(X, Y)$ la topologie engendrée par les parties de la forme

$$O(K, U) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) : f(K) \subset U\}$$

pour K compact de X et U ouvert de Y . Sauf mention contraire, l'ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ sera muni de cette topologie. (Il n'y a pas besoin que X soit localement compact pour définir cette topologie, mais l'hypothèse de locale compacité sur X implique qu'il y a suffisamment de compacts dans X pour que cette topologie soit intéressante.)

Exercice E.A.118. Soient X et Y deux espaces topologiques, avec X localement compact.

- (1) Montrer que l'application d'évaluation $\mathcal{C}(X, Y) \times X \rightarrow Y$ définie par $(f, x) \mapsto f(x)$ est continue.
- (2) Si Z est un espace topologique, montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(Z \times X, Y) &\longrightarrow \mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X, Y)) \\ f &\mapsto \{z \mapsto f_z : x \mapsto f(z, x)\} \end{aligned}$$

est une bijection.

- (3) Montrer que la topologie compacte-ouverte sur l'ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ est la seule topologie sur cet ensemble telle que pour tout espace topologique Z , l'application de $\mathcal{C}(Z \times X, Y)$ dans $\mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X, Y))$ ci-dessus soit une bijection.

- (4) Montrer que si Y est séparé, alors $\mathcal{C}(X, Y)$ l'est aussi.
- (5) Montrer que si X est compact et si Y est un espace métrique, alors la topologie compacte-ouverte sur $\mathcal{C}(X, Y)$ est la topologie de la convergence uniforme induite par la distance uniforme d sur $\mathcal{C}(X, Y)$ définie par

$$\forall f, g \in \mathcal{C}(X, Y), \quad d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

A.5 Exercices récapitulatifs

Exercice E.A.119. Soient X et Y deux espaces topologiques.

- Montrer que X est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x, y) \in X \times X : x = y\}$ de $X \times X$ est fermée.
- Montrer que si $f, g : X \rightarrow Y$ sont deux applications continues et si Y est séparé, alors $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X .
- Montrer que si $f, g : X \rightarrow Y$ sont deux applications continues, si Y est séparé, et si f et g coïncident sur une partie dense de X , alors $f = g$.

Exercice E.A.120. Un espace topologique X est dit *normal* s'il est séparé et si pour tous les fermés disjoints F et F' de X , il existe des ouverts disjoints U et U' de X tels que $F \subset U$ et $F' \subset U'$.

- Montrer qu'un espace topologique compact est normal.
- Montrer que si F est un fermé d'un espace topologique normal X et U un ouvert de X contenant F , alors il existe un ouvert V de X tel que

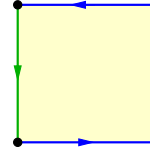
$$F \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

- Soient X un espace topologique normal et $\sim$ une relation d'équivalence sur X telle que la projection canonique $\pi : X \rightarrow X/\sim$ soit fermée. Montrer que $X/\sim$ est normal (donc séparé).
- Soient X un espace topologique compact et $\sim$ une relation d'équivalence sur X telle que la projection canonique $\pi : X \rightarrow X/\sim$ soit fermée. Montrer que $X/\sim$ est compact.
- Montrer que l'espace topologique somme disjointe d'une famille d'espaces topologiques normaux est normal.
- Soient X un espace topologique compact et $\sim$ une relation d'équivalence fermée (en tant que partie de $X \times X$). Montrer que $X/\sim$ est compact.
- Soient X et Y deux espaces topologiques normaux, A un fermé de X et $f : A \rightarrow Y$ une application continue. Montrer que l'espace topologique recollement $X \cup_f Y$ est normal (donc séparé). En déduire que l'espace topologique d'écrasement $X/\langle A \rangle$ est normal. Si X et Y sont compacts, montrer que $X \cup_f Y$ est compact.
- Montrer que si X est un espace topologique séparé (respectivement normal), alors son cône CX et sa suspension SX sont aussi séparés (respectivement normal).

Exercice E.A.121. Pour n dans $\mathbb{N}$, nous notons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^n$ (telle que $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$). Soit $\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ la *boule unité* (fermée) de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{S}_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ la sphère de dimension n . Identifions $\mathbb{C}^n$ avec $\mathbb{R}^{2n}$ par $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_n)$. Identifions $\mathbb{R}^n$ avec un sous-espace de $\mathbb{R}^{n+1}$ par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0)$.

- (1) Sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, considérons la relation d'équivalence $x \sim_1 \lambda x$ pour tous les éléments x dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ et λ dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sur $\mathbb{S}_n$, considérons la relation d'équivalence $x \sim_2 \pm x$ pour tout x dans $\mathbb{S}_n$. Sur $\mathbb{B}_n$, considérons la relation d'équivalence $\sim_3$ engendrée par $x \sim -x$ pour tout x dans $\mathbb{S}_{n-1} = \partial \mathbb{B}_n$. Montrer que l'inclusion $\mathbb{S}_n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ et l'application $\mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ définie par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2})$ induisent des homéomorphismes $\mathbb{S}_n / \sim_2 \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim_1$ et $\mathbb{B}_n / \sim_3 \rightarrow \mathbb{S}_n / \sim_2$. Montrer que ces espaces sont séparés, puis qu'ils sont compacts. L'espace quotient $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim_1$ est appelé l'*espace projectif réel* de dimension n et noté $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathbb{R}P_n$). Nous noterons $[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ la classe d'équivalence de $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Cette notation est appelée la *coordonnée homogène* du point considéré de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.
- (2) Sur $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, considérons la relation d'équivalence $x \sim_1 \lambda x$ pour tous les x dans $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ et λ dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sur $\mathbb{S}_{2n+1}$, considérons la relation d'équivalence $x \sim_2 \lambda x$ pour tous les x dans $\mathbb{S}_{2n+1}$ et $\lambda \in \mathbb{S}_1$. Montrer que l'inclusion $\mathbb{S}_{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ induit un homéomorphisme $\mathbb{S}_{2n+1} / \sim_2 \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim_1$. Montrer que ces espaces sont compacts. L'espace quotient $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim_1$ est appelé l'*espace projectif complexe* de dimension n et noté $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ (ou $\mathbb{C}P_n$). Notons $[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ la classe d'équivalence de $(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Cette notation est appelée la *coordonnée homogène* du point considéré de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.
- (3) Montrer que la droite projective réelle $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ est homéomorphe au compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}$ (donc à $\mathbb{S}_1$), par l'application $[x : y] \mapsto x/y$ si $y \neq 0$, et $[x : 0] \mapsto \infty$. Montrer que la droite projective complexe $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est homéomorphe au compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{C}$ (donc à $\mathbb{S}_2$), par l'application $[w : z] \mapsto w/z$ si $z \neq 0$, et $[w : 0] \mapsto \infty$.

- (4) Montrer que le plan projectif réel $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est homéomorphe à l'espace topologique obtenu en recollant les côtés opposés d'un carré, en préservant l'ordre trigonométrique.



- (5) Si $f : \mathbb{S}_{n-1} \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ (ces deux espaces sont vides si $n = 0$) est la projection canonique $(x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_n]$, montrer que l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{B}_n \amalg \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \\ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{B}_n &\mapsto [x_1 : \dots : x_n : \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \\ [x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}) &\mapsto [x_1 : \dots : x_n : 0] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

induit un homéomorphisme

$$\mathbb{B}_n \cup_f \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) .$$

En déduire que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est homéomorphe à l'espace topologique $\mathbb{B}_2 \cup_f \mathbb{S}_1$ pour $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ l'application $z \mapsto z^2$.

- (6) De manière similaire, montrer que si $f : \mathbb{S}_{2n-1} \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ désigne la projection canonique $(z_1, \dots, z_n) \mapsto [z_1 : \dots : z_n]$, alors l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{B}_{2n} \amalg \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \\ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{B}_{2n} &\mapsto [z_1 : \dots : z_n : \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n |z_i|^2}] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \\ [z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) &\mapsto [z_1 : \dots : z_n : 0] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

induit un homéomorphisme

$$\mathbb{B}_{2n} \cup_f \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{C}).$$

Exercice E.A.122. Soit G un sous-groupe (additif) de $(\mathbb{R}, +)$. Considérons la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathbb{R}$ définie par $x \sim y$ si $x - y \in G$. Quelle est la topologie quotient sur $\mathbb{R}/\sim$?

Exercice E.A.123. Munissons $\{0, 1\}$ de la topologie discrète et $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit. Nous appelons *sous-suite finie consécutive* de $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X$ toute suite finie de la forme $(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+\ell})$ avec $k, \ell \in \mathbb{N}$. Soit M un ensemble de suites finies de 0 et de 1. Montrer que le sous-espace des éléments de X , dont aucune sous-suite finie consécutive n'est dans M , est compact.

Exercice E.A.124. Un espace topologique est *séparable* s'il admet une partie dénombrable dense.

- Montrer qu'un espace topologique métrisable compact est séparable et à base dénombrable.
- Si X est un espace topologique séparable, montrer que tout ouvert de $X^{\mathbb{N}}$ est union dénombrable d'ouverts élémentaires.
- Si X est un espace topologique, est-ce que tout ouvert de $X^{\mathbb{N}}$ est union dénombrable d'ouverts élémentaires ?

Exercice E.A.125. Un espace topologique est dit *totalelement discontinu* si tout point admet un système fondamental de voisinages à la fois ouverts et fermés. Montrer que tout espace topologique métrisable, compact, totalelement discontinu, sans point isolé, non vide est homéomorphe à l'espace triadique de Cantor (voir l'exercice E.A.103). Montrer que tout espace topologique métrisable, compact, sans point isolé, non vide contient un sous-espace homéomorphe à l'espace triadique de Cantor.

Exercice E.A.126. Soit E un ensemble, si $\{0, 1\}$ est muni de la topologie discrète, montrer que $\{0, 1\}^E$ est un espace compact totalelement discontinu sans point isolé. Montrer que $\{0, 1\}^E$ est séparable si et seulement si E est (fini ou) dénombrable.

Exercice E.A.127. Soit A une partie d'un espace topologique X . Montrer que A est une partie localement fermée (c'est-à-dire telle que tout point de A admette un voisinage U dans X tel que $A \cap U$ soit fermé dans U) si et seulement si A est ouverte dans son adhérence, et si et seulement si A est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé.

A.6 Indications pour la résolution des exercices

Solution de l'exercice E.A.107. (1) Supposons $X/\mathcal{R}$ séparé et montrons que le complémentaire ${}^c\mathcal{R}$ est ouvert dans $X \times X$. Soient $x, y \in X$ tels que $(x, y) \notin \mathcal{R}$, c'est-à-dire tels que $\pi(x) \neq \pi(y)$. Par la proposition A.4, il existe deux ouverts U et V de X saturés disjoints contenant x et y respectivement. Donc $U \times V$ est un ouvert de $X \times X$ contenu dans ${}^c\mathcal{R}$.

(2) Par les propriétés du passage au quotient et puisque $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, l'application continue $f : X \rightarrow X'$ passe au quotient en une application continue injective

$\bar{f} : X/\mathcal{R} \rightarrow X'$. Soient x et y deux éléments distincts de $X/\mathcal{R}$. Par l'injectivité de $\bar{f}$, nous avons $\bar{f}(x) \neq \bar{f}(y)$. Puisque X' est séparé, il existe deux ouverts U' et V' de X' disjoints contenant $\bar{f}(x)$ et $\bar{f}(y)$ respectivement. Puisque $\bar{f}$ est continue, les parties $\bar{f}^{-1}(U')$ et $\bar{f}^{-1}(V')$ de $X/\mathcal{R}$ sont des ouverts disjoints contenant x et y respectivement.

Solution de l'exercice E.A.108. Soient $x \in X$ un point dont la classe d'équivalence C est dense dans X , et $y \in X \setminus C$ (qui existe si $\text{Card}(X/\mathcal{R}) \geq 2$). Pour tout ouvert saturé U contenant y (donc non vide), l'intersection de C et de U est non vide par densité. Donc il n'existe pas d'ouverts saturés disjoints contenant respectivement x et y , ce qui par la proposition A.4 montre que $X/\mathcal{R}$ n'est pas séparé.

Supposons que toutes les classes d'équivalences de $\mathcal{R}$ soient denses. Soit U un ouvert non vide de $X/\mathcal{R}$. Alors $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert non vide saturé de X . Il rencontre la classe de tout élément de X par densité, donc la contient par saturation. Donc $\pi^{-1}(U) = X$ et $U = X/\mathcal{R}$. Ceci montre que la topologie quotient sur $X/\mathcal{R}$ est la topologie grossière.

Solution de l'exercice E.A.109. Notons $\pi_A : A \rightarrow A/\mathcal{R}_A$ la projection canonique. Notons $f : A/\mathcal{R}_A \rightarrow X/\mathcal{R}$ l'application induite par passage au quotient de l'inclusion de A dans X , qui est en effet injective et continue par les propriétés de passage au quotient. Montrons que l'application $f : A/\mathcal{R}_A \rightarrow X/\mathcal{R}$ est ouverte sous les hypothèses des assertions (1) et (2), et fermée sous les hypothèses des assertions (3) et (4), ce qui montre que f est un homéomorphisme, ce qui était demandé.

(1) Soit U un ouvert de $A/\mathcal{R}_A$. Puisque $\pi_A^{-1}(U)$ est un ouvert saturé de A , il existe un ouvert saturé V de X tel que $\pi_A^{-1}(U) = A \cap V$. Si $x \in \pi(A) \cap \pi(V)$, si $y \in A$ est tel que $\pi(y) = x$, comme $\pi(y) = x \in \pi(V)$, nous avons $y \in \pi^{-1}(\pi(V)) = V$ car V est saturé. Donc $y \in A \cap V$ et $\pi(A) \cap \pi(V) \subset \pi(A \cap V)$. L'autre inclusion étant immédiate, nous avons

$$f(U) = \pi(\pi_A^{-1}(U)) = \pi(A \cap V) = \pi(A) \cap \pi(V) = f(A/\mathcal{R}_A) \cap \pi(V).$$

Or $\pi(V)$ est ouvert car V est un ouvert saturé, donc $f(U)$ est un ouvert du sous-espace topologique $f(A/\mathcal{R}_A)$, ce qui conclut.

(2) Soit U un ouvert de $A/\mathcal{R}_A$. Puisque $\pi_A^{-1}(U)$ est un ouvert du sous-espace topologique A , il existe un ouvert V de X tel que $\pi_A^{-1}(U) = A \cap V$. Puisque A est ouvert, $A \cap V$ est ouvert, et puisque π est continue, $\pi(A \cap V)$ est un ouvert. Par conséquent,

$$f(U) = \pi(\pi_A^{-1}(U)) = \pi(A \cap V)$$

est un ouvert de $X/\mathcal{R}$ contenu dans $f(A/\mathcal{R}_A)$, donc un ouvert du sous-espace topologique $f(A/\mathcal{R}_A)$, ce qui conclut.

(3) Soit F un fermé de $A/\mathcal{R}_A$. La même démonstration que ci-dessus en remplaçant ouvert par fermé montre que $f(F)$ est un fermé du sous-espace topologique $f(A/\mathcal{R}_A)$, ce qui conclut.

(4) Soit F un fermé de $A/\mathcal{R}_A$. Alors $\pi_A^{-1}(F)$ est un fermé de A , donc $f(F) = \pi(\pi_A^{-1}(F))$ est un fermé de $X/\mathcal{R}$ contenu dans $f(A/\mathcal{R}_A)$, donc un fermé du sous-espace topologique $f(A/\mathcal{R}_A)$, ce qui conclut.

Sous les hypothèses de la question finale, si $A = [0, 1[$, alors $\mathcal{R}_A$ est la relation d'équivalence triviale $\{(x, y) \in A \times A : x = y\}$, donc $A/\mathcal{R}_A$ est homéomorphe à A , donc à un

intervalle. L'application continue injective f est aussi surjective, mais n'est pas un homéomorphisme car le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ n'est pas homéomorphe à un intervalle (par exemple parce que le premier n'est pas contractile alors que le second l'est, voir la partie 1). Par contre si $A = [0, 1]$, alors l'application f étant une bijection continue entre les deux espaces compacts $A/\mathcal{R}_A$ (séparé par l'exercice E.A.109 (2)) et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un homéomorphisme par le théorème A.23 (2).

