Compléments de théorie spectrale et d'analyse harmonique

Frédéric Paulin

Cours de deuxième année du
Magistère de mathématiques de l'Université Paris-Sud
et de première année du Master de l'Université Paris-Saclay
Mathématiques et applications, voie Jacques Hadamard

Année 2018-2019

Département de Mathématiques d'Orsay

Table des matières

[1]

1. Je remercie les étudiants de l'année 2011-2012 pour leurs corrections (en particulier Lucile Devin et Laure Pédèches), ceux de l'année 2013-2014 (en particulier Léo Zaradzki), ceux de l'année 2016-2017 (en particulier Valéry Dewil), et Zhangchi Chen en 2015-2016 pour sa correction du problème E.64.

1 Théorie spectrale des opérateurs bornés des espaces de Hilbert [2]

Les références globales recommandées pour ce chapitre sont [Rud2, Hal, Lev]. Nous conseillons au lecteur l'usage de l'index final pour retrouver facilement à quel endroit une notion a été définie.

1.1 Rappels de terminologie sur les espaces vectoriels normés

Nous renvoyons à [Dix, Die1, Pau] pour les démonstrations non rappelées dans cette partie. Si X est un espace métrique, la distance de X sera notée d, à défaut d'une notation particulière.

Espaces vectoriels normés et applications linéaires continues.

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de sa valeur absolue usuelle. Nous noterons $\mathbb{K}^\times$ le groupe multiplicatif $(\mathbb{K} - \{0\}, \times)$ de $\mathbb{K}$. Dans ce texte, toutes les algèbres sont des algèbres sur $\mathbb{K}$ *unifères* (c'est-à-dire munies d'une unité (élément neutre pour la multiplication) notée 1 ou id) et les morphismes d'algèbres préservent les unités. Si E est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, nous appellerons parfois *topologie forte* sur E la topologie induite par la norme de E (ceci pour la distinguer d'éventuelles autres topologies « plus faibles » qui peuvent être introduites sur E). Sauf mention explicite du contraire, tout espace vectoriel normé réel ou complexe sera muni de sa topologie forte.

Une *algèbre normée* sur $\mathbb{K}$ est une algèbre A sur $\mathbb{K}$ munie d'une norme $\|\cdot\|$, telle que

$$\|uv\| \leq \|u\|\,\|v\| \tag{1}$$

pour tous les u, v dans A. Une *algèbre de Banach* [2] sur $\mathbb{K}$ est une algèbre normée complète sur $\mathbb{K}$.

Exemple. Si X est un espace métrique compact non vide, notons $\mathscr{C}(X;\mathbb{K})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des applications continues de X dans $\mathbb{K}$, muni de la *norme uniforme*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)| = \max_{x\in X} |f(x)|\ .$$

Muni des opérations de multiplication par un scalaire, addition et multiplication point par point, c'est une algèbre de Banach et sa topologie forte est aussi appelée la *topologie de la convergence uniforme*. Rappelons le résultat de densité suivant (voir par exemple [Die1] ou [Pau, §5.6]).

Théorème 1.1 (Théorème de Stone [2]-Weierstrass [2]) *Soit X un espace métrique compact non vide. Toute sous-algèbre séparante [3] et invariante par conjugaison complexe de*

2.

			
Hilbert (1862-1943)	Banach (1892-1945)	Stone (1903-1989)	Weierstrass (1815-1897)

3. Un ensemble $\mathscr{A}$ d'applications d'un ensemble E dans $\mathbb{C}$ est *séparant* si pour tous les $x \neq y$ dans E, il existe $f \in \mathscr{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

l'algèbre $\mathscr{C}(X;\mathbb{C})$ des applications continues de X dans $\mathbb{C}$ est dense pour la topologie de la convergence uniforme. $\square$

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, rappelons que la *norme d'opérateur* de f est (avec la convention que les première et troisième bornes supérieures sont nulles si $E = \{0\}$)

$$\|f\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in E,\ \|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \sup_{x \in E,\ \|x\|=1} \|f(x)\| \ .$$

Rappelons que f est continue si et seulement si sa norme d'opérateur $\|f\|$ est finie, et que l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme d'opérateur, est un espace vectoriel normé, noté $\mathscr{L}(E,F)$. Rappelons de plus que si F est un espace de Banach, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est aussi un espace de Banach. Un *opérateur (linéaire) continu* de E dans F est un élément de $\mathscr{L}(E,F)$, et un *opérateur (linéaire) continu* de E est un élément de $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,E)$.

Si E est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, alors l'espace vectoriel normé $\mathscr{L}(E)$ muni de la composition des applications est une algèbre normée sur $\mathbb{K}$, qui est une algèbre de Banach si E est un espace de Banach. La propriété (1) de la norme d'opérateur est cruciale, même en dimension finie, où il existe de très nombreuses normes intéressantes sur les opérateurs linéaires (ou leurs matrices dans une base donnée), mais qui ne vérifient pas toutes cette propriété (1) (voir par exemple [Cia]).

Proposition 1.2 *(1) Soient E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est* normalement convergente *(c'est-à-dire si la suite réelle $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ converge), alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge dans E, et*

$$\Big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \Big\| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| \ .$$

(2) Soient A une algèbre de Banach et $x \in A$. Si $\|x\| < 1$, alors l'élément $1 - x$ de A est inversible, d'inverse $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$.

(3) Soit A une algèbre de Banach, notons $A^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de A. Alors $A^\times$ est un ouvert de A, et l'application $x \mapsto x^{-1}$ de $A^\times$ dans $A^\times$ est continue.

(4) Soient A une algèbre de Banach et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $A^\times$ qui converge vers $x \notin A^\times$. Alors $\|{x_n}^{-1}\|$ converge vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$.

En particulier, soient E et F deux espaces de Banach sur $\mathbb{K}$. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $\|u\| < 1$, alors par l'assertion (2) appliquée à l'algèbre de Banach $\mathscr{L}(E)$, l'application linéaire $\mathrm{id} - u$ est bijective, d'inverse $\sum_{n\in\mathbb{N}} u^n$ continu. Soit $\mathscr{GL}(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes linéaires, continus et d'inverses continus, de E dans F (mais pas nécessairement isométriques). Alors $\mathscr{GL}(E,F)$ est un ouvert de $\mathscr{L}(E,F)$, et l'application $u \mapsto u^{-1}$ de $\mathscr{GL}(E,F)$ dans $\mathscr{GL}(F,E)$ est continue. En effet, ceci découle de l'assertion (3) appliquée à $A = \mathscr{L}(F)$ car pour tout $u_0 \in \mathscr{GL}(F,E)$ l'application de $\mathscr{GL}(F,E)$ dans $\mathscr{GL}(E,E)$ définie par $u \mapsto u \circ u_0^{-1}$ est un homéomorphisme et $u^{-1} = u_0^{-1} \circ \big(u \circ u_0^{-1}\big)^{-1}$.

Démonstration. (1) La convergence normale de $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ implique que la suite des $t_n = \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|$ est convergente, donc de Cauchy [4] dans $\mathbb{R}$. La suite des $y_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ est donc de Cauchy dans E, car

$$\|y_{n+p} - y_n\| = \Big\| \sum_{i=1}^{p} x_{n+i} \Big\| \leq \sum_{i=1}^{p} \|x_{n+i}\| = |t_{n+p} - t_n| \ .$$

Donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente par la complétude de E.

(2) La série $\sum u^k$ dans l'espace de Banach A est normalement convergente, car $\|u^k\| \leq \|u\|^k$, donc converge vers $v \in A$. Comme $uv = vu = v - 1$ par passage à la limite, l'élément v est l'inverse de $1 - u$.

(3) Soient $x_0 \in A^\times$ et $x \in A$ tels que $\|x - x_0\| < \frac{1}{\|x_0^{-1}\|}$. Posons $y = 1 - x_0^{-1}x$. Alors

$$\|y\| \leq \|x_0^{-1}\| \ \|x - x_0\| < 1 \ , \quad (*)$$

donc $1 - y = x_0^{-1}x$ est inversible par (2), donc x est inversible, ce qui montre que $A^\times$ contient une boule ouverte centrée en chacun de ses points. De plus,

$$\|x^{-1} - x_0^{-1}\| \leq \|(1-y)^{-1} - 1\| \ \|x_0^{-1}\| = \Big\| \sum_{n=1}^{+\infty} y^n \Big\| \ \|x_0^{-1}\| \leq \|y\| \ \frac{\|x_0^{-1}\|}{1 - \|y\|} \ ,$$

qui tend vers 0 quand x tend vers x_0, car alors $\|y\|$ tend vers 0 par les inégalités (*). La continuité en tout point de $A^\times$ de l'application $x \mapsto x^{-1}$ en découle.

(4) Supposons, quitte à extraire, que la suite $(\|x_n^{-1}\|)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Posons $z_n = 1 - x_n^{-1}x$. Alors la suite des $\|z_n\| \leq \big\|x_n^{-1}\big\| \|x_n - x\|$ converge vers 0, donc la norme de z_n est strictement inférieure à 1 si n est assez grand. Pour un tel n, l'élément $1 - z_n$ est donc inversible, par l'assertion (2). D'où x est inversible. $\square$

Dualité.

Rappelons que le *dual topologique* d'un espace vectoriel normé E sur $\mathbb{K}$ est l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des formes linéaires continues de E dans $\mathbb{K}$, normé par la norme d'opérateur, appelée dans ce cas la *norme duale* : si $E \neq \{0\}$, alors

$$\|\ell\| = \sup_{x\in E-\{0\}} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} |\ell(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\ell(x)| \ .$$

Cet espace vectoriel normé est noté E^* (ou parfois E'), et c'est un espace de Banach (car $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$ est complet). Le dual topologique du dual topologique de E est appelé le *bidual topologique* de E, et noté E^{**} (ou parfois E'').

Nous admettrons ici la conséquence suivante du théorème de Hahn-Banach (voir par exemple [Bre]).

4.

Riesz (1880-1956)

Cauchy (1789-1857)

Kronecker (1823-1891)

Schwarz (1843-1921)

Proposition 1.3 *Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et $x \in E$. Alors*

$$\|x\| = \sup_{\ell \in E^*,\, \|\ell\| \leq 1} |\ell(x)| = \max_{\ell \in E^*,\, \|\ell\| \leq 1} |\ell(x)| \ . \quad \square$$

Corollaire 1.4 *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. L'application de E dans E^{**} définie par*

$$x \mapsto \{\mathrm{ev}_x : \ell \mapsto \ell(x)\}$$

est une application linéaire isométrique, appelée le plongement canonique de E dans son bidual topologique E^{**}. Si E est un espace de Banach, alors son image est fermée.

En dimension finie, par un argument d'égalité de dimensions, cette application est un isomorphisme. Mais ceci n'est pas vrai en général.

Démonstration. Pour tout x dans E, l'application $\mathrm{ev}_x : E^* \to \mathbb{K}$ est clairement une forme linéaire sur E^*, de norme au plus $\|x\|$ par la définition de la norme duale (ce qui montre qu'elle est continue), et en fait exactement égale à $\|x\|$ par la proposition précédente. L'application $x \mapsto \mathrm{ev}_x$ de E dans E^{**} est clairement linéaire, et isométrique par ce qui précède. Son image est donc complète dans E^{**} si E l'est. Par conséquent, elle est fermée si E est un espace de Banach. $\square$

Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, alors l'application ${}^t u : F^* \to E^*$ (aussi notée $u' : F' \to E'$, voire u^* mais nous réserverons cette notation pour un autre usage, voir la partie 1.5) définie par, pour tout $\ell \in F^*$,

$${}^t u(\ell) : x \mapsto \ell(u(x)) \ ,$$

est une application linéaire continue, appelée l'*application duale* de u.

Pour expliquer la notation ${}^t u$, considérons des espaces vectoriels E et F de dimension finie, $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base de E et $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$ une base de F. Notons $(e_i^*)_{1 \leq i \leq m}$ la *base duale* de $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ (pour tout $i = 1, \dots, m$, la forme linéaire e_i^* est l'unique forme linéaire sur E telle que $e_i^*(e_k) = \delta_{i,k}$ pour tout $k = 1, \dots, m$, où $\delta_{i,k}$ est le *symbole de Kronecker*[4], valant 1 si $i = k$, et 0 sinon). L'explication de la notation ${}^t u$ vient du fait que si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ a pour matrice M dans les bases $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ et $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$, alors ${}^t u \in \mathscr{L}(F^*, E^*)$ a pour matrice, dans les bases duales $(f_j^*)_{1 \leq j \leq n}$ et $(e_i^*)_{1 \leq i \leq m}$, précisément la matrice ${}^t M$ transposée de M.

L'application linéaire $u \mapsto {}^t u$ de $\mathscr{L}(E, F)$ dans $\mathscr{L}(F^*, E^*)$ est isométrique :

$$\forall\, u \in \mathscr{L}(E, F), \quad \|u\| = \|{}^t u\| \ . \tag{2}$$

En effet, en utilisant la proposition 1.3 pour établir la deuxième égalité, nous avons

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{x \in E,\, \|x\| \leq 1} \|u(x)\| = \sup_{x \in E,\, \|x\| \leq 1} \Big(\sup_{\ell \in F^*,\, \|\ell\| \leq 1} |\ell \circ u(x)| \Big) \\ &= \sup_{\ell \in F^*,\, \|\ell\| \leq 1} \Big(\sup_{x \in E,\, \|x\| \leq 1} |{}^t u(\ell)(x)| \Big) = \sup_{\ell \in F^*,\, \|\ell\| \leq 1} \|{}^t u(\ell)\| = \|{}^t u\| \ . \end{aligned}$$

L'application duale de l'application duale de u coïncide avec u sur le plongement canonique de E dans son bidual topologique E^{**}, au sens suivant : pour tout x dans E,

$${}^t({}^t u)(\mathrm{ev}_x) = \mathrm{ev}_{u(x)} \ . \tag{3}$$

En effet, pour tout $\ell \in F^*$, nous avons

$$^t({}^t u)(\mathrm{ev}_x)(\ell) = \mathrm{ev}_x({}^t u(\ell)) = \mathrm{ev}_x(\ell \circ u) = \ell(u(x)) = \mathrm{ev}_{u(x)}(\ell)\ .$$

Rappelons les deux exemples fondamentaux de calculs d'espace duaux. Nous renvoyons à [Rud1, Coh] pour les notions nécessaires de théorie de la mesure et d'intégration. En particulier, une mesure sur un espace mesurable X est *σ-finie* si X est réunion dénombrable de parties mesurables de mesures finies.

Exemple 1. L'une des familles les plus importantes d'exemples d'espaces de Banach en analyse est la suivante.

Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré non vide et $p \in [1, +\infty]$. On note q, et on appelle *exposant conjugué* de p, l'élément de $[1, +\infty]$ tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\ .$$

Remarquons que si $p = 1$, alors $q = +\infty$ et si $p = +\infty$, alors $q = 1$.

Si $p < +\infty$, notons $\mathbb{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ (ou $\mathbb{L}^p(\mu)$ si $(X, \mathscr{A})$ est sous-entendu) l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des classes d'équivalence d'applications f de X dans $\mathbb{K}$, mesurables pour $\mathscr{A}$, telles que $|f|^p$ soit intégrable, modulo la relation d'équivalence $f \sim g$ si $f - g$ est presque partout nulle. Posons alors, pour tout f dans $\mathbb{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$,

$$\|f\|_p = \Big(\int_{x \in X} |f(x)|^p \; d\mu(x) \Big)^{1/p}\ .$$

Si $p = +\infty$ et si μ est σ-finie, notons $\mathbb{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ (ou $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ si $(X, \mathscr{A})$ est sous-entendu) l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des classes d'équivalence d'applications f de X dans $\mathbb{K}$, mesurables pour $\mathscr{A}$, bornées en dehors d'un ensemble de mesure nulle, modulo la relation d'équivalence $f \sim g$ si $f - g$ est presque partout nulle. Pour tout f dans $\mathbb{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$, on définit alors la *norme essentielle* de f par

$$\|f\|_\infty = \inf \big\{ M \geq 0 \ :\ \mu(\{x \in X \ :\ |f(x)| > M\}) = 0 \big\}\ .$$

Notons $T : \mathbb{L}^q(X, \mathscr{A}, \mu) \to \mathbb{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)^*$ l'application définie par

$$f \mapsto \Big\{ g \mapsto \int_{x \in X} f(x) g(x) \; d\mu(x) \Big\}\ .$$

Le fait que cette application soit bien définie est contenu dans le résultat suivant.

Théorème 1.5 *Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré non vide et $p \in [1, +\infty]$.*

- *L'espace vectoriel $\mathbb{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_p$.*
- *Si $p < +\infty$, en supposant que μ soit σ-finie si $p = 1$, alors $T : \mathbb{L}^q(X, \mathscr{A}, \mu) \to \mathbb{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)^*$ est un isomorphisme linéaire qui est une isométrie entre la norme $\|\cdot\|_q$ et la norme duale de la norme $\|\cdot\|_p$.*
- *Si μ est σ-finie, l'application $T : \mathbb{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu) \to \mathbb{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)^*$ est une application linéaire isométrique, en général non surjective.*
- *Si $p < +\infty$, si μ est σ-finie, si la tribu (σ-algèbre) $\mathscr{A}$ est engendrée par une partie dénombrable, alors $\mathbb{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est séparable.* [5] □

5. Un espace métrique est *séparable* s'il contient une partie dénombrable dense.

Dans la suite de ces notes, pour tout $p \in]1, +\infty[$, nous identifierons $\mathbb{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)^*$ avec $\mathbb{L}^q(X, \mathscr{A}, \mu)$ par l'isométrie linéaire T^{-1}, où q est l'exposant conjugué de p, et de même $\mathbb{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu)^*$ avec $\mathbb{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ lorsque μ est σ-finie.

Exemple 2. Soient X un espace métrique compact non vide et $\mathscr{A}$ la tribu (σ-algèbre) des boréliens de X. Rappelons qu'une *mesure complexe* sur X est une application $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ qui est *σ-additive* (c'est-à-dire telle que $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$ pour toute suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathscr{A}$), telle que $\mu(\emptyset) = 0$. Rappelons que $|\mu| : \mathscr{A} \to [0, +\infty[$ est alors la mesure (borélienne positive) définie en demandant que $|\mu|(A)$, pour tout $A \in \mathscr{A}$, soit la borne supérieure des $\sum_{i=1}^n |\mu(A_i)|$ sur les partitions $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ de A par éléments de $\mathscr{A}$. Notons $\mathscr{M}_\mathbb{C}(X)$ l'espace vectoriel complexe des mesures complexes μ sur X de *variation totale*

$$\|\mu\| = |\mu|(X)$$

finie. Voir par exemple [Coh, page 220] pour une démonstration du théorème suivant.

Théorème 1.6 (Théorème de représentation de Riesz [4]) *L'espace vectoriel complexe $\mathscr{C}(X; \mathbb{C})$ des fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$ muni de la norme uniforme*

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in X} |f(x)| \, ,$$

ainsi que l'espace vectoriel complexe $\mathscr{M}_\mathbb{C}(X)$ muni de la norme de la variation totale $\|\cdot\|$, sont des espaces de Banach. L'application de $\mathscr{M}_\mathbb{C}(X)$ dans $\mathscr{C}(X; \mathbb{C})^*$ définie par

$$\mu \mapsto \big\{f \mapsto \mu(f) = \int_{x\in X} f(x)\, d\mu(x)\big\}$$

est un isomorphisme linéaire isométrique pour la norme de la variation totale sur $\mathscr{M}_\mathbb{C}(X)$ et la norme duale sur $\mathscr{C}(X; \mathbb{C})^*$. □

En particulier, pour toute forme linéaire continue ℓ sur $\mathscr{C}(X; \mathbb{C})$, il existe une et une seule mesure complexe $\mu = \mu_\ell$ telle que $\int_X f\, d\mu = \ell(f)$ pour tout $f \in \mathscr{C}(X; \mathbb{C})$. Si ℓ est une forme linéaire sur $\mathscr{C}(X; \mathbb{C})$ *positive* (c'est-à-dire si $\ell(f) \geq 0$ lorsque $f \geq 0$), alors ℓ est continue (voir par exemple [Coh]) et donc μ_ℓ est une mesure positive.

Applications multilinéaires continues.

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, et $f : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Posons (avec la convention que les première et troisième bornes supérieures sont égales à 0 si E ou F est réduit à $\{0\}$)

$$\|f\| = \sup_{x\in E-\{0\},\, y\in F-\{0\}} \frac{\|f(x, y)\|}{\|x\|\,\|y\|} = \sup_{\|x\|\leq 1,\, \|y\|\leq 1} \|f(x, y)\| = \sup_{\|x\|=1,\, \|y\|=1} \|f(x, y)\| \, .$$

Rappelons que f est continue si et seulement si $\|f\|$ est finie, et que $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G. Cet espace vectoriel normé est noté $\mathscr{L}(E, F; G)$, et c'est un espace de Banach si G l'est.

Une démonstration de la première affirmation est la suivante. Si f est continue, donc continue en $(0, 0)$ avec $f(0, 0) = 0$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que si $\|x\| \leq \epsilon$ et $\|y\| \leq \epsilon$, alors $\|f(x, y)\| \leq 1$; puisque

$$\|f(x, y)\| = \frac{\|x\|\,\|y\|}{\epsilon^2} \Big\|f\Big(\frac{\epsilon x}{\|x\|}, \frac{\epsilon y}{\|y\|}\Big)\Big\|$$

si $x, y \neq 0$, nous avons donc $\|f\| \leq \frac{1}{\epsilon^2}$. Réciproquement, si $c = \|f\|$ est finie, alors

$$\begin{aligned}\|f(x,y) - f(x_0,y_0)\| &= \|f(x-x_0,y) + f(x_0,y-y_0)\| \\ &\leq c\,\|x-x_0\|\,\|y\| + c\,\|x_0\|\,\|y-y_0\|\ ,\end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 et y tend vers y_0 (car y reste alors dans une partie bornée).

Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, si $E_1, \dots, E_n, F$ sont des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, on définit de manière similaire la norme d'une application n-linéaire f de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F par (avec la convention similaire si l'un des E_i est nul)

$$\|f\| = \sup_{x_i \in E_i - \{0\}} \frac{\|f(x_1,\dots,x_n)\|}{\|x_1\| \dots \|x_n\|} = \sup_{\|x_i\| \leq 1} \|f(x_1,\dots,x_n)\| = \sup_{\|x_i\| = 1} \|f(x_1,\dots,x_n)\|\ ,$$

(qui est finie si et seulement si f est continue). On note $\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F)$ l'espace vectoriel normé des applications n-linéaires continues de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F (qui est un espace de Banach si F l'est).

Espaces vectoriels normés de dimension finie.

Nous concluons ces rappels par le résultat suivant (voir par exemple [Dix] ou [Pau, §4.5] pour une démonstration), qui rend les espaces vectoriels normés de dimension finie beaucoup plus faciles à manipuler que ceux, pourtant omniprésents, de dimension infinie !

Théorème 1.7 (Théorème de Riesz) *Soit E un espace vectoriel normé réel ou complexe. Les conditions suivantes sont équivalentes.*
(1) E est localement compact ;[6]
(2) la boule unité fermée de E est compacte ;
(3) les compacts de E sont les fermés bornés de E ;
(4) E est de dimension finie. □

Nous aurons besoin plus loin de la conséquence suivante du théorème de Riesz.

Corollaire 1.8 *Soit E un espace vectoriel normé réel ou complexe. Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors F est fermé dans E.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans F qui converge vers $x \in E$. En particulier, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans l'espace vectoriel F muni de la restriction de la norme de E. Par le théorème de Riesz, les compacts de F étant ses fermés bornés, la suite des $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge vers un élément y dans F, donc qui converge vers y dans E, puisque la norme de F est la restriction de la norme de E. Par unicité des limites dans l'espace métrique E, nous avons $x = y$. Donc x appartient à F, ce qui montre le résultat. □

6. Un espace métrique X est *localement compact* si tout point de X admet un voisinage compact.

1.2 Rappels sur les espaces de Hilbert

Nous renvoyons à l'appendice A pour des démonstrations des résultats non démontrés ci-dessous.