Solution de l'exercice E.A.110. (1) L'isomorphisme linéaire permutant les coordonnées horizontale et verticale, dont la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique est inversible sur $\mathbb{Z}$, passe au quotient en un homéomorphisme du tore. Nous pouvons donc supposer que la pente de D est finie, et que D pour équation $y = \alpha x + c$ où α est la pente, et $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

Deux points $(x, \alpha x + c)$ et $(x', \alpha x' + c)$ de D sont distincts et ont la même image par π si et seulement si $x \neq x'$ et s'il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $x' = x + p$ et $\alpha x' + c = \alpha x + c + q$. Ceci implique que $p \neq 0$ et que la pente $\alpha = \frac{q}{p}$ est rationnelle. En particulier, si α est irrationnelle, alors $\pi|_D : D \rightarrow \pi(D)$ est une bijection continue.

Supposons que $\alpha = \frac{q'}{p'}$ soit rationnel, avec p' et q' premiers entre eux. Par le théorème de Bézout, il existe $r', s' \in \mathbb{Z}$ tels que la matrice entière $A = \begin{pmatrix} q' & r' \\ p' & s' \end{pmatrix}$ soit de déterminant 1, donc inversible sur $\mathbb{Z}$, donc induit un homéomorphisme de $\mathbb{T}^2$. Comme A envoie la droite vectorielle horizontale sur la droite vectorielle d'équation $y = \alpha x$ et comme les translations sur le tore sont aussi des homéomorphismes, nous pouvons supposer que D est l'axe horizontal des coordonnées. L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $x \mapsto (x, 0)$ induit par passage au quotient une bijection continue de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $\pi(D)$, qui est un homéomorphisme car $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact et $\mathbb{T}^2$ est séparé. Nous appellerons *cercles horizontaux* les translatés de $\pi(D)$ dans $\mathbb{T}^2$.

Si α est irrationnel, alors $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc $D + \mathbb{Z}^2$ est dense dans $\mathbb{R}^2$, et par la continuité de π , l'image $\pi(D)$ est dense dans le tore $\mathbb{T}^2$. Si $\pi|_D$ était un homéomorphisme sur son image, alors $\pi(D)$ serait aussi fermée, donc égale à $\mathbb{T}^2$. Ceci n'est pas vérifié (par exemple car $\pi^{-1}(\pi(D)) = D + \mathbb{Z}^2$ n'est pas tout $\mathbb{R}^2$, car de mesure de Lebesgue nulle).

(2) Si α est irrationnel, alors les classes d'équivalences de $\sim$ sont les images par π des droites affines parallèles à D , donc sont denses. Par l'exercice E.A.108, ceci montre que la topologie quotient de $\mathbb{T}^2/\sim$ est la topologie grossière.

Si α est rationnel, comme ci-dessus, on se ramène au cas où D est la droite vectorielle horizontale. Alors l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $y \mapsto (0, y)$ induit par passage au quotient une bijection continue h' de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{T}^2/\sim$. Ce quotient est séparé par la proposition A.4, car deux cercles horizontaux distincts de $\mathbb{T}^2$ ont des voisinages saturés par cercles horizontaux disjoints. De nouveau par la compacité de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, l'application h' est un homéomorphisme.

Solution de l'exercice E.A.111. Soient $n, n' \in \mathbb{N}$. Notons I et I' deux ensembles, et rappelons que dire qu'ils ont le même cardinal signifie qu'ils sont en bijection. Notons B et B' des bouquets de $\text{Card } I$ et $\text{Card } I'$ sphères de dimension n et n' respectivement. Le résultat est immédiat si n ou n' est nul, car un bouquet de $\text{Card } I$ sphères de dimension 0 est un ensemble discret de cardinal $1 + \text{Card } I$. Il est immédiat par le rappel initial que si $n = n'$ et $\text{Card } I = \text{Card } I'$, alors B et B' sont homéomorphes. Notons que si $n \neq n'$, alors $\mathbb{S}_n$

et $\mathbb{S}_{n'}$ ne sont pas homéomorphes, car alors sinon $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n'}$ (obtenus à homéomorphisme près en enlevant un point de $\mathbb{S}_n$ et $\mathbb{S}_{n'}$ par compactification d'Alexandrov, voir l'exercice E.A.117 (8)) le seraient. Or si $n \neq n'$, le théorème d'invariance du domaine de Brouwer (voir le théorème 4.1) dit qu'un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ n'est pas homéomorphe à un ouvert non vide de $\mathbb{R}^{n'}$.

Supposons donc que $n, n' \geq 1$, par symétrie que $\text{Card } I \geq 2$ et qu'il existe un homéomorphisme $f : B \rightarrow B'$. Puisque f envoie au moins un point qui n'est pas le point base de B sur un point qui n'est pas le point base de B' par cardinalité, puisqu'un homéomorphisme est en particulier un homéomorphisme local, nous avons donc $n = n'$ par le théorème d'invariance du domaine de Brouwer, et f envoie le point base de B sur le point base de B' . Puisque qu'un bouquet de $\text{Card } I$ sphères de dimension n privé de son point base possède $\text{Card } I$ composantes connexes, nous avons donc $\text{Card } I = \text{Card } I'$.

Solution de l'exercice E.A.112. Soient X et Y deux espaces topologiques, A une partie de X , $f : A \rightarrow Y$ une application continue et $\pi : (X \amalg Y) \rightarrow X \cup_f Y$ la projection canonique. Par la définition de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définissant le quotient $X \cup_f Y$, la classe d'équivalence d'un point $x \in X$ est $[x] = \{x\}$ si $x \notin A$ et $[x] = \{f^{-1}(f(x))\} \amalg \{f(x)\}$ si $x \in A$. La classe d'équivalence d'un $y \in Y$ est $[y] = f^{-1}(y) \amalg \{y\}$ (et en particulier $[y] = \{y\}$ si $y \notin f(A)$). Donc les restrictions de π à $X \setminus A$ et à Y sont injectives, donc bijectives sur leurs images. Elles sont continues comme restrictions d'application continue.

Supposons A fermé. Montrons d'abord que l'application $\pi|_Y$ est fermée, donc un homéomorphisme sur son image. Soit F un fermé de Y . Alors son saturé par $\mathcal{R}$ est $\mathcal{R}F = f^{-1}(F) \amalg F$, et $f^{-1}(F)$ est fermé dans A donc dans X , car A est fermé. Donc $\mathcal{R}F$ est fermé dans $X \amalg Y$, et son image par π est aussi fermée, car $\pi^{-1}(\pi(F)) = \mathcal{R}F$. Donc $\pi|_Y$ est fermée. L'argument analogue en remplaçant fermés par ouverts montre que si A est ouvert, alors l'application $\pi|_Y$ est ouverte, donc un homéomorphisme sur son image.

Montrons maintenant que si A est un fermé de X , alors l'application $\pi|_{X \setminus A}$ est ouverte, donc un homéomorphisme sur son image. Soit U un ouvert de $X \setminus A$. Alors comme A est fermé, U est un ouvert de X , et comme il est saturé par $\mathcal{R}$, son image par π est ouverte, donc $\pi|_{X \setminus A}(U) = \pi(U)$ est ouverte. La même démonstration en échangeant ouverts et fermés montre que si A est un ouvert de X , alors l'application $\pi|_{X \setminus A}$ est fermée, donc un homéomorphisme sur son image.

Supposons A non vide, et fixons $x_0 \in A$. Si X et Y sont connexes, si g est une application continue de $X \cup_f Y$ dans l'espace discret $\{0, 1\}$, alors $\pi \circ g : (X \amalg Y) \rightarrow \{0, 1\}$ est continue, donc constante sur X et sur Y , donc constante car puisque $x_0 \in A$, le point $x_0 \in X$ est dans la même classe pour $\mathcal{R}$ que $f(x_0) \in Y$. Donc $X \cup_f Y$ est connexe. De même, si X et Y sont connexes par arcs, alors d'une part $\pi(X)$ et $\pi(Y)$ sont connexes par arcs car π est continue. D'autre part, pour tous les $x \in X$ et $y \in Y$, si α est un chemin dans X de x à x_0 et β un chemin dans Y de $f(x_0)$ à y , alors les applications $\pi \circ \alpha$ et $\pi \circ \beta$ sont des chemins dans $X \cup_f Y$ qui sont concaténables car $x_0 \mathcal{R} f(x_0)$. La concaténation de $\pi \circ \alpha$ et $\pi \circ \beta$ est alors un chemin d'origine $\pi(x)$ et d'extrémité $\pi(y)$. Ceci montre que $X \cup_f Y$ est connexe par arcs.

Si $u : X \rightarrow Z$ et $v : Y \rightarrow Z$ sont deux applications continues, telles que $u(x) = v(f(x))$ pour tout x dans A , alors l'application $w : (X \amalg Y) \rightarrow Z$ définie par $w|_X = u$ et $w|_Y = v$, qui est continue et constante sur chaque classe, passe au quotient en une application continue $\bar{w} : X \cup_f Y \rightarrow Z$ telle que $\bar{w} \circ \pi|_X = u$ et $\bar{w} \circ \pi|_Y = v$. L'unicité est immédiate.

Si Y est réduit à un point $*$, alors f est l'application constante de A dans Y et $A \amalg \{*\}$

est une classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$. Donc l'inclusion de X dans $X \sqcup \{*\}$ induit par passage au quotient une application ϕ continue injective, et surjective car A est non vide, de $X/\langle A \rangle$ dans $X \cup_f \{*\}$. Réciproquement, l'application de $X \sqcup \{*\}$ dans $X/\langle A \rangle$ valant la projection canonique sur X et envoyant $*$ sur la classe A de $X/\langle A \rangle$ est continue. Elle passe au quotient en une application continue de $X \cup_f \{*\}$ dans $X/\langle A \rangle$, qui est l'inverse de ϕ .

Solution de l'exercice E.A.117. (1) La partie vide de $\widehat{X}$ est un ouvert de X , donc de $\widehat{X}$. La partie $\widehat{X}$ de $\widehat{X}$ est le complémentaire du compact vide de X , donc est un ouvert de $\widehat{X}$.

Montrons que la topologie putative de $\widehat{X}$ est stable par intersection finie. L'intersection de deux ouverts de X est un ouvert de X , donc un ouvert de $\widehat{X}$. Comme la réunion de deux compacts d'un espace séparé est compact (voir la proposition A.13 (3)), l'intersection des complémentaires de deux compacts de X est le complémentaire d'un compact de X , donc est un ouvert de $\widehat{X}$. Si U est un ouvert de X et K un compact de X , alors puisqu'un compact d'un espace séparé est fermé (voir la proposition A.13 (1)), la partie $U \cap (\widehat{X} \setminus K) = U \cap (X \setminus K)$ est un ouvert de X , donc est un ouvert de $\widehat{X}$.

Montrons que la topologie putative de $\widehat{X}$ est stable par union quelconque. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de X et $(K_j)_{j \in J}$ une famille de compacts de X . Alors $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de X et si J est vide, alors

$$\bigcup_{i \in I} U_i \cup \bigcup_{j \in J} (\widehat{X} \setminus K_j) = U$$

est un ouvert de X , donc est un ouvert de $\widehat{X}$. Si J est non vide, soit $j_0 \in J$. Alors $K = K_{j_0} \cap \bigcap_{j \in J, j \neq j_0} K_j \cap {}^c U$ est un fermé de K_{j_0} , donc un compact de X par la proposition A.13 (2). Par conséquent, la réunion

$$\bigcup_{i \in I} U_i \cup \bigcup_{j \in J} (\widehat{X} \setminus K_j) = \widehat{X} \setminus K$$

est un ouvert de $\widehat{X}$.

(2) La topologie induite sur X est l'ensemble des traces $U \cap X$ sur X des ouverts U de $\widehat{X}$. Pour tout ouvert U de X , nous avons $U \cap X = U$ qui est ouvert dans X . Pour tout compact K de X , nous avons $(\widehat{X} \setminus K) \cap X = X \setminus K$. Le résultat découle donc du fait qu'un compact de X est un fermé de X par la proposition A.13 (1), donc de complémentaire dans X ouvert.

Puisque X est un ouvert de X , la partie X est un ouvert de $\widehat{X}$. Si U est un voisinage ouvert de ∞ dans $\widehat{X}$, alors il existe un compact K de X tel que $U = \widehat{X} \setminus K$, et comme $X \neq K$, l'ouvert U rencontre X . Ceci montre que X est dense dans $\widehat{X}$.

(3) Montrons que $\widehat{X}$ est séparé. Si $x, y \in X$ sont distincts, puisque X est séparé, il existe des ouverts de X , donc de $\widehat{X}$, disjoints et contenant respectivement x et y . Si $x \in X$, soit V un voisinage compact de x dans X , qui existe car X est localement compact. Alors $\widehat{X} \setminus V$ et $\overset{\circ}{V}$ sont des voisinages ouverts disjoints dans $\widehat{X}$ de respectivement ∞ et x . Ceci montre le résultat.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $\widehat{X}$. Puisque ∞ appartient à $\widehat{X}$, il existe $i_0 \in I$ et K un compact de X tel que $U_{i_0} = \widehat{X} \setminus K$. Puisque $(U_i \cap X)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de K par l'assertion (2) et par l'équivalence qui précède la proposition A.13, il

existe donc une partie finie J de I tel que $(U_i \cap X)_{i \in J}$ recouvre K . Alors $(U_i)_{i \in J \cup \{i_0\}}$ est un sous-recouvrement fini de $\mathcal{U}$. Donc $\widehat{X}$ est compact.

(4) Puisque $\widehat{f}|_X = f$ et par l'assertion (2) pour X et pour Y , il est immédiat que l'application $\widehat{f}$ est continue en tout point de X .

Soit V un voisinage ouvert de ∞ dans $\widehat{Y}$. Alors il existe un compact K de Y tel que $V = \widehat{Y} \setminus K$. Puisque f est propre, la partie $f^{-1}(K)$ est un compact de X , et donc $U = \widehat{X} \setminus f^{-1}(K)$ est un ouvert de $\widehat{X}$. Puisque

$$\widehat{f}(U) = \widehat{f}(\widehat{X} \setminus f^{-1}(K)) \subset \widehat{Y} \setminus K = V,$$

l'application $\widehat{f}$ est aussi continue en ∞ .

(5) L'application $\widehat{\phi}$ est clairement une bijection. Elle est continue en tout point de X par l'assertion (2) et par le fait que puisque Y est séparé, tout point de Y différent de y admet un voisinage ouvert ne contenant pas y .

Si V est un voisinage ouvert de y , alors $Y \setminus V$ est un compact de Y (car fermé dans un compact). Puisque $\phi: X \rightarrow Y \setminus \{y\}$ est un homéomorphisme, la partie $K = \phi^{-1}(Y \setminus V)$ est un compact de X . Donc $U = \widehat{X} \setminus K$ est un ouvert de $\widehat{X}$ et

$$\widehat{\phi}(U) = \widehat{\phi}(\widehat{X} \setminus \phi^{-1}(Y \setminus V)) \subset V.$$

L'application $\widehat{\phi}$ est donc continue en ∞ .

Enfin, en tant que bijection continue entre deux espaces compacts (par l'assertion (3)), l'application $\widehat{\phi}$ est un homéomorphisme (voir le théorème A.23).

(6) Puisqu'un homéomorphisme entre espaces localement compacts est une application propre, il découle de l'assertion (4) que $\widehat{f}$ est une bijection continue entre deux espaces compacts (par l'assertion (3)), donc est un homéomorphisme par le théorème A.23.

(7) Si X est compact alors $\{\infty\} = \widehat{X} \setminus X$ est un ouvert de $\widehat{X}$, disjoint de l'ouvert X de $\widehat{X}$, donc la topologie de $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ est la topologie somme disjointe (voir la partie A.2.5 de cet appendice A) : une partie de $\widehat{X}$ est ouverte si et seulement si son intersection avec $\{\infty\}$ et avec X est ouverte.