Produits scalaires.

Soit $\mathscr{H}$ un espace vectoriel complexe.

Un *produit scalaire* sur $\mathscr{H}$ est une forme sesquilinéaire, hermitienne, définie positive sur $\mathscr{H}$, c'est-à-dire une application $B : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ telle que

(1) [linéarité à gauche]

$$\forall\, x, x', y \in \mathscr{H},\ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad B(x + \lambda x', y) = B(x, y) + \lambda\, B(x', y)\ ,$$

(2) [semi-linéarité à droite]

$$\forall\, x, y, y' \in \mathscr{H},\ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad B(x, y + \lambda y') = B(x, y) + \overline{\lambda}\, B(x, y')\ ,$$

(3) [hermitienne]

$$\forall\, x, y \in \mathscr{H}, \quad B(y, x) = \overline{B(x, y)}\ ,$$

(4) [définie positive]

$$\forall\, x \in \mathscr{H}, \quad B(x, x) \geq 0\ ,$$

et $B(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Remarquons que les propriétés (1) et (3) impliquent la propriété (2), et donc qu'il n'était pas nécessaire d'inclure celle-ci dans la définition. Une application $B : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés (1) et (2) est appelée une *forme sesquilinéaire*. Certains ouvrages les définissent comme semi-linéaires à gauche et linéaires à droite.

Rappelons que toute forme sesquilinéaire $a : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ vérifie l'*identité de polarisation* : pour tous les $x, y \in \mathscr{H}$, nous avons

$$a(x, y) = \frac{1}{2}\big(a(x+y, x+y) - a(x, x) - a(y, y)\big) + \frac{i}{2}\big(a(x+iy, x+iy) - a(x, x) - a(y, y)\big)\ . \quad (4)$$

Nous noterons

$$B(x, y) = \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle_{\mathscr{H}}\ ,$$

ce dernier lorsque l'on veut préciser $\mathscr{H}$. L'application de $\mathscr{H}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est appelée la *norme associée au produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (voir la proposition 1.9 pour la justification de la terminologie), et notée $x \mapsto \|x\|_{\mathscr{H}}$ lorsqu'on veut préciser $\mathscr{H}$.

Deux éléments x et y de $\mathscr{H}$ sont dit *orthogonaux* (pour le produit scalaire considéré) si $\langle x, y \rangle = 0$, et on note alors parfois $x \perp y$. La relation « être orthogonal à » est symétrique. Soient E et F deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{H}$; on dit que E et F sont *orthogonaux* si tout élément de E est orthogonal à tout élément de F. Si E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$, on appelle *orthogonal* de E le sous-espace vectoriel

$$E^{\perp} = \{x \in \mathscr{H}\ :\ \forall\, y \in E,\ \ \langle x, y \rangle = 0\}$$

des éléments de $\mathscr{H}$ orthogonaux à tout élément de E.

Formulaire. Soient x et y dans $\mathscr{H}$. La norme associée à un produit scalaire vérifie, par les caractères sesquilinéaire et hermitien,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle \ .$$

En particulier, elle vérifie l'*identité de Pythagore* : si x et y sont orthogonaux, alors

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \ ,$$

et par récurrence, si $x_1, \dots, x_n \in \mathscr{H}$ sont deux à deux orthogonaux, alors

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2 \ .$$

Elle vérifie l'*identité de la médiane* :

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \ ,$$

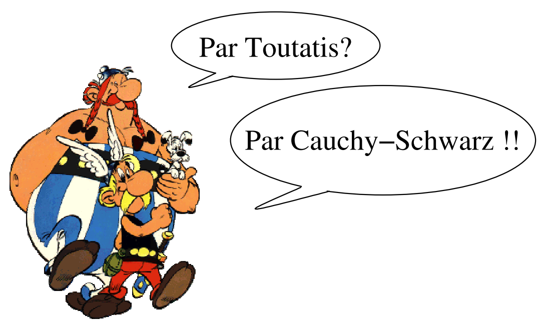
ainsi que

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle \ .$$

La proposition suivante a déjà été démontrée l'année dernière.

Proposition 1.9 *Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur $\mathscr{H}$. Sa norme associée est une norme sur $\mathscr{H}$. Elle vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz*[4]

$$\forall\, x, y \in \mathscr{H}, \quad |\,\langle x, y\rangle\,| \leq \|x\|\,\|y\| \ ,$$



avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Remarques. (1) Pour tous les x, y dans $\mathscr{H}$, il découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en considérant $y = x/\|x\|$ si $x \neq 0$ que

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\,\langle x, y\rangle\,| \ .$$

(2) L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que le produit scalaire, en tant qu'application de $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ dans $\mathbb{C}$, est continu lorsque $\mathscr{H}$ est muni de la norme associée à son produit scalaire, car pour tous les x, y, x_0, y_0 dans $\mathscr{H}$, nous avons

$$|\langle x, y\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| = |\langle x - x_0, y\rangle + \langle x_0, y - y_0\rangle| \leq \|x - x_0\|\,\|y\| + \|x_0\|\,\|y - y_0\| \ .$$

En particulier, l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel est fermé, en tant qu'intersection de fermés.

(3) Lorsque $\mathscr{H}$ est un espace vectoriel réel[7], l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de définir l'*angle* entre deux vecteurs non nuls x et y de $\mathscr{H}$, comme l'unique élément $\theta = \angle(x,y)$ dans $[0,\pi]$ tel que

$$\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}\ .$$

Une *norme préhilbertienne* sur $\mathscr{H}$ est une norme associée à un produit scalaire sur $\mathscr{H}$. Elle détermine le produit scalaire, par l'identité de polarisation (4). Un *espace préhilbertien (complexe)* est un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire.

Deux espaces préhilbertiens $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme linéaire $\varphi : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ *préservant les produits scalaires*, c'est-à-dire tel que

$$\forall\ x,y\in\mathscr{H}_1,\quad \langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle_{\mathscr{H}_2} = \langle x,y\rangle_{\mathscr{H}_1}\ .$$

Puisqu'une norme préhilbertienne détermine son produit scalaire, il est équivalent de demander qu'un isomorphisme linéaire $\varphi : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ préserve les produits scalaires ou qu'il préserve les normes associées, c'est-à-dire que

$$\forall\ x\in\mathscr{H}_1,\quad \|\varphi(x)\|_{\mathscr{H}_2} = \|x\|_{\mathscr{H}_1}\ ,$$

ou qu'il est *isométrique*, c'est-à-dire qu'il préserve les distances associées aux normes, au sens que

$$\forall\ x,y\in\mathscr{H}_1,\quad \|\varphi(x)-\varphi(y)\|_{\mathscr{H}_2} = \|x-y\|_{\mathscr{H}_1}\ ,$$

Si $\mathscr{H}$ est un espace préhilbertien, on note $U(\mathscr{H})$ le groupe des automorphismes *unitaires* de $\mathscr{H}$, c'est-à-dire des isomorphismes linéaires de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$ préservant le produit scalaire.

Une *norme hilbertienne* est une norme préhilbertienne complète. Un *espace de Hilbert*[2] *(complexe)* est un espace préhilbertien complet (pour la norme associée).

En particulier, muni de sa norme hilbertienne, tout espace de Hilbert est un espace de Banach. Mais la classe des espaces de Hilbert est une classe très particulière d'espaces de Banach, et l'on se gardera bien de généraliser sans réflexion les propriétés des premiers aux seconds.

Nous ne considèrerons que des espaces de Hilbert complexes dans ces notes.

Rappelons quelques exemples cruciaux d'espaces de Hilbert, avant d'énoncer le reste des propriétés dont nous aurons besoin.

Exemples. (1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire, dit *hermitien standard*,

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$$

où $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$, est un espace de Hilbert de dimension finie n, donc est séparable (l'ensemble dénombrable des éléments de $\mathbb{C}^n$ à coordonnées dans $\mathbb{Q}[i]=\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ est dense).

7. les définitions précédentes font encore sens, et le produit scalaire B est dit *symétrique* plutôt que hermitien

(2) Plus généralement, si $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, si $\mathscr{H}_1, \dots, \mathscr{H}_n$ sont des espaces de Hilbert, alors l'espace vectoriel produit $\mathscr{H}_1 \times \cdots \times \mathscr{H}_n$, muni du produit scalaire

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, y_i\rangle_{\mathscr{H}_i}$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, est un espace de Hilbert, qui est séparable si $\mathscr{H}_1, \dots, \mathscr{H}_n$ sont séparables (l'ensemble des éléments de $\mathscr{H}_1 \times \cdots \times \mathscr{H}_n$ dont la i-ème coordonnée appartient à une partie dénombrable dense fixée de $\mathscr{H}_i$, pour tout $i = 1, \dots, n$, est dénombrable et dense).

(3) Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré non vide (voir par exemple [Rud1, Coh]). Rappelons que $\mathbb{L}^2(X, \mathscr{A}, \mu)$ est l'espace vectoriel complexe des classes d'équivalence d'applications f de l'ensemble X dans $\mathbb{C}$, mesurables pour la tribu (σ-algèbre) $\mathscr{A}$, telles que $|f|^2$ soit intégrable, modulo la relation d'équivalence $f \sim g$ si $f - g$ est presque partout nulle. Posons, pour tout f dans $\mathbb{L}^2(X, \mathscr{A}, \mu)$,

$$\|f\|_2 = \Big(\int_{x\in X} |f(x)|^2 \; d\mu(x)\Big)^{1/2} .$$

Alors l'espace vectoriel complexe $\mathbb{L}^2(X, \mathscr{A}, \mu)$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{x\in X} f(x)\,\overline{g(x)}\; d\mu(x) ,$$

est un espace de Hilbert, de norme associée $\| \ \|_2$, qui est séparable si μ est σ-finie et si la tribu $\mathscr{A}$ est engendrée par une partie dénombrable (voir [Coh, page 110]).

En particulier, pour tout $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ et tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^r$, l'espace $\mathbb{L}^2(\Omega) = \mathbb{L}^2(\Omega, \mathscr{A}, dx)$ (où $\mathscr{A}$ est la tribu (σ-algèbre) borélienne sur Ω et dx est la mesure de Lebesgue sur Ω), muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{x\in \Omega} f(x)\,\overline{g(x)}\; dx ,$$

est un espace de Hilbert séparable par le dernier point du théorème 1.5 (car la mesure de Lebesgue de la boule $B(0, n)$ de centre 0 et de rayon $n \in \mathbb{N}$ est finie, $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega \cap B(0, n)$, et la tribu des boréliens de Ω est engendrée par les intersections avec Ω des cubes rationnels $\prod_{i=1}^{r} [a_i, b_i]$ avec a_i et b_i à coordonnées rationnelles). Par exemple, pour tout $a > 0$,

$$U_a : u \mapsto \Big\{x \mapsto \frac{1}{a^{r/2}}\, u\big(\frac{x}{a}\big)\Big\}$$

est un automorphisme unitaire de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^r)$.

(4) Soit $(\mathscr{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces de Hilbert. Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{H}_n$, dont la suite des carrés des normes est sommable, c'est-à-dire telles que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2$ converge. Alors il est facile de vérifier que $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{H}_n$, puisque $\|\lambda x_n\|^2 = |\lambda|^2 \|x_n\|^2$ et $\|x_n + y_n\|^2 \leq 2\big(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2\big)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tous les x_n, y_n dans $\mathscr{H}_n$, nous avons

$$|\langle x_n, y_n\rangle| \leq \|x_n\|\,\|y_n\| \leq \frac{1}{2}\big(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2\big) .$$

Donc si

$$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle_{\mathscr{H}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_n, y_n \rangle_{\mathscr{H}_n} \ ,$$

alors cette série converge absolument, et l'exercice ci-dessous dit en particulier que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{H}}$ est un produit scalaire sur $\mathscr{H}$.

Si $\mathscr{H}_n = \mathscr{H}_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors le sous-espace vectoriel $\mathscr{H}$ muni de ce produit scalaire est noté $\ell^2(\mathscr{H}_0)$.

Exercice E.1 *Montrer que $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert. Montrer que si $\mathscr{H}_n$ est séparable pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{H}$ est encore séparable.*

(5) Il existe une manière canonique de plonger un espace préhilbertien dans un espace hilbertien.

Théorème 1.10 *Soit $\mathscr{H}$ un espace préhilbertien. Il existe un espace de Hilbert $\widehat{\mathscr{H}}$ et une application linéaire isométrique $i : \mathscr{H} \to \widehat{\mathscr{H}}$ d'image dense. Si $\widehat{\mathscr{H}}'$ est un autre espace de Hilbert muni d'une application linéaire isométrique $i' : \mathscr{H} \to \widehat{\mathscr{H}}'$ d'image dense, alors il existe un unique isomorphisme linéaire préservant les produits scalaires $j : \widehat{\mathscr{H}} \to \widehat{\mathscr{H}}'$ tel que $j \circ i = i'$.*

Tout tel couple $(i, \widehat{\mathscr{H}})$ (et par abus $\widehat{\mathscr{H}}$) est appelé un *complété* de $\mathscr{H}$. On identifie $\mathscr{H}$ avec son image dans $\widehat{\mathscr{H}}$ par i.

On identifie deux complétés de $\mathscr{H}$ par l'unique tel isomorphisme j, ce qui permet de parler « du » complété de $\mathscr{H}$. On note souvent par le même symbole la norme et le produit scalaire de $\mathscr{H}$ et ceux de son complété $\widehat{\mathscr{H}}$.

Projection sur un convexe fermé.

Pour tout $\lambda \geq 0$, rappelons qu'une application $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques est *λ-lipschitzienne* si pour tous les x, y dans X, nous avons $d\big(f(x), f(y)\big) \leq \lambda\ d(x, y)$. Rappelons que si X est un espace métrique et si C est une partie non vide de X, la *distance d'un point $x \in X$ à la partie* C est définie par

$$d(x, C) = \inf_{y\in C} d(x, y) \ .$$

Théorème 1.11 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe et C un convexe fermé non vide de $\mathscr{H}$. Alors pour tout $x \in \mathscr{H}$, il existe un unique $y = p_C(x)$ dans C tel que*

$$\|x - y\| = \min_{z\in C} \|x - z\| \ .$$

De plus, l'application $p_C : \mathscr{H} \to C$ ainsi définie est 1-lipschitzienne, et $p_C(x)$ est l'unique élément y de $\mathscr{H}$ tel que

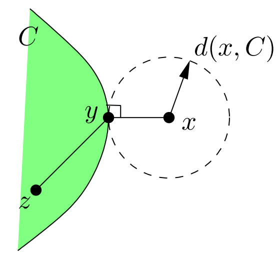
$$y \in C \quad \text{et} \quad \forall\ z \in C, \quad \mathrm{Re}\ \langle x - y, z - y \rangle \leq 0 \ .$$

Si C est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}$, alors l'application p_C est linéaire continue, de norme au plus 1, et $p_C(x)$ est l'unique élément y de C tel que $x - y$ soit orthogonal à tout élément de C.

On appelle $y = p_C(x)$ la *projection* (orthogonale ou hilbertienne) de x sur C, qui est donc l'unique point de C tel que

$$d(x,y) = d(x,C)\ .$$

Lorsque $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert réel [a], pour tout $z \in C$, l'angle en y des vecteurs $\overrightarrow{xy}$ et $\overrightarrow{zy}$ est obtus.

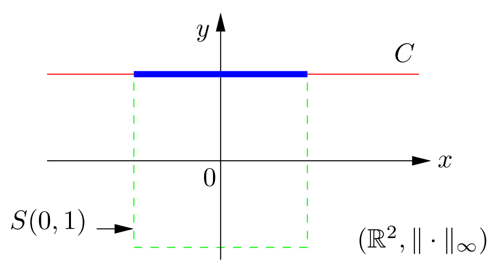


a. les projections sur un convexe fermé non vide font encore sens

L'existence et l'unicité des projections sont des propriétés cruciales des espaces de Hilbert. Par exemple dans l'espace de Banach $\mathbb{R}^2$ muni de la norme

$$\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}\ ,$$

une projection d'un point x sur un convexe fermé non vide C existe certes par un argument de compacité dû à la dimension finie, mais elle n'est pas forcément unique. Plus précisément, le sous-espace C des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $y = 1$ est un sous-espace affine (de dimension finie), donc est convexe fermé non vide. L'ensemble des projections de $x = (0,0)$ sur C (c'est-à-dire des points de C minimisant la distance à x) est exactement le segment $[-1,1] \times \{1\}$.



Corollaire 1.12 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et E un sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$.*

(1) Si E est fermé, alors $E^\perp$ est un supplémentaire fermé de E :

$$\mathscr{H} = E \oplus E^\perp\ .$$

(2) Le sous-espace E est dense dans $\mathscr{H}$ si et seulement si $E^\perp = \{0\}$.

La seconde propriété donne un critère pratique, qui sera utilisé plusieurs fois dans ces notes, pour démontrer la densité d'un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert.

La première propriété est spécifique aux espaces de Hilbert. En fait, tout espace de Banach E' qui n'admet pas d'isomorphisme linéaire continu $f : E' \to \mathscr{H}'$, où $\mathscr{H}'$ est un espace de Hilbert, contient un sous-espace vectoriel fermé n'admettant pas de supplémentaire fermé (voir [LT1]).

Démonstration. (1) Nous avons déjà vu que $E^\perp$ est fermé. Montrons que c'est un supplémentaire de E. Puisque le produit scalaire de $\mathscr{H}$ est défini positif, nous avons $E \cap E^\perp = \{0\}$. De plus, si p_E est la projection orthogonale sur E (qui existe parce que E est supposé fermé), alors pour tout x dans $\mathscr{H}$, $x = p_E(x) + (x - p_E(x))$ et $x - p_E(x) \in E^\perp$ par la dernière assertion du théorème 1.11, donc $\mathscr{H} = E + E^\perp$.

(2) Par continuité du produit scalaire, $E^\perp = \overline{E}^{\,\perp}$, et le résultat découle alors de (1). $\square$

Exercice E.2 *Soit E un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Montrer que $E \subset \left(E^{\perp}\right)^{\perp}$, et que $\left(E^{\perp}\right)^{\perp} = E$ si et seulement si E est fermé.*

Dual d'un espace de Hilbert.

Si E est un espace vectoriel complexe, notons $\overline{E}$, et appelons *espace vectoriel conjugué* de E, l'espace vectoriel E où la multiplication par un scalaire est remplacée par

$$(\lambda, x) \mapsto \overline{\lambda} x \ .$$

Remarquons que toute norme de E est une norme de $\overline{E}$ et réciproquement, et que tout sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de $\overline{E}$ et réciproquement. Notons que la notation $\overline{E}$ est ambiguë : on ne confondra pas, lorsque E est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel complexe normé F, l'espace vectoriel conjugué $\overline{E}$ et l'adhérence $\overline{E}$ de E dans F, le contexte permettant de lever l'ambiguïté.

Une forme sesquilinéaire $a : E \times E \to \mathbb{C}$ est une forme bilinéaire $a : E \times \overline{E} \to \mathbb{C}$. En particulier, comme rappelé dans la partie 1.1, si E est non nul et muni d'une norme, une forme sesquilinéaire a sur E est continue si et seulement si sa norme

$$\|a\| = \sup_{x,\, y \,\in\, E - \{0\}} \frac{|a(x, y)|}{\|x\| \|y\|}$$

est finie. L'inégalité de Cauchy-Schwarz (avec son cas d'égalité) dit que si E est un espace préhilbertien, alors la norme de son produit scalaire (considéré comme une forme bilinéaire $E \times \overline{E} \to \mathbb{C}$) est égale à 1.

Si E est muni d'une norme, il est facile de vérifier que l'application de $\overline{E^*}$ dans $(\,\overline{E}\,)^*$, qui à la forme linéaire continue ℓ sur E associe la forme linéaire $\overline{\ell} : x \mapsto \overline{\ell(x)}$ sur $\overline{E}$, est bien définie et qu'elle est un isomorphisme linéaire de l'espace vectoriel (conjugué du dual topologique) $\overline{E^*}$ dans l'espace vectoriel (dual topologique du conjugué) $(\,\overline{E}\,)^*$, par lequel ces deux espaces vectoriels sont identifiés.

Le résultat suivant dit que le dual topologique d'un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ est son espace vectoriel normé conjugué $\overline{\mathscr{H}}$.

Théorème 1.13 (Théorème de Riesz-Fréchet [8]) *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $\overline{\mathscr{H}}^{\,*}$ le dual topologique de son conjugué. L'application de $\mathscr{H}$ dans $\overline{\mathscr{H}}^{\,*}$ définie par $x \mapsto \{y \mapsto \langle x, y\rangle\}$ est un isomorphisme linéaire et une isométrie entre la norme de $\mathscr{H}$ et la norme duale de $\overline{\mathscr{H}}^{\,*}$.*

Voici un corollaire du théorème 1.13 de Riesz-Fréchet.

8.

Fréchet (1878-1973)

Lax (1926-)

Stampacchia (1922-1970)

Fourier (1768-1830)

Corollaire 1.14 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $a : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire continue. Alors il existe un unique $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que*

$$\forall\, x, y \in \mathscr{H}, \;\; \langle u(x), y\rangle = a(x, y)\ .$$

Si de plus a est hermitienne, alors u est auto-adjoint, c'est-à-dire

$$\forall\, x, y \in \mathscr{H}, \;\; \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle\ .$$

Nous reviendrons longuement sur la notion d'opérateur (linéaire continu) auto-adjoint dans la partie 1.5.

Démonstration. Pour tout x dans $\mathscr{H}$, l'application $y \mapsto a(x, y)$ de $\overline{\mathscr{H}}$ dans $\mathbb{C}$ est linéaire continue. Donc par le théorème 1.13 de Riesz-Fréchet, il existe un unique élément $u(x) \in \mathscr{H}$ tel que $\langle u(x), y\rangle = a(x, y)$ pour tout y dans $\mathscr{H}$. Par unicité et linéarité à gauche de a, l'application u est linéaire. Comme $\|u(x)\|^2 = a(x, u(x)) \le \|a\|\ \|x\|\ \|u(x)\|$, l'application linéaire u est continue.

La dernière affirmation découle de ce que, pour tous les x et y dans $\mathscr{H}$,

$$\langle u(x), y\rangle = a(x, y) = \overline{a(y, x)} = \overline{\langle u(y), x\rangle} = \langle x, u(y)\rangle\ . \quad \square$$

Théorèmes de Lax[7]-Milgram et de Stampacchia[7].

Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $f : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire. Comme vu ci-dessus, f est continue si et seulement s'il existe $c \ge 0$ telle que

$$\forall\, x, y \in \mathscr{H}, \quad |f(x, y)| \le c\,\|x\|\,\|y\|\ .$$

L'application f sera dite *coercive* s'il existe $c' > 0$ telle que

$$\forall\, x \in \mathscr{H}, \quad f(x, x) \ge c'\,\|x\|^2\ .$$

Cette condition demande en particulier que pour tout $x \in \mathscr{H}$, l'élément $f(x, x)$ de $\mathbb{C}$ soit un nombre réel. Par conséquent, si f est coercive, alors l'application $x \mapsto f(x, x)$ est positive ou nulle, et ne s'annule qu'en $x = 0$.

Théorème 1.15 (Théorème de Lax-Milgram) *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $a : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire, continue et coercive. Pour toute forme linéaire continue $\varphi \in \overline{\mathscr{H}}^{\,*}$, il existe un unique u dans $\mathscr{H}$ tel que*

$$\forall\, v \in \mathscr{H}, \quad a(u, v) = \varphi(v)\ . \quad (*)$$

De plus, si a est hermitienne, alors u est l'unique élément de $\mathscr{H}$ tel que

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \operatorname{Re}\varphi(u) = \min_{v \in \mathscr{H}} \Big(\frac{1}{2}a(v, v) - \operatorname{Re}\varphi(v)\Big)\ . \quad (**)$$

Le théorème de Lax-Milgram est un cas particulier du théorème suivant (prendre $C = \mathscr{H}$ et utiliser le fait que si ℓ et ℓ' sont deux formes linéaires sur $\overline{\mathscr{H}}$ telles que $\operatorname{Re}\ell \ge \operatorname{Re}\ell'$, alors $\ell = \ell'$).

Théorème 1.16 (Théorème de Stampacchia) *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, a : $\mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire continue coercive, et C un convexe fermé non vide de $\mathscr{H}$. Pour tout $\varphi \in \overline{\mathscr{H}}^*$, il existe un unique u dans C tel que*

$$\forall\, v \in C, \quad \mathrm{Re}\, a(u, v-u) \geq \mathrm{Re}\, \varphi(v-u)\ .$$

De plus, si a est hermitienne, alors u est l'unique élément de C tel que

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \mathrm{Re}\, \varphi(u) = \min_{v \in C} \Big(\frac{1}{2}a(v,v) - \mathrm{Re}\, \varphi(v)\Big)\ .$$

Ce résultat est un outil simple et assez efficace pour la résolution des équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques. Le lien entre l'équation (*) et le problème de minimisation (**) est à souligner. Dans le vocabulaire du calcul des variations, on dit que (*) est l'*équation d'Euler* associée au problème de minimisation (**) : l'application $F : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ définie par

$$F : u \mapsto \frac{1}{2}f(u,u) - \varphi(u)$$

est différentiable (en un sens que nous ne précisons pas ici), l'équation (*) étant alors exactement l'équation

$$F'(u) = 0\ .$$

Cette relation, généralisée dans le théorème de Stampacchia, est souvent utilisée, en physique (principe de moindre action, minimisation d'énergie, ...), en mécanique (forme d'une nappe élastique tendue au-dessus d'un obstacle) ou en finance (optimisation sous contrainte de stocks). Le point noir est qu'elle ne permet de traiter convenablement que des problèmes linéaires, et que la plupart des phénomènes naturels (météorologie, mécanique des fluides, ...) ne le sont pas.

Bases hilbertiennes.

Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces vectoriels fermés de $\mathscr{H}$. On dit que $\mathscr{H}$ est la *somme hilbertienne* de $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

- les sous-espaces vectoriels E_n sont deux à deux orthogonaux,
- le sous-espace vectoriel engendré par les E_n est dense dans $\mathscr{H}$ (ou, de manière équivalente par le corollaire 1.12 (2), son orthogonal est nul).

Nous notons alors (certains ouvrages omettant la barre)

$$\mathscr{H} = \overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}}\ E_n\ .$$

Attention, on ne confondra pas somme hilbertienne et somme directe.

Par exemple, soient $(\mathscr{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces de Hilbert et $\mathscr{H}$ l'espace de Hilbert de l'exemple (4) ci-dessus. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons E_n le sous-ensemble de $\mathscr{H}$ formé des éléments de $\mathscr{H}$ dont tous les termes sauf peut-être le n-ème sont nuls.

Exercice E.3 *Montrer que E_n est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}$, isomorphe à l'espace de Hilbert $\mathscr{H}_n$, et que $\mathscr{H}$ est la somme hilbertienne de la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Le résultat suivant généralise, pour les sommes hilbertiennes, le théorème de Pythagore pour les sommes directes orthogonales.

Théorème 1.17 (Théorème de Parseval) *Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, somme hilbertienne d'une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces vectoriels fermés. Pour tout x dans $\mathscr{H}$, notons $x_n = p_{E_n}(x)$ la projection hilbertienne de x sur le sous-espace vectoriel fermé E_n. Alors pour tout x dans $\mathscr{H}$, les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|^2$ sont convergentes et*

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \ ,$$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|^2 \quad \text{(égalité de Parseval)} \ .$$

Réciproquement, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{H}$ telle que $x_n \in E_n$ pour tout n, si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|^2$ converge, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ est convergente, et si $x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$, alors $x_n = p_{E_n}(x)$.

Remarquons que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ n'est en général pas normalement convergente (c'est-à-dire que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$ n'est pas forcément convergente). Nous utiliserons de manière fréquente la partie réciproque de ce théorème.

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert. Si $\mathscr{H}$ est de dimension finie, une *base hilbertienne* de $\mathscr{H}$ est par définition une base orthonormée de $\mathscr{H}$. Si $\mathscr{H}$ est de dimension infinie, une *base hilbertienne* de $\mathscr{H}$ est une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{H}$ de vecteurs orthonormés qui engendre un sous-espace vectoriel dense de $\mathscr{H}$:

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ \ \|e_p\| = 1; \quad \forall\, p, q \in \mathbb{N},\ \ p \neq q \ \Rightarrow\ \langle e_p, e_q\rangle = 0 \ ; \quad \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\{e_n \ :\ n \in \mathbb{N}\})} = \mathscr{H} \ .$$

Autrement dit, une base hilbertienne de $\mathscr{H}$ (lorsque $\mathscr{H}$ est de dimension infinie) est une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires de $\mathscr{H}$ telle que $\mathscr{H}$ soit la somme hilbertienne des droites vectorielles $\mathbb{C}e_n$ (toute droite vectorielle dans $\mathscr{H}$ est fermée, par le corollaire 1.8) :

$$\mathscr{H} = \overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}}\ \mathbb{C}e_n \ .$$

Attention, on ne confondra pas base hilbertienne et base (vectorielle).

En dimension infinie, on peut montrer qu'une base hilbertienne n'est jamais une base vectorielle. On s'autorisera à indexer les bases hilbertiennes par d'autres ensembles dénombrables que $\mathbb{N}$ ou $\{0, \dots, n\}$.

Remarques. (1) Si un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ admet une base hilbertienne, alors $\mathscr{H}$ est séparable. En effet, l'ensemble des combinaisons linéaires (finies), à coefficients dans $\mathbb{Q}[i]$, des éléments d'une base hilbertienne de $\mathscr{H}$ est dense dans $\mathscr{H}$. Nous montrerons la réciproque dans le théorème 1.18.

(2) Il découle du théorème 1.17 de Parseval que si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, alors pour tout x dans $\mathscr{H}$, il existe une unique suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}$ telle que les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2$ convergent, et

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_n \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2 \ .$$

En effet, λ_n est l'unique scalaire tel que $p_{\mathbb{C}e_n}(x) = \lambda_n e_n$, c'est-à-dire tel que

$$\lambda_n = \langle x, e_n \rangle \ .$$

La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la suite des *coordonnées hilbertiennes* de x dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par la partie réciproque du théorème 1.17 de Parseval, si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathbb{C}$ telle que la série réelle $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2$ converge, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_n$ converge dans $\mathscr{H}$, et si $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_n$, alors $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des coordonnées hilbertiennes de x dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Attention, on ne confondra pas coordonnées hilbertiennes et coordonnées vectorielles.

(3) Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne d'un espace de Hilbert $\mathscr{H}$, alors un opérateur continu $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est déterminé par les valeurs qu'il prend sur les éléments de cette base hilbertienne : si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des coordonnées hilbertiennes d'un élément x de $\mathscr{H}$, alors

$$u(x) = u\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n u(e_n) \ .$$

(La continuité de u est cruciale pour la véracité de la seconde égalité.)

Exemple. La suite $\Big(e_n : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{nit}\Big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{C})$ des applications mesurables 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$ pour la mesure de Lebesgue, modulo égalité presque partout. En effet, c'est clairement une suite orthonormée de vecteurs, dont l'espace vectoriel engendré est dense pour la norme uniforme dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{C})$ des applications continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par le théorème de Stone-Weierstrass 1.1 ; de plus, la convergence uniforme implique la convergence $\mathbb{L}^2$ par la compacité de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et le sous-ensemble $\mathscr{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{C})$ est dense dans l'espace de Hilbert $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{C})$ (voir [Rud1] ou [Coh]).

Pour toute fonction f dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{C})$, les coordonnées hilbertiennes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ de f dans cette base hilbertienne sont par définition les *coefficients de Fourier*[7] de f

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\ e^{-nit}\ dt \ .$$

Par le théorème 1.17 de Parseval, on obtient la formule de *transformation de Fourier inverse*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\ e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\ e^{nit}$$

(attention, la convergence de cette série est dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{C})$) et la *formule de Parseval* pour les séries de Fourier

$$\|f\|_2 = \Big(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2\Big)^{1/2} .$$

Vu l'utilité des bases hilbertiennes, le résultat suivant sera bien pratique.

Théorème 1.18 *Tout espace de Hilbert séparable admet au moins une base hilbertienne.*

Si $\mathscr{H}$ est de dimension finie, le résultat est connu, et la méthode usuelle se généralise en dimension infinie, comme indiqué ci-dessous.

Démonstration. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans $\mathscr{H}$. Si $\mathscr{H}$ est de dimension infinie, quitte à extraire, nous pouvons supposer que v_{n+1} n'appartient pas au sous-espace vectoriel engendré par $\{v_0, \dots, v_n\}$. Le procédé d'orthonormalisation de Gram[9]-Schmidt[8] fournit alors une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{H}$ de vecteurs orthonormés qui engendre le même sous-espace vectoriel que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Corollaire 1.19 *Deux espaces de Hilbert séparables de dimension infinie sont isomorphes.*

Démonstration. Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux bases hilbertiennes de deux espaces de Hilbert séparables $\mathscr{H}$ et $\mathscr{G}$ respectivement, qui existent par le théorème précédent. Alors l'unique application linéaire qui envoie e_n sur f_n est un isomorphisme linéaire isométrique d'un sous-espace vectoriel dense de $\mathscr{H}$ dans un sous-espace vectoriel dense de $\mathscr{G}$, donc se prolonge en un isomorphisme linéaire isométrique de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{G}$ (voir le théorème de prolongement A.1). $\square$

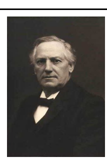
La notion de base hilbertienne s'étend aux espaces de Hilbert non séparables, en prenant des familles de vecteurs indexées par des ensembles non dénombrables (voir par exemple [Dix, chap. VIII, XI]). En utilisant le théorème de Zorn[8], le théorème 1.18 reste valide pour les espaces de Hilbert non séparables.

Convergence faible dans les espaces de Hilbert.

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert. Nous dirons qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{H}$ *converge faiblement* vers $f \in \mathscr{H}$ si pour tout $g \in \mathscr{H}$, les produits scalaires $\langle f_n, g\rangle$ convergent vers $\langle f, g\rangle$ dans $\mathbb{C}$. Nous noterons cette convergence par le symbole $\rightharpoonup$ pour la distinguer de la convergence forte (c'est-à-dire pour la norme hilbertienne) :

$$f_n \to_{n\to+\infty} f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|f_n - f\| \to_{n\to+\infty} 0 \,,$$

$$f_n \rightharpoonup_{n\to+\infty} f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, g \in \mathscr{H},\ \langle f_n, g\rangle \to_{n\to+\infty} \langle f, g\rangle \,.$$

9.

Gram (1850-1916)

Schmidt (1876-1959)

Zorn (1906-1993)

Steinhaus (1887-1972)

Proposition 1.20 *(1) Une suite dans $\mathscr{H}$ qui converge fortement vers $f \in \mathscr{H}$ converge aussi faiblement vers f.*

(2) La propriété « toute suite dans $\mathscr{H}$ qui converge faiblement vers $f \in \mathscr{H}$ converge fortement vers f » est vraie si et seulement si la dimension de $\mathscr{H}$ est finie.

(3) Toute suite faiblement convergente est bornée.

(4) Si E et F sont des espaces de Hilbert, et si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, alors l'image par u de toute suite dans E faiblement convergente vers un élément $x \in E$ est faiblement convergente dans F vers $u(x)$.

Démonstration. (1) Ceci découle de la continuité (forte) du produit scalaire.

(2) Si $\mathscr{H}$ est de dimension finie, fixons une base orthonormée $(e_1, \dots, e_k)$ de $\mathscr{H}$. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathscr{H}$ converge vers f si et seulement si les coordonnées de f_n convergent vers les coordonnées de f. Or les fonctions coordonnées sont exactement les applications $g \mapsto \langle g, e_i\rangle$ pour $1 \le i \le k$. Donc si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers g, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g.

Réciproquement, si $\mathscr{H}$ est de dimension infinie, alors $\mathscr{H}$ admet un sous-espace vectoriel fermé séparable $\mathscr{H}_0$ de dimension infinie (prendre l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathscr{H}$ tels que v_{n+1} n'appartienne pas à l'espace vectoriel engendré par $v_0, \dots, v_n$, qui existe puisque la dimension de $\mathscr{H}$ est infinie). Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathscr{H}_0$, alors la suite des e_n converge faiblement vers 0 dans $\mathscr{H}$ quand n tend vers l'infini (car pour tout $g \in \mathscr{H}$, si $g = g_0 + g_1$ où $g_0 \in \mathscr{H}_0$ et $g_1 \in \mathscr{H}_0^{\perp}$, alors la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des coordonnées hilbertiennes de g_0 dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 par la sommabilité des carrés des modules, et $\langle e_n, g\rangle = \langle e_n, g_0\rangle = \overline{\lambda_n}$). Mais $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite des e_n ne converge pas fortement vers 0.

(3) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite faiblement convergente vers $f \in \mathscr{H}$. L'application $\ell_n : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ définie par $g \mapsto \langle g, f_n\rangle$ est une forme linéaire continue sur $\mathscr{H}$, de norme égale à $\|f_n\|$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et puisque $\ell_n(\frac{f_n}{\|f_n\|}) = \|f_n\|$ si $\|f_n\| \neq 0$. Pour tout $g \in \mathscr{H}$, puisque $\langle g, f_n\rangle$ tend vers $\langle g, f\rangle$, nous avons $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\ell_n(g)\| < +\infty$. Par le théorème de Banach-Steinhaus[8] (voir par exemple [Bre]), nous avons donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\ell_n\| < +\infty$, donc la suite $\big(\|f_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(4) Nous verrons plus tard, dans la proposition 1.37 (et le lecteur vérifiera qu'il n'y a pas de boucle logique), que pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$, il existe $u^* \in \mathscr{L}(F, E)$ tel que

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in F, \quad \langle u(x), y\rangle_F = \langle x, u^*(y)\rangle_E\ .$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers x dans E. Alors pour tout $y \in F$, les produits scalaires $\langle u(x_n), y\rangle_F = \langle x_n, u^*(y)\rangle_E$ convergent vers $\langle x, u^*(y)\rangle_E = \langle u(x), y\rangle_F$. Donc la suite $\big(u(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $u(x)$ dans F. □

Remarque. Si $\mathscr{H}$ est séparable de dimension infinie, si $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $f \in \mathscr{H}$ alors, pour tout k, la suite des k-èmes coordonnées hilbertiennes $c_k(f_n) = \langle f_n, e_k\rangle$ de f_n dans cette base hilbertienne converge vers la k-ème coordonnée hilbertienne $c_k(f)$ de f quand n tend vers $+\infty$. Mais la réciproque est fausse : si $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} e_n$ (qui converge bien dans $\mathscr{H}$ par le théorème de Parseval), et si $f_n = n^2 e_n$, alors $\lim_{n\to+\infty} \langle e_k, f_n\rangle = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, mais $\lim_{n\to+\infty} \langle g, f_n\rangle = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement vers 0 (elle n'est même pas bornée).

Le résultat crucial suivant est une conséquence du théorème de Riesz-Fréchet et du théorème de Banach-Alaoglu (voir [Bre], ou l'appendice A pour une démonstration condensée).

Théorème 1.21 (Théorème de compacité faible de la boule unité fermée des espaces de Hilbert) *Si $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert, alors toute suite bornée dans $\mathscr{H}$ admet une sous-suite faiblement convergente.* □

Quitte à répéter des arguments de la proposition 1.20, insistons sur l'importance de prendre bien garde à ne pas confondre convergence faible et convergence forte : toute suite qui converge fortement converge aussi faiblement, par continuité du produit scalaire. Mais la réciproque est fausse : si $\mathscr{H}$ n'est pas de dimension finie, le théorème de Riesz 1.7 implique qu'il existe toujours (au moins) une suite bornée dans $\mathscr{H}$ (et même contenue dans la boule unité fermée) qui n'admet pas de sous-suite fortement convergente, ce qui contredit la version pour la topologie forte du théorème ci-dessus. Pour un exemple explicite, dans l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{C})$ (voir l'exemple (4) ci-dessus), considérons la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\ell^2(\mathbb{C})$ telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, le vecteur e_n soit la suite dans $\mathbb{C}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le n-ème, égal à 1. Alors la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : les e_n sont de norme 1. Mais la suite ne converge pas : il est facile de voir qu'elle converge faiblement vers 0, et donc si elle convergeait fortement quitte à extraire vers un élément x de $\ell^2(\mathbb{C})$, celui-ci devrait être égal à 0 ; mais par continuité de la norme, il devrait aussi être de norme 1, ce qui est impossible.

Néanmoins, le théorème 1.21 a une grande importance, car l'utilisation de techniques de compacité peut être extrêmement utile, en particulier pour résoudre des problèmes d'extrema de fonctionnelles sur les espaces de Hilbert (nous en verrons un exemple dans la proposition 2.22 de la partie 2.4). C'est en grande partie grâce à ce théorème 1.21 qu'il est bien plus facile de travailler dans les espaces de Hilbert que dans des espaces de Banach quelconques.

La proposition suivante donne parfois un moyen de passer de la convergence faible à la convergence forte dans un espace de Hilbert.

Proposition 1.22 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{H}$ qui converge faiblement vers $x \in \mathscr{H}$. Si $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|x\|$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers x.*

La réciproque est bien sûr vraie, par continuité de la norme.

Démonstration. L'hypothèse implique que le second membre de l'égalité

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x_n, x\rangle$$

converge vers 0. □

Une partie A de $\mathscr{H}$ est dite *faiblement fermée* si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A qui converge faiblement vers x, l'élément x appartient encore à A. Par l'assertion (1) de la proposition 1.20, toute partie faiblement fermée de $\mathscr{H}$ est fermée. La réciproque est fausse en général, car si $\mathscr{H}$ est séparable, de dimension infinie, si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, alors $\{e_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ est une partie fermée de $\mathscr{H}$, mais non faiblement fermée. Une réciproque partielle est fournie par la première assertion de la proposition suivante.

Une application $f : \mathscr{H} \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* si pour tous les $x, y \in \mathscr{H}$ et $t \in [0, 1]$, nous avons $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

Proposition 1.23 *(1) Tout convexe fermé de $\mathscr{H}$ est faiblement fermé.*

(2) Toute application continue convexe $f : \mathscr{H} \to \mathbb{R}$ est faiblement semi-continue inférieurement*, c'est-à-dire que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ faiblement convergente vers x, nous avons* $\liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \geq f(x)$.

Démonstration. (1) Les demi-espaces fermés $H_{w,a}$ définis, pour tous les $w \in \mathscr{H}$ et $a \in \mathbb{R}$, par

$$H_{w,a} = \{z \in \mathscr{H} \ : \ \mathrm{Re}\,\langle w, z\rangle \leq a\}\ ,$$

sont clairement faiblement fermés, et toute intersection de parties faiblement fermées est encore faiblement fermée. Or tout convexe fermé est l'intersection des demi-espaces fermés le contenant : par le théorème 1.11, pour tout convexe fermé non vide C, pour tout $x \notin C$, si y est la projection de x sur C, si $w = x - y$ et si $a = \mathrm{Re}\,\langle w, y\rangle$, alors C est contenu dans $H_{w,a}$ (car $\mathrm{Re}\,\langle x - y, z - y\rangle \leq 0$ pour tout $z \in C$) qui ne contient pas x (car $\mathrm{Re}\,\langle w, x\rangle - a = \|x - y\|^2 > 0$). Le résultat en découle.

(2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{H}$ qui converge faiblement vers $x \in \mathscr{H}$. Supposons par l'absurde que $\liminf_{n\to+\infty} f(x_n) < f(x)$. Soient $\lambda \in \left]\liminf_{n\to+\infty} f(x_n), f(x)\right[$ et $C_\lambda = \{x \in \mathscr{H} \ : \ f(x) \leq \lambda\}$. Alors C_λ est un convexe fermé de $\mathscr{H}$, car f est continue et convexe, donc C_λ est faiblement fermé par (1). Soit $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite telle que $f(x_{n_k}) \leq \lambda$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (elle existe par la définition d'une limite inférieure). Alors $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite contenue dans C_λ, qui converge faiblement vers x, donc $x \in C_\lambda$ par fermeture faible. D'où $f(x) \leq \lambda$, une contradiction. $\square$

1.3 Spectre des opérateurs continus

Soient E un espace vectoriel normé complexe et u un opérateur continu de E (c'est-à-dire un élément de $\mathscr{L}(E)$, voir les rappels de terminologie 1.1).

Une *valeur régulière* de u est un élément $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u - \lambda\,\mathrm{id}$ soit inversible dans $\mathscr{L}(E)$. L'ensemble des valeurs régulières de u est appelé l'*ensemble résolvant* de u. Un élément de $\mathbb{C}$ qui n'est pas une valeur régulière de u est appelé une *valeur spectrale* de u. L'ensemble des valeurs spectrales est appelé le *spectre* de u, et noté $\mathrm{Sp}(u)$. L'application $R_u : \mathbb{C} - \mathrm{Sp}(u) \to \mathscr{L}(E)$ définie par $\lambda \mapsto (u - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$ s'appelle l'*application résolvante* de u. Le *rayon spectral* de u est

$$\rho(u) = \sup_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$$

(avec la convention usuelle que $\rho(u) = -\infty$ si $\mathrm{Sp}(u)$ est vide).

Une *valeur propre* de u est un élément $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que le noyau de $u - \lambda\,\mathrm{id}$ soit non nul (ou, de manière équivalente, tel que l'application linéaire $u - \lambda\,\mathrm{id}$ ne soit pas injective). Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})$ est alors appelé l'*espace propre de u associé à λ*. La dimension de cet espace propre (qui peut être infinie) est appelée la *multiplicité* de λ. Un élément non nul de $\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})$ est appelé un *vecteur propre de u associé à* la valeur propre λ. L'ensemble des valeurs propres est noté $\mathrm{Vp}(u)$, et aussi appelé le *spectre ponctuel* de u.

Le *spectre résiduel* de u est l'ensemble, noté $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u)$, des $\lambda \in \mathbb{C}$ non valeurs propres tels que l'image de $u - \lambda\,\mathrm{id}$ ne soit pas dense dans E.

Par exemple, si $E \neq \{0\}$ et si u est l'opérateur nul, alors $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Vp}(u) = \{0\}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \emptyset$. Si $E \neq \{0\}$ et si u est l'opérateur identité, alors $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Vp}(u) = \{1\}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \emptyset$.

Remarques. (1) Si E est de dimension finie n, alors tout opérateur linéaire de E est continu et tout sous-espace vectoriel de E est fermé. Donc $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est inversible si et seulement si $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est injectif, si et seulement si $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est surjectif. Le spectre résiduel de u est donc vide. Les valeurs spectrales de u sont donc les valeurs propres de u, et aussi les valeurs propres de la matrice U de u dans n'importe quelle base de E. Ce sont les (n en comptant avec multiplicité) racines complexes du polynôme caractéristique $\det(u - X\,\mathrm{id}) = \det(U - X\,\mathrm{I_n})$. La multiplicité d'une valeur spectrale de u est inférieure ou égale à la multiplicité de la racine correspondante du polynôme caractéristique de u, avec égalité si u est diagonalisable. Le rayon spectral de u est alors la plus grande valeur absolue d'une racine du polynôme caractéristique de u.

(2) Rappelons le théorème suivant (voir par exemple [Bre] pour une démonstration), qui implique qu'un élément de $\mathscr{L}(E)$ est inversible dans $\mathscr{L}(E)$ si et seulement s'il est bijectif.

Théorème 1.24 (Théorème de Banach) *Soient E et F deux espaces de Banach réels ou complexes et $f : E \to F$ une application linéaire continue bijective. Alors $f^{-1} : F \to E$ est aussi continue.* □

En particulier, si E est un espace de Banach complexe, alors un nombre complexe λ est une valeur régulière d'un opérateur continu u si et seulement si $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est bijectif. Cette remarque est souvent utile, et sera utilisée sans plus de commentaire dans la suite de ces notes.