(8) Un petit calcul sans difficulté, utilisant que les vecteurs $\overrightarrow{Nx}$ et $\overrightarrow{N\pi(x)}$ sont colinéaires et que la dernière coordonnée de $\pi(x)$ est nulle, montre que la projection stéréographique est l'application de $\mathbb{S}_n \setminus \{N\}$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{1 - x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1 - x_n} \right).$$

Son inverse de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{S}_n \setminus \{N\}$ est facilement montré être

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{2y_1}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}, \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2 - 1}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2} \right).$$

En tant qu'applications à coordonnées des fractions rationnelles de dénominateur ne s'annulant pas, ces deux applications sont continues. Par l'assertion (5), la projection stéréographique se prolonge donc en un homéomorphisme de $\widehat{\mathbb{R}^n}$ dans $\mathbb{S}_n$.

Solution de l'exercice E.A.118. Les ouverts de $\mathcal{C}(X, Y)$ sont par définition les unions quelconques d'intersections finies de parties $O(K, U) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) : f(K) \subset U\}$ pour K compact de X et U ouvert de Y .

(1) Notons ev l'application d'évaluation $\mathcal{C}(X, Y) \times X \rightarrow Y$ définie par $(f, x) \mapsto f(x)$. Soient U un ouvert de Y et $(f, x) \in \mathcal{C}(X, Y) \times X$ tel que $\text{ev}(f, x) = f(x) \in U$. Puisque l'application f est continue et l'espace X est localement compact, il existe un voisinage compact K de x tel que $f(K) \subset U$. Alors $O(K, U) \times K$ est un voisinage de (f, x) dans $\mathcal{C}(X, Y) \times X \rightarrow Y$ tel que pour tout $(g, y) \in O(K, U) \times K$, nous ayons $g(y) \in g(K) \subset U$. Donc $\text{ev}^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathcal{C}(X, Y) \times X$ (en tant que voisinage de chacun de ses points) et l'application ev est continue.

(2) Remarquons que si $\mathcal{F}(A, B)$ est l'ensemble de toutes les applications d'un ensemble A dans un ensemble B , alors l'application de $\mathcal{F}(Z \times X, Y)$ dans $\mathcal{F}(Z, \mathcal{F}(X, Y))$ définie par $f \mapsto \{z \mapsto f_z : x \mapsto f(z, x)\}$ est clairement une bijection. Donc tout le sel de l'exercice est de vérifier les propriétés de continuité.

Soient $f \in \mathcal{C}(Z \times X, Y)$. Notons que pour tout $z \in Z$, l'application $f_z : x \mapsto f(z, x)$ est clairement continue (l'application $x \mapsto (z, x)$ l'est).

Montrons tout d'abord que l'application $\tilde{f} : z \mapsto f_z$ est continue. Il suffit de montrer que pour tous les compacts K de X et les ouverts U de Y , la partie $\tilde{f}^{-1}(O(K, U))$ est un ouvert de Z . Soit $z \in \tilde{f}^{-1}(O(K, U))$, ce qui équivaut à $f(\{z\} \times K) \subset U$. Puisque f est continue, pour tout $x \in K$, il existe donc un voisinage ouvert V_x de z dans Z et un voisinage ouvert U_x de x dans X tel que $f(V_x \times U_x) \subset U$. Puisque la famille d'ouverts $(U_x)_{x \in K}$ recouvre le compact K , soit F une partie finie de K telle que la famille $(U_x)_{x \in F}$ recouvre encore K . Alors l'intersection finie $V = \bigcap_{x \in F} V_x$ est un voisinage ouvert de z dans Z et $\tilde{f}(V) \subset O(K, U)$. Donc $\tilde{f}^{-1}(O(K, U))$ est un ouvert de Z (en tant que voisinage de chacun de ses points).

Réciproquement, soit $\tilde{f} \in \mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X, Y))$. Alors l'application

$$f : (z, x) \mapsto \tilde{f}(z)(x) = \text{ev}(\tilde{f}(z), x)$$

est continue comme composition d'applications continues, en utilisant l'assertion (1).

(4) Soient f et g deux éléments distincts de $\mathcal{C}(X, Y)$. Il existe alors un élément $x \in X$ tel que $f(x) \neq g(x)$. Comme Y est séparé, il existe des voisinages ouverts U de $f(x)$ et V de $g(x)$ dans Y qui sont disjoints. Puisque l'application d'évaluation en x est continue comme conséquence de l'assertion (1), il existe des voisinages ouverts U' de f et V' de g dans $\mathcal{C}(X, Y)$ tels que pour tous les $f' \in U'$ et $g' \in V'$, nous ayons $f'(x) \in U$ et $g'(x) \in V$. Mézalor $f'(x) \neq g'(x)$ puisque U et V sont disjoints, donc U' et V' sont disjoints.

(5) Soient K un compact de X , U un ouvert de Y et $f \in O(K, U)$. Puisque Y est un espace métrique, la partie $f(K)$ de Y est compacte, contenue dans U , donc à distance $\epsilon = d(f(K), {}^cU) > 0$ strictement positive du fermé ${}^cU$. Soit g un élément de la boule ouverte $B_d(f, \epsilon)$ pour la distance uniforme. Alors pour tous les $x \in K$ et $y \in {}^cU$, nous avons

$$d(g(x), y) \geq d(f(x), y) - d(g(x), f(x)) > \epsilon - \epsilon = 0.$$

donc $g(x) \in U$, puis $g(K) \subset U$, c'est-à-dire $g \in O(K, U)$. Par conséquent, l'ouvert $O(K, U)$ de la topologie compacte-ouverte est un ouvert pour la topologie de la convergence uniforme.

Réciproquement, soient $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ et $\epsilon > 0$. Puisque f est continue sur un compact à valeurs dans un espace métrique, elle est uniformément continue. Donc pour tout $x \in X$, il existe un voisinage compact K_x de x dans X tel que pour tous les $y, z \in K_x$, nous ayons $d(f(y), f(z)) < \frac{\epsilon}{2}$. Puisque X est compact, il existe une partie finie F de X telle que les

voisinages compacts K_u pour $u \in F$ recouvrent X . Maintenant, pour tout h appartenant à $W = \bigcap_{u \in F} O(K_u, B(f(u), \frac{\epsilon}{2}))$, qui est un voisinage ouvert de f pour la topologie compacte-ouverte, montrons que $d(h, f) < \epsilon$, ce qui montre que $B_d(f, \epsilon)$ contient W , ce qui conclut la démonstration. En effet, pour tout $x \in X$, soit $u \in F$ tel que $x \in K_u$. Alors $h(x) \in B(f(u), \frac{\epsilon}{2})$ puisque $h \in W$, donc

$$d(h(x), f(x)) \leq d(h(x), f(u)) + d(f(u), f(x)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

ce qui montre le résultat, puisque $\sup_{x \in X} d(h(x), f(x)) = \max_{x \in X} d(h(x), f(x))$ par la compacité de X et par continuité.

Solution de l'exercice E.A.119. • Si X est séparé, alors pour tout $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$, soient U et V des voisinages ouverts disjoints de x et de y respectivement. Alors $U \times V$ est un voisinage ouvert de (x, y) contenu dans $(X \times X) \setminus \Delta$. Donc Δ est fermé car de complémentaire ouvert, comme voisinage de chacun de ses points.

Réciproquement, si Δ est fermé, alors $(X \times X) \setminus \Delta$ est ouvert. Pour tous les $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, nous avons $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$. Par définition de la topologie produit, il existe donc des ouverts U et V de X tels que $(x, y) \in (U \times V) \subset ((X \times X) \setminus \Delta)$. Donc U et V sont des voisinages ouverts disjoints de x et y respectivement.

- La partie $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est fermée comme image réciproque par l'application continue $x \mapsto (f(x), g(x))$ de la diagonale Δ de $Y \times Y$, qui est fermée car Y est séparé, par le point précédent.

- La dernière assertion découle du fait qu'une partie dense et fermée d'un espace topologique est égale à tout cet espace topologique.

B Annexe : rappels de théorie des groupes

B.1 Action de groupes

Soient G un groupe (d'élément neutre e) et E un ensemble.

Une *action* (à gauche) de G sur E est une application de $G \times E$ dans E notée $(g, x) \mapsto gx$ telle que, pour tous les $x \in E$ et $g, h \in G$, nous ayons

- (1) $ex = x$,
- (2) $g(hx) = (gh)x$.

Ainsi pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto gx$ est une bijection de E dans E , appelée *l'action de g sur E* , d'inverse $x \mapsto g^{-1}x$. Pour simplifier, nous noterons encore g l'application $x \mapsto gx$ lorsque l'action est sous-entendue. Nous dirons qu'un groupe G *agit* sur E si E est muni d'une action de G sur E .

Il est parfois plus naturel (voir par exemple la partie 2.7) d'utiliser une *action à droite* de G sur E , c'est-à-dire une application de $E \times G$ dans E notée $(x, g) \mapsto xg$ telle que, pour tous les $x \in E$ et $g, h \in G$, nous ayons

- (1) $xe = x$,
- (2) $x(gh) = (xg)h$.

Si une application $(x, g) \mapsto xg$ est une action à droite, alors l'application $(g, x) \mapsto xg^{-1}$ est une action (à gauche), donc nous nous contenterons d'étudier les actions (à gauche).

Si E et E' sont deux ensembles munis d'une action (respectivement d'une action à droite) d'un même groupe G , une application $f : E \rightarrow E'$ est dite *équivariante*, ou G -équivariante lorsqu'il convient de préciser le groupe (les deux actions étant sous-entendues), si

$$\forall x \in E, \forall g \in G, \quad f(gx) = gf(x) \quad (\text{respectivement } f(xg) = f(x)g).$$

Soit G un groupe agissant (à gauche) sur un ensemble E . La relation

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (\exists g \in G, y = gx)$$

est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence d'un point x de E est appelée *l'orbite* de ce point par l'action de G , et notée Gx . L'ensemble des classes d'équivalence est noté $G \backslash E$, et appelé *l'espace des orbites* de G dans E . L'espace des orbites pour une action à droite de G sur E est noté E/G .

Soit A une partie de E . Pour tout $g \in G$, nous notons $gA = \{gx : x \in A\}$ l'image de A par l'action de g .

Nous dirons qu'un élément $g \in G$ *préserve* A si $gA \subset A$. Nous dirons qu'un sous-groupe H de G *préserve* (ou *laisse invariant*) A si h préserve A pour tout $h \in H$, ou, de manière équivalente car H contient les inverses de ses éléments, si $hA = A$ pour tout $h \in H$.

Le *stabilisateur* de A est le sous-groupe de G constitué des éléments $g \in G$ tels que $gA = A$. Le *stabilisateur point par point* (ou *fixateur*) de A est le sous-groupe de G constitué des éléments $g \in G$ tels que $gx = x$ pour tout $x \in A$. Notons que le fixateur de A est un sous-groupe distingué du stabilisateur de A . Le stabilisateur d'un point x (c'est-à-dire du singleton $\{x\}$) de E est égal à son fixateur, et noté

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}.$$

Remarquons que

$$G_{gx} = g G_x g^{-1} : \quad (64)$$

le stabilisateur de l'image de x par g est le conjugué par g du stabilisateur de x .

Une action d'un groupe G sur un ensemble E est dite *transitive* si pour tous les x, y dans E , il existe un élément g de G tel que $y = gx$.

Proposition B.1. *Si G agit transitivement sur E , alors pour tout $x \in E$, l'application orbitale $g \mapsto gx$ de G dans E induit par passage au quotient une bijection de G/G_x dans E .* $\square$

Une action d'un groupe G sur un ensemble X est dite *libre* si le stabilisateur G_x de chaque point x de X est trivial (c'est-à-dire vaut $\{e\}$ où e est l'identité de G). Ceci équivaut à demander que

$$\forall x \in X, \quad \forall g, g' \in G, \quad gx = g'x \Rightarrow g = g' ,$$

ou encore que

$$\forall x \in X, \quad \forall g \in G, \quad gx = x \Rightarrow g = e .$$

Soient A un groupe et B un sous-groupe de A . Alors B agit par translations à gauche sur A :

$$\begin{aligned} B \times A &\longrightarrow A \\ (b, a) &\mapsto ba . \end{aligned}$$

Nous notons Bg l'orbite à gauche par B de $g \in A$, et $B \backslash A$ l'ensemble quotient. Le groupe B agit aussi (à gauche) par translations à droite sur A :

$$\begin{aligned} A \times B &\longrightarrow A \\ (a, b) &\mapsto ab^{-1} . \end{aligned}$$

Nous notons gB l'orbite à droite par B de $g \in A$ et A/B l'ensemble quotient. Si B est un sous-groupe distingué de A , alors $A/B = B \backslash A$.

Si A' est un autre groupe et B' un sous-groupe de A' , si $f : A \rightarrow A'$ est un morphisme de groupes tels que $f(B) \subset B'$, alors l'application $\bar{f} : A/B \rightarrow A'/B'$ définie par

$$\bar{f}(gB) = \bar{f}(g)B' \quad (65)$$

est bien définie, est appelée le *passage au quotient* de l'application f . Si f est surjectif, alors $\bar{f}$ est surjective. Si B est distingué dans A et B' distingué dans A' , alors $\bar{f}$ est un morphisme de groupes entre les groupes quotients A/B et A'/B' .

L'action par translations à gauche de A sur lui-même induit une action de A sur A/B , encore appelée l'*action par translations à gauche* de A sur l'espace des classes à droites A/B :

$$\begin{aligned} A \times A/B &\longrightarrow A/B \\ (g, g'B) &\mapsto gg'B . \end{aligned}$$

B.2 Groupes libres

Soit S un ensemble. Un *mot*¹⁸⁰ sur S est une suite finie d'éléments de $S \times \{\pm 1\}$. Nous noterons e la suite vide, appelée le *mot vide*, et pour tous les $n \in \mathbb{N}$, $s_1, \dots, s_n \in S$ et $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{\pm 1\}$, nous noterons $s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}$ la suite finie $((s_1, \epsilon_1), \dots, (s_n, \epsilon_n))$ (par convention, ce mot est le mot vide si $n = 0$). Nous dirons que n est la *longueur* du mot $w = s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}$, et nous la noterons $\ell(w)$. Un mot $s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}$ est *réduit* si pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, nous avons $\epsilon_i \neq \epsilon_{i+1}$ dès que $s_i = s_{i+1}$, ou autrement dit, s'il ne contient pas de sous-mot $s_i^{\epsilon_i} s_{i+1}^{\epsilon_{i+1}}$ tel que $s_i = s_{i+1}$ et $\epsilon_i = -\epsilon_{i+1}$. Par exemple, tout mot de longueur au plus 1 est réduit.

La *concaténation avec réduction* est la loi de composition interne $\mathcal{L} : E \times E \rightarrow E$ sur l'ensemble E des mots réduits sur S définie, par récurrence sur la longueur des mots, par

$$\mathcal{L}(s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}, r_1^{\eta_1} \dots r_m^{\eta_m}) = \begin{cases} s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n} r_1^{\eta_1} \dots r_m^{\eta_m} & \text{si } s_n^{\epsilon_n} \neq r_1^{-\eta_1} \\ \mathcal{L}(s_1^{\epsilon_1} \dots s_{n-1}^{\epsilon_{n-1}}, r_2^{\eta_2} \dots r_m^{\eta_m}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition B.2. *L'ensemble des mots réduits sur S , muni de la loi de concaténation avec réduction, est un groupe, noté $L(S)$ et appelé le groupe libre sur S . L'application $i : S \rightarrow L(S)$ définie par $s \mapsto s^{+1}$ est injective. Le couple $(L(S), i)$ vérifie la propriété universelle suivante :*

pour tout couple (G, j) où G est un groupe et $j : S \rightarrow G$ est une application, il existe un unique morphisme de groupes $f : L(S) \rightarrow G$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i} & L(S) \\ j \searrow & & \downarrow f \\ & & G. \end{array}$$

Un tel couple $(L(S), i)$ est unique à unique isomorphisme près.