(3) Puisque bijectif implique injectif, toute valeur propre est une valeur spectrale :

$$\mathrm{Vp}(u) \subset \mathrm{Sp}(u)\ .$$

En dimension finie, nous venons de voir que cette inclusion est une égalité. Mais cette inclusion peut être stricte en dimension infinie, voir les exercices E.6 et E.7 ci-dessous.

Prendre bien garde à ne pas confondre
valeur spectrale et valeur propre

(4) Si l'image de $u - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas dense, alors $u - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas surjectif. Puisque bijectif implique surjectif, le spectre résiduel est donc contenu dans le spectre :

$$\mathrm{Sp_{res}}(u) \subset \mathrm{Sp}(u)\ ,$$

et par définition, nous avons même $\mathrm{Sp_{res}}(u) \subset \mathrm{Sp}(u) - \mathrm{Vp}(u)$.

(5) Pour tout λ dans $\mathbb{C} - \{0\}$, nous avons

$$\mathrm{Sp}(\lambda u) = \lambda\,\mathrm{Sp}(u);\quad \mathrm{Vp}(\lambda u) = \lambda\,\mathrm{Vp}(u);\quad \mathrm{Sp_{res}}(\lambda u) = \lambda\,\mathrm{Sp_{res}}(u)$$

et

$$\rho(\lambda u) = |\lambda|\,\rho(u)\ .$$

(6) Pour tout λ dans $\mathbb{C}$, nous avons

$$\mathrm{Sp}(u+\lambda\,\mathrm{id}) = \lambda + \mathrm{Sp}(u),\quad \mathrm{Vp}(u+\lambda\,\mathrm{id}) = \lambda + \mathrm{Vp}(u),\quad \mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u+\lambda\,\mathrm{id}) = \lambda + \mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u)\ .$$

(7) Si u est inversible, alors le spectre de son inverse u^{-1} est l'ensemble des inverses des éléments du spectre de u :

$$\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \mathrm{Sp}(u)^{-1}\ .$$

En effet, si u est inversible, alors 0 n'appartient ni au spectre de u ni à celui de u^{-1} ; de plus, pour tout nombre complexe non nul λ, l'opérateur continu $u^{-1} - \lambda\,\mathrm{id}$ est inversible si et seulement si $u - \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{id} = -\frac{1}{\lambda}u(u^{-1} - \lambda\,\mathrm{id})$ est inversible.

Les points (5), (6) et (7) sont des cas particuliers d'applications du calcul fonctionnel continu, que nous introduirons dans le théorème 1.45.

(8) Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach réels ou complexes. Deux opérateurs continus $u_1 \in \mathscr{L}(E_1)$ et $u_2 \in \mathscr{L}(E_2)$ sont dit *conjugués* s'il existe un isomorphisme d'espaces de Banach (c'est-à-dire un isomorphisme linéaire continu, donc d'inverse continu) $v : E_1 \to E_2$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{u_1} & E_1 \\ v\downarrow & & \downarrow v \\ E_2 & \xrightarrow{u_2} & E_2 \end{array}$$

(c'est-à-dire tels que $u_2 = v \circ u_1 \circ v^{-1}$). Un tel isomorphisme v est appelé une *conjugaison* entre u_1 et u_2. La relation « être conjugué » est clairement une relation d'équivalence sur $\mathscr{L}(E_1)$.

Si deux opérateurs continus $u_1 \in \mathscr{L}(E_1)$ et $u_2 \in \mathscr{L}(E_2)$ sont conjugués, alors ils ont même spectre, même spectre ponctuel, et même spectre résiduel :

$$\mathrm{Sp}(u_1) = \mathrm{Sp}(u_2),\quad \mathrm{Vp}(u_1) = \mathrm{Vp}(u_2),\quad \mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u_1) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u_2)\ .$$

En effet, si v est une conjugaison entre u_1 et u_2, alors $u_1 - \lambda\,\mathrm{id}$ est inversible (respectivement injectif, non injectif d'image non dense) si et seulement si $v \circ (u_1 - \lambda\,\mathrm{id}) \circ v^{-1} = u_2 - \lambda\,\mathrm{id}$ est inversible (respectivement injectif, non injectif d'image non dense).

Ceci fournit une méthode de calcul de spectre d'un opérateur continu u, en exhibant une conjugaison de u avec un opérateur continu dont on connait déjà le spectre.

Lorsque E_1 et E_2 sont de plus des espaces de Hilbert, nous dirons qu'une application v comme ci-dessus est une *conjugaison unitaire* entre u_1 et u_2 si elle est de plus isométrique. Nous dirons alors que u_1 et u_2 sont *unitairement conjugués*. La relation « être unitairement conjugué » est encore une relation d'équivalence sur $\mathscr{L}(E_1)$.

Exercice E.4 *Soient E un espace de Banach complexe et $u \in \mathscr{L}(E)$. Soient $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces fermés de E tels que $u(E_i) \subset E_i$ pour $i = 1, \dots, n$ et $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$. Montrer que*

$$\mathrm{Sp}(u) = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{Sp}(u_{|E_i}),\quad \mathrm{Vp}(u) = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{Vp}(u_{|E_i}),\quad \mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \Big(\bigcup_{i=1}^n \mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u_{|E_i})\Big) - \mathrm{Vp}(u)\ .$$

Attention, le résultat de cet exercice n'est plus vrai si on remplace somme directe par somme hilbertienne (voir par exemple l'exercice E.6).

Théorème 1.25 *Soient E un espace de Banach complexe et $u \in \mathscr{L}(E)$.*

(i) Le spectre $\mathrm{Sp}(u)$ *de u est un compact de $\mathbb{C}$, contenu dans la boule de centre* 0 *et de rayon $\|u\|$:*

$$\rho(u) \leq \|u\| \ .$$

(ii) Le spectre $\mathrm{Sp}(u)$ *de u est non vide si et seulement si $E \neq \{0\}$.*

(iii) Si $\mathrm{Sp}(u)$ *est non vide, alors*

$$\rho(u) = \lim_{n \to +\infty} \|u^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} \|u^n\|^{\frac{1}{n}} \ .$$

Démonstration. (i) Montrons que le rayon spectral de u est au plus $\|u\|$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|u\|$. Soit $v = \frac{u}{\lambda} \in \mathscr{L}(E)$, alors $\|v\| < 1$. Donc par la proposition 1.2 (2), l'élément $\mathrm{id} - v$ est inversible dans l'algèbre de Banach $\mathscr{L}(E)$. D'où $u - \lambda \,\mathrm{id} = -\lambda(\mathrm{id} - v)$ est inversible dans $\mathscr{L}(E)$ car $\lambda \neq 0$. Par conséquent, λ est une valeur régulière de u. Le résultat en découle par contraposition.

Montrons que l'ensemble résolvant de u est ouvert. Ceci découle de la proposition 1.2 (3), mais donnons-en une démonstration directe. Soit λ_0 une valeur régulière de u, posons $v_0 = (u - \lambda_0 \,\mathrm{id})^{-1}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|v_0\|}$, soit $v = (\lambda - \lambda_0)v_0 \in \mathscr{L}(E)$, qui vérifie $\|v\| < 1$. Donc par la proposition 1.2 (2), l'élément $\mathrm{id} - v$ est inversible dans $\mathscr{L}(E)$. D'où le produit de deux éléments inversibles

$$\begin{aligned}
(u - \lambda_0 \,\mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} - v) &= (u - \lambda_0 \,\mathrm{id}) \circ \big(\mathrm{id} - (\lambda - \lambda_0)(u - \lambda_0 \,\mathrm{id})^{-1}\big) \\
&= (u - \lambda_0 \,\mathrm{id}) - (\lambda - \lambda_0) \,\mathrm{id} \\
&= u - \lambda \,\mathrm{id}
\end{aligned}$$

est inversible dans $\mathscr{L}(E)$. Par conséquent, λ est une valeur régulière de u. Ceci montre que l'ensemble résolvant de u est ouvert.

Il en découle que le spectre de u est fermé (son complémentaire, l'ensemble résolvant, est ouvert) et borné (contenu dans la boule de centre 0 et de rayon $\|u\|$). Donc $\mathrm{Sp}(u)$ est compact.

(ii) Pour montrer les deux dernières assertions du théorème 1.25, nous avons besoin que E soit un espace de Banach complexe, car nous allons utiliser des arguments d'applications analytiques complexes. Dans la partie 1 de ces notes, il n'y a que dans la démonstration de ces assertions (ii) et (iii) que nous aurons besoin de tels arguments. En particulier, le premier point du théorème 1.25 reste valable si E est un espace de Banach réel. Un lecteur qui n'a pas suivi de cours d'analyse complexe peut ou bien consulter l'appendice B et admettre les résultats rappelés ci-dessous, ou bien simplement admettre les assertions (ii) et (iii) du théorème 1.25, et passer à la suite.

Soient E un espace de Banach complexe et U un ouvert de $\mathbb{C}$. Rappelons (voir par exemple [Die1]) qu'une application $f : U \to E$ est *analytique complexe* si pour tout $z_0 \in U$, il existe $r > 0$ et une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E tels que $B(z_0, r) \subset U$ et la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} (z - z_0)^n c_n$ converge normalement sur $B(z_0, r)$, de somme égale à $f(z)$ pour tout $z \in B(z_0, r)$. Une telle suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors unique. Une application analytique complexe est en particulier continue. Nous aurons aussi besoin du résultat suivant.

Théorème 1.26 *(Théorème de Liouville, voir par exemple [Die1, 9.11.1].) Si $f : \mathbb{C} \to E$ est une application analytique complexe bornée, alors f est constante.* $\square$

Ces techniques d'analyse complexe pourront être appliquées dans notre cadre grâce au résultat suivant. Rappelons que $\mathscr{L}(E)$, muni de la norme d'opérateur, est un espace de Banach complexe, si E l'est.

Proposition 1.27 *Soient E un espace de Banach complexe et $u \in \mathscr{L}(E)$. L'application résolvante $R_u : \mathbb{C} - \mathrm{Sp}(u) \to \mathscr{L}(E)$, définie par $\lambda \mapsto (u - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$, est analytique complexe.*

Démonstration. Reprenons les arguments utilisés pour montrer que l'ensemble résolvant de u est ouvert. Soit λ_0 une valeur régulière de u, posons $v_0 = (u - \lambda_0\,\mathrm{id})^{-1}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|v_0\|}$, nous avons vu que $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est inversible, d'inverse

$$(u - \lambda\,\mathrm{id})^{-1} = (\mathrm{id} - (\lambda - \lambda_0)v_0)^{-1} \circ (u - \lambda_0\,\mathrm{id})^{-1} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda - \lambda_0)^n v_0^n\Big) \circ v_0 \;,$$

par la proposition 1.2 (2). Puisque $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|v_0\|}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda - \lambda_0)^n v_0^{n+1}$ est normalement convergente. Donc l'application R_u (qui est développable en série entière sur le disque ouvert $B(\lambda_0, \frac{1}{\|v_0\|})$ pour tout $\lambda_0 \in \mathbb{C} - \mathrm{Sp}(u)$) est, par définition, analytique complexe sur son domaine de définition $\mathbb{C} - \mathrm{Sp}(u)$ (qui est ouvert par l'assertion (i) du théorème 1.25). $\square$

Revenons à la démonstration de l'assertion (ii) du théorème 1.25. Supposons que E ne soit pas réduit au vecteur nul. Montrons par l'absurde que le spectre de u est non vide. Si ce n'est pas le cas, l'ensemble résolvant de u est égal à $\mathbb{C}$ tout entier, et donc l'application résolvante R_u est définie sur tout $\mathbb{C}$. En particulier, $u = u - 0\,\mathrm{id}$ est inversible, donc $\|u\| \neq 0$.

Montrons que l'application R_u est bornée. Si $|\lambda| > \|u\|$, alors par la proposition 1.2 (2),

$$(u - \lambda\,\mathrm{id})^{-1} = -\lambda^{-1}(\mathrm{id} - \lambda^{-1}u)^{-1} = -\lambda^{-1} \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^{-n} u^n \;. \tag{5}$$

Si $|\lambda| > 2\|u\|$, il en découle que

$$\|(u - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}\| \leq |\lambda^{-1}| \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda|^{-n} \|u\|^n = |\lambda^{-1}| \frac{1}{1 - |\lambda|^{-1}\|u\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|u\|} \leq \frac{1}{\|u\|} < +\infty \;.$$

L'application R_u est donc bornée en dehors du disque fermé de centre 0 et de rayon $2\|u\|$. Puisqu'elle est continue, elle est aussi bornée sur ce disque (qui est compact), donc R_u est bornée.

Par le théorème de Liouville 1.26, l'application R_u, analytique complexe (par la proposition 1.27) et bornée sur $\mathbb{C}$, est constante. Donc l'application $\lambda \mapsto R_u(\lambda)^{-1} = u - \lambda\,\mathrm{id}$ est constante. Ceci est visiblement absurde : soit x un élément non nul de E, alors $u(x) \neq u(x) - x$, donc $u - 0\,\mathrm{id} \neq u - 1\,\mathrm{id}$ (en fait, l'application $\lambda \mapsto u - \lambda\,\mathrm{id}$, de toute partie de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathscr{L}(E)$, est injective si $E \neq \{0\}$).

Notons que si $E = \{0\}$, alors $\mathscr{L}(E)$ possède un seul élément (l'application nulle), donc pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, nous avons $u - \lambda\,\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$, qui est inversible. Donc $\mathrm{Sp}(u)$ est vide si $E = \{0\}$. L'assertion (ii) du théorème 1.25 en découle.

(iii) Montrons la dernière formule du théorème 1.25 sur le rayon spectral de u. Nous aurons besoin d'autres résultats sur les applications analytiques complexes.

Théorème 1.28 (Développement de Laurent) *(voir par exemple [Die1, §9.14]) Soient E un espace de Banach complexe et $f : B(0,r) - \{0\} \to E$ une application analytique complexe du disque ouvert dans $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon $r > 0$ privé de l'origine à valeurs dans E. Alors il existe une et une seule suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans E telle que*

- *la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n c_n$ converge pour tout $z \in B(0,r)$,*
- *la série $\sum_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} z^{-n} c_{-n}$ converge pour tout $z \neq 0$, et*
- *pour tout z dans $B(0,r) - \{0\}$, nous ayons $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n c_n$.* □

La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n c_n$ est appelée le *développement de Laurent* de f.

Si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans E, rappelons (voir par exemple [Rud1]) que le *rayon de convergence* $R \in [0, +\infty]$ de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z - z_0)^n c_n$ est la borne supérieure des $r > 0$ tels que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z - z_0)^n c_n$ converge pour tout z dans $B(z_0, r)$, et que la *formule de Cauchy* qui permet d'exprimer le rayon de convergence R en fonction des coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est
$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \|c_n\|^{\frac{1}{n}} \ . \tag{6}$$

Après ces rappels, montrons l'assertion (iii) du théorème 1.25. Par la définition du rayon spectral $\rho(u)$ et par la proposition 1.27, l'application $f : z \mapsto \frac{1}{z} R_u(\frac{1}{z})$ est définie et analytique complexe sur $B(0, \frac{1}{\rho(u)}) - \{0\}$. Par la formule (5) où l'on pose $\lambda = \frac{1}{z}$, elle coïncide sur le disque épointé $B(0, \frac{1}{\|u\|}) - \{0\}$ avec la série entière $-\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n u^n$ (qui converge si $|z| < \frac{1}{\|u\|}$). Par unicité du développement de Laurent et puisque $\rho(u) \leq \|u\|$, cette série entière est donc le développement de Laurent de f sur $B(0, \frac{1}{\|u\|}) - \{0\}$. Et puisque f est définie et analytique complexe sur $B(0, \frac{1}{\rho(u)}) - \{0\}$, cette série entière converge en tout point z de ce disque, par les propriétés du développement de Laurent. Par la définition du rayon de convergence R de cette série entière, nous avons donc $R \geq \frac{1}{\rho(u)}$.

Réciproquement, si $|\lambda| > \frac{1}{R}$, alors $\frac{1}{|\lambda|} < R$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^{-n} u^n$ converge, par définition du rayon de convergence R. Donc $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est inversible (d'inverse $-\lambda^{-1} \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^{-n} u^n$, par un calcul immédiat), et donc λ n'appartient pas au spectre de u. Ceci étant vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \frac{1}{R}$, nous avons donc $\rho(u) \leq \frac{1}{R}$, et par conséquent $\rho(u) = \frac{1}{R}$.

Par la formule de Cauchy (6), nous avons donc
$$\rho(u) = \limsup_{n\to+\infty} \|u^n\|^{\frac{1}{n}} \ .$$

Puisque $\|u^{n+m}\| \leq \|u^n\| \ \|u^m\|$ pour tous les n, m dans $\mathbb{N}$ par les propriétés de la norme d'opérateur, le fait que
$$\rho(u) = \limsup_{n\to+\infty} \ \|u^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \ \|u^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} \ \|u^n\|^{\frac{1}{n}}$$
découle de l'exercice classique suivant, en prenant le logarithme.

Lemme 1.29 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui est sous-additive, c'est-à-dire telle que $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ pour tous les n, m dans $\mathbb{N}$. Alors la suite $(\frac{a_n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, et sa limite est $\inf_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} \frac{a_n}{n}$.*

Démonstration. Fixons $m \in \mathbb{N}$ non nul. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, la division euclidienne dit qu'il existe un unique couple $(q_n, r_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = mq_n + r_n$ et $0 \leq r_n < m$. En particulier, puisque r_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs, $\lim_{n\to+\infty} \frac{q_n}{n} = \frac{1}{m}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{r_n}}{n} = 0$. Or

$$a_n = a_{mq_n+r_n} \leq q_n\, a_m + a_{r_n}$$

par sous-additivité. Donc $\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}$. En prenant la borne inférieure sur m, nous avons donc $\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf_{m\in\mathbb{N}-\{0\}} \frac{a_m}{m}$. D'où

$$\inf_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} \frac{a_n}{n} \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf_{m\in\mathbb{N}-\{0\}} \frac{a_m}{m}\ .$$

Les termes aux deux extrémités de cette suite d'inégalités étant égaux, les limites inférieures et supérieures sont égales, et égales à la borne inférieure. Le lemme en découle. □

Ceci conclut la démonstration du théorème 1.25. □

Contrairement au cas des opérateurs auto-adjoints des espaces de Hilbert que nous verrons plus tard (proposition 1.38 (v)), il n'est pas toujours vrai que le rayon spectral de u est égal à la norme de u : si $n \geq 2$ et $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est une application linéaire non nulle, de matrice triangulaire supérieure stricte dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, alors la seule valeur propre de u étant 0, le spectre de u est réduit à $\{0\}$; cet opérateur continu u est donc de norme non nulle (car il est non nul), mais son rayon spectral est nul. Voir aussi l'exercice E.12.

Exercice E.5 *Soient E un espace de Banach complexe non réduit à $\{0\}$ et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ deux opérateurs linéaires continus qui commutent (c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$). Montrer que*

$$\rho(u \circ v) \leq \rho(u)\rho(v)\ .$$

Rappelons que pour tout $\epsilon \geq 0$, une partie P d'un espace métrique X est dite *ϵ-dense* dans X si tout point de X est à distance au plus ϵ d'au moins un point de P. Rappelons aussi que tout compact C de $\mathbb{C}$ est séparable : il suffit de prendre pour partie dénombrable dense dans C la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ où A_n est une partie finie $\frac{1}{n}$-dense dans C, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc comme le montre l'exercice suivant (en traitant à part le cas de la partie vide, qui est le spectre de l'unique opérateur linéaire de l'espace vectoriel nul), tout compact de $\mathbb{C}$ est le spectre d'au moins un opérateur linéaire continu.

Exercice E.6 *Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, soit C un compact non vide de $\mathbb{C}$, et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans C (c'est-à-dire telle que $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ soit une partie dense de C).*

Montrer qu'il existe un et un seul opérateur continu $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que $u(e_n) = \lambda_n e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Un tel opérateur continu est appelé un opérateur diagonal *dans la base hilbertienne choisie.*

Montrer que le spectre de u est le compact C prescrit :

$$\mathrm{Sp}(u) = C\ ,$$

que les valeurs propres de u sont les λ_n pour $n \in \mathbb{N}$ (dont on calculera les espaces propres) :

$$\mathrm{Vp}(u) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}\ ,$$

et que le spectre résiduel de u est vide :

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \emptyset \ .$$

Exercice E.7 *Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, et soit $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ l'opérateur linéaire défini par $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i e_i \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i e_{i+1}$. (Cet opérateur est appelé l'*opérateur de décalage *dans la base hilbertienne choisie.)*

Montrer que u est bien défini et continu, qu'il n'a pas de valeur propre :

$$\mathrm{Vp}(u) = \emptyset \ ,$$

que son spectre est le disque unité fermé :

$$\mathrm{Sp}(u) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1\} \ ,$$

et que son spectre résiduel est le disque unité ouvert :

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\} \ .$$

L'application qui à un opérateur continu associe son spectre vérifie une propriété de semi-continuité. Rappelons qu'une application f d'un espace métrique X dans $\mathbb{R}$ est *semi-continue supérieurement* en un point x_0 de X si elle vérifie l'une des deux assertions équivalentes suivantes :

- pour tout $\lambda > f(x_0)$, il existe un voisinage ouvert V de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V$, on ait $f(x) \leq \lambda$;
- pour toute suite $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x_0 dans X, nous avons

$$\limsup_{i\to+\infty} \ f(y_i) \leq f(x_0) \ .$$

Bien sûr, si f est continue en x_0, alors f est semi-continue supérieurement en x_0. Une application $f : X \to \mathbb{R}$ est dite *semi-continue supérieurement* si elle est semi-continue supérieurement en tout point de X. Un exemple typique d'application semi-continue supérieurement, mais non continue, est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui est nulle sauf au point 0, et vaut 1 en 0. On montre aussi facilement qu'une application $f : X \to \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la partie $\{x \in X \ : \ f(x) \geq \lambda\}$ est fermée dans X, et que la borne inférieure $f = \inf_{i\in I} f_i$ d'une famille $(f_i)_{i\in I}$ d'applications semi-continues supérieurement (par exemple continues) est encore semi-continue supérieurement. (Voir par exemple [Dix, Die2, Pau] pour ces notions et des compléments.)

Proposition 1.30 *Soit E un espace de Banach complexe.*

(1) Si $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathscr{L}(E)$ qui converge vers $u \in \mathscr{L}(E)$, si λ_i est un point du spectre de u_i pour tout $i \in \mathbb{N}$, si la suite $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers un point λ dans $\mathbb{C}$, alors λ appartient au spectre de u.

(2) Si $E \neq \{0\}$, l'application rayon spectral $\rho : \mathscr{L}(E) \to \mathbb{R}$, définie par $u \mapsto \rho(u)$, est semi-continue supérieurement.

Démonstration. (1) Par contraposée, si λ n'appartient pas au spectre de u, alors $u-\lambda\,\mathrm{id}$ est inversible. Donc pour i suffisamment grand, l'opérateur continu $u_i-\lambda_i\,\mathrm{id}$, qui est proche de $u-\lambda\,\mathrm{id}$, est encore inversible (voir la proposition 1.2 (3)). Donc λ_i n'appartient pas au spectre de u_i, ce qui contredit les hypothèses. Cette première propriété est encore vraie si E est un espace de Banach réel.

(2) Tout d'abord, les spectres des opérateurs continus d'espaces de Banach complexes non nuls étant non vides, l'application ρ est bien définie. Donnons deux démonstrations de cette assertion (2).

Pour la première démonstration, l'application du produit $\mathscr{L}(E)^n$ dans $\mathscr{L}(E)$, définie par $(u_1,\dots,u_n)\mapsto u_1\circ\dots\circ u_n$, est continue. En effet, par récurrence, il suffit de le faire pour le cas $n=2$. Le résultat découle alors du fait que si u est suffisamment proche de u_0 et si v est suffisamment proche de v_0, alors $\|v\|\leq\|v_0\|+1$, et

$$\begin{aligned}\|u\circ v-u_0\circ v_0\| &= \|(u\circ v-u_0\circ v)+(u_0\circ v-u_0\circ v_0)\|\\ &\leq \|u-u_0\|\,\|v\|+\|u_0\|\,\|v-v_0\|\\ &\leq \|u-u_0\|\,\big(\|v_0\|+1\big)+\|u_0\|\,\|v-v_0\|\ ,\end{aligned}$$

qui est proche de 0. Par composition avec l'application continue de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{L}(E)^n$ définie par $u\mapsto(u,u,\dots,u)$, l'application $u\mapsto u^n$ est donc continue. Donc, par le théorème 1.25 (3), l'application

$$\rho: u\mapsto \inf_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}\ \|u^n\|^{\frac{1}{n}}\ ,$$

qui est une borne inférieure d'applications continues, est semi-continue supérieurement.

Pour la deuxième démonstration, nous allons utiliser le point (1) de la proposition 1.30. Puisque $\mathscr{L}(E)$ est un espace vectoriel normé, donc un espace métrique, nous utilisons le critère de semi-continuité supérieure rappelé ci-dessus. Soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{L}(E)$ qui converge vers $u\in\mathscr{L}(E)$.

Notons $\ell=\limsup_{i\to+\infty}\rho(u_i)$ et montrons que $\ell\leq\rho(u)$, ce qui conclut.

Tout d'abord, ℓ est fini, car la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ convergeant vers u, la suite $\big(\|u_i\|\big)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|u\|$, donc reste bornée, et $\rho(u_i)\leq\|u_i\|$. Soit $(u_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite telle que $\ell=\lim_{k\to+\infty}\rho(u_{i_k})$.

Puisque le spectre de u_i est non vide et compact (par le théorème 1.25 (i) et (ii)), il existe $\lambda_i\in\mathrm{Sp}(u_i)$ tel que $|\lambda_i|=\rho(u_i)$. La suite $(\lambda_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$, qui reste dans un borné de $\mathbb{C}$, converge, quitte à extraire une nouvelle fois, vers un élément de $\mathbb{C}$ noté λ. Par le point (1) de la proposition 1.30, l'élément λ appartient au spectre de u, donc le rayon spectral $\rho(u)$ est au moins égal à $|\lambda|$. D'où

$$\ell=\lim_{k\to+\infty}\rho(u_{i_k})=\lim_{k\to+\infty}|\lambda_{i_k}|=|\lambda|\leq\rho(u)\ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

En dimension finie, l'application rayon spectral est même continue, ainsi que l'application qui à un opérateur linéaire associe son spectre, au sens suivant. Pour tout $\epsilon>0$ et pour toute partie A d'un espace métrique X, nous notons

$$V_\epsilon(A)=\{x\in X\ :\ \exists\, a\in A,\ \ d(x,a)<\epsilon\}$$

le ϵ-voisinage ouvert de A dans X.

Exercice E.8 *a) Soient X un espace métrique (de distance notée d), et $\mathscr{P}_c(X)$ l'ensemble des fermés bornés non vides de X. Considérons l'application $d_H : \mathscr{P}_c(X) \times \mathscr{P}_c(X) \to [0, +\infty[$ définie par*

$$d_H(K, K') = \max\Big\{ \sup_{x \in K} d(x, K'), \sup_{x' \in K'} d(x', K) \Big\}$$
$$= \inf\big\{\epsilon > 0 \ : \ K \subset V_\epsilon(K') \ \text{ et } \ K' \subset V_\epsilon(K)\big\} \ .$$

Montrer que d_H est une distance sur $\mathscr{P}_c(X)$, invariante par les isométries de X : pour toute isométrie f de X, nous avons $d_H(f(K), f(K')) = d_H(K, K')$. Cette distance, qui dépend bien sûr de la distance d sur X, est appelée la distance de Hausdorff *sur $\mathscr{P}_c(X)$.*

b) Soit E un espace vectoriel normé complexe de dimension finie non nulle. Montrer que l'application de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{P}_c(\mathbb{C})$ définie par $u \mapsto \mathrm{Sp}(u)$ est continue.

c) Pour tenir compte des multiplicités, on peut montrer aussi le résultat plus précis suivant. Notons $\mathscr{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ l'ensemble des mesures complexes sur $\mathbb{C}$, qui est un espace de Banach pour la norme $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{C})$, où $|\mu|$ est la mesure positive associée à μ (voir par exemple [Coh, Chap. 4] et les rappels de la partie 1.1). Pour tout $x \in \mathbb{C}$, notons δ_x la masse de Dirac unité en x. Soit E un espace vectoriel normé complexe de dimension finie. Montrer que l'application de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ définie par $u \mapsto \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_u(\lambda)\, \delta_\lambda$ est continue, où $m_u(\lambda)$ est la multiplicité d'une valeur propre λ de u, lorsque $\mathscr{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ est muni de la topologie vague (ou faible-étoile), qui est la moins fine rendant continue les évaluations des mesures sur les fonctions continues à support compact, voir par exemple [Pau, §2.8].

d) Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie non nulle. Montrer que l'application rayon spectral $\rho : \mathscr{L}(E) \to \mathbb{R}$, définie par $u \mapsto \rho(u)$, est continue.

1.4 Opérateurs compacts.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés complexes. Notons

$$\overline{B}_E = \{x \in E \ : \ \|x\| \le 1\}$$

la boule unité fermée de E. Un élément u de $\mathscr{L}(E, F)$ est dit *compact* s'il vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

- $u(\overline{B}_E)$ est d'adhérence compacte dans F (pour la topologie forte),
- l'image par u de tout borné de E est d'adhérence compacte dans F,
- pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E telle que $\|x_n\| \le 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans F.

Vérifions l'équivalence de ces conditions.

Il est immédiat que la seconde condition entraîne la première. Pour montrer l'implication inverse, soit B un borné de E. Alors B est contenu dans une boule fermée de centre 0 et de rayon r pour un certain $r > 0$. Or $u(\overline{B}(0, r)) = r\, u(\overline{B}_E)$ par linéarité de u. De plus, les homothéties $x \mapsto rx$ étant des homéomorphismes, $u(\overline{B}(0, r))$ est d'adhérence compacte puisque $u(\overline{B}_E)$ l'est par hypothèse. Maintenant, $u(B)$, en tant que partie de la partie d'adhérence compacte $u(\overline{B}(0, r))$, est d'adhérence compacte, car tout fermé dans un compact est compact.

Il est immédiat que la première condition implique la troisième. Réciproquement, si la troisième condition est vérifiée, et si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans l'adhérence de $u(\overline{B}_E)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n \in \overline{B}_E$ tel que $d(u(x_n), y_n) \leq \frac{1}{n}$. Par la troisième condition, la suite $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

Ces trois conditions sont bien sûr équivalentes à demander que l'image par u de toute suite bornée dans E admet une sous-suite convergente dans F.

Remarque. La définition a aussi un sens pour les espaces vectoriels normés réels, et les propositions 1.33, 1.34, 1.35, 1.36 restent valables dans ce cadre.

Exemples. (1) Un élément u de $\mathscr{L}(E,F)$ est dit *de rang fini* si son image est de dimension finie. Par le théorème de Riesz 1.7 (et le fait que l'image de $u(\overline{B}_E)$ soit contenue dans $\overline{B}_F(0, \|u\|)$), un élément de $\mathscr{L}(E,F)$ de rang fini est compact.

En particulier, si F est de dimension finie, alors tout élément de $\mathscr{L}(E,F)$ est compact. De nouveau par le théorème de Riesz 1.7, si E est de dimension infinie, alors l'identité de E dans E n'est pas un opérateur compact.

(2) Soient X et Y deux espaces métriques compacts, μ une mesure positive borélienne finie sur Y et $N \in \mathscr{C}(X\times Y;\mathbb{C})$. Notons E et F les espaces de Banach $\mathscr{C}(Y;\mathbb{C})$ et $\mathscr{C}(X;\mathbb{C})$ respectivement (pour les normes uniformes $\|\cdot\|_\infty$, voir la partie 1.1). Pour tout $f \in E$, notons $Kf = K_N f \in F$ l'application définie par

$$Kf(x) = \int_{y\in Y} N(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)\ ,$$

pour tout $x \in X$. Nous affirmons que $K = K_N \in \mathscr{L}(E,F)$ est un opérateur compact, dit *opérateur à noyau, de noyau N*.

Avant de montrer ce résultat, rappelons deux théorèmes qui seront utiles (voir par exemple [Dix, Dug, Pau] pour des démonstrations). Nous renvoyons à la démonstration du théorème 1.10 dans l'appendice A pour des rappels sur les applications uniformément continues.

Théorème 1.31 (Théorème de Heine) *Soient X et Y deux espaces métriques, tels que X soit compact. Toute application continue de X dans Y est uniformément continue.* □

Soient X un espace métrique, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{C}(X;\mathbb{K})$ est dite *équicontinue* si pour tous les $\epsilon > 0$ et $x_0 \in X$, il existe un voisinage U de x_0 dans X tel que

$$\forall\, x \in U,\ \ \forall\, f \in \mathscr{A}, \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\ .$$

L'important est que le voisinage U ne dépende pas de l'élément f de $\mathscr{A}$ (attention à l'ordre des quantificateurs !!).

Théorème 1.32 (Théorème d'Arzela-Ascoli) *Soient X un espace métrique, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $\mathscr{A}$ une partie de $\mathscr{C}(X;\mathbb{K})$ telle que*

- *$\mathscr{A}$ est équicontinue,*
- *pour tout x dans X, l'ensemble $\mathscr{A}(x) = \{f(x)\ :\ f \in \mathscr{A}\}$ est d'adhérence compacte dans $\mathbb{K}$.*

Alors l'adhérence de $\mathscr{A}$ est compacte (et équicontinue) dans $\mathscr{C}(X;\mathbb{K})$ pour la norme uniforme sur les compacts. $\square$

Montrons maintenant que les opérateurs à noyaux $K = K_N$ définis ci-dessus sont compacts. Remarquons que

$$|Kf(x) - Kf(x')| \leq \|f\|_\infty \int_{y\in Y} |N(x,y) - N(x',y)|\, d\mu(y)$$

pour tous les x et x' dans X. Comme la mesure μ est finie, et par continuité uniforme en y de $x \mapsto N(x,y)$ (par le théorème de Heine 1.31), ceci montre que Kf est bien définie et continue, et que l'image par K de la boule unité fermée de E est équicontinue. L'application K est clairement linéaire, et continue car, avec $\|\mu\| = \mu(Y)$ la masse totale de μ,

$$\|Kf\|_\infty \leq \|\mu\|\ \|N\|_\infty \|f\|_\infty \ .$$

Ceci montre aussi que les images des applications Kf pour $f \in \overline{B}_E$ restent dans un compact fixé de $\mathbb{C}$. Donc l'application linéaire K est compacte, par le théorème d'Arzela-Ascoli 1.32 appliqué à $\mathscr{A} = \{Kf \ :\ f \in \overline{B}_E\}$.

(3) Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis, E et F les espaces de Hilbert $\mathbb{L}^2(\nu)$ et $\mathbb{L}^2(\mu)$ respectivement, et $N \in \mathbb{L}^2\big((X,\mathscr{A},\mu)\times(Y,\mathscr{B},\nu)\big)$. Pour tout $f \in E$, notons $Kf = K_N f \in F$ l'application définie par

$$Kf(x) = \int_{y\in Y} N(x,y)\, f(y)\, d\nu(y)\ ,$$

pour (presque) tout $x \in X$. Alors $K = K_N \in \mathscr{L}(E,F)$ est un opérateur compact, dit *opérateur à noyau de type Hilbert-Schmidt, de noyau N.*

En effet, par le théorème de Fubini (qu'il est possible d'utiliser par l'hypothèse de σ-finitude des mesures), l'application $N_x : y \mapsto N(x,y)$ appartient à $E = \mathbb{L}^2(\nu)$ pour μ-presque tout $x \in X$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $f \in E$, nous avons

$$|Kf(x)| \leq \|N_x\|_2\ \|f\|_2$$

pour μ-presque tout $x \in X$. En utilisant de nouveau le théorème de Fubini pour la dernière égalité,

$$\begin{aligned}\|Kf\|_2 &= \Big(\int_{x\in X} |Kf(x)|^2\, d\mu(x)\Big)^{\frac12} \leq \Big(\int_{x\in X} \|N_x\|_2^2\ \|f\|_2^2\, d\mu(x)\Big)^{\frac12}\\ &= \|f\|_2 \ \Big(\int_{x\in X}\Big(\int_{y\in Y} |N(x,y)|^2\, d\nu(y)\Big)\, d\mu(x)\Big)^{\frac12} = \|N\|_2\|f\|_2\ .\end{aligned}$$

Donc l'application K est bien définie, clairement linéaire, et continue (de norme d'opérateur inférieure ou égale à $\|N\|_2$).

Montrons maintenant que l'opérateur K est compact. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\overline{B}_E$, et montrons que, quitte à extraire, la suite $(Kf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement dans F. Par le théorème 1.21, nous pouvons supposer quitte à extraire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $f \in E$. En particulier, pour μ-presque tout x, nous en déduisons que $Kf_n(x) = \langle f_n, \overline{N_x}\rangle_E$ converge vers $\langle f, \overline{N_x}\rangle_E = Kf(x)$. Puisque $\|f_n\| \leq 1$, nous avons $|Kf_n(x)| \leq$

$\|N_x\|_2$ pour μ-presque tout $x \in X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, puisque $x \mapsto \|N_x\|_2^2$ est intégrable, $\|Kf_n\|_2$ converge donc vers $\|Kf\|_2$. De plus, Kf_n converge faiblement vers Kf, puisque K est continue, par l'assertion (4) de la proposition 1.20. Par la proposition 1.22, nous avons donc que Kf_n converge fortement vers Kf. Le résultat en découle.

Exercice E.9 *Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, soit $(X_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$ un espace mesuré σ-fini. Soient $N_{2,1} \in \mathbb{L}^2((X_2, \mathscr{A}_2, \mu_2) \times (X_1, \mathscr{A}_1, \mu_1))$ et $N_{3,2} \in \mathbb{L}^2((X_3, \mathscr{A}_3, \mu_3) \times (X_2, \mathscr{A}_2, \mu_2))$. Montrer que la composition $K_{N_{3,2}} \circ K_{N_{2,1}}$ des opérateurs de type Hilbert-Schmidt de noyaux $N_{2,1}$ et $N_{3,2}$ est l'opérateur de type Hilbert-Schmidt de noyau $N_{3,1}$ défini presque partout par $(x_3, x_1) \mapsto \int_{X_2} N_{3,2}(x_3, x_2)N_{2,1}(x_2, x_1)\, d\mu_2(x_2)$.*

Exercice E.10 *Soient I un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$. Notons $\|\cdot\|_0$ la norme uniforme sur $\mathscr{C}(I; \mathbb{C})$ et $\mathscr{D}^{(p)}(I)$ l'espace vectoriel complexe des applications $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^p, de dérivées d'ordre au plus p bornées sur I, muni de la norme $\|f\|_p = \sum_{i=0}^{p} \|f^{(i)}\|_\infty$. Montrer que $\mathscr{D}^{(p)}(I)$ est un espace de Banach complexe et que pour $p \geq 1$, l'injection $f \mapsto f$ de $\mathscr{D}^{(p)}(I)$ dans $\mathscr{D}^{(p-1)}(I)$ est un opérateur compact.*

Proposition 1.33 *Le sous-ensemble $\mathscr{K}(E, F)$ des opérateurs compacts de E dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E, F)$, qui est fermé si F est un espace de Banach. De plus, si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est compact, si G_1 et G_2 sont des espaces vectoriels normés complexes, si $v \in \mathscr{L}(G_1, E)$ et si $w \in \mathscr{L}(F, G_2)$, alors $w \circ u \circ v \in \mathscr{L}(G_1, G_2)$ est compact.*

En particulier, par l'exemple (1), toute limite d'une suite d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact (lorsque l'espace d'arrivée est un espace de Banach). Mais on connait des exemples d'opérateurs compacts qui ne sont pas limites d'opérateurs de rang fini (voir par exemple [LT2]). Voir toutefois la proposition 1.34 suivante pour le cas des espaces de Hilbert (aussi valable dans le cas réel).

Si E est un espace de Banach, l'ensemble des opérateurs compacts de E dans lui-même est donc un *idéal bilatère* (c'est-à-dire un sous-espace vectoriel stable par composition à droite et à gauche par n'importe quel élément de $\mathscr{L}(E)$) fermé dans l'algèbre de Banach $\mathscr{L}(E)$, et en particulier, une sous-algèbre (non unifère, c'est-à-dire ne contenant pas l'identité, si E est de dimension infinie) fermée de $\mathscr{L}(E)$.

Démonstration. Il est immédiat (en utilisant la troisième définition des opérateurs compacts) que l'ensemble des opérateurs compacts est stable par combinaisons linéaires. Si un opérateur continu $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est compact, si $v \in \mathscr{L}(G_1, E)$ et $w \in \mathscr{L}(F, G_2)$, alors $v(\overline{B}_{G_1})$ est borné car $\|v\|$ est fini, donc $u \circ v(\overline{B}_{G_1})$ est contenu dans un compact car u est compact, donc $w \circ u \circ v(\overline{B}_{G_1})$ est contenu dans un compact, car l'image d'un compact par une application continue à valeurs dans un espace métrique est encore compact. Puisque tout fermé dans un compact est compact, $w \circ u \circ v(\overline{B}_{G_1})$ est donc d'adhérence compacte.

Pour montrer la fermeture de l'ensemble des opérateurs compacts lorsque F est un espace de Banach, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F, qui converge vers u dans $\mathscr{L}(E, F)$. Montrons que $u(\overline{B}_E)$ est d'adhérence compacte. Puisque F est complet, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il suffit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$, on peut recouvrir $u(\overline{B}_E)$ par un nombre fini de boules de rayon ϵ. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_n - u\| < \frac{\epsilon}{2}$. Puisque l'opérateur continu u_n est compact, il existe $y_1, \ldots, y_k \in F$ tels que

$u_n(\overline{B}_E) \subset \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \frac{\epsilon}{2})$. Mais alors par l'inégalité triangulaire, $u(\overline{B}_E) \subset \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \epsilon)$: pour tout $x \in \overline{B}_E$, soit $i \in \mathbb{N} \cap [1, k]$ tel que $u_n(x) \in B(y_i, \frac{\epsilon}{2})$; alors

$$\|u(x) - y_i\| \leq \|u(x) - u_n(x)\| + \|u_n(x) - y_i\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\ . \quad \square$$

Proposition 1.34 *Si F est un espace de Hilbert complexe, alors tout opérateur compact u de E dans F est limite d'opérateurs continus de E dans F de rang fini.*

Démonstration. Pour tout $\epsilon > 0$, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, puisque $u(\overline{B}_E)$ est d'adhérence compacte, il existe $y_1, \dots, y_n \in F$ tels que $u(\overline{B}_E) \subset \bigcup_{i=1}^n B(y_i, \frac{\epsilon}{2})$. Notons p la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel engendré par $y_1, \dots, y_n$ (qui est fermé par le corollaire 1.8), et $v = p \circ u$, qui est linéaire continue (comme composition de deux applications linéaires continues), et de rang fini. Pour tout $x \in \overline{B}_E$, soit $i \in \mathbb{N} \cap [1, n]$ tel que $u(x) \in B(y_i, \frac{\epsilon}{2})$. Alors, comme $p(y_i) = y_i$ et puisque $\|p\| \leq 1$ (voir le théorème 1.11), nous avons par l'inégalité triangulaire

$$\|u(x) - v(x)\| \leq \|u(x) - y_i\| + \|p(y_i) - p(u(x))\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\ .$$

Donc $\|u - v\| \leq \epsilon$. Ainsi, u peut être approché arbitrairement près par des opérateurs continus de rang fini. $\square$

L'exercice suivant donne des approximations explicites (modulo le choix d'une base hilbertienne) d'opérateurs compacts par des opérateurs de rang fini.

Exercice E.11 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe, séparable, de dimension infinie, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$.*

(1) Montrer que si u est compact, alors l'image par u d'une suite faiblement convergente est (fortement) convergente.

Notons $F_n = \operatorname{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ l'espace vectoriel engendré par $e_0, \dots, e_n$. Notons $\tau_n = \|u_{|F_n^\perp}\|$ la norme de la restriction de u à l'orthogonal de F_n, et $u_n : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ l'application définie par

$$u_n : x \mapsto \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle u(e_i)\ .$$

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $u_n \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est un opérateur continu de rang fini, que l'application $u \mapsto u_n$ appartient à $\mathscr{L}(\mathscr{L}(\mathscr{H}))$, et est de norme au plus 1, et que $\tau_n = \|u - u_n\|$.

(3) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{H}$, telle que $\|y_n\| = 1$ et $y_n \in F_n^\perp$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0.

(4) Montrer que u est compact si et seulement si la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(5) Montrer que si u transforme toute suite faiblement convergente en une suite convergente, alors u est compact.

Proposition 1.35 (Théorème de Schauder) *Si un opérateur continu $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est compact, alors son application duale ${}^t u \in \mathscr{L}(F^*, E^*)$ (voir la partie 1.1) est un opérateur compact. Si F est un espace de Banach, alors $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est compact si et seulement si ${}^t u \in \mathscr{L}(F^*, E^*)$ est compact.*

Démonstration. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ un opérateur compact. Notons X l'espace métrique compact $\overline{u(\overline{B}_E)}$, et considérons l'espace de Banach $\mathscr{C}(X;\mathbb{C})$ (muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$). Notons $\mathscr{A}$ le sous-ensemble de $\mathscr{C}(X;\mathbb{C})$ des restrictions à X des éléments de $\overline{B}_{F^*}$. Alors $\mathscr{A}$ est équicontinu (ses éléments sont 1-lipschitziens), et pour tout x dans X, la partie $\mathscr{A}(x) = \{f(x) : f \in \mathscr{A}\}$ est bornée (par $\|u\|$). Par le théorème 1.32 d'Arzela-Ascoli, le sous-ensemble $\mathscr{A}$ est d'adhérence compacte dans $\mathscr{C}(X;\mathbb{C})$.

Soit $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\overline{B}_{F^*}$. Quitte à extraire, la suite des éléments $\ell_{n|X}$ de $\mathscr{A}$ est donc convergente, donc de Cauchy, dans $\mathscr{C}(X;\mathbb{C})$. Comme

$$\begin{aligned}\|{}^t u(\ell_n) - {}^t u(\ell_m)\|_{E^*} &= \sup_{x\in\overline{B}_E} \big|{}^t u(\ell_n)(x) - {}^t u(\ell_m)(x)\big| \\ &= \sup_{x\in\overline{B}_E} |\,\ell_n(u(x)) - \ell_m(u(x))\,| \leq \|\ell_{n|X} - \ell_{m|X}\|_\infty \;,\end{aligned}$$

la suite $\big({}^t u(\ell_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est de Cauchy dans l'espace de Banach E^*, converge. Donc l'opérateur continu ${}^t u$ est compact (par la troisième définition des opérateurs compacts).

Pour montrer la dernière assertion, si ${}^t u$ est compact, alors l'opérateur continu ${}^t({}^t u)$ est compact par ce qui précède. Identifions E avec son image dans E^{**} par $x \mapsto \mathrm{ev}_x$ (voir la partie 1.1), et de même avec F. Alors F est fermé dans F^{**} par le corollaire 1.4, car F est un espace de Banach. Par la formule (3) dans la partie 1.1, nous avons

$${}^t({}^t u)(\overline{B}_E) = u(\overline{B}_E) \;.$$

Donc $u(\overline{B}_E)$, contenu dans l'image par ${}^t({}^t u)$ d'un borné, est d'adhérence compacte dans F^{**}, donc dans F qui est fermé. □

Les propriétés élémentaires du spectre des opérateurs compacts sont regroupées dans le résultat suivant (aussi valable pour les espaces de Banach réels). Elles sont toutes immédiates pour les applications linéaires entre deux espaces vectoriels de dimension finie, le but de la démonstration est de montrer qu'elles s'étendent aux opérateurs compacts. Rappelons qu'un point x d'une partie A d'un espace métrique est *isolé* dans A s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $A \cap B(x,\epsilon) = \{x\}$.

Proposition 1.36 *Soient E un espace de Banach complexe et $u \in \mathscr{L}(E)$ un opérateur compact.*

(1) Le noyau de $\mathrm{id} - u$ est de dimension finie.