Nous identifions S avec son image dans $L(S)$ par i . Si G est un groupe muni d'une application j de S dans G , nous appellerons *morphisme canonique* associé à (G, j) le morphisme de groupes $f : L(S) \rightarrow G$ donné par la propriété universelle ci-dessus. Si $j(S)$ engendre G , alors le morphisme canonique f est surjectif.

Démonstration. Notons $L = L(S)$ l'ensemble des mots réduits sur S , muni de la loi de concaténation avec réduction. Il est immédiat que la suite vide est élément neutre (à droite et à gauche) de L , et que l'inverse (à droite et à gauche) du mot $s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}$ est le mot $s_n^{-\epsilon_n} \dots s_1^{-\epsilon_1}$. L'associativité de la loi de concaténation avec réduction est par contre plus délicate à montrer. Une manière qui évite une discussion de cas qui apparaît naturellement lors de la concaténation avec réduction de trois éléments, avec les deux choix possibles de parenthésages, est la suivante.

Soit $\tilde{E}$ l'ensemble des mots sur S . La concaténation des suites

$$((s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}), (t_1^{\eta_1} \dots t_m^{\eta_m})) \mapsto s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n} t_1^{\eta_1} \dots t_m^{\eta_m}$$

180. au sens des groupes : dans les monoïdes, la définition est différente

est une loi de composition interne clairement associative sur $\tilde{E}$, ayant le mot vide comme élément neutre à gauche et à droite. Soit $\mathcal{R}$ la plus petite relation d'équivalence compatible¹⁸¹ avec cette loi de composition et mettant en relation $s^\epsilon s^{-\epsilon}$ et le mot vide $\emptyset$ pour tous les $s \in S$ et $\epsilon \in \{\pm 1\}$.

Il est élémentaire de vérifier que cette loi de composition induit une loi de groupe sur l'ensemble quotient $\tilde{E}/\mathcal{R}$, d'élément neutre e la classe d'équivalence du mot vide, l'inverse de la classe du mot $s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}$ étant la classe du mot $s_n^{-\epsilon_n} \dots s_1^{-\epsilon_1}$. Montrons le résultat suivant.

Affirmation. La classe d'équivalence de tout élément w de $\tilde{E}$ contient un et un seul mot réduit.

Il est alors élémentaire de vérifier que l'application de $\tilde{E}/\mathcal{R}$ dans $L(S)$ qui à une classe d'équivalence de $\mathcal{R}$ associe l'unique mot réduit qu'elle contient est une bijection qui préserve les lois de composition, ce qui montre l'associativité de la loi de $L(S)$.

Démonstration de l'affirmation. Si $w = s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}$ contient un sous-mot $s_i^{\epsilon_i} s_{i+1}^{\epsilon_{i+1}}$ tel que $s_i = s_{i+1}$ et $\epsilon_i = -\epsilon_{i+1}$, alors w est équivalent au mot $w' = s_1^{\epsilon_1} \dots s_{i-1}^{\epsilon_{i-1}} s_{i+2}^{\epsilon_{i+2}} \dots s_n^{\epsilon_n}$, dont la longueur est $\ell(w) - 2$. Tout mot équivalent à w de longueur minimale est donc réduit. Il suffit donc de montrer que tout mot est équivalent à un unique mot de longueur minimale. Si deux mots w_0, w_1 sont équivalents pour $\mathcal{R}$, alors par définition de $\mathcal{R}$, nous pouvons passer de l'un à l'autre par un nombre fini de transformations de la forme $w \rightarrow w'$ ou son inverse $w' \rightarrow w$ comme ci-dessus. Par récurrence sur le nombre de transformations, il est élémentaire de montrer que si w_0 est réduit, alors w_0 est une sous-suite de la suite w_1 , donc $\ell(w_1) \geq \ell(w_0)$. $\square$

Reprenons la démonstration de la proposition B.2. L'injectivité de i est immédiate. Soit (G, j) un groupe muni d'une application $j : S \rightarrow G$. Notons $f : L \rightarrow G$ l'application

$$f(s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}) = j(s_1)^{\epsilon_1} \dots j(s_n)^{\epsilon_n}.$$

Il est immédiat que f est un morphisme de groupes de L dans G tel que $f \circ i = j$. Ce morphisme est unique, car $i(S)$ engendre L .

La dernière assertion d'unicité découle de la propriété universelle elle-même. Si (L', i') est un autre couple vérifiant la propriété universelle, alors il existe un morphisme de groupes $\phi : L \rightarrow L'$ tel que $\phi \circ i = i'$, et un morphisme de groupes $\phi' : L' \rightarrow L$ tel que $\phi' \circ i' = i$. Comme $\text{id}_{L'}$ est un morphisme de groupes u tel que $u \circ i' = i'$, nous avons $\phi \circ \phi' = \text{id}_{L'}$ par l'unicité demandée par la propriété universelle, et de même $\phi' \circ \phi = \text{id}_L$. Donc ϕ est un isomorphisme de L dans L' tel que $\phi \circ i = i'$, et c'est le seul par l'unicité demandée par la propriété universelle. $\square$

Un *groupe libre* est un groupe G tel qu'il existe un ensemble S tel que le groupe G soit isomorphe au groupe $L(S)$. Nous appellerons *rang* d'un groupe libre le cardinal d'un tel ensemble S , ce qui est bien défini par l'exercice suivant. L'image réciproque de S par tout isomorphisme de G dans $L(S)$ est une partie génératrice de G , dite *standard*. Il découle de la propriété universelle que le groupe $\text{Aut}(G)$ des automorphismes de groupes d'un groupe libre G agit transitivement sur l'ensemble des parties génératrices standards de G .

Exercice E.B.128. Si S et S' sont deux ensembles, montrer que $L(S)$ et $L(S')$ sont isomorphes si et seulement si S et S' ont même cardinal.

181. c'est-à-dire vérifiant la propriété que pour tous les $x, x', y, y' \in \tilde{E}$, si $x\mathcal{R}y$ et $x'\mathcal{R}y'$, alors $xx'\mathcal{R}yy'$ où zz' désigne la concaténation des mots $z, z' \in \tilde{E}$

B.3 Graphe de Cayley

Soient G un groupe et A une partie de G .

Le *sous-groupe de G engendré par A* , noté $\langle A \rangle$, est l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant A . C'est le plus petit sous-groupe de G contenant A . Il est égal à l'ensemble des éléments de G de la forme

$$a_1^{\epsilon_1} a_2^{\epsilon_2} \dots a_n^{\epsilon_n}$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon_i = \pm 1$, et $a_i \in A$, en convenant que c'est l'élément neutre e de G si $n = 0$

Nous dirons que A est une *partie génératrice* de G (ou que A *engendre* G) si $\langle A \rangle = G$. Si A est une partie génératrice d'un groupe G , si $f : G \rightarrow H$ est un morphisme de groupes surjectif, alors $f(A)$ est une partie génératrice de H .

Un groupe est dit *de type fini* s'il admet une partie génératrice finie.

Le *sous-groupe distingué de G engendré par A* , noté $\langle\langle A \rangle\rangle$, est l'intersection de tous les sous-groupes distingués de G contenant A . C'est le plus petit sous-groupe distingué de G contenant A . Il est égal à l'ensemble des éléments de G de la forme

$$(g_1 a_1^{\epsilon_1} g_1^{-1})(g_2 a_2^{\epsilon_2} g_2^{-1}) \dots (g_n a_n^{\epsilon_n} g_n^{-1})$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon_i = \pm 1$, $a_i \in A$ et $g_i \in G$ (en convenant que c'est l'élément neutre e de G si $n = 0$). Nous avons $\langle\langle A \rangle\rangle = \{gag^{-1} \mid a \in A, g \in G\}$.

Soit G un groupe muni d'une partie génératrice S telle que $e \notin S$. Le *graphe de Cayley*¹⁸² (à droite) de (G, S) (ou graphe de Cayley de G lorsque la partie génératrice S est sous-entendue) est le graphe¹⁸³ $X = \text{Cay}(G, S)$ d'ensemble des sommets $VX = G$, d'ensemble des arêtes

$$EX = \{(g, h, s) \in G \times G \times (S \cup S^{-1}) : gs = h\},$$

tel que pour toute arête $e = (g, h, s) \in EX$, son origine soit le sommet $o(e) = g$, son extrémité soit le sommet $t(e) = h$, et son arête opposée soit l'arête $\bar{e} = (h, g, s^{-1})$. Nous avons exclu l'élément neutre dans S afin que l'application $e \mapsto \bar{e}$ soit une involution sans point fixe, car si $(g, h, s) = (h, g, s^{-1})$, alors $g = h = gs$ donc $s = e$.

Lemme B.3. *Le graphe de Cayley $X = \text{Cay}(G, S)$ de (G, S) est un graphe connexe, et sa réalisation topologique est donc un espace topologique connexe par arcs.*

Démonstration. Il suffit de montrer, par concaténation et inversion de chemin d'arêtes, que pour tout $g \in VX = G$, il existe un chemin d'arêtes entre e et g . Pour tout élément $g \in G$, puisque S engendre G , il existe $k \in \mathbb{N}$ et $s_1, \dots, s_k \in S \cup S^{-1}$ tels que $g = s_1 \dots s_k$. En posant $g_i = s_1 \dots s_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, de sorte que $g_0 = e$ et $g_k = g$, la suite $((g_0, g_1, s_1), (g_1, g_2, s_2), \dots, (g_{k-2}, g_{k-1}, s_{k-1}), (g_{k-1}, g_k, s_k))$ est un chemin d'arêtes entre e et g . $\square$

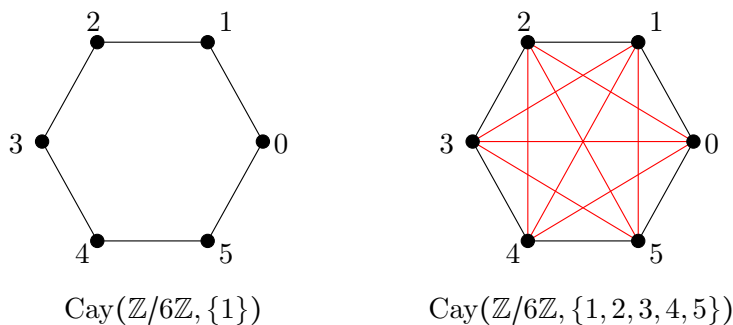
Comme nous le verrons dans les exemples ci-dessous, le graphe de Cayley de (G, S) dépend du choix de la partie génératrice S .

Un graphe de Cayley $\text{Cay}(G, S)$ est fini si et seulement si G est fini. Un graphe de Cayley $\text{Cay}(G, S)$ est localement fini si et seulement si S est fini.

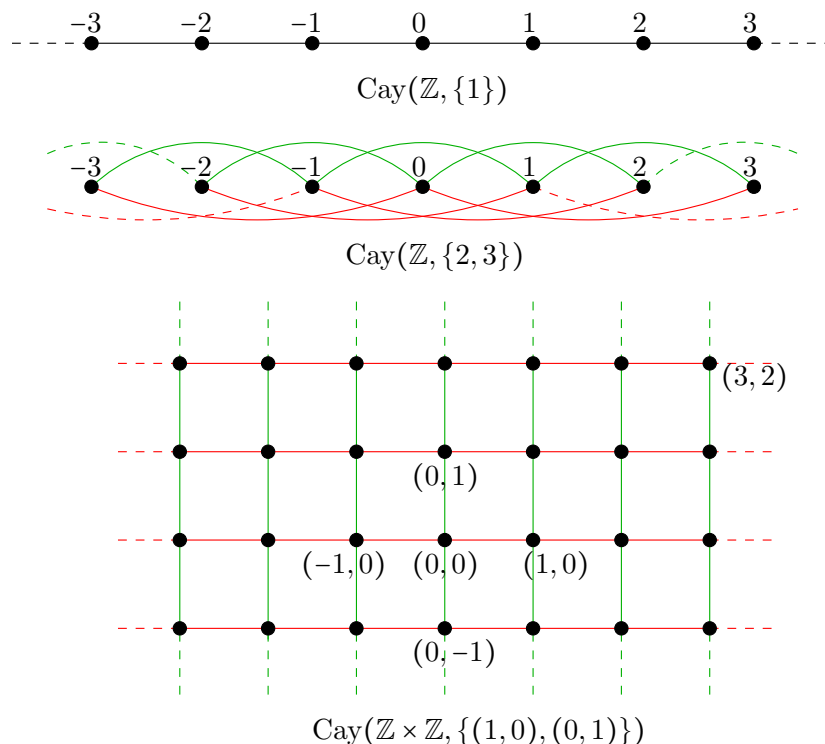
^{182.} Voir la démonstration de la proposition 3.6 pour la définition du 2-complexe de Cayley d'une présentation de G .

^{183.} Voir la partie 2.8 pour la définition d'un graphe et de sa réalisation topologique.

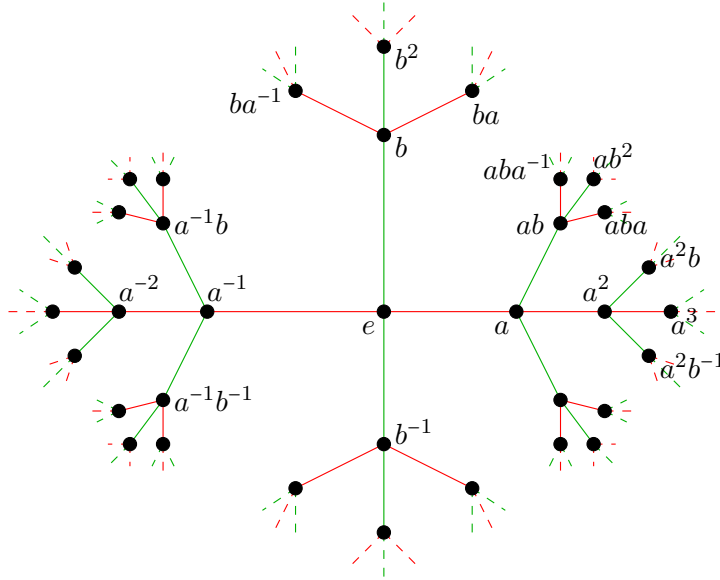
Exemples. (1) Si G est le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni de la partie génératrice $S = \{1\}$ (en notant encore par abus $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ la classe de $k \in \mathbb{Z}$ modulo $n\mathbb{Z}$), alors (la réalisation topologique de) son graphe de Cayley est un cercle. Si G est un groupe et si $S = G \setminus \{e\}$, alors son graphe de Cayley est le graphe complet d'ensemble de sommets G .



(2) Si G est le groupe $\mathbb{Z}$ muni de la partie génératrice $S = \{1\}$, alors (la réalisation topologique de) son graphe de Cayley est une droite. Si G est le groupe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ muni de la partie génératrice $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$, alors (la réalisation topologique de) son graphe de Cayley est la grille carrée de $\mathbb{R}^2$.



(3) Si S est un ensemble et si $L = L(S)$ est le groupe libre sur S , alors le graphe de Cayley de (L, S) est un arbre, par la définition du groupe libre. L'ensemble $L(S)$ des mots réduits sur $S \cup S^{-1}$ s'identifie à l'ensemble des chemins d'arêtes sans aller-retour d'origine e dans le graphe $\text{Cay}(L(S), S)$.



$\text{Cay}(L(a, b), \{a, b\})$

Remarque. Si S n'a pas d'élément d'ordre 2, il est immédiat de vérifier que le couple formé de l'action par translations à gauche de G sur $VX = G$, ainsi que de l'action de G sur EX définie par $(g', (g, h, s)) \mapsto (g'g, g'h, s)$, est une action à gauche¹⁸⁴ de G sur son graphe de Cayley $X = \text{Cay}(L(S), S)$. Le fait que l'action de G sur X soit sans inversion d'arête découle du fait que s'il existe $g', g, h \in G$ et $s \in S$ tels que $g'(g, h, s) = (h, g, s^{-1})$, alors $s = s^{-1}$, donc s serait un élément d'ordre 2.