(2) L'image de $\mathrm{id} - u$ est fermée.

(3) Si $\mathrm{id} - u$ est injective, alors $\mathrm{id} - u$ est surjective, donc inversible dans $\mathscr{L}(E)$.

(4) Toute valeur spectrale non nulle de u est une valeur propre de u de multiplicité finie, isolée dans $\mathrm{Sp}(u)$.

(5) Si E est de dimension infinie, alors 0 est une valeur spectrale, et donc

$$\mathrm{Sp}(u) = \{0\} \cup \mathrm{Vp}(u) \;.$$

(6) Le spectre $\mathrm{Sp}(u)$ de u est ou bien fini, ou bien la réunion de $\{0\}$ et de l'image d'une suite de valeurs propres $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0.

Le spectre résiduel d'un opérateur compact u, qui est contenu dans $\mathrm{Sp}(u) - \mathrm{Vp}(u)$ est donc par (5) ou bien vide (par exemple pour l'opérateur nul), ou bien égal à $\{0\}$ (voir l'exercice E.12 pour un exemple).

On fera bien attention qu'il existe des opérateurs compacts non nuls sans valeurs propres non nulle, et donc de spectre réduit à $\{0\}$ (voir par exemple l'exercice E.14).

Démonstration. Notons $v = \mathrm{id} - u$ et $N = \mathrm{Ker}(v)$.

(1) Pour tout $x \in N$, nous avons $x = u(x)$. La boule unité fermée $\overline{B}_N = \overline{B}_E \cap N$ de N est fermée dans E car N est fermé. Elle est d'adhérence compacte dans E, donc compacte, car $\overline{B}_N \subset u(\overline{B}_E)$ et u est compact. Donc par le théorème 1.7 de Riesz, la dimension de N est finie.

(2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E telle que la suite $(v(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point y dans E. Montrons que y appartient à l'image de v. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque N est de dimension finie, l'intersection $N \cap \overline{B}(x_n, d(x_n, N) + 1)$ est compacte (toujours par le théorème 1.7 de Riesz). Puisque toute application continue, définie sur un espace compact et à valeurs réelles, atteint sa borne inférieure, et puisque

$$d(x_n, N) = \inf_{z\, \in\, N \cap \overline{B}(x_n,\, d(x_n,\, N)+1)} d(x_n, z) \ ,$$

il existe $z_n \in N$ tel que $d(x_n, N) = d(x_n, z_n)$.

Supposons par l'absurde que $d(x_n, N)$ tende vers $+\infty$. Posons $w_n = \frac{1}{d(x_n,\, N)}\,(x_n - z_n)$, qui est de norme 1. Puisque l'opérateur continu u est compact, quitte à extraire, la suite $\big(u(w_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément w dans E. Or, en utilisant que $v(z_n) = 0$,

$$w_n - u(w_n) = v(w_n) = \frac{1}{d(x_n,\ N)}\, v(x_n)$$

converge vers 0, car la suite $(v(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y et le dénominateur du terme de droite ci-dessus tend vers $+\infty$. Donc w_n converge vers w et $w \in \mathrm{Ker}(v) = N$ par continuité de v. Or $d(w_n, N) = 1$ par définition de z_n, et donc $d(w, N) = 1$ par continuité, ce qui est une contradiction.

Donc quitte à extraire, la suite $(d(x_n, N) = \|x_n - z_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée. Puisque u est compact, quitte à extraire, $u(x_n - z_n)$ converge vers un point y' dans E. Donc

$$x_n - z_n = u(x_n - z_n) + v(x_n - z_n) = u(x_n - z_n) + v(x_n)$$

converge vers $y' + y$. Par continuité de v et puisque $z_n \in N$,

$$y = \lim_{n\to+\infty} v(x_n) = \lim_{n\to+\infty} v(x_n - z_n) = v(y' + y)$$

appartient alors à l'image de v, ce qu'il fallait démontrer.

(3) Soient $E_0 = E$ et $E_1 = v(E_0)$. Supposons par l'absurde que v est injectif et que $E_1 \neq E_0$. Par (2), E_1 est un sous-espace vectoriel fermé de E_0, stable par u (qui commute avec v). La restriction $u_{|E_1}$ de u à E_1 est donc encore un opérateur compact de l'espace de Banach E_1. Par récurrence, la suite $(E_n = v^n(E_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-espaces vectoriels fermés de E, qui est strictement décroissante puisque v est injectif. Soient $x_n \in E_n - E_{n+1}$ et $x'_n \in E_{n+1}$ tels que $d(x_n, x'_n) \leq 2\, d(x_n, E_{n+1})$ (ce qui est possible car x_n n'appartenant pas au fermé E_{n+1}, nous avons $d(x_n, E_{n+1}) > 0$). Posons

$y_n = \frac{1}{\|x_n - x'_n\|}(x_n - x'_n)$. Pour $m > n$, nous avons $y_m + v(y_n) - v(y_m) \in E_{n+1}$ par construction des E_k. Donc

$$\|u(y_n) - u(y_m)\| = \big\|\big(y_n - v(y_n)\big) - \big(y_m - v(y_m)\big)\big\| = \big\|\, y_n - \big(y_m + v(y_n) - v(y_m)\big)\big\|$$
$$\geq d(y_n, E_{n+1}) = \frac{d(x_n, E_{n+1})}{\|x_n - x'_n\|} \geq \frac{1}{2}\ .$$

Or puisque u est compact et $\|y_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\big(u(y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ doit avoir une sous-suite convergente, contradiction.

(4) Soit $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ une valeur spectrale qui n'est pas une valeur propre. Alors $\frac{1}{\lambda}u$ est un opérateur compact tel que $\mathrm{id} - \frac{1}{\lambda}u$ soit injective (sinon λ serait une valeur propre) et non surjective (sinon $u - \lambda\,\mathrm{id}$ serait inversible, et λ ne serait pas une valeur spectrale). Ceci contredit (3).

Soit λ une valeur propre non nulle. Comme $\frac{1}{\lambda}u$ est compact, le noyau de $\mathrm{id} - \frac{1}{\lambda}u$ est de dimension finie par (1), donc la multiplicité de λ est finie.

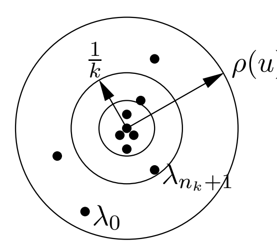
Montrons que λ est isolée dans $\mathrm{Sp}(u)$. Sinon, soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de valeurs propres de u non nulles deux à deux distinctes, qui converge vers λ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit e_n un vecteur propre unitaire de valeur propre λ_n, et E_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $e_0, \dots, e_n$. Alors $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels fermés (car de dimension finie, voir le corollaire 1.8) de E stables par u. Comme ci-dessus, pour tout $n \geq 1$, puisque $d(e_n, E_{n-1}) > 0$, soit $e'_n \in E_{n-1}$ tel que $d(e_n, e'_n) \leq 2\, d(e_n, E_{n-1})$. Posons $y_n = \frac{e_n - e'_n}{\|e_n - e'_n\|}$, qui est unitaire et appartient à E_n. Si $n > m$, alors le vecteur $z = u\big(\frac{e'_n}{\lambda_n\|e_n - e'_n\|}\big) + u\big(\frac{y_m}{\lambda_m}\big)$ appartient à E_{n-1}, donc

$$\big\|u\big(\frac{y_n}{\lambda_n}\big) - u\big(\frac{y_m}{\lambda_m}\big)\big\| = \big\|u\big(\frac{e_n}{\lambda_n\|e_n - e'_n\|}\big) - z\big\| = \big\|\frac{e_n}{\|e_n - e'_n\|} - z\big\| \geq \frac{d(e_n, E_{n-1})}{\|e_n - e'_n\|} \geq \frac{1}{2}\ ,$$

ce qui, avec la convergence de λ_n vers $\lambda \neq 0$, contredit aussi que u est compact, car l'image par u de la suite bornée $\big(\frac{y_n}{\lambda_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de sous-suite convergente par la minoration précédente.

(5) Si $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$, alors u^{-1} existe et est continu. Puisque u est compact, $u(\overline{B}_E) = (u^{-1})^{-1}(\overline{B}_E)$, qui est d'adhérence compacte et fermé, est compact. Donc $\overline{B}_E = u^{-1}(u(\overline{B}_E))$ est compact, ce qui implique par le théorème 1.7 de Riesz que la dimension de E est finie.

(6) Notons par convention dans cette démonstration $\frac{1}{0} = \rho(u)$. Puisque toute valeur spectrale de u non nulle est isolée, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de $\mathrm{Sp}(u)$ dans le compact $A_k = \overline{B(0, \frac{1}{k})} - B(0, \frac{1}{k+1})$. Posons $n_0 = -1$. Si $\mathrm{Sp}(u)$ est infini, en numérotant par récurrence de $n_k + 1$ à n_{k+1} les éléments de $A_k \cap \mathrm{Sp}(u)$ si cet ensemble est non vide, et en prenant $n_{k+1} = n_k$ sinon, le résultat en découle. □



Exercice E.12 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$.*

Montrer qu'il existe un et un seul opérateur continu $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que $u(e_n) = \frac{1}{n+1}e_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que u est un opérateur compact, n'ayant pas de valeur propre. En déduire que le spectre de u est réduit à $\{0\}$. Calculer $\|u\|$, et remarquer que cette norme est non nulle.

Montrer que le spectre résiduel de u est $\{0\}$.

1.5 Opérateurs auto-adjoints

Adjoint d'un opérateur continu.

Soient E, F et G des espaces de Hilbert complexes (mais tous les énoncés de cette partie sont valables pour les espaces de Hilbert réels, sauf la remarque (4) précédant l'exercice E.13).

Proposition 1.37 *Pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$, il existe une unique application $u^* \in \mathscr{L}(F, E)$ telle que*

$$\langle u^*(y), x\rangle_E = \langle y, u(x)\rangle_F$$

pour tous les $x \in E$ et $y \in F$. L'application $u \mapsto u^*$ est involutive (c'est-à-dire qu'elle vérifie $(u^*)^* = u$ pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$), anti-linéaire (c'est-à-dire qu'elle vérifie $(u + \lambda v)^* = u^* + \overline{\lambda} v^*$ pour tous les $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$) et isométrique (c'est-à-dire qu'elle vérifie $\|u^*\| = \|u\|$ pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$). Elle vérifie aussi $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$ et $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ pour tous les $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(G, E)$. L'opérateur continu u^* est inversible si et seulement si u l'est, et alors $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

De plus, $\|u \circ u^*\| = \|u^* \circ u\| = \|u\|^2$.

L'application u^* est appelée l'*adjoint* de u pour les produits scalaires de E et de F. Lorsque l'on identifie un espace de Hilbert et le dual topologique de son conjugué par la dualité de Riesz-Fréchet (théorème 1.13), l'adjoint correspond à l'application duale introduite dans la partie 1.1 (voir ci-dessous).

Démonstration. L'unicité de u^* est claire, car un vecteur de E orthogonal à tout vecteur de E est nul. Elle implique les propriétés d'involution, d'anti-linéarité, et la relation de contravariance $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

Pour l'existence, soient $\varphi_E : E \to \overline{E}^*$ et $\varphi_F : F \to \overline{F}^*$ les isomorphismes de Riesz-Fréchet (voir le théorème 1.13), et ${}^t u : \ell \mapsto \ell \circ u$ l'application duale de u définie dans la partie 1.1, considérée comme une application (linéaire, continue) de $\overline{F^*} = \overline{F}^*$ dans $\overline{E^*} = \overline{E}^*$. Montrons que l'application

$$u^* = \varphi_E^{-1} \circ {}^t u \circ \varphi_F \tag{7}$$

convient. En effet, en appliquant pour $\varphi = \varphi_E$ puis $\varphi = \varphi_F$ la relation $\varphi(a)(b) = \langle a, b\rangle$ pour des a et b dans E puis F bien choisis, nous avons, pour tous les x et y dans E,

$$\begin{aligned}\overline{\langle x, \varphi_E^{-1} \circ {}^t u \circ \varphi_F(y)\rangle} &= \langle \varphi_E^{-1} \circ {}^t u \circ \varphi_F(y), x\rangle = {}^t u \circ \varphi_F(y)(x) = \varphi_F(y)(u(x)) = \langle y, u(x)\rangle \\ &= \overline{\langle u(x), y\rangle}\ .\end{aligned}$$

Comme les isomorphismes de Riesz-Fréchet sont des isométries, et par l'équation (2) de la partie 1.1, nous avons $\|u^*\| = \|{}^t u\| = \|u\|$. [On peut aussi utiliser le fait que pour tout $y \in F$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|u^*(y)\|^2 = \langle u^*(y), u^*(y)\rangle_E = \langle u(u^*(y)), y\rangle_F \leq \|u\|\ \|u^*(y)\|\ \|y\|\ ,$$

ce qui implique que $\|u^*\| \leq \|u\|$. Comme $(u^*)^* = u$, en remplaçant u par u^*, nous avons donc $\|u^*\| = \|u\|$.]

Nous avons donc

$$\|u^* \circ u\| \leq \|u^*\|\ \|u\| = \|u\|^2\ .$$

De plus, pour tout $x \in E$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle_F = \langle u^* \circ u(x), x\rangle_E \leq \|u^* \circ u\| \, \|x\|^2 \ ,$$

donc $\|u\|^2 \leq \|u^* \circ u\|$. D'où $\|u^* \circ u\| = \|u\|^2$, et en remplaçant u par u^*, nous avons donc $\|u \circ u^*\| = \|u^*\|^2 = \|u\|^2$. $\square$

Exemple. Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis, et considérons $N \in \mathbb{L}^2\big((X, \mathscr{A}, \mu) \times (Y, \mathscr{B}, \nu)\big)$. Notons $N^* \in \mathbb{L}^2\big((Y, \mathscr{B}, \nu) \times (X, \mathscr{A}, \mu)\big)$ l'application définie par $N^* : (y, x) \mapsto \overline{N(x, y)}$. Alors l'adjoint de l'opérateur $K_N : \mathbb{L}^2(\nu) \to \mathbb{L}^2(\mu)$ de type Hilbert-Schmidt de noyau N est exactement l'opérateur $K_{N^*} : \mathbb{L}^2(\mu) \to \mathbb{L}^2(\nu)$ de type Hilbert-Schmidt de noyau N^*. En effet, pour tous les $f \in \mathbb{L}^2(\nu)$ et $g \in \mathbb{L}^2(\mu)$, nous avons, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\langle K_N f, g\rangle &= \int_{x \in X} \Big(\int_{y \in Y} N(x, y) f(y) \, d\nu(y) \Big) \, \overline{g(x)} \, d\mu(x) \\
&= \int_{y \in Y} f(y) \, \overline{\Big(\int_{x \in X} \overline{N(x, y)} \, g(x) \, d\mu(x) \Big)} \, d\nu(y) = \langle f, K_{N^*} g\rangle \ .
\end{aligned}$$

En particulier, si $(X, \mathscr{A}, \mu) = (Y, \mathscr{B}, \nu)$, si N est réel et symétrique, alors l'opérateur de type Hilbert-Schmidt de noyau N est auto-adjoint (c'est-à-dire égal à son adjoint).

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert. Un opérateur continu $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est dit

- *auto-adjoint* (ou *hermitien*) si $u = u^*$,
- *positif* si $\langle u(x), x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathscr{H}$,
- *normal* si $u \circ u^* = u^* \circ u$,
- *unitaire* si $u \circ u^* = u^* \circ u = \mathrm{id}$,
- *un projecteur* si $u^2 = u$.

Remarques. (1) Si $\mathscr{H}$ est de dimension finie, si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée, si M est la matrice de $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ dans cette base, alors la matrice M^* de u^* dans cette base est la matrice transposée de la matrice conjuguée de M :

$$M^* = {}^t\overline{M} \ .$$

Donc $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est auto-adjoint si et seulement si sa matrice M dans cette base est hermitienne (c'est-à-dire vérifie $M = {}^t\overline{M}$). En particulier, si M est réelle symétrique, alors u est auto-adjoint.

(2) Un opérateur auto-adjoint ou unitaire est normal. De nombreuses propriétés des opérateurs auto-adjoints ci-dessous sont valables pour les opérateurs normaux (voir par exemple [Rud2]), mais nous nous restreignons au cas auto-adjoint dans ce cours.

(3) Pour tout $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, l'application $(x, y) \mapsto \langle u(x), y\rangle$ est une forme sesquilinéaire, qui est hermitienne si et seulement si u est auto-adjoint, et positive si et seulement si u est positif.

(4) Cette remarque est particulière au cas des espaces de Hilbert complexes. Un opérateur continu positif u d'un espace de Hilbert complexe est auto-adjoint. En effet, en posant

$a(x,y) = \langle u(x), y\rangle$, qui est une forme sesquilinéaire, il suffit de montrer que a est hermitienne, c'est-à-dire que pour tous les x et y dans $\mathscr{H}$, nous avons $\mathrm{Re}(a(x,y) - a(y,x)) = 0$ et $\mathrm{Im}(a(x,y) + a(y,x)) = 0$. La seconde égalité découle de

$$a(x,y) + a(y,x) = a(x+y, x+y) - a(x,x) - a(y,y) \in \mathbb{R}$$

et la première égalité de la seconde égalité où x est remplacé par ix.

(5) Par exemple, id est auto-adjoint positif et unitaire, et pour tout u dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, les opérateurs continus $u + u^*$, $i(u - u^*)$ (celui-ci n'étant défini que lorsque $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert complexe), $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$ sont auto-adjoints, par les propriétés d'anti-linéarité et d'involution. De plus, les opérateurs $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$ sont positifs. Si u est auto-adjoint et v unitaire, alors $v \circ u \circ v^{-1}$ est auto-adjoint.

(6) Par exemple, la *transformée de Fourier* $\mathscr{F} : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, qui est l'opérateur linéaire continu défini sur les fonctions C^∞ à support compact par

$$\mathscr{F}(f) : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-ixt}\, dt\ ,$$

est unitaire, et son spectre est

$$\mathrm{Sp}(\mathscr{F}) = \{1, -1, i, -i\}$$

(voir le problème E.67 et sa correction).

Exercice E.13 *Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathbb{C}$. Notons $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ l'unique opérateur continu tel que $u(e_n) = \lambda_n e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir l'exercice E.6).*

Montrer que l'adjoint de u est l'unique opérateur continu u^* tel que $u^*(e_n) = \overline{\lambda_n}\ e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que u est auto-adjoint si et seulement si λ_n est réel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que tout compact non vide K de $\mathbb{R}$ est le spectre d'un opérateur auto-adjoint de $\mathscr{H}$.

Propriétés élémentaires des opérateurs auto-adjoints.

Les propriétés élémentaires principales des opérateurs auto-adjoints sont résumées dans la proposition suivante. Certaines d'entre elles ont déjà été vues les années précédentes dans les espaces de Hilbert de dimension finie.

Proposition 1.38 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$.*

(i) Le spectre de l'adjoint u^* de u est l'ensemble des conjugués des éléments du spectre de u :

$$\mathrm{Sp}(u^*) = \overline{\mathrm{Sp}(u)}\ .$$

(ii) L'orthogonal de l'image de u est le noyau de son adjoint et le noyau de u est l'orthogonal de l'image de son adjoint :

$$\big(u(\mathscr{H})\big)^\perp = \mathrm{Ker}(u^*) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(u) = \big(u^*(\mathscr{H})\big)^\perp\ .$$

En particulier, u^* est injectif si et seulement si u est d'image dense. De plus (le surlignage ci-dessous désignant l'ensemble des conjugués)

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \overline{\mathrm{Vp}(u^*)} - \mathrm{Vp}(u)\ . \tag{8}$$

(iii) L'opérateur continu u est compact si et seulement si son adjoint u^* l'est.

(iv) Si u est auto-adjoint, et si F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$ invariant par u (c'est-à-dire tel que $u(F) \subset F$), alors $F^\perp$ est aussi invariant par u.

(v) Supposons que $\mathscr{H} \neq \{0\}$. Si u est auto-adjoint, si $M = \sup_{\|x\|=1} \langle u(x), x\rangle$ et $m = \inf_{\|x\|=1} \langle u(x), x\rangle$, alors m et M appartiennent au spectre de u, ce spectre $\mathrm{Sp}(u)$ est réel, contenu dans l'intervalle $[m, M]$, et

$$\rho(u) = \|u\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle| = \max\{M, -m\}\ .$$

En particulier, le rayon spectral de u est égal à sa norme, et si $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$, alors $u = 0$.

(vi) Si u est auto-adjoint, alors son spectre résiduel est vide :

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \emptyset\ .$$

(vii) **(Critère de Weyl)** *L'ensemble $\sigma(u)$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{H}$ telle que $\|x_n\| = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \|u(x_n) - \lambda x_n\| = 0$, est contenu dans le spectre de u. Si u est auto-adjoint, alors cette inclusion est une égalité : le spectre $\mathrm{Sp}(u)$ de u est égal à $\sigma(u)$.*

L'ensemble

$$\sigma(u) = \{\lambda \in \mathbb{C}\ :\ \exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{H}^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} \|u(x_n) - \lambda x_n\| = 0 \text{ et } \forall\ n \in \mathbb{N},\ \ \|x_n\| = 1\}$$

est appelé le *spectre de Weyl* de u, et ses éléments les *valeurs propres approchées* de u. Si u est auto-adjoint, le critère de Weyl dit que les valeurs spectrales de u sont exactement ses valeurs propres approchées.

Si $\mathscr{H} \neq \{0\}$, la propriété que $\rho(u) = \|u\|$ implique en particulier qu'un opérateur auto-adjoint est nul si et seulement si son rayon spectral est nul, donc si et seulement si son spectre est égal à $\{0\}$. Mais il existe des opérateurs continus non nuls de spectre réduit à 0 (qui ne sont pas auto-adjoint, donc), comme l'opérateur de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de l'espace de Hilbert $\mathbb{C}^2$. Voir par exemple l'exercice E.14 pour un exemple en dimension infinie.

Démonstration. (i) L'opérateur continu $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est inversible si et seulement si son adjoint, qui est $u^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}$, est inversible. Donc $\mathrm{Sp}(u^*) = \overline{\mathrm{Sp}(u)}$.

(ii) Nous avons $x \in u(\mathscr{H})^\perp$ si et seulement si $\langle u(y), x\rangle = 0$ pour tout y dans $\mathscr{H}$, si et seulement si $\langle y, u^*(x)\rangle = 0$ pour tout y dans $\mathscr{H}$, donc si et seulement si $x \in \mathrm{Ker}(u^*)$. La seconde égalité de (ii) découle de la première en remplaçant u par u^* et en utilisant la propriété d'involution de u^*. L'avant-dernière affirmation découle alors du corollaire 1.12 (2). La dernière égalité découle du fait que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'image de $u - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas dense si et seulement si son orthogonal n'est pas le sous-espace nul, et que

$$\mathrm{Ker}(u^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) = \mathrm{Ker}((u - \lambda\,\mathrm{id})^*) = (u - \lambda\,\mathrm{id})(\mathscr{H})^\perp\ .$$

(iii) Ceci découle du théorème de Schauder (proposition 1.35), par la formule (7) dans la démonstration de la proposition 1.37 et par la proposition 1.33 : u est compact si et seulement si ${}^t u$ est compact, si et seulement si $u^* = {\varphi_{\mathscr{H}}}^{-1} \circ {}^t u \circ \varphi_{\mathscr{H}}$ est compact, où $\varphi_{\mathscr{H}} : \mathscr{H} \to \overline{\mathscr{H}}^*$ est l'isomorphisme de Riesz-Fréchet.

(iv) Soit $x \in F^\perp$. Pour tout $y \in F$, nous avons $u(y) \in F$, donc $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = 0$. D'où $u(x) \in F^\perp$.

(v) Notons que $\langle u(x), x\rangle$ est réel, car u est auto-adjoint donc $\langle u(x), x\rangle = \langle x, u(x)\rangle = \overline{\langle u(x), x\rangle}$, et de valeur absolue majorée par $\|u\|$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz si $\|x\| \leq 1$. En particulier, M et m sont des nombres réels bien définis (car $\mathscr{H}$ n'est pas réduit à $\{0\}$). La démonstration de l'assertion (v) découlera des points suivants.