Lemme B.4. *Pour toute partie génératrice S de G ne contenant pas e ni d'élément d'ordre 2, la projection canonique de la réalisation topologique $|X|$ du graphe de Cayley $X = \text{Cay}(G, S)$ dans l'espace topologique quotient $G \backslash |X|$ est un revêtement connexe d'un bouquet de cercles. L'action de G sur $|X|$ est propre et libre.*

Démonstration. Le caractère libre découle du fait que l'action par translations à gauche de G sur lui-même est libre, et du fait que l'action de G sur X soit sans inversion d'arête par la remarque précédente et par l'hypothèse sur S , donc aucun sommet ni milieu d'arête n'est fixé par un élément non trivial de G .

Par construction, toute arête du graphe $X = \text{Cay}(G, S)$ appartient à l'orbite d'une arête d'origine e . Les arêtes d'origine e sont en bijection avec les éléments de $S \cup S^{-1}$. Puisque G agit transitivement sur les sommets de $\text{Cay}(G, S)$, l'espace topologique quotient $G \backslash |X|$, qui est la réalisation topologique du graphe quotient (celui-ci existe, voir la remarque précédente) de $\text{Cay}(G, S)$ par G , est donc un bouquet de cercles, dont l'ensemble des cercles est en bijection avec $S \cup S^{-1}$.

Montrons que la projection canonique p de $|X|$ sur $G \backslash |X|$ est un revêtement. En effet, la préimage par p d'une arête ouverte du bouquet (qui est un ouvert de $G \backslash |X|$) est la réunion disjointe des arêtes ouvertes (qui sont des ouverts de $|X|$) dans une orbite par G . La préimage par p du complémentaire des milieux des arêtes de $G \backslash |X|$ (qui est un ouvert de $G \backslash |X|$) est la réunion disjointe, pour tout sommet $x \in VX$, de la réunion (qui est un ouvert

184. c'est la raison pour laquelle nous considérons les graphes de Cayley à droite

de $|X|$) de $\{x\}$ et des moitiés d'arêtes ouvertes d'origine x . La projection canonique p induit un homéomorphisme de chaque élément de ces réunions disjointes sur leur image dans le bouquet de cercles. Par la proposition 2.1, puisque l'espace $|X|$ est connexe et comme le graphe topologique $G \setminus |X| = |G \setminus X|$ est localement connexe et séparé, l'application continue $p : |X| \rightarrow G \setminus |X|$ est donc un revêtement.

L'assertion finale découle alors de la proposition 2.37, car l'application $g \mapsto \{x \mapsto gs\}$ est un morphisme de groupes de G dans $\text{Aut}(p)$, bijectif puisque l'action de G sur les sommets de X est libre et transitive. $\square$

B.4 Groupes définis par générateurs et relations

Soit G un groupe. Une *présentation* (de groupe) de G est un couple (S, R) , aussi noté $\langle S \mid R \rangle$, où

- S est un ensemble muni d'une application ¹⁸⁵ $j : S \rightarrow G$ telle que $j(S)$ soit une partie génératrice de G ,
- R est une partie du groupe libre $L(S)$ engendré par S ,

tel que le sous-groupe distingué $\langle\langle R \rangle\rangle$ de $L(S)$ engendré par R soit le noyau du morphisme canonique ¹⁸⁶ $L(S) \rightarrow G$ associé à (G, j) . Nous avons en particulier un isomorphisme de groupes

$$L(S)/\langle\langle R \rangle\rangle \simeq G.$$

Un groupe est dit *de présentation finie* ¹⁸⁷ s'il admet une présentation $\langle S \mid R \rangle$ telle que S et R soient finis. Si $S = \{s_i : i \in I\}$ et $R = \{r_k : k \in J\}$, nous notons aussi $\langle s_i \mid r_k = 1 \rangle$ la présentation (S, R) , et si $r_k = r_{1,k} r_{2,k}^{-1}$, nous noterons aussi $r_{1,k} = r_{2,k}$ au lieu de $r_k = 1$.

Exemples.

- (1) Le couple $(S, \emptyset)$ est une présentation du groupe libre $L(S)$.
- (2) $\langle x \mid x^n = 1 \rangle$ est une présentation du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ fini cyclique d'ordre n .
- (3) $\langle a, b \mid [a, b] = 1 \rangle$, où $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, est une présentation du groupe abélien libre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- (4) Si $\langle S \mid R \rangle$ est une présentation d'un groupe G , alors pour tout ensemble S' disjoint de S , le groupe G admet aussi pour présentation $\langle S \cup S' \mid R \cup S' \rangle$.
- (5) Un *système de Coxeter* est un couple (W, S) où W est un groupe et S une partie génératrice de W dont les éléments sont d'ordre 2 dans W . Un *groupe de Coxeter* est un groupe W qui admet une telle partie génératrice S . Si (W, S) est un système de Coxeter, pour tous les $s, t \in S$, notons $m_{st} \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ l'ordre du produit st dans W . Alors

$$\langle S \mid \forall s \in S, s^2 = 1, \forall s, t \in S \text{ tels que } m_{st} \neq \infty, (st)^{m_{st}} = 1 \rangle$$

est une présentation de W . Nous renvoyons par exemple à [Bou1, Har1, Hum] pour une démonstration de cette affirmation et pour des compléments, en particulier pour la classification à isomorphisme près des groupes de Coxeter finis.

¹⁸⁵. Il n'est pas demandé qu'elle soit injective.

¹⁸⁶. Voir la définition d'un morphisme canonique donnée par la propriété universelle des groupes libres dans le commentaire suivant la proposition B.2.

¹⁸⁷. Attention, toutes les présentations d'un groupe de présentation finie ne sont pas forcément finies. Par exemple, le groupe trivial admet comme présentation $\langle S \mid R \rangle$ où $S = \{x\}$ et $R = \{x^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice E.B.129.

- (1) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, le groupe diédral D_{2m} d'ordre $2m$ (le sous-groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$ préservant un polygone régulier à m côtés) est un groupe de Coxeter, qui admet comme présentation $\langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^m = 1 \rangle$.
- (2) Montrer que le groupe diédral infini D_∞ (le sous-groupe des isométries de $\mathbb{R}$ engendré par la translation de longueur 1 et la symétrie en l'origine $t \mapsto -t$) admet pour présentation $\langle a, b \mid a^2 = 1, aba = b^{-1} \rangle$.
- (3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n+1}$ d'ordre $(n+1)!$ (le groupe des permutations d'un ensemble de cardinal $n+1$) est un groupe de Coxeter, qui admet comme présentation

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \mid \begin{cases} \sigma_i^2 = 1 & \text{si } i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{si } i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \\ (\sigma_i \sigma_j)^2 = 1 & \text{si } i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } |i-j| > 1 \end{cases} \right\rangle.$$

- (4) Montrer (voir aussi l'exercice E.39 et [Ser]) que le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm \mathrm{id}\}$ admet comme présentation $\langle a, b \mid a^2 = b^3 = 1 \rangle$.

Tout groupe G admet au moins une¹⁸⁸ présentation : si S est une partie génératrice de G (par exemple $S = G$), soit R le noyau du morphisme canonique $L(S) \rightarrow G$. Alors $\langle\langle R \rangle\rangle = R$ et (S, R) est une présentation de G .

Un groupe de type fini étant dénombrable, il existe des groupes qui ne sont pas de type fini (le groupe additif $\mathbb{R}$ par exemple). Si S est dénombrable infini, alors $L(S)$ n'est pas de type fini. Il existe des groupes de type fini qui ne sont pas de présentation finie. En effet, il existe une infinité non dénombrable de classes d'isomorphisme de groupes de type fini (voir par exemple [Har2, page 69]). Comme l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes de présentation finie est dénombrable, il existe une infinité non dénombrable de classes d'isomorphisme de groupes de type fini qui ne sont pas de présentation finie.

Exemple. Soit $w_n = 2^{2^n} + 1$ le n -ème nombre de Fermat. Un groupe dont une présentation est

$$\langle a, b \mid [a^{w_n-2} b a^{2-w_n}, b] = 1, \forall n \in \mathbb{N} \rangle$$

n'est pas de présentation finie. Un groupe dont une présentation est

$$\langle a, b, c, d \mid a^n b a^{-n} = c^n d c^{-n}, \forall n \in \mathbb{N} \rangle$$

n'est pas de présentation finie. (Ces affirmations ne sont pas immédiates, voir par exemple [Har2].)

B.5 Indications pour la résolution des exercices

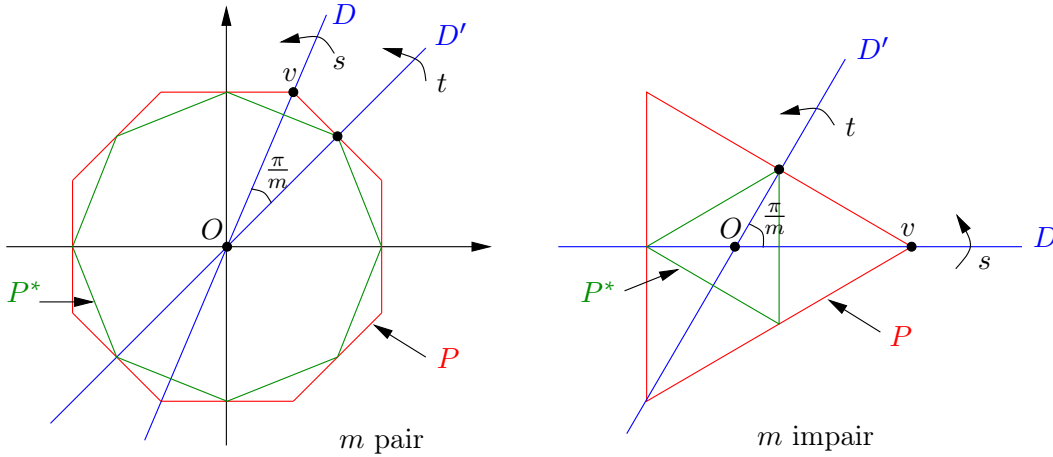
Exercice E.B.128. Supposons qu'il existe une bijection $f : S \rightarrow S'$. Alors le morphisme canonique $L(S) \rightarrow L(S')$ induit par l'application de S dans $L(S')$ définie par $s \mapsto f(s)$ est un isomorphisme, d'inverse le morphisme canonique $L(S') \rightarrow L(S)$ induit par l'application de S' dans $L(S)$ définie par $s' \mapsto f^{-1}(s')$.

Supposons que les groupes libres $L(S)$ et $L(S')$ soient isomorphes. Alors leurs abélianisés $L(S)/[L(S), L(S)]$ et $L(S')/[L(S'), L(S')]$ sont des groupes isomorphes. Ces groupes

188. et en fait une infinité de présentations, par le quatrième exemple ci-dessus

sont les groupes abéliens libres $\mathbb{Z}^{(S)}$ et $\mathbb{Z}^{(S')}$ (des suites presque nulles à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indexées par respectivement S et S'). Si les groupes abéliens libres $\mathbb{Z}^{(S)}$ et $\mathbb{Z}^{(S')}$ sont isomorphes, alors les espaces vectoriels $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(S)}$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(S')}$ sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont isomorphes. Comme ces deux espaces vectoriels admettent une base de cardinal égal au cardinal de S et de S' respectivement, ceci montre que S et de S' ont même cardinal.

Exercice E.B.129. (1) Notons s la réflexion orthogonale par rapport à la droite D passant par le barycentre O d'un polygone régulier à m côtés P et un sommet v de P . Notons t la réflexion orthogonale par rapport à la droite D' passant par le barycentre O et le milieu d'une arête de P de sommet v .



Il est élémentaire de vérifier que le groupe D_{2m} est d'ordre $2m$, qu'il est engendré par les éléments s et t , que ceux-ci sont des involutions, c'est-à-dire vérifient les relations $s^2 = t^2 = \text{id}$, et que la composition $s \circ t$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{m}$, donc vérifie $(s \circ t)^m = \text{id}$. Notons $\tilde{D}_{2m}$ le groupe de présentation $\langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^m = 1 \rangle$ et $S = \{a, b\}$. Notons $\tilde{\Theta} : L(S) \rightarrow \tilde{D}_{2m}$ le morphisme canonique du groupe libre $L(S)$ dans le groupe $\tilde{D}_{2m}$, défini par l'application $a \mapsto s$ et $b \mapsto t$ de S dans $\tilde{D}_{2m}$. Ce morphisme $\tilde{\Theta}$ est surjectif, car $\{s, t\}$ est une partie génératrice de $\tilde{D}_{2m}$. Puisque s et t vérifient les mêmes relations de la présentation ci-dessus que a et b , le morphisme $\tilde{\Theta}$ passe au quotient en un morphisme de groupes surjectif $\Theta : \tilde{D}_{2m} \rightarrow D_{2m}$.

Par les relations de $\tilde{D}_{2m}$, tout élément de $\tilde{D}_{2m}$ peut s'écrire comme un produit $ababab\dots$ de longueur $\ell \in \llbracket 0, m \rrbracket$ (donc l'élément neutre si $\ell = 0$, terminant par b si ℓ est pair et par a si ℓ est impair), ou un produit $bababa\dots$ de longueur $\ell' \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ (donc terminant par a si ℓ' est pair et par b si ℓ' est impair). Toujours par les relations, deux tels mots sont distincts. Donc $\tilde{D}_{2m}$ est aussi de cardinal $(m+1) + (m-1) = 2m$. Par conséquent, l'application surjective Θ entre deux ensembles de même cardinal est bijective, donc est un isomorphisme de groupes.

(2) Poser $\bar{a} : t \mapsto -t$ et $\bar{b} : t \mapsto t+1$ et montrer que le morphisme canonique du groupe libre $L(\{a, b\})$ dans le groupe D_∞ , défini par l'application $a \mapsto \bar{a}$ et $b \mapsto \bar{b}$ de S dans D_{2m} induit par passage au quotient un isomorphisme de groupes du groupe de présentation $\langle a, b \mid a^2 = 1, aba = b^{-1} \rangle$ dans le groupe diédral infini D_∞ .

(3) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons $\bar{\sigma}_i$ la transposition $(i \ i+1)$ de l'ensemble $\{1, \dots, n+1\}$. Il est élémentaire de vérifier que les transpositions $\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n$ vérifient les relations

- $\bar{\sigma}_i^2 = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,
- $\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_{i+1} \bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_{i+1} \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_{i+1}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et
- $(\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j)^2 = 1$ pour tous les $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $|i - j| > 1$.

Notons $\tilde{\mathfrak{S}}_{n+1}$ le groupe de présentation donnée dans l'énoncé de la question (3) et S l'ensemble $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Notons $\tilde{\Theta} : L(S) \rightarrow \mathfrak{S}_{n+1}$ le morphisme canonique du groupe libre $L(S)$ dans le groupe $\mathfrak{S}_{n+1}$, défini par l'application de S dans $\mathfrak{S}_{n+1}$ donnée par $\sigma_i \mapsto \bar{\sigma}_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ce morphisme $\tilde{\Theta}$ est surjectif, car $\{\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n\}$ est une partie génératrice de $\mathfrak{S}_{n+1}$. Puisque $\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n$ vérifient les mêmes relations de la présentation de $\tilde{\mathfrak{S}}_{n+1}$ que $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, le morphisme $\tilde{\Theta}$ passe au quotient en un morphisme de groupes surjectif $\Theta : \tilde{\mathfrak{S}}_{n+1} \rightarrow \mathfrak{S}_{n+1}$. Nous renvoyons par exemple à [Har1] pour une démonstration de l'injectivité de Θ .

C Annexe : rappels de calcul différentiel

Nous renvoyons par exemple à [Ave, Car, Die2, Pau2] pour des démonstrations et commentaires des résultats de cette partie.

Soient E et F deux espaces de Banach réels, U et V deux ouverts de E et F respectivement, $f : U \rightarrow V$ une application de classe C^1 et x un point de U .