- Montrons que $\mathrm{Sp}(u)$ est réel.

Si λ est une valeur propre de u, et si x est un vecteur propre (non nul) de u de valeur propre λ, alors

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle u(x), x\rangle = \langle x, u(x)\rangle = \overline{\lambda}\,\langle x, x\rangle\;,$$

donc λ est réelle.

Soit $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Posons $v = u - \lambda\,\mathrm{id}$. Pour tout x dans $\mathscr{H}$, puisque $\langle u(x), x\rangle$ est réel, nous avons $\mathrm{Im}\,\langle v(x), x\rangle = \mathrm{Im}\,\big(\langle u(x), x\rangle - \langle \lambda x, x\rangle\big) = -\,\mathrm{Im}\,\lambda\;\|x\|^2$. Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\,\mathrm{Im}\,\lambda|\;\|x\|^2 \leq \|v(x)\|\;\|x\|\;.$$

Le résultat suivant montre donc que v est injective (ce que nous savons déjà, car λ n'est pas une valeur propre de u) et que l'image de v est fermée, puisque $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$.

Lemme 1.39 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tels que E soit complet, et soit $v \in \mathscr{L}(E, F)$. S'il existe $c > 0$ tel que $c\,\|x\| \leq \|v(x)\|$ pour tout x dans E, alors l'image de v est fermée, et $v : E \to v(E)$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E telle que la suite $\big(v(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y dans F. Alors $\big(v(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc par l'hypothèse, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E. Elle converge donc par complétude de E vers $x \in E$, tel que $v(x) = y$ par continuité de v. D'où y appartient à l'image de v.

La condition $c\,\|x\| \leq \|v(x)\|$ pour tout x dans E implique que le noyau de v est réduit au vecteur nul, et que la norme de la bijection réciproque de $v : E \to v(E)$ est au plus $\frac{1}{c}$, ce qui montre la dernière assertion. (Si F était un espace de Banach, alors son sous-espace vectoriel $v(E)$, fermé dans F, serait aussi un espace de Banach (pour la restriction de la norme), et la continuité de v^{-1} découlerait aussi du théorème de Banach 1.24.) □

Par (ii), l'orthogonal de l'image de v est égal au noyau de $u^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id} = u - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}$. Ce noyau est réduit à $\{0\}$, car $\overline{\lambda}$, n'étant pas réel, n'est pas une valeur propre de u. Donc l'image de v est dense dans F par le corollaire 1.12 (2). Comme elle fermée par le lemme ci-dessus, l'application v est surjective, donc bijective (car son injectivité a déjà été démontrée), et λ n'est pas une valeur spectrale de u.

- Montrons que $\mathrm{Sp}(u) \subset\,]-\infty, M]$. En remplaçant u par $-u$, ceci montrera que $\mathrm{Sp}(u) \subset\, [m, +\infty[$, donc que $\mathrm{Sp}(u) \subset\, [m, M]$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $v_\lambda = \lambda\,\mathrm{id} - u$. Alors l'application $a : (x, y) \mapsto \langle v_\lambda(x), y\rangle$ de $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ dans $\mathbb{C}$ est continue, sesquilinéaire. Si $\lambda > M$, alors cette application est coercive : pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous avons $\langle v_\lambda(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle - \langle u(x), x\rangle \geq (\lambda - M)\|x\|^2$. En particulier, l'application v_λ est injective. Montrons qu'elle est aussi surjective. En effet, pour tout y dans $\mathscr{H}$, l'application $\varphi : z \mapsto \langle y, z\rangle$ appartient à $\overline{\mathscr{H}}*$. Donc par le théorème 1.15 de Lax-Milgram, il existe x dans $\mathscr{H}$ tel que $a(x, z) = \varphi(z)$ pour tout z dans $\mathscr{H}$, c'est-à-dire tel que $\langle v_\lambda(x), z\rangle = \langle y, z\rangle$ pour tout z dans $\mathscr{H}$. Ceci implique que $v_\lambda(x) = y$, donc que v_λ est surjective. Par conséquent, si $\lambda > M$, alors λ n'appartient pas au spectre de u.

- Montrons que $M \in \operatorname{Sp}(u)$. En remplaçant u par $-u$, ceci montre que $m \in \operatorname{Sp}(u)$.

Soit $v = M\,\mathrm{id} - u$, qui est auto-adjoint. La forme sesquilinéaire $(x, y) \mapsto \langle v(x), y\rangle$ est hermitienne, et positive par définition de M. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (seul le cas d'égalité nécessitait la condition définie (positive), voir la démonstration de la proposition 1.9), nous avons, pour tous les $x, y \in \mathscr{H}$,

$$|\langle v(x), y\rangle|^2 \leq \langle v(x), x\rangle\, \langle v(y), y\rangle\ .$$

Rappelons que $\|x'\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x', y\rangle|$ pour tout $x' \in \mathscr{H}$. Donc, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir la dernière inégalité,

$$\|v(x)\|^2 = \sup_{\|y\|=1} |\langle v(x), y\rangle|^2 \leq \langle v(x), x\rangle \sup_{\|y\|=1} \langle v(y), y\rangle \leq \langle v(x), x\rangle\, \|v\|\ .$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{H}$ telle que $\|x_n\| = 1$ et $\langle u(x_n), x_n\rangle$ converge vers M. Alors $\langle v(x_n), x_n\rangle$ converge vers 0 et donc $\|v(x_n)\|$ aussi. Si M n'appartient pas au spectre de u, alors v est inversible et donc $x_n = v^{-1}(v(x_n))$ converge vers 0, ce qui n'est pas possible.

- Soit $\kappa = \sup_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle|$, montrons que $\kappa \geq \|u\|$.

Pour tous les x et y dans $\mathscr{H}$ de norme 1, puisque u est auto-adjoint, nous avons

$$\begin{aligned}|4 \operatorname{Re} \langle u(x), y\rangle| &= \big|\langle u(x+y), x+y\rangle - \langle u(x-y), x-y\rangle\big| \\ &\leq \kappa\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\big) = 2\kappa\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) = 4\kappa\end{aligned}$$

Par homogénéité, pour tous les x et y dans $\mathscr{H}$, nous avons donc $|\operatorname{Re} \langle u(x), y\rangle| \leq \kappa\, \|x\|\, \|y\|$. Donc $\|u(x)\|^2 = \operatorname{Re} \langle u(x), u(x)\rangle \leq \kappa\, \|x\|\, \|u(x)\|$, ce qui implique que $\|u\| \leq \kappa$.

Par la proposition 1.25 (1) et ce qui précède, nous avons

$$\|u\| \geq \rho(u) = \max\{M, -m\} = \sup_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle| \geq \|u\|\ .$$

L'assertion (v) en découle.

(vi) Soit λ une valeur spectrale non valeur propre de u. Puisque u est auto-adjoint, λ est réelle par (v). L'image de $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est dense, car son orthogonal est nul par (ii). Donc λ n'appartient pas au spectre résiduel de u, et celui-ci est vide.

L'assertion (vi) découle aussi de la formule (8) et du fait que $\operatorname{Vp}(u)$ est réel.

(vii) Si $\lambda \notin \operatorname{Sp}(u)$, alors $x_n = (u - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}(u(x_n) - \lambda x_n)$ tend vers 0 quand $\|u(x_n) - \lambda x_n\|$ tend vers 0 par continuité de $(u - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$, donc $\lambda \notin \sigma(u)$.

Réciproquement, supposons u auto-adjoint, et soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$, qui en particulier est réel. Si λ est une valeur propre, alors $\lambda \in \sigma(u)$ (en considérant une suite constante en un vecteur propre unitaire). Sinon, d'une part $v = u - \lambda\,\mathrm{id}$ est injective, d'autre part v est d'image dense par (vi). Si par l'absurde $\lambda \notin \sigma(u)$, alors il existe $N \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que $\|v(x)\| \geq \frac{1}{N}$ pour tout vecteur unitaire x de $\mathscr{H}$. Par homogénéité, $\|v(x)\| \geq \frac{1}{N}\|x\|$ pour tout $x \in \mathscr{H}$. Par le lemme 1.39, l'image de v est fermée, donc égale à $\mathscr{H}$ car dense dans $\mathscr{H}$. Donc v est surjective, et injective, ce qui contredit le fait que $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$. □

Corollaire 1.40 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur auto-adjoint. Alors u est positif si et seulement si son spectre* $\mathrm{Sp}(u)$ *est positif (c'est-à-dire contenu dans* $[0, +\infty[$*).*

Démonstration. Par l'assertion (v) de la proposition 1.38, nous avons $\inf_{\|x\|=1}\langle u(x), x\rangle = \min \mathrm{Sp}(u)$. Comme u est positif si et seulement si $\inf_{\|x\|=1}\langle u(x), x\rangle$ est positif ou nul, le résultat en découle. □

Exercice E.14 *Soit $\mathscr{H}$ l'espace de Hilbert complexe* $\mathbb{L}^2([0,1])$*. Pour tout $f \in \mathscr{H}$, on pose*

$$Vf : x \mapsto \int_0^x f(t)\, dt\ .$$

*(1) Montrer que $V : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ est un opérateur compact (appelé l'*opérateur de Volterra*).*

(2) Montrer que V n'a pas de valeur propre non nulle, et que $\mathrm{Sp}(V) = \{0\}$*.*

(3) Calculer l'adjoint V^* de V.

(4) Montrer que pour tout $f \in \mathscr{H}$ et presque tout x dans $[0,1]$*, nous avons*

$$V^*Vf(x) = \int_0^1 f(t)\ dt - x\int_0^x f(t)\ dt - \int_x^1 tf(t)\ dt\ , \tag{9}$$

et calculer les valeurs propres de V^*V. Donner une base hilbertienne de $\mathscr{H}$ formée de vecteurs propres de V^*V.

(5) En déduire la valeur de $\|V^*V\|$ ainsi que de $\|V\|$.

(6) Calculer l'application résolvante de V (c'est-à-dire l'application R_V de $\mathbb{C}-\{0\}$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ définie par $\lambda \mapsto (V - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$.

Soit maintenant $\mathscr{H}_0$ l'espace de Hilbert complexe $\mathbb{L}^2([-1,1])$*. Pour tout $f \in \mathscr{H}$, on pose*

$$V_0 f : x \mapsto \int_{-x}^x f(t)\, dt\ .$$

*(7) Montrer que $V_0 : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ est un opérateur compact (appelé l'*opérateur de Volterra anti-symétrique*).*

(8) Montrer que $V_0 \circ V_0 = 0$ et que $\mathrm{Sp}(V_0) = \{0\}$*.*

(9) Pour toute application $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$, on note $f_{\mathrm{asym}}, f_{\mathrm{sym}} : [0,1] \to \mathbb{C}$ les applications définies par

$$f_{\mathrm{asym}} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\big(f(x) - f(-x)\big) \quad \text{et} \quad f_{\mathrm{sym}} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\big(f(x) + f(-x)\big)\ .$$

Montrer que l'application ψ de l'espace de Hilbert $\mathbb{L}^2([-1,1])$ *dans l'espace de Hilbert produit* $\mathbb{L}^2([0,1]) \times \mathbb{L}^2([0,1])$*, définie par $f \mapsto (f_{\mathrm{asym}}, f_{\mathrm{sym}})$, est un isomorphisme linéaire isométrique. En déduire la norme de V_0 en fonction de la norme de V.*

Exercice E.15 *Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert séparable, soit F un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}$ de codimension infinie, soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de l'orthogonal $F^\perp$ de F, et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers* 0*.*

Montrer qu'il existe un et un seul opérateur auto-adjoint positif compact $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que u s'annule sur F et $u(e_n) = \lambda_n e_n$ pour tout n.

Montrer que les valeurs propres non nulles de u sont les λ_n (de multiplicités finies)

$$\mathrm{Vp}(u) = \{\lambda_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}\ ,$$

et que le spectre de u est

$$\mathrm{Sp}(u) = \{0\} \cup \mathrm{Vp}(u)\ .$$

Le but de la partie suivante est de montrer que tous les opérateurs auto-adjoints compacts positifs de rang infini sont comme dans l'exercice, c'est-à-dire diagonalisables en base hilbertienne (lorsque l'espace de Hilbert est séparable).

Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts

Le résultat suivant dit en particulier qu'un opérateur auto-adjoint compact d'un espace de Hilbert séparable est diagonalisable en base hilbertienne. Il reste valable pour les espaces de Hilbert réels.

Théorème 1.41 *Soit u un opérateur auto-adjoint compact d'un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Il existe deux suites finies ou infinies, éventuellement vides, strictement décroissantes, de réels strictement positifs $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N},\, k<N_+}$ et $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N},\, n<N_-}$, qui convergent vers 0 si $N_+ = +\infty$ et $N_- = +\infty$ respectivement, telles que, en notant $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

(1) les λ_k, $-\nu_n$ sont des valeurs propres de multiplicités finies de u, qui sont les seules valeurs spectrales non nulles de u ;

(2) $\|u\| = \max\{\lambda_0, \nu_0\}$ si $u \neq 0$;

(3) $\mathscr{H}$ est somme hilbertienne de E_0 et des E_{λ_k}, $E_{-\nu_n}$;

(4) (Principe de Rayleigh) si $0 \leq k < N_+$ et $0 \leq n < N_-$, alors

$$\lambda_k = \max_{x\in\left(E_0\oplus\bigoplus_{i=0}^{k-1} E_{\lambda_i}\right)^\perp,\ \|x\|=1} \langle u(x), x\rangle \quad \text{et} \quad -\nu_n = \min_{x\in\left(E_0\oplus\bigoplus_{i=0}^{n-1} E_{-\nu_i}\right)^\perp,\ \|x\|=1} \langle u(x), x\rangle\ .$$

Bien sûr, 0 peut être ou ne pas être une valeur propre. Il découle immédiatement de ce résultat que 0 n'appartient pas au spectre de u si et seulement si $\mathscr{H}$ est de dimension finie et u est bijectif ; de plus u n'a pas de valeur propre non nulle si et seulement si $u = 0$.

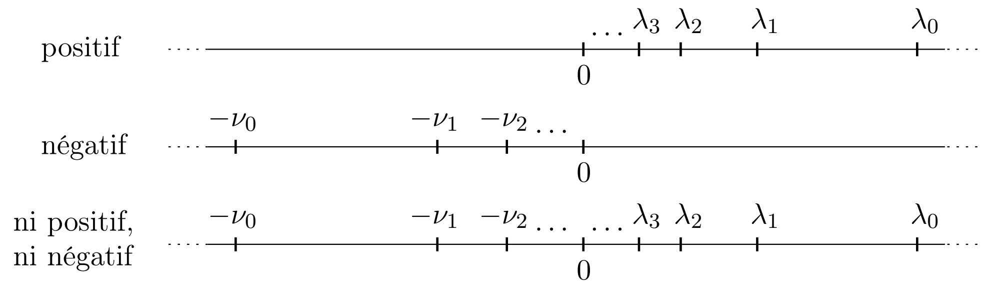
Il découle de (1) que $N_- = 0$ si u est positif (il n'y a pas de ν_n). Il est entendu dans (2) que λ_0 ou ν_0 existe si $u \neq 0$, et que si seulement l'un des deux existe, nous définissons $\max\{\lambda_0, \nu_0\}$ comme étant égal à celui qui existe. Il découle de (3) que l'orthogonal $E_0^\perp$ du noyau de u est un espace de Hilbert séparable, car c'est une somme hilbertienne (dénombrable) de sous-espaces vectoriels de dimension finie. Dans (4), nous avons aussi, pour $0 \leq k < N_+$ et $0 \leq n < N_-$,

$$\lambda_k = \max_{x\in\left(\bigoplus_{0\leq i<N_-} E_{-\nu_i}\oplus E_0\oplus\bigoplus_{i=0}^{k-1} E_{\lambda_i}\right)^\perp,\ \|x\|=1} \langle u(x), x\rangle$$

et

$$-\nu_n = \min_{x\in\left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} E_{-\nu_i}\oplus E_0\oplus\bigoplus_{0\leq i<N_+} E_{\lambda_i}\right)^\perp,\ \|x\|=1} \langle u(x), x\rangle\ .$$

Spectre d'un opérateur auto-adjoint compact



Démonstration. (1) Par les propositions 1.36 (4) et 1.38 (v), l'ensemble des valeurs spectrales non nulles de u est formé de valeurs propres réelles isolées bornées de multiplicités finies. En séparant les positives et les négatives, elles forment donc deux suites finies ou infinies de réels strictement positifs strictement décroissants $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N},\, k<N_+}$ et de réels strictement négatifs strictement croissants $(-\nu_n)_{n\in\mathbb{N},\, n<N_-}$. Ces suites convergent vers 0 si $N_+ = +\infty$ (resp. $N_- = +\infty$), par la fermeture du spectre (et le fait que les valeurs spectrales non nulles sont isolées).

(2) Ceci découle de la proposition 1.38 (v).

(3) Montrons tout d'abord que ces sous-espaces (qui sont fermés) sont orthogonaux deux à deux. Soient $x, y \in \mathscr{H}$. Si $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$ avec $\mu \neq \lambda$ deux nombres réels, alors puisque u est auto-adjoint

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \mu\langle x, y\rangle\ .$$

Donc x et y sont orthogonaux, ce qui montre le résultat.

Notons F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$ engendré par les sous-espaces E_0, E_{λ_k}, $E_{-\nu_n}$ (dès qu'ils sont définis), et montrons que F est dense dans $\mathscr{H}$.

Par construction, F est invariant par u, donc $F^\perp$ est invariant par u par la proposition 1.38 (iv). L'opérateur linéaire continu $v = u_{|F^\perp}$ est auto-adjoint compact. Par construction, il n'a pas de valeur propre non nulle. Donc par la proposition 1.36 (5) si $F^\perp$ est de dimension infinie, ou parce le spectre est l'ensemble des valeurs propres en dimension finie, le spectre de v est réduit à $\{0\}$ si $F^\perp \neq \{0\}$, et il est vide si $F^\perp = \{0\}$. Par la proposition 1.38 (v) si $F^\perp \neq \{0\}$, l'opérateur continu v est nul (car de norme nulle), donc $F^\perp$ est contenu dans E_0, donc est nul. Par le corollaire 1.12, F est donc dense.

(4) Quitte à changer u en $-u$, il suffit de montrer la première égalité. Notons $F_k = E_0 \oplus E_{\lambda_0} \oplus E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_{k-1}}$, qui est invariant par u. Alors $F_k^\perp$ l'est aussi, et $u_{|F_k^\perp}$ est auto-adjoint compact, de plus grande valeur spectrale λ_k. Le résultat découle donc de la proposition 1.38 (v). □

Corollaire 1.42 *(1) Soit u un opérateur auto-adjoint compact positif de rang infini dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Alors il existe une suite décroissante $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs qui converge vers 0, qui sont des valeurs propres de u de multiplicité finie, telle que, en posant $E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\operatorname{Sp}(u) = \{0\} \cup \{\lambda_n\ : n \in \mathbb{N}\}\ , \quad \mathscr{H} = E_0 \oplus \overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}} E_{\lambda_n} \quad \text{(somme hilbertienne)}$$

$$\text{et}\quad \lambda_0 = \sup_{\|x\|=1} \langle u(x), x\rangle = \sup_{x\in \operatorname{Ker}(u)^\perp,\ \|x\|=1} \langle u(x), x\rangle\ .$$

(2) Soit u un opérateur auto-adjoint compact dans un espace de Hilbert séparable $\mathscr{H}$. Alors $\mathscr{H}$ admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de u.

Démonstration. (1) Cette assertion sauf la dernière égalité découle immédiatement du théorème 1.41, car le spectre d'un opérateur auto-adjoint positif est positif par la proposition 1.38 (v). Pour montrer la dernière égalité, notons que pour tout opérateur auto-adjoint v d'un espace de Hilbert $\mathscr{H}$, pour tout $x \in \mathscr{H}$, pour tout y dans le noyau de v, nous avons

$$\langle v(x+y), x+y\rangle = \langle v(x), x\rangle + \langle v(x), y\rangle = \langle v(x), x\rangle + \langle x, v(y)\rangle = \langle v(x), x\rangle\ .$$

Ceci explique pourquoi prendre la borne supérieure sur $x \in \mathscr{H}$ ou sur $x \in \operatorname{Ker}(u)^\perp$ n'a pas d'importance, la seconde possibilité pouvant simplifier la recherche de la borne supérieure.

(2) Avec les notations du théorème 1.41, chaque $E_0, E_{\lambda_k}, E_{-\nu_n}$ est un espace de Hilbert séparable (de dimension finie sauf peut-être E_0), donc en mettant bout à bout des bases orthonormées des $E_{\lambda_k}, E_{-\nu_n}$ et en y intercalant les éléments d'une base hilbertienne de E_0, on obtient le résultat. □

1.6 Calcul fonctionnel continu

Si une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est hermitienne, nous savons depuis notre plus tendre enfance qu'elle est diagonalisable en base orthonormée de $\mathbb{C}^n$. Les matrices M^2 ou $\exp M$ sont aussi diagonalisables dans cette même base, le spectre de M^2 est l'ensemble des carrés des éléments du spectre de M, et le spectre de $\exp M$ est l'ensemble des exponentielles des éléments du spectre de M. De nombreux autres exemples de spectres de matrices peuvent être ainsi obtenus. Le but de cette partie, et de la suivante, est de généraliser ces calculs (dits "fonctionnels") de spectres aux opérateurs auto-adjoints des espaces de Hilbert.

Notre approche sera élémentaire. Nous renvoyons par exemple à [Bou, Rud2] pour une déduction du calcul fonctionnel continu et du calcul fonctionnel borné à partir du théorème de Gelfand-Neumark, et à [Die2, Chap. XV] pour une déduction de ces calculs à partir du théorème de Plancherel-Godement. Nous nous restreindrons aux opérateurs auto-adjoints, mais la théorie s'étend aux opérateurs normaux (voir les références ci-dessus).

Algèbres stellaires.

Les propriétés de l'algèbre de Banach $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, où $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert complexe, munie de l'involution $u \mapsto u^*$, sont synthétisées dans les définitions suivantes (voir par exemple [Bou]). Sauf mention contraire, toute algèbre sera une algèbre complexe unifère (c'est-à-dire admettant un élément unité (en général noté 1) pour la multiplication), et tout morphisme d'algèbres préserve les unités.

Soit A une algèbre. Le *spectre* d'un élément x de A est l'ensemble, noté $\operatorname{Sp}(x)$ ou $\operatorname{Sp}_A(x)$, des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $x - \lambda$ ne soit pas inversible dans A. Si x est inversible, alors [10] $\operatorname{Sp}(x^{-1}) = \operatorname{Sp}(x)^{-1}$. Notons que si $\varphi : A \to B$ est un morphisme d'algèbres, alors, pour tout u dans A, nous avons

$$\operatorname{Sp}_B(\varphi(u)) \subset \operatorname{Sp}_A(u)\ : \tag{10}$$

10. car si $\lambda \neq 0$, alors $x - \lambda = \lambda x(\frac{1}{\lambda} - x^{-1})$ est inversible si et seulement si $x^{-1} - \frac{1}{\lambda}$ l'est

si $u-\lambda$ est inversible, alors $\varphi(u)-\lambda=\varphi(u-\lambda)$ l'est aussi. En particulier, si φ est un isomorphisme d'algèbres, alors $\mathrm{Sp}_B(\varphi(u))=\mathrm{Sp}_A(u)$.

Une *algèbre involutive* est une algèbre A munie d'une application $u\mapsto u^*$ de A dans A telle que, pour tous les $u,v\in A$ et $\lambda\in\mathbb{C}$,
- $(u^*)^*=u$ (involutive),
- $(u+\lambda v)^*=u^*+\overline{\lambda}v^*$ (anti-linéaire),
- $(u\,v)^*=v^*\,u^*$ (anti-multiplicative).