Nous notons $df_x : E \rightarrow F$ (ou aussi $f'(x) : E \rightarrow F$) la différentielle de f en x , qui est l'unique application linéaire continue vérifiant, pour tout $v \in E$,

$$df_x(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(x + tv) .$$

Nous notons $\text{rg } f_x$ le rang de l'application linéaire df_x , c'est-à-dire (en n'utilisant qu'une seule notation pour toutes les dimensions infinies)

$$\text{rg } f_x = \dim \text{Im } df_x \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} ,$$

appelé le *rang* de f en x . C'est aussi le rang de la matrice de df_x dans des bases quelconques de E et F lorsque ceux-ci sont de dimension finie. Si $F = \mathbb{R}^q$, et si $f_1, \dots, f_q$ sont les composantes de f , alors le rang de f en x est le rang du système¹⁸⁹ de formes linéaires $(d(f_1)_x, \dots, d(f_q)_x)$ dans l'espace vectoriel dual E^* de E . Si $E = \mathbb{R}^p$, alors le rang de f en x est le rang du système¹⁹⁰ de vecteurs $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(x)\right)$ de F . Si $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^q$ et les bases sont les bases canoniques, la matrice de df_x , qui est, avec i l'indice de ligne et j l'indice de colonne,

$$Jf_x = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R}) ,$$

est appelée la *matrice jacobienne* de f en x . Le rang de f en x est égal au rang de sa matrice jacobienne en x . L'application $x \mapsto \text{rg } f_x$ est *semi-continue inférieurement*, c'est-à-dire pour tout x dans U , si $\text{rg } f_x = n$, il existe un voisinage U' de x dans U tel que, pour tout y dans U' , nous ayons $\text{rg } f_y \geq n$ (car $\mathbb{N}$ est discret). Mais il ne faut pas croire que l'application $x \mapsto \text{rg } f_x$ soit localement constante! Nous avons

$$\text{rg } f_x \leq \min\{\dim E, \dim F\} .$$

Si $E = F$ est de dimension finie, notons $jf_x : E \rightarrow \mathbb{R}$ le déterminant de l'application linéaire df_x (ou, ce qui revient au même, de la matrice jacobienne de f en x quand $E = F = \mathbb{R}^p$), appelé le *jacobien* de f en x : avec $E = F = \mathbb{R}^p$ pour la seconde égalité, nous avons

$$jf_x = \det df_x = \det Jf_x .$$

Nous dirons qu'un point $x \in U$ est un *point critique* de f si $df_x = 0$ ou, de manière équivalente, si le rang de f en x est nul. Si $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^q$, ceci équivaut à demander que la matrice jacobienne de f en x soit nulle.

Nous dirons que f est une *immersion* en x si la différentielle $df_x : E \rightarrow F$ de f en x est injective. Si E est de dimension finie, ceci équivaut à dire que $\text{rg } f_x = \dim E$. Nous dirons que f est une *immersion* si f est une immersion en tout point de U .

189. c'est-à-dire la dimension de l'espace vectoriel engendré

190. voir la note de bas de page précédente

Nous dirons que f est une *submersion* en x si la différentielle $df_x : E \rightarrow F$ de f en x est surjective. Si F est de dimension finie, ceci équivaut à dire que $\text{rg } f_x = \dim F$. Nous dirons que f est une *submersion* si f est une submersion en tout point de U .

Si E et F sont de dimension finie, nous dirons que f est une *application de rang constant au voisinage* de x (nous dirons aussi une *subimmersion* en x) si la différentielle $df_y : E \rightarrow F$ est de rang constant pour tout y dans un voisinage de x dans U . Par exemple, par la semi-continuité du rang, une immersion ou submersion en x est une application de rang constant au voisinage de x .

Soit k un élément de $(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$. Nous dirons qu'une application $f : U \rightarrow V$ de classe C^k est un C^k -*difféomorphisme* (ou *difféomorphisme* lorsque k est sous-entendu, par exemple $k = \infty$, ce qui sera souvent le cas dans les exercices) si f est bijective et si son inverse est de classe C^k . Nous dirons aussi que f est de *classe* C^0 si elle est continue, et que f est un C^0 -*difféomorphisme* si f est un homéomorphisme.

Théorème C.1. (Théorème d'inversion locale) Soient E et F deux espaces de Banach réels, U un ouvert de E , k un élément de $(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ et $f : U \rightarrow F$ une application de classe C^k . Si, en un point x de U , la différentielle $df_x : E \rightarrow F$ est bijective, alors il existe un voisinage ouvert V de x contenu dans U et un voisinage ouvert W de $f(x)$, tels que $f(V) = W$ et l'application $f|_V : V \rightarrow W$ soit un C^k -difféomorphisme.

Notons que si E et F ont la même dimension finie (par exemple $E = F = \mathbb{R}^n$ muni de n'importe quelle norme, où $n \in \mathbb{N}$), alors nous pouvons bien entendu remplacer « bijective » par « injective » dans ce résultat. Le corollaire suivant est une application immédiate.

Corollaire C.2. Soient $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Une application bijective f entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, différentiable de classe C^k , dont le jacobien ne s'annule pas, est un C^k -difféomorphisme entre ces ouverts.

Démonstration. Il suffit de montrer que la bijection inverse est aussi de classe C^k . Or être de classe C^k est une propriété locale, donc le théorème d'inversion locale conclut. $\square$

Le résultat suivant est essentiellement équivalent au théorème C.1 (voir l'exercice E.C.135).

Théorème C.3. (Théorème des fonctions implicites) Soient E , F et G trois espaces de Banach réels, U un ouvert de $E \times F$, k un élément de $(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$, et $f : U \rightarrow G$ une application de classe C^k . Si, en un point (a, b) de U tel que $f(a, b) = 0$, la différentielle partielle par rapport à la seconde variable¹⁹¹ $\partial_2 f_{(a,b)} : F \rightarrow G$ est bijective, alors il existe un voisinage ouvert V de a dans E , un voisinage ouvert W de b dans F tels que $V \times W \subset U$, et une application $g : V \rightarrow W$ de classe C^k telle que $g(a) = b$ et telle que l'assertion

$$(x, y) \in V \times W \quad \text{et} \quad f(x, y) = 0$$

soit équivalente à l'assertion

$$x \in V \quad \text{et} \quad y = g(x) .$$

191. Rappelons que les *différentielles partielles* de f en $(a, b) \in U$ sont les fonctions $\partial_1 f_{(a,b)} : E \rightarrow G$ et $\partial_2 f_{(a,b)} : F \rightarrow G$ définies par

$$\partial_1 f_{(a,b)} : v \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv, b) \quad \text{et} \quad \partial_2 f_{(a,b)} : w \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a, b + tw) .$$

De plus, nous avons

$$dg_a = -(\partial_2 f_{(a,b)})^{-1}(\partial_1 f_{(a,b)}) . \quad (66)$$

Comme précédemment, si F et G ont la même dimension finie (par exemple $F = G = \mathbb{R}^n$ muni de n'importe quelle norme, où $n \in \mathbb{N}$), alors nous pouvons remplacer « bijective » par « surjective » dans cet énoncé.

Méthodologie :

TIL-TFI

Il est légitime de soupçonner que le théorème d'inversion locale **C.1** pourrait être utile par exemple lorsqu'il s'agit d'un problème de déformation locale ou de bon choix de paramétrage local. Il est légitime de soupçonner que le théorème des fonctions implicites **C.3** pourrait être utile par exemple lorsque le problème à résoudre se présente sous forme d'équation(s) à résoudre avec des paramètres, ou d'étude de fonctions définies de manière implicite.

Dans les deux cas, l'étape cruciale est de **chercher une bonne fonction auxiliaire** à laquelle appliquer le théorème d'inversion locale **C.1** ou le théorème des fonctions implicites **C.3**, et qui sera adaptée à la résolution du problème. Voir les exercices **E.C.130** et **E.C.131** pour des exemples de mise en place de cette méthodologie.

Voici quelques applications classiques des théorèmes précédents. Fixons $p, q \leq n$ dans $\mathbb{N}$ et k un élément de $(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$. Rappelons qu'un C^k -difféomorphisme local f de $\mathbb{R}^n$ en un point x_0 est un C^k -difféomorphisme d'un voisinage ouvert de x_0 sur un voisinage ouvert de $f(x_0)$.

Les applications linéaires

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$$

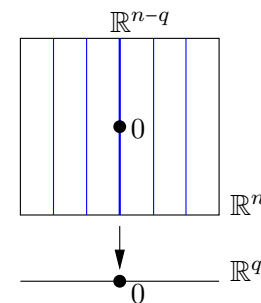
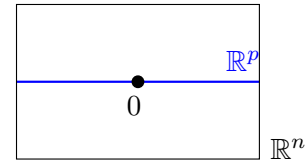
de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$,

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_q)$$

de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$, et

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ où $r \leq \min\{p, q\}$, sont respectivement une immersion, une submersion, et une application de rang constant r .



Les résultats suivants disent que ces exemples sont, localement et modulo difféomorphismes locaux, les seuls.

Corollaire C.4. (Théorème de forme normale locale des immersions) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k , qui est une immersion en 0 telle que $f(0) = 0$. Alors il existe un C^k -difféomorphisme local ψ de $\mathbb{R}^n$ en 0 tel que, au voisinage de 0, nous ayons

$$\psi \circ f(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0) . \quad \square$$

Par « au voisinage de 0 », nous entendons « il existe un voisinage U' de 0 contenu dans U tel que pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in U'$ ». En faisant agir des translations au but et à la source, nous obtenons que si U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, si $x_0 \in U$ et si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application de classe C^k , qui est une immersion en x_0 (ce qui implique que $p \leq n$), alors il existe un C^k -difféomorphisme local ψ de $\mathbb{R}^n$ en $f(x_0)$ tel que $\psi(f(x_0)) = 0$ et, pour tout x dans un voisinage assez petit de x_0 , en identifiant $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, nous ayons $\psi \circ f(x) = (x - x_0, 0)$.

Corollaire C.5. (Théorème de forme normale locale des submersions) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ une application de classe C^k , qui est une submersion en 0 telle que $f(0) = 0$. Alors il existe un C^k -difféomorphisme local φ de $\mathbb{R}^n$ en 0, tel que $\varphi(0) = 0$ et tel que, au voisinage de 0, nous ayons

$$f \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_q) . \quad \square$$

Par « au voisinage de 0 », nous entendons « il existe un voisinage U' de 0 contenu dans U tel que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in U'$ ». En faisant agir des translations au but et à la source, nous obtenons que si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si $x_0 \in U$ et si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ est une application de classe C^k , qui est une submersion en x_0 (ce qui implique que $n \geq q$), alors il existe un C^k -difféomorphisme local φ de $\mathbb{R}^n$ en 0 tel que $\varphi(0) = x_0$ et tel que, en identifiant $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q}$, pour tout (x, y) dans un voisinage assez petit de $(0, 0)$, nous ayons $f \circ \varphi(x, y) = x + f(x_0)$.

Corollaire C.6. (Théorème de forme normale locale des applications de rang constant) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ une application de classe C^k , qui est une application de rang constant $r \leq \min\{p, q\}$ sur un voisinage de 0 telle que $f(0) = 0$. Alors, il existe un C^k -difféomorphisme local ψ de $\mathbb{R}^q$ en 0 tel que $\psi(0) = 0$, et un C^k -difféomorphisme local φ de $\mathbb{R}^p$ en 0 tel que $\varphi(0) = 0$, tels que, au voisinage de 0, nous ayons

$$\psi \circ f \circ \varphi(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) . \quad \square$$

Pour tout espace de Banach réel F' , notons $\mathcal{L}(E, F')$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de E dans F' muni de la norme d'opérateur $\|u\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. Supposons que f soit de classe C^2 , c'est-à-dire que l'application $df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ définie par $x \mapsto df_x$ soit de classe C^1 . Pour tout $x \in U$, nous noterons

$$d^2 f_x = d(df)_x ,$$

que nous appellerons la *différentielle seconde* de f en x . Notons $\mathcal{L}(E, E; F)$ l'espace de Banach (pour la norme $\|u\| = \sup_{x, y \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x, y)\|}{\|x\| \|y\|}$) des applications bilinéaires continues de $E \times E$ dans F . Rappelons (voir par exemple [Pau2, Prop. 2.21]) que l'application de l'espace de Banach $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(E, E; F)$, définie par

$$u \mapsto \{(x, y) \mapsto u(x)(y)\} ,$$

est un isomorphisme linéaire isométrique, d'inverse l'application $u \mapsto \{x \mapsto (y \mapsto u(x, y))\}$. Nous identifierons donc $d^2 f$ avec l'application bilinéaire continue de $E \times E$ dans F correspondante.

Le lemme de Schwarz dit que l'application bilinéaire $d^2 f_x : E \times E \rightarrow F$ est symétrique pour tout $x \in U$:

$$\forall X, Y \in E, \quad d^2 f_x(X, Y) = d^2 f_x(Y, X) .$$

Si $g : V \rightarrow W$ est une application de classe C^2 , où W est un ouvert d'un espace de Banach G , alors pour tout $x \in U$ et $X, Y \in E$, nous avons

$$d^2(g \circ f)_x(X, Y) = d^2 g_{f(x)}(df_x(X), df_x(Y)) + dg_{f(x)}(d^2 f_x(X, Y)) . \quad (67)$$

Pour toute application h , définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe C^2 , et pour tout point $z = (z_1, \dots, z_p)$ du domaine de h , la *matrice hessienne* de h en z est

$$\text{Hess } h_z = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial z_i \partial z_j}(z) \right)_{1 \leq i, j \leq p} .$$

Si $E = \mathbb{R}^m$, $F = \mathbb{R}^n$ et $G = \mathbb{R}$, si $f_1, \dots, f_n$ sont les composantes de f , alors la formule (67) ci-dessus est équivalente au système d'égalités ci-dessous entre fonctions de U dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \forall i, j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \frac{\partial^2(g \circ f)}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{1 \leq \ell \leq n} \frac{\partial g}{\partial y_\ell} \circ f \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \frac{\partial^2 g}{\partial y_k \partial y_\ell} \circ f \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j} + \sum_{1 \leq \ell \leq n} \frac{\partial g}{\partial y_\ell} \circ f \frac{\partial^2 f_\ell}{\partial x_i \partial x_j} . \end{aligned}$$

Si de plus $x \in U$ et $\frac{\partial g}{\partial y_\ell}(f(x)) = 0$ pour $1 \leq \ell \leq n$ (c'est-à-dire si $f(x)$ est un point critique de g), alors le système d'égalités ci-dessus évalué en x se simplifie pour donner

$$\text{Hess}_x(g \circ f) = {}^t(Jf_x) (\text{Hess}_{f(x)} g) (Jf_x) . \quad (68)$$

Le lecteur prendra bien garde que cette formule n'est pas vraie sans l'hypothèse que $f(x)$ est un point critique de g .

C.1 Exercices de révision

Exercice E.C.130. (Redressement des courbes planes régulières)¹⁹² Pour tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, pour toute application $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^r , pour tout $t_0 \in I$ tel que $\dot{c}(t_0) \neq 0$, montrer qu'il existe un voisinage J de t_0 dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage ouvert U de $c(t_0)$ dans $\mathbb{R}^2$, et une application $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui est un C^r -difféomorphisme, tel que pour tout $t \in J$, nous ayons

$$\phi(c(t)) = (t - t_0, 0) .$$

Exercice E.C.131. (Suivi des racines simples de polynômes) Rappelons que $\mathbb{C}_n[X]$ désigne l'algèbre des fonctions polynomiales complexes en une indéterminée de degré au plus n (munie d'une norme quelconque). Pour tout $P_0 \in \mathbb{C}_n[X]$, pour toute racine simple z_0 de P_0 , montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de z_0 dans $\mathbb{C}$ tel que si P est assez proche de P_0 , alors P admet une et une seule racine z_P dans V , et

$$z_P = z_0 - \frac{P(z_0)}{P'_0(z_0)} + o(P - P_0) ,$$

où P'_0 est le polynôme dérivé de P_0 .

¹⁹². Voir le théorème 4.5 pour une version plus générale.

Exercice E.C.132. Soient $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et f une application de classe C^1 d'un ouvert V non vide de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, injective. Montrer que $n \leq m$ et que l'application linéaire df_x est injective pour tout x appartenant à un ouvert dense de V . L'application df_x est-elle nécessairement injective pour tout $x \in V$?

Exercice E.C.133. Montrer que le sous-ensemble $A = \{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$ n'est pas l'image de $\mathbb{R}$ par une immersion C^1 .

Donner un exemple d'une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ dont l'image est A .

Exercice E.C.134. Soient U, V, W des ouverts d'espaces de Banach E, F, G respectivement. Soient $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow W$ deux applications. Si f et g sont des immersions, submersions ou applications de rang constant, que pouvons-nous dire de $g \circ f$?

Exercice E.C.135. Montrer, en dimension finie et en classe de différentiabilité C^1 , l'équivalence entre le théorème C.1 d'inversion locale et le théorème C.3 des fonctions implicites.

Exercice E.C.136. Démontrer les corollaires C.4, C.5, C.6 à partir des théorèmes C.1 et C.3.

Exercice E.C.137. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Considérons l'application déterminant $\det$ définie sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles de taille $n \times n$; elle est de classe C^∞ car polynomiale.

- (1) Caractériser les matrices en lesquelles la différentielle de $\det$ est non nulle. Montrer que si A est inversible, alors

$$d(\det)_A : H \mapsto \det A \operatorname{tr}(A^{-1}H) .$$

- (2) Soit $X = \operatorname{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$. Montrer que, pour tout $A \in X$, il existe un voisinage ouvert V de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{R}^{n^2-1}$ et une application $f : U \rightarrow V$ de classe C^∞ qui est un homéomorphisme sur son image et qui possède une différentielle injective en 0, telle que $f(0) = A$ et $f(U) = V \cap X$.
- (3) Montrer le même résultat pour X l'ensemble des matrices de rang $n - 1$.
- (4) Montrer que ce résultat n'est pas valable pour l'ensemble des matrices de rang $\leq n - 1$.
On pourra par exemple considérer la matrice nulle.

Exercice E.C.138. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 propre, c'est-à-dire (voir aussi la partie A.4.5 de l'appendice A) telle que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty .$$

Supposons que f admette (au moins) deux minima stricts (distincts) a et b . Le but de l'exercice est de montrer que f possède un troisième point critique.

- (1) Montrer que le résultat est évident si $n = 1$, ou si $n \geq 2$ et $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Dans la suite, nous supposons donc $n \geq 2$ et $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Nous supposons que f n'admet pas d'autre point critique et nous voulons aboutir à une contradiction.

- (2) Pour tout m dans $\mathbb{R}$, soit K_m la réunion des compacts connexes contenant a et b sur lesquels f est majorée par m . Montrer que K_m est fermé. Montrer qu'il existe M dans $\mathbb{R}$ tel que $K_M \neq \emptyset$ et $K_m = \emptyset$ pour tout $m < M$.

- (3) Montrer en utilisant le théorème des fonctions implicites que l'intérieur de K_M est connexe.
- (4) Conclure.

Exercice E.C.139. Dans cet exercice, fixons un élément n de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- (1) Montrer que l'application exponentielle des matrices

$$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

est une application C^∞ , et montrer que $d\exp_0 = \mathrm{Id}$.

- (2) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notons L_M et R_M les opérateurs de multiplication à gauche et à droite par M , agissant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathrm{ad} M = L_M - R_M : X \mapsto MX - XM$. Montrer que $d\exp_M = \sum_{p,q \geq 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!}$, puis en déduire que

$$\exp(-M) d\exp_M = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\mathrm{ad} M)^k}{(k+1)!}.$$

- (3) Montrer que $d\exp_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\mathrm{ad} M$ n'a pas de valeur propre complexe de la forme $2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
- (4) Notons $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathfrak{so}(n)$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application exponentielle envoie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{so}(n)$ dans $\mathrm{SO}(n)$.
- (5) Montrer que $\exp : \mathfrak{so}(n) \rightarrow \mathrm{SO}(n)$ est surjective, mais que $\exp : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ne l'est pas (on pourra vérifier qu'une matrice dans l'image de l'exponentielle est de trace au moins -2).
- (6) Montrer que l'exponentielle est un C^∞ -difféomorphisme entre l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles et l'ouvert dans cet espace formé des matrices symétriques réelles définies positives.

C.2 Indications pour la résolution des exercices

Correction de l'exercice E.C.130 Il est légitime d'envisager d'utiliser le théorème d'inversion locale C.1, car ce problème de redressement est un problème de déformation locale.

Quitte à effectuer des translations à la source et au but, nous pouvons supposer que $t_0 = 0$ et $c(t_0) = 0$. Soit $v \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non colinéaire à $\dot{c}(t_0)$, considérons l'**application auxiliaire** $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^r définie par $(t, s) \mapsto c(t) + s v$, qui vérifie $f(0, 0) = 0$. Ses dérivées partielles en $(0, 0)$ vérifient $\frac{\partial f}{\partial t}(0, 0) = \dot{c}(t_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = v$. Par conséquent, la matrice jacobienne de f en $(0, 0)$ est de rang 2, donc inversible. Par le théorème d'inversion locale C.1, il existe un voisinage ouvert U de 0 et un C^r -difféomorphisme¹⁹³ $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\psi \circ f(t, s) = (t, s)$ pour (t, s) assez proche de 0. Par conséquent $\psi \circ c(t) = \psi \circ f(t, 0) = (t, 0)$ pour tout t assez proche de $t_0 = 0$.

193. Nous pouvons toujours supposer que son image est $\mathbb{R}^2$ tout entier, quitte à prendre une restriction du C^r -difféomorphisme ψ fourni par le théorème d'inversion locale de sorte que son image soit un ouvert difféomorphe à $\mathbb{R}^2$, et à post-composer ψ par un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice E.C.131 Il est légitime d'envisager d'utiliser le théorème des fonctions implicites C.3, car trouver des racines de polynômes qui varient est fondamentalement un problème de résolution d'équations à paramètre.

Considérons l'**application auxiliaire** $f : \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(P, z) \mapsto P(z)$, appelée la *fonction d'évaluation des polynômes*. Elle est lisse, car polynomiale en les coefficients de P et la variable z . Nous avons $f(P_0, z_0) = 0$ car z_0 est une racine de P_0 . La seconde différentielle partielle $\partial_2 f_{(P_0, z_0)}$, qui est l'application linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $h \mapsto P'_0(z_0)h$, est inversible car z_0 est une racine simple de P_0 donc $P'_0(z_0) \neq 0$. Par le théorème des fonctions implicites C.3, il existe un voisinage ouvert V' de P_0 dans $\mathbb{C}_n[X]$, un voisinage ouvert V'' de z_0 dans $\mathbb{C}$ et une application lisse $g : V' \rightarrow V''$ telle que pour tout $(P, z) \in V' \times V''$, nous avons $P(z) = 0$ si et seulement si $z = g(P)$. Donc $g(P)$ est l'unique racine de P dans V'' .

Puisque la fonction f est linéaire en la première variable, sa différentielle partielle en la première variable est $\partial_1 f_{(P_0, z_0)} : H \mapsto H(z_0)$. Par la formule de Taylor de g et la formule (66), nous avons donc

$$\begin{aligned} g(P) &= g(P_0) + dg_{P_0}(P - P_0) + o(P - P_0) = z_0 - \frac{(P - P_0)(z_0)}{P'_0(z_0)} + o(P - P_0) \\ &= z_0 - \frac{P(z_0)}{P'_0(z_0)} + o(P - P_0). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice E.C.136 (1) Montrons le corollaire C.4. Soient $f_1, f_2, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de f . Par l'hypothèse, le rang de f en 0 est égal à $p \leq n$. Quitte à permuter les coordonnées de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^n$, nous pouvons supposer que la matrice $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) \right)_{1 \leq i, j \leq p}$ est inversible. En posant $x = (x_1, \dots, x_p)$, considérons la fonction auxiliaire

$$g : (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_{n-p}) \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x), y_1 + f_{p+1}(x), \dots, y_{n-p} + f_n(x)), \quad (69)$$

définie sur un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Alors $g(0) = 0$ et la matrice jacobienne $Jg_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & \text{id} \end{pmatrix}$ de g en 0 est inversible. Par le théorème d'inversion locale C.1, il existe un voisinage ouvert W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $g|_W$ soit un difféomorphisme de W sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors $\psi = (g|_W)^{-1}$ convient, en prenant $y_1 = \dots = y_{n-p} = 0$ dans la formule (69).

(2) Montrons le corollaire C.5. Soient $f_1, f_2, \dots, f_q$ les fonctions coordonnées de f . Par l'hypothèse, le rang de f en 0 est égal à $q \leq n$. Quitte à permuter les coordonnées de l'espace de départ $\mathbb{R}^n$, nous pouvons supposer que la matrice $B = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) \right)_{1 \leq i, j \leq q}$ est inversible. Considérons la fonction auxiliaire

$$g : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_q(x), x_{q+1}, \dots, x_n), \quad (70)$$

définie sur un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Alors $g(0) = 0$ et la matrice jacobienne $Jg_0 = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}$ de g en 0 est inversible. Par le théorème d'inversion locale C.1, il existe un voisinage ouvert W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $g|_W$ soit un difféomorphisme de W sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors $\varphi = (g|_W)^{-1}$ convient, car pour tout $x' \in \mathbb{R}^n$, les q coordonnées de $f \circ \varphi$ sont les q premières coordonnées de x par la formule (70).

Index

- action, 49, 389
 - cocompacte, 38
 - continue, 36
 - libre, 390
 - par translation à gauche, 390
 - propre, 37
 - proprement discontinue, 37
 - sans inversion, 49
 - transitive, 390
 - à droite, 389
- adhérence, 354
- aire, 318
- Alexandrov, 376
- aller-retour, 49
- anneau, 18
- anneau hawaïen, 60
- anse, 263
- antihermitienne, 149
- antisymétriques, 149
- appauvrissement de structure, 152
- application
 - continue, 356
 - en un point, 356
 - d'attachement, 106, 229
 - de classe C^k , 137, 153, 183
 - en un point, 137
 - de Gauss, 161, 198, 311, 321
 - de rang constant, 138, 153
 - de transition, 152
 - fermée, 356
 - graphe, 37
 - impaire, 198
 - isotope, 258
 - lisse, 137
 - lue dans des cartes, 153
 - lue dans des paramétrages locaux, 137
 - nulle à l'infini, 376
 - ouverte, 356
 - propre, 377
 - tangente, 143
 - en un point, 143
- arbre
 - combinatoire, 49
 - topologique, 50
- arête, 49, 230
 - opposée, 49
 - ouverte, 50
- atlas de cartes, 151
 - quotient, 157
- automorphisme
 - de revêtements, 32
- base, 31
 - d'ouverts, 353
 - directe, 189
 - dénombrable, 353
 - positive, 189
- $\mathbb{B}_n$, 379
- bord, 183, 184
- boule unité, 379
- bouquet
 - de cercles, 366
 - de sphères, 366
- bouteille de Klein, 68
- Cantor, 360
- caractéristique d'Euler, 230, 231, 233
- cardinal, 367
- carte, 152
 - locale, 152
- caténoïdes, 328
- cellule, 229
- cercle osculateur, 291, 294
- champ
 - devecteurs
 - invariant, 240
 - périodique, 240
- champ de vecteurs, 142, 218
 - complet, 221
 - image réciproque, 219, 239
 - le long d'une courbe, 278, 333
 - normaux, 303
 - nul, 219
- changement de carte, 152
- chemin, 10
 - composé, 10
 - constant, 10
 - d'arêtes, 49
 - extrémité d'un, 10
 - inverse, 10
 - origine d'un, 10
- chemins
 - composables, 10
 - homotopes, 10
- clothoïde, 292
- codimension, 134
- collier, 260
- commutateur, 267
- compactifié d'Alexandrov, 376
- C^k -compatibles, 152
- 2-complexe de Cayley, 107
- composante connexe, 356
 - par arcs, 357
- composition des chemins, 10

- concaténation, 10
- cône, 121, 364
- connexe, 356
- contractile, 8
 - localement, 9
- coordonnées
 - homogènes, 155
 - sphériques, 160
- courbe, 129, 134, 152
 - de Fermat, 241
 - de Peano, 180
 - elliptique, 161
 - gauche, 290
 - bi-régulière, 293
 - intégrale, 221
 - maximale, 221
 - paramétrée par longueur d'arc, 186, 290
 - plane, 290
 - régulière, 289
 - tracée sur une sous-variété, 140
- courbe fermée simple
 - séparante, 278
- courbe fermée simple
 - essentielle, 278
- courbe fermée simple, 278
 - préservant l'orientation, 278
 - renversant l'orientation, 278
- courbure, 290, 293
 - de Gauss, 307
 - géodésique, 333
 - moyenne, 307
 - principales, 306
- $\mathbb{CP}_n$, 380
- critère pour base d'ouverts, 353
- crochet de Lie, 240
- cube, 183
- CW-complexe fini, 230
- $\mathcal{C}(X, Y)$, 378
- cycle, 49
- cylindre, 18
- décomposition cellulaire, 229
- décomposition polaire, 36
- degré, 19, 194, 197
- degré, 73
- demi-espace, 183
- dénombrable à l'infini, 375
- dense, 354
- diagramme
 - d'entrelac, 200
 - de noeud, 199
- difféomorphisme, 138, 153, 183, 401
 - local, 138, 402
- différentielle, 215
 - partielle, 336, 401
 - seconde, 403
- dimension, 129, 134
- discriminant, 161
- distance
 - uniforme, 379
- distance riemannienne, 332
- domaine, 152
- décomposition en pantalons, 280
- dérivation, 224
 - de Lie, 224
- écrasement, 365
- énergie, 333
- engendrer, 393
- ensemble
 - bien ordonné, 367
 - ordonné, 367
 - isomorphe, 367
 - totalelement ordonné, 367
 - triadique de Cantor, 360
- entrelac, 200
 - celtique, 200
 - de Hopf, 201
 - isotopes, 200
 - trivial, 200
- équation
 - d'Euler-Lagrange, 336
 - de Frenet, 291
 - de Ricatti, 248
- équivalence d'homotopie, 9
- espace
 - des feuilles, 132
 - des orbites, 389
 - euclidien standard, 147
 - hermitien standard, 147
 - lenticulaire, 41
 - normal, 302
 - projectif
 - complexe, 380
 - réel, 155, 380
 - pseudo-euclidien standard, 148
 - total, 31
 - vectorel
 - orienté, 189
 - topologique, 8
- espace topologique, 352
 - à base dénombrable, 353
 - σ -compact, 375
 - compact, 372
 - connexe, 356
 - par arcs, 357

- contractile, 8
- dénombrable à l'infini, 375
- discret, 353
- grossier, 353
- homéomorphes, 353
- localement
 - compact, 375
 - connexe, 356
 - connexe par arcs, 357
- métrisable, 355
- normal, 379
- paracompact, 375
- semilocallement simplement connexe, 60
- séparé, 355
- simplement connexe, 9
- séparable, 381
- totalelement discontinu, 381
- extrémité, 49
- famille inductive, 94
- fermé, 352
- fermée, 356
- fibre, 31
- fibré
 - des endomorphismes, 308
 - normal, 241
 - tangent, 142
- fixateur, 389
- flot local, 220
 - complet, 221
 - maximal, 221
- fonction
 - de hauteur, 207
 - de Morse, 213
- forme fondamentale
 - première, 304
 - seconde, 306, 310
 - directionnelle, 306
 - scalaire, 311
 - troisième, 311
- forme hessienne, 209
- forme normale, 98
- formule
 - de Meusnier, 344
- formule d'additivité
 - de la caractéristique d'Euler, 271
- frontière, 354
- genre, 265
- géodésique, 334
- gradient, 227, 242
- graphe, 132
 - combinatoire, 49
- connexe, 49
- de Cayley, 393
- localement fini, 49
- orienté, 49
- quotient, 49
- topologique, 50
- groupe
 - de Baumslag-Solitar, 111
 - de Coxeter, 396
 - de Galois, 59
 - de Heisenberg, 240
 - de Poincaré, 12
 - de présentation finie, 396
 - des rotations, 147
 - discret, 35
 - diédral, 88, 109, 124
 - infini, 109
 - fondamental, 12
 - libre, 392
 - sur S , 391
 - linéaire, 35
 - modulaire, 97
 - orthogonal, 35, 147
 - spécial linéaire, 35
 - spécial linéaire, 147
 - spécial orthogonal, 35, 147
 - spécial unitaire, 35, 148
 - symplectique, 161
 - topologique, 35
 - unitaire, 35, 147
- G_x , 389
- hélice, 302
 - circulaire, 298
 - dextre, 299
 - senestre, 299
- homéomorphisme, 353
 - local, 33
- homotope, 8, 12
 - relativement, 8
- C^∞ -homotopes, 194
- homotopie, 8, 10
 - relative, 8, 10
- C^∞ -homotopie, 194
- hypersurface, 134
 - de niveau, 159
- hélicoïde, 330
- identité de Jacobi, 240
- immersion, 33, 138, 153, 400
- indice, 210, 239
- inductif, 373
- intérieur, 354