On appelle u^* l'*adjoint* de u. Il découle de ces propriétés que $1^*=1$, que $(u^n)^*=(u^*)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et que u^* est inversible dans A si et seulement si u l'est, et qu'alors

$$(u^*)^{-1}=(u^{-1})^*\ .$$

Un élément u d'une algèbre involutive A est dit *auto-adjoint* (ou *hermitien*) si $u=u^*$, *normal* si $uu^*=u^*u$, et *unitaire* si $uu^*=u^*u=1$. Par exemple, les éléments auto-adjoints et unitaires sont normaux, l'unité 1 est auto-adjointe et unitaire, et pour tout u dans A, les éléments $u+u^*$, $i(u-u^*)$, u^*u et uu^* sont auto-adjoints. Si u et v sont auto-adjoints et commutent dans A, alors uv est auto-adjoint. Si u est unitaire, alors u est inversible et $u^{-1}=u^*$. Nous avons $\mathrm{Sp}(u^*)=\overline{\mathrm{Sp}(u)}$.

Étant donné deux algèbres involutives A et B, un *morphisme d'algèbres involutives* de A dans B est un morphisme d'algèbres $\varphi:A\to B$ tel que $\varphi(u^*)=\varphi(u)^*$ pour tout $u\in A$.

Une *algèbre normée involutive* est une algèbre involutive A munie d'une norme $\|\cdot\|$ telle que, pour tous les $u,v\in A$,
- $\|uv\|\leq\|u\|\|v\|$ (sous-multiplicativité de la norme),
- $\|u^*\|=\|u\|$ (isométrie de l'adjoint).

Par exemple, pour K un espace métrique compact, l'ensemble $\mathscr{L}^\infty(K)=\mathscr{L}^\infty(K;\mathbb{C})$ des applications mesurables bornées de K dans $\mathbb{C}$, munie de la structure d'algèbre pour les addition, multiplication et multiplication par un scalaire point par point, de l'involution $f\mapsto\overline{f}$, et de la norme $\|f\|_\infty=\sup_{x\in K}\ |f(x)|$, est une algèbre normée involutive.

Une *algèbre stellaire* (appelée *C^*-algèbre* sauf par quelques irréductibles gaulois) est une algèbre normée involutive complète A telle que, pour tout $u\in A$,
- $\|uu^*\|=\|u\|^2$.

Exemples. (1) On vérifie facilement, par la proposition 1.37, que si $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert, alors l'espace vectoriel $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ muni du produit $uv=u\circ v$, de l'involution $u\mapsto u^*$ et de la norme d'opérateur, est une algèbre stellaire.

(2) On vérifie facilement que si X est un espace métrique compact non vide, alors l'espace vectoriel $\mathscr{C}(X)=\mathscr{C}(X;\mathbb{C})$ des applications continues de X dans $\mathbb{C}$, muni du produit point par point $(f,g)\mapsto fg$, de l'involution $f\mapsto\overline{f}$, et de la norme $\|f\|_\infty=\max_{x\in X}\ |f(x)|$, est une algèbre stellaire.

(3) Si A est une algèbre stellaire et si E est une partie de A, alors la *sous-algèbre stellaire engendrée* par E est l'adhérence de la sous-algèbre de A engendrée par les éléments de E et leurs adjoints. Munie des restrictions des lois d'algèbres, de l'involution et de la norme, c'est une algèbre stellaire.

Pour tout élément u d'une algèbre normée involutive A, nous appellerons *rayon spectral* de u le nombre réel (bien défini par le lemme 1.29)

$$\rho(u)=\lim_{n\to+\infty}\ \|u^n\|^{\frac{1}{n}}=\inf_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}\ \|u^n\|^{\frac{1}{n}}\ .$$

Proposition 1.43 *Soit u un élément d'une algèbre normée involutive complète A.*

(1) $\mathrm{Sp}(u)$ *est compact et si $A \neq \{0\}$, alors* $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$.

(2) $\rho(u^*) = \rho(u) \leq \|u\|$.

(3) $\rho(u) = \min\{r \in [\,0, \|u\|\,] \;:\; \mathrm{Sp}(u) \subset \overline{B}_{\mathbb{C}}(0, r)\}$.

(4) Si u est auto-adjoint et si A est une algèbre stellaire, alors

$$\rho(u) = \|u\| \;.$$

Démonstration. (1) Les démonstrations sont analogues à celles du théorème 1.25 (i) et (ii).

(2) C'est immédiat.

(3) Si $A = \{0\}$, alors $\rho(u) = 0$ et $\mathrm{Sp}(u) = \emptyset$, donc le résultat est vrai. Si $A \neq \{0\}$, alors la démonstration est analogue à celle du théorème 1.25 (iii).

(4) Nous avons alors $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|u^2\|$ et par récurrence $\|u\|^{2^n} = \|u^{2^n}\|$, donc $\rho(u) = \lim_{n\to+\infty} \|u^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|u\|$. □

Proposition 1.44 *(1) Si A est une algèbre involutive munie d'une norme complète sous-multiplicative telle que $\|u\|^2 \leq \|uu^*\|$ pour tout $u \in A$, alors A est une algèbre stellaire, et $\|uu^*\| = \|u^*u\|$.*

(2) Soient A une algèbre normée involutive et B une algèbre stellaire. La norme de tout morphisme d'algèbres involutives φ de A dans B est au plus 1 *(et en particulier, φ est continu).*

Démonstration. (1) Les propriétés qu'il reste à vérifier pour que A soit une algèbre stellaire sont l'isométrie de l'adjoint et l'inégalité inverse $\|uu^*\| \leq \|u\|^2$. Pour tout $u \in A$, nous avons

$$\|u\|^2 \leq \|uu^*\| \leq \|u\|\|u^*\| \;, \tag{11}$$

donc $\|u\| \leq \|u^*\|$. D'où $\|u^*\| = \|u\|$ en changeant u en u^*. Il découle alors des inégalités (11) que $\|uu^*\| = \|u\|^2$. De plus,

$$\|u^*u\| = \|u^*(u^*)^*\| = \|u^*\|^2 = \|u\|^2 = \|uu^*\| \;.$$

(2) Pour tout $u \in A$, puisque $\varphi(u)^*\varphi(u) = \varphi(u^*u)$ et u^*u sont auto-adjoints, en utilisant respectivement

- la propriété d'algèbre stellaire de B,
- la proposition 1.43 (4),
- l'inclusion $\mathrm{Sp}_B(\varphi(u)) \subset \mathrm{Sp}_A(u)$ donnée par la formule (10),
- la proposition 1.43 (2),
- les propriétés d'algèbre normée involutive de A,

nous avons

$$\|\varphi(u)\|^2 = \|\varphi(u^*u)\| = \rho\big(\varphi(u^*u)\big) \leq \rho(u^*u) \leq \|u^*u\| \leq \|u\|^2 \;. \quad \square$$

Exercice E.16 *Soient A une algèbre stellaire et u un élément unitaire de A. Montrer que le spectre de u est contenu dans le cercle unité de $\mathbb{C}$.*

Nous renvoyons par exemple à [Con, KR, Tak] pour de nombreux autres compléments sur les algèbres stellaires.

Calcul fonctionnel continu.

Le résultat suivant permet de calculer le spectre de certains opérateurs continus, en les exprimant comme polynômes, ou plus généralement comme fonctions continues, d'opérateurs auto-adjoints de spectres connus.

Théorème 1.45 (Calcul fonctionnel continu) *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert non réduit à $\{0\}$ et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur auto-adjoint de $\mathscr{H}$.*

Il existe un et un seul morphisme d'algèbres involutives $\varphi = \varphi_u$ de $\mathscr{C}\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que $\varphi(\mathrm{id}) = u$, où $\mathrm{id} : \operatorname{Sp}(u) \to \mathbb{C}$ est l'application $\lambda \mapsto \lambda$.

De plus, pour tout $f \in \mathscr{C}\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$,

(i) φ est isométrique, d'image la sous-algèbre stellaire de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ engendrée par u (qui est commutative) ;

(ii) nous avons $\operatorname{Sp}(\varphi(f)) = f(\operatorname{Sp}(u))$;

(iii) l'opérateur continu $\varphi(f)$ est auto-adjoint si et seulement si f est à valeurs réelles, et positif si et seulement si f est à valeurs positives ou nulles ;

(iv) l'opérateur continu $\varphi(f)$ est inversible si et seulement si f ne s'annule pas sur $\operatorname{Sp}(u)$ et alors $\varphi(f)^{-1} = \varphi(\frac{1}{f})$;

(v) $\varphi(f)$ est l'opérateur nul si et seulement si f est nulle sur $\operatorname{Sp}(u)$;

(vi) si λ est une valeur propre de u, alors $f(\lambda)$ est une valeur propre de $\varphi(f)$ et l'espace propre $\operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})$ de u associé à λ est contenu dans l'espace propre $\operatorname{Ker}(\varphi(f) - f(\lambda)\,\mathrm{id})$ de $\varphi(f)$ associé à $f(\lambda)$.

Dans la suite, nous notons [11] $f(u)$ l'opérateur continu $\varphi_u(f)$, pour tout $f \in \mathscr{C}\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$. L'application $f \mapsto f(u)$ de $\mathscr{C}\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ vérifie donc, pour tous les $f, g \in \mathscr{C}\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

- $(f + \lambda g)(u) = f(u) + \lambda g(u)$,
- $f(u)^* = \overline{f}\,(u)$,
- $(fg)(u) = f(u) \circ g(u)$ et $\mathrm{id}(u) = u$,
- $f(u)$ est inversible si et seulement si f ne s'annule pas sur $\operatorname{Sp}(u)$, et alors $f(u)^{-1} = \frac{1}{f}(u)$,
- $\|f(u)\| = \|f\|_\infty$,
- en notant $f(\operatorname{Sp}(u)) = \{f(x)\ :\ x \in \operatorname{Sp}(u)\}$, nous avons

$$\operatorname{Sp}(f(u)) = f(\operatorname{Sp}(u)) \ .$$

Cette égalité est appelée le *théorème spectral* pour u. Il permet de calculer, lorsque l'on connaît le spectre de u, pour toute fonction continue connue f sur le spectre de u, le spectre de l'opérateur $f(u)$ en fonction de celui de u.

11. La notation $f(u)$ est initialement plus compliquée à comprendre que la notation $\varphi_u(f)$, et il convient de **prendre garde à ce quelle ne soit pas source d'erreur**. Mais à moyen terme et long terme, elle s'avère beaucoup plus pratique à manipuler pour les utilisations du théorème du calcul fonctionnel continu, dont les calculs de spectres.

Démonstration. Puisque $\mathscr{H} \neq \{0\}$, le spectre $\operatorname{Sp}(u)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$, donc $\mathscr{C}(\operatorname{Sp}(u))$ est une algèbre involutive (stellaire).

Pour tout polynôme complexe $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ et tout $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, posons $\overline{P} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} X^i \in \mathbb{C}[X]$ et $P(v) = \sum_{i=0}^{n} a_i v^i \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. L'application $P \mapsto P(v)$ est un morphisme d'algèbres de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que $P(v)^* = \overline{P}(v^*)$.

En particulier, puisque u est auto-adjoint, l'application $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ est un morphisme d'algèbres involutives. Si φ est une solution du théorème, alors φ doit coïncider avec ce morphisme sur les fonctions polynomiales restreintes à $\operatorname{Sp}(u)$. L'idée de la démonstration qui suit est de montrer que ce morphisme s'étend de manière unique à tout $\mathscr{C}(\operatorname{Sp}(u))$.

Nous noterons de la même manière un polynôme et sa restriction à $\operatorname{Sp}(u)$. Le calcul du spectre et de la norme de l'opérateur continu $P(u)$, qui est un cas particulier du théorème 1.45 (i) et (ii), est effectué dans le lemme suivant.

Lemme 1.46 *(a)* $\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \quad \operatorname{Sp}(P(u)) = P(\operatorname{Sp}(u))$.
(b) $\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \quad \|P(u)\| = \sup_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} |P(\lambda)|$.
(c) Pour tous les $P, Q \in \mathbb{C}[X]$*, si* P *et* Q *coïncident sur* $\operatorname{Sp}(u)$*, alors* $P(u) = Q(u)$*.*

Démonstration. (a) Montrons tout d'abord que $P(\operatorname{Sp}(u))$ est contenu dans $\operatorname{Sp}(P(u))$. Soient $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P - P(\lambda) = (X - \lambda)Q$. Alors $P(u) - P(\lambda)\,\mathrm{id} = (u - \lambda\,\mathrm{id}) \circ Q(u) = Q(u) \circ (u - \lambda\,\mathrm{id})$. Comme $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est non surjective ou non injective, l'opérateur continu $P(u) - P(\lambda)\,\mathrm{id}$ l'est aussi. Donc $P(\lambda) \in \operatorname{Sp}(P(u))$, ce qui montre le résultat.

Réciproquement, soit $\mu \in \operatorname{Sp}(P(u))$, montrons que $\mu \in P(\operatorname{Sp}(u))$. Si P est constant égal à μ, ceci découle du fait que $\operatorname{Sp}(u)$ est non vide (car $\mathscr{H} \neq \{0\}$). Sinon, par le théorème de d'Alembert, il existe n dans $\mathbb{N} - \{0\}$ et $a, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$ et $P - \mu = a \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$, donc $P(u) - \mu\,\mathrm{id} = a(u - \lambda_1\,\mathrm{id}) \circ \dots \circ (u - \lambda_n\,\mathrm{id})$. Si aucun λ_i n'est dans $\operatorname{Sp}(u)$, alors $P(u) - \mu\,\mathrm{id}$ est inversible, ce qui contredit le fait que $\mu \in \operatorname{Sp}(P(u))$. Donc, par exemple, $\lambda_1 \in \operatorname{Sp}(u)$, et $P(\lambda_1) - \mu = 0$, ce qui montre le résultat.

(b) Pour obtenir la suite d'égalités ci-dessous, nous utilisons : pour la seconde égalité, le fait que le rayon spectral d'un opérateur auto-adjoint est égal à sa norme ; pour la troisième égalité, le fait que $P(u)^* = \overline{P}(u)$ car u est auto-adjoint ; pour la quatrième égalité, l'assertion (a) ; et pour la dernière égalité, le fait que le spectre d'un opérateur auto-adjoint est réel :

$$\begin{aligned}\|P(u)\|^2 = \|P(u)P(u)^*\| &= \sup_{\lambda \in \operatorname{Sp}\left(P(u)P(u)^*\right)} |\lambda| = \sup_{\lambda \in \operatorname{Sp}\left((P\overline{P})(u)\right)} |\lambda| \\ &= \sup_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} |(P\,\overline{P})(\lambda)| = \sup_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} |P(\lambda)|^2 \,.\end{aligned}$$

(c) Si $P\big|_{\operatorname{Sp}(u)} = Q\big|_{\operatorname{Sp}(u)}$, alors par l'assertion (b), nous avons

$$\|P(u) - Q(u)\| = \sup_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} |P(\lambda) - Q(\lambda)| = 0 \,,$$

donc $P(u) = Q(u)$. □

Montrons l'unicité de φ. Si un tel morphisme d'algèbres involutives φ existe, alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, nous avons $\varphi(P) = P(u)$. L'unicité découle donc de la continuité de φ, voir la proposition 1.44 (2), et de la densité dans $\mathscr{C}\big(\mathrm{Sp}(u)\big)$ des (restrictions à $\mathrm{Sp}(u)$ des) applications polynômiales complexes, par le théorème de Stone-Weierstrass 1.1.

Montrons l'existence de φ. Puisque u est auto-adjoint, l'application $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbres involutives isométrique (par le lemme 1.46 (b)) de l'algèbre normée involutive des fonctions polynomiales de $\mathrm{Sp}(u)$ dans $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Il s'étend donc par le théorème de prolongement A.1 en un morphisme d'algèbres involutives isométrique φ de $\mathscr{C}\big(\mathrm{Sp}(u)\big)$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, en utilisant la complétude de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ et la densité des fonctions polynomiales dans $\mathscr{C}\big(\mathrm{Sp}(u)\big)$. Ce morphisme φ convient.

Montrons la seconde partie de l'assertion (i). Puisque φ est isométrique et puisque $\mathscr{C}\big(\mathrm{Sp}(u)\big)$ est complet, son image est fermée (voir par exemple le lemme 1.39), donc c'est une sous-algèbre stellaire de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Puisqu'elle contient u, elle contient la sous-algèbre stellaire de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ engendrée par u. Réciproquement, puisque u est auto-adjoint, celle-ci est l'adhérence de l'algèbre engendrée par u, et tout polynôme en u est dans l'image de φ, ce qui montre l'inclusion inverse.

Montrons l'assertion (ii). Nous allons utiliser le lemme suivant.

Lemme 1.47 *Soient B une sous-algèbre fermée d'une algèbre de Banach complexe A. Pour tout $x \in B$, nous avons*

(1) $\mathrm{Sp}_A(x)$ est contenu dans $\mathrm{Sp}_B(x)$;

(2) la frontière[12] *de $\mathrm{Sp}_A(x)$ contient la frontière de $\mathrm{Sp}_B(x)$;*

(3) $\mathrm{Sp}_B(x)$ est la réunion de $\mathrm{Sp}_A(x)$ et de certaines composantes connexes bornées de $\mathbb{C} - \mathrm{Sp}_A(x)$;

(4) si $\mathrm{Sp}_A(x)$ est réel, alors $\mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Sp}_B(x)$.

Démonstration. (1) Ceci découle de la formule (10) du début de la partie 1.6 appliquée à l'inclusion de B dans A.

(2) Soit λ un élément de la frontière de $\mathrm{Sp}_B(x)$. Alors λ appartient à $\mathrm{Sp}_B(x)$ (qui est fermé par la proposition 1.2 (3)) et il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C} - \mathrm{Sp}_B(x)$ qui converge vers λ. Puisque les éléments inversibles $y_n = x - \lambda_n$ convergent vers l'élément non inversible $x - \lambda$ dans l'algèbre de Banach B, les normes $\|{y_n}^{-1}\|$ convergent vers $+\infty$, par la proposition 1.2 (4).

Posons $z_n = \frac{{y_n}^{-1}}{\|{y_n}^{-1}\|}$, qui est de norme 1. Notons que

$$\|z_n(x-\lambda)\| = \|z_n(x-\lambda_n) + z_n(\lambda_n-\lambda)\| \leq \frac{1}{\|{y_n}^{-1}\|} + |\lambda_n - \lambda|$$

converge vers 0 quand $n \to +\infty$. Si $x - \lambda$ est inversible dans A, alors

$$1 = \|z_n\| = \|z_n(x-\lambda)(x-\lambda)^{-1}\| \leq \|z_n(x-\lambda)\|\|(x-\lambda)^{-1}\| \;,$$

qui converge vers 0 quand $n \to +\infty$, ce qui est impossible. Donc λ appartient à $\mathrm{Sp}_A(x)$, mais pas à l'intérieur de $\mathrm{Sp}_A(x)$, qui est contenu dans l'intérieur de $\mathrm{Sp}_B(x)$, par l'assertion (1).

12. La *frontière* d'une partie A d'un espace métrique X est l'ensemble $\partial A = \overline{A} - \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overline{{}^c A}$ des points de X dans l'intersection des adhérences de A et de son complémentaire.

(3) Soit U une composante connexe de $\mathbb{C} - \mathrm{Sp}_A(x)$. Puisque $U \cap \mathrm{Sp}_A(x)$ est vide, l'ouvert U ne contient pas de point frontière du fermé $\mathrm{Sp}_A(x)$, donc pas de point frontière de $\mathrm{Sp}_B(x)$ par l'assertion (2). Donc $U \cap \mathrm{Sp}_B(x)$ et $U - (U \cap \mathrm{Sp}_B(x))$ sont deux fermés de U de réunion U. Comme U est connexe, l'un de ces deux fermés est vide, c'est-à-dire que ou bien U ne rencontre pas $\mathrm{Sp}_B(x)$, ou bien U est contenu dans $\mathrm{Sp}_B(x)$, qui est borné (car si $|\lambda| > \|u\|$, alors par la proposition 1.2 (2), l'élément $1 - \frac{u}{\lambda}$ est inversible dans l'algèbre de Banach B, donc $u - \lambda$ aussi ; voir aussi la proposition 1.43).

(4) Si $\mathrm{Sp}_A(x)$ est réel, alors l'ouvert $\mathbb{C} - \mathrm{Sp}_A(x)$ n'a qu'une seule composante connexe, qui est non bornée. $\square$

Finissons maintenant la démonstration de l'assertion (ii) du théorème 1.45. Notons que

$$\mathrm{Sp}_{\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u))}(f) = f(\mathrm{Sp}(u)) \ ,$$

car $f - \lambda$ est inversible dans l'algèbre $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u)))$ (d'inverse $\frac{1}{f-\lambda}$) si et seulement si λ n'appartient pas à l'image de f.

L'inclusion $\mathrm{Sp}(\varphi(f)) \subset f(\mathrm{Sp}(u))$ découle alors de la formule (10) du début de la partie 1.6, puisque φ est un morphisme d'algèbres.

Pour montrer l'inclusion réciproque, supposons tout d'abord que f soit réelle. Alors $\varphi(f)^* = \varphi(\overline{f}) = \varphi(f)$, donc $\varphi(f)$ est auto-adjoint, donc son spectre est réel par la proposition 1.38 (v). Notons B l'image de φ (qui est une sous-algèbre fermée, car φ est isométrique). Par le lemme 1.47 (4), et puisque $\varphi : \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u)) \to B$ est un isomorphisme d'algèbres (toujours car φ est isométrique), nous avons

$$\mathrm{Sp}_{\mathscr{L}(\mathscr{H})}(\varphi(f)) = \mathrm{Sp}_B(\varphi(f)) = \mathrm{Sp}_{\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u))}(f) = f(\mathrm{Sp}(u)) \ .$$

Maintenant, si f est quelconque, et si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(\varphi(f))$, alors $v = \varphi(f) - \lambda\,\mathrm{id}$ est inversible. Donc v^* et $v^*v = \varphi(|f-\lambda|^2)$ sont inversibles, et donc 0 n'appartient pas au spectre de $\varphi(|f-\lambda|^2)$. Comme $|f-\lambda|^2$ est réelle et par le cas précédemment traité, ceci implique que 0 n'appartient pas à l'image de $|f-\lambda|^2$, donc que λ n'appartient pas à l'image de f.

Montrons l'assertion (iii). Si f est à valeurs réelles, alors $\varphi(f)^* = \varphi(\overline{f}) = \varphi(f)$, donc $\varphi(f)$ est auto-adjoint. Réciproquement, si $\varphi(f)$ est auto-adjoint, alors son spectre est réel par la proposition 1.38 (v), donc $f(\mathrm{Sp}(u)) = \mathrm{Sp}(\varphi(f))$ est contenu dans $\mathbb{R}$, et f est à valeurs réelles sur $\mathrm{Sp}(u)$.

Si l'opérateur continu $\varphi(f)$ est positif, alors il est auto-adjoint (par la remarque (4) précédant la proposition 1.38), et son spectre $\mathrm{Sp}(\varphi(f))$ est contenu dans $[0, +\infty[$ par la proposition 1.38 (v). Donc $f(\mathrm{Sp}(u)) = \mathrm{Sp}(\varphi(f))$ est contenu $[0, +\infty[$, et f est à valeurs positives ou nulles. Réciproquement, si f est à valeurs positives ou nulles, alors f est réelle, et $\mathrm{Sp}(\varphi(f)) = f(\mathrm{Sp}(u))$ est contenu $[0, +\infty[$. Donc $\varphi(f)$ est auto-adjoint par ce qui précède, de spectre contenu dans $[0, +\infty[$. Par le corollaire 1.40, l'opérateur continu $\varphi(f)$ est donc positif.

Montrons l'assertion (iv). L'opérateur continu $\varphi(f)$ est inversible si et seulement si 0 n'appartient pas à $\mathrm{Sp}(\varphi(f)) = f(\mathrm{Sp}(u))$, donc si et seulement si f ne s'annule pas sur $\mathrm{Sp}(u)$. Comme l'application $f\frac{1}{f}$ vaut alors 1 sur $\mathrm{Sp}(u)$, et puisque φ est un morphisme d'algèbres, nous avons immédiatement que l'inverse de $\varphi