- invariante par homéomorphismes, 353
- isolé, 358
- isomorphe, 32, 35, 138, 367
- isomorphisme
 - de revêtements, 32
 - de CW-complexes, 230
 - de dualité, 227
 - de groupes topologiques, 35
- isométrie riemannienne, 343
- isotope, 195
- isotopie, 195, 258
 - plate au bord, 258
- jacobien, 400
- lacet, 12
 - homotopes, 12
- lemme
 - de Du Bois-Reymond, 337
 - de Morse, 211
- limite, 368
 - à droite, 368
 - à gauche, 368
 - en $+\infty$, 368
 - en $-\infty$, 368
 - inductive, 94
- localement
 - compact, 375
 - contractile, 9
 - fermée, 135, 381
- longue droite, 132
- longueur, 290, 391
- majorant, 373
- matrice
 - hessienne, 209, 404
 - jacobienne, 400
- maximal, 373
- méplat, 324
- mesure d'aire, 318
- mesure nulle, 179
- métrisable, 355
- moins fine, 357
- morphisme
 - canonique, 94–96, 391
 - de revêtements, 32
 - composé, 32
 - identité, 32
 - de CW-complexes, 230
 - de groupes topologiques, 35
- mot, 391
 - réduit, 98, 391
 - vide, 391
- méridienne, 319
- niveau, 207
 - critique, 207
 - régulier, 207
- noeud, 199
- nombre d'enlacement, 199
- non dégénéré, 209, 210
- normal, 379
- normalisateur, 55
- nulle part dense, 354
- ombilic, 324
- opérateur
 - de Weingarten, 311
- opérateur de Weingarten, 308, 310
- orbite, 389
- ordinal, 367
 - dénombrable, 367
- ordre, 367
 - bon, 367
 - lexicographique, 367
 - total, 367
- orientable, 190
- orientation, 49, 189, 190
 - canonique, 189
 - par la direction sortante, 190
 - produit, 189, 191
- origine, 49
- ouvert, 352
 - élémentaire, 359
- ouverte, 356
- pantalon, 266, 280
- paracompact, 375
- paramétrage
 - de Hopf, 160
- paramétrage local, 134, 184
 - orienté, 190
- partie
 - connexe, 356
 - par arcs, 357
- partie compacte, 372
- partie génératrice, 393
 - standard, 392
- partition de l'unité, 129
 - subordonnée, 130
- passage au quotient, 390
- peigne, 17
- $\pi_0 X$, 46
- $\pi_1(X, x)$, 12
- plan osculateur, 293
- plongement, 139
 - de Veronese, 162
- plus fine, 357

- $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, 380
- $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, 380
- point
 - base, 12
 - critique, 178, 400
 - non dégénéré, 210
 - de croisement, 174, 199
 - de rebroussement, 172
 - elliptique, 323
 - focal, 303
 - hyperbolique, 323
 - parabolique, 324
 - selle, 273
 - à l'infini, 376
- pôle
 - Nord, 154, 365
 - Sud, 154, 365
- prébase, 353
- présentation de groupe, 396
- préserver
 - l'orientation, 189, 190
 - une partie, 389
- produit
 - amalgamé, 96
 - libre, 96, 97
 - vectériel, 203
- projection
 - stéréographique, 154
- projection canonique, 142, 215
- projection stéréographique, 376
- propre, 377
- propriété universelle, 94, 95, 391
- $\overline{\mathbb{R}}$, 354
- rang, 400
 - d'un groupe libre, 392
- rayon de courbure, 291, 294
 - principal, 307
- réalisation topologique, 49
- recollement, 366
 - de cellules, 229
- recouvrement, 371
 - fermé, 371
 - localement fini, 358
 - mauvais, 374
 - ouvert, 371
- relation d'équivalence engendrée, 364
- relevé, 42
- relèvement, 42, 73
- reparamétrage, 290
- repère de Frenet, 290, 293
- rétracte, 9
 - fort par déformation, 9
 - par déformation, 9
- rétraction, 9
 - forte par déformation, 9
 - par déformation, 9
 - radiale, 10
- revêtement, 31
 - à n feuillets, 33
 - associé, 64
 - connexe, 64
 - d'orientation, 193
 - fini, 33
 - galoisien, 59
 - trivial, 32
 - universel, 60
- Riesz, 375
- $\mathbb{R}P_n$, 380
- ruban de Möbius, 18
 - âme, 18
- résultant, 172
- saturé, 362
- section, 42
- segment initial, 368
- selle de cheval, 211, 325
- semi-continue inférieurement, 400
- semilocalement simplement connexe, 60
- séparabilité, 375
- séparation, 375
- séparé, 355
- simplement connexe, 9
- $\mathbb{S}_n$, 379
- somme
 - amalgamée, 95, 97
 - disjointe, 361
 - pointée, 365
- somme connexe, 264
- sommet, 49, 50, 121, 230, 365
- sous-espace
 - affine tangent, 142
 - topologique, 358
 - vectériel tangent, 142
- sous-groupe
 - engendré par, 393
 - distingué, 393
- sous-niveau, 207
- sous-recouvrement, 371
- sous-variété, 134
 - à bord, 184
 - immergée, 146
 - lisse, 134
 - produit, 144
 - topologique, 136
- sphère, 145, 379

- n -squelette, 230
- stabilisateur, 389
 - point par point, 389
- subdivision barycentrique, 50
- subimmersion, 138, 401
- submersion, 33, 138, 153, 401
- suite exhaustive, 375
- support, 129, 222
- surface, 129, 134, 152
 - chapeau croisé, 156
 - d'Enneper, 331
 - de Boy, 156
 - de Costa, 331
 - de révolution, 160, 319
 - de Scherk, 330
 - découpée, 279
 - isométriques, 343
 - minimale, 328
- suspension, 365
- symbole de Christoffel, 334
- système fondamental de voisinages, 354
- système de Coxeter, 396
- séparable, 381
- théorème
 - d'invariance du domaine, 127
 - d'inversion locale, 401
 - de Borsuk-Ulam, 20, 198
 - de Brouwer, 127, 188
 - de dérivation des fonctions composées, 143
 - de forme normale
 - des applications de rang constant, 403
 - des applications de rang constant, 138
 - des immersions, 138, 402
 - des submersions, 138, 403
 - de Gauss, 342
 - de Gauss-Bonnet, 342
 - de Jordan, 279
 - de l'arbre et de l'écorce, 356
 - de Lancret, 302
 - de peignage des sphères, 196
 - de Poincaré-Hopf, 249
 - de Puiseux, 298
 - de reconnaissance des sphères, 237
 - de Riesz, 375
 - de Riesz-Fréchet, 307
 - de Sard, 180
 - de Schreier, 51
 - de Tychonov, 374
 - de van Kampen, 100
 - de Whitney, 158
 - de Zorn, 373
 - des fonctions implicites, 401
 - du point fixe, 188
 - du redressement, 225
- $\mathbb{T}^n$, 363
- topologie, 352
 - C^∞ , 216
 - C^1 , 336
 - compacte-ouverte, 378
 - de l'ordre, 368
 - de la convergence uniforme, 379
 - discrète, 353
 - engendrée, 353
 - faible (définie par des sous-espaces), 361
 - finale, 360
 - grossière, 353
 - induite, 358
 - induite par une distance, 353
 - initiale, 357
 - moins fine, 357
 - plus fine, 357
 - produit, 359
 - quotient, 362
 - somme disjointe, 361
- tore, 145, 363
 - de révolution, 146
- torsion, 293
- totalelement discontinu, 381
- totalelement ordonnée, 373
- transitive, 390
- translation
 - à droite, 35
 - à gauche, 35
- transverse, 199, 213, 214
 - en un point, 214
- trivialisation locale, 31
- Tychonov, 374
- type d'homotopie, 9
- $\mathcal{V}(x)$, 354
- valeur
 - critique, 178
 - d'adhérence, 370
 - régulière, 178
- variété, 128
 - de Stiefel, 161
 - différentielle, 152
 - lisse, 152
 - orientable, 190
 - orientée, 190
 - produit, 191
 - quotient, 157
 - topologique, 9, 128
 - non paracompacte, 131
 - non séparée, 131

- vecteur
 - normal, 302
 - tangent, 140
- voisinage
 - d'un point, 354
 - d'une partie, 354
 - distingué, 31
 - tubulaire, 260
- Zorn, 373

Références

- [Ada] C. Adams. *The Knot Book*. American Mathematical Society, 2004.
- [Ave] A. Avez. *Calcul différentiel*. Masson, 1983.
- [Ber] M. Berger. *Géométrie. Vol. 2 : espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères*. Cedric/Fernand Nathan, 1979.
- [BG] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. 2nd ed, PUF, 2012.
- [Bou1] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie : chap. 4, 5 et 6*. Masson, 1981.
- [Bou2] N. Bourbaki. *Topologie générale*. chap. 1 à 4, Hermann, 1971.
- [Car] H. Cartan. *Cours de calcul différentiel*. Hermann, 2nde éd. 1977.
- [Cha] M. Chaperon. *Calcul différentiel et calcul intégral 3e année : Cours et exercices avec solutions*. Dunod, 2008.
- [Coh] D. Cohn. *Measure theory*. Birkhäuser, 1980.
- [DaL] R. Dautray and J.-L. Lions. *Méthodes variationnelles Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Volume 4*. Elsevier, 1988.
- [Dav] G. David. *Should we solve Plateau’s problem again ?* In "Advances in analysis : the legacy of Elias M. Stein", pp 108–145, Princeton Math. Ser. **50**, Princeton Univ. Press, 2014.
- [Die1] J. Dieudonné. *A history of algebraic and differential topology 1900-1960*. Birkhäuser, 1990.
- [Die2] J. Dieudonné. *Éléments d’analyse t. 1 : fondements de l’analyse moderne*. Gauthier-Villars, 1971.
- [Die3] J. Dieudonné. *La géométrie des groupes classiques*. Erg. Math. Grenz., Springer Verlag, 1971.
- [Dix] J. Dixmier. *Topologie générale*. PUF, 1981.
- [doC] M. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Revised & updated 2nd ed. Dover Publications, 2016.
- [Dou] A. Douady. *Variétés à bord anguleux et voisinages tubulaires, Théorèmes d’isotopie et de recollement, Arrondissement des arêtes*. Séminaire Henri Cartan (Topologie différentielle), 14eme année, 1961-1962, Exposés 1,2,3.
- [Dug] J. Dugundji. *Topology*. Wm. C. Brown, 1989.
- [ET] I. Ekeland and R. Temam. *Convex Analysis and Variational Problems*. Classics Applied Math., SIAM 1987.
- [Eva] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. Grad. Stud. Math **19**, Amer. Math. Soc. 2010.
- [Fed] H. Federer. *Geometric measure theory*. Springer-Verlag, 1969.
- [Fra] S. Francis. *A topological picturebook*. Springer Verlag, 1988.
- [GaHL] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian geometry*. Springer Verlag, 1990.
- [GF] I. M. Gelfand and S. F. Fomin. *Calculus of variations*. Dover 2000.
- [God1] C. Godbillon. *Éléments de topologie algébrique*. Hermann, 1971.
- [God2] C. Godbillon. *Feuilletages. Études géométriques*. Prog. Math **98**. Birkhäuser, 1991.
- [Gra] A. Gramain. *Topologie des surfaces*. Presse Univ. France 1971.
- [Har1] P. de la Harpe. *An invitation to Coxeter groups*. In “Group theory from a geometrical viewpoint” (E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky eds.), 193–253, World Scientific, 1991.
- [Har2] P. de la Harpe. *Topics in geometric group theory*. Chicago Univ. Press, 2000.
- [Hat] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge Univ. Press, 2002.
<http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>.

- [Hei] J. Heinonen. *Lectures on analysis on metric spaces*. Universitext, Springer Verlag, 2001.
- [Hel] S. Helgason. *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*. Academic Press, 1978.
- [Hir] M. Hirsch. *Differential topology*. Grad. Texts Math. **33**, Springer Verlag, 1976.
- [Hum] J. E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge Univ. Press, 1990.
- [Ker] B. Kerékjártó. *Vorlesungen über Topologie*. Springer Verlag 1923.
- [KM] M. Kervaire and J. Milnor. *Groups of homotopy spheres I*. Ann. Math. **77** (1963) 504-537.
- [Kri] J.L. Krivine. *Théorie axiomatique des ensembles*. PUF, 1969.
- [Laf] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. Press. Univ. Grenoble, 1996.
- [Lan] S. Lang. *Algebra*. Addison-Wesley, 1965.
- [Mil1] J. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Univ. Press Virginia, Charlottesville, 1965.
- [Mil2] J. Milnor. *Morse theory*. Ann. Math. Stud. **51**, Princeton Univ. Press, 5th ed., 1973.
- [MnT] N. Mneimné and F. Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann, 1986.
- [Moi] E. Moise. *Geometric topology in dimension 2 and 3*. Springer Verlag, 1977.
- [Olu] P. Olum. *Non-abelian cohomology and van Kampen's theorem*. Ann. Math. **68** (1958) 658-668.
- [Pau1] F. Paulin. *Géométrie différentielle élémentaire*. Notes de cours de première année de master, Ecole Normale Supérieure, 2007, voir https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~paulin/notescours/liste_notescours.html.
- [Pau2] F. Paulin. *Topologie, analyse, calcul différentiel*. Notes de cours de troisième année de licence, Ecole Normale Supérieure, 2009, voir http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_analyseI.pdf.
- [Pau3] F. Paulin. *Topologie algébrique élémentaire*. Notes de cours de première année de master, Ecole Normale Supérieure, 2010, voir http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_topoalg.pdf.
- [Pau4] F. Paulin. *Groupes et géométries*. Notes de cours de seconde année de master, Université Paris-Sud, 2014, voir http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_georiem.pdf.
- [Pau5] F. Paulin. *Algèbre et géométrie euclidienne et hermitienne*. Cours de préparation à l'agrégation de mathématique, Université Paris-Saclay, 2020-2024, voir https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~paulin/notescours/cours_Agregation.pdf.
- [Poi] H. Poincaré. *Oeuvres complètes, tome II*. Gauthier-Villars, 1952.
- [Rey] E. Reyssat. *Quelques aspects des surfaces de Riemann*. Prog. in Math. **77**, Birkhauser, 1989.
- [Ric] I. Richards. *On the classification of noncompact surfaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963) 259-269.
- [Rie] G. F. B. Riemann. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Gesam. math. Werke, Springer Verlag, 1990.
- [Rol] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish **7**, 1976.
- [Sag] H. Sagan. *Space filling curves*. Springer Verlag, 1994.
- [Ser] J.-P. Serre. *Arbres, amalgames, SL_2* . 3ème éd. corr., Astérisque **46**, Soc. Math. France, 1983.
- [Spa] E. Spanier. *Algebraic topology*. Tata McGraw-Hill, 1981.

- [Spi] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*. 2nd ed., Publish or Perish, 1979.
- [Str] M. Struwe. *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*. Erg. Math. Grenz. **34**, Springer Verlag, 2008.
- [Whi] H. Whitney. *A function not constant on a connected set of critical points*. Duke Math. J. **1** (1935) 514–517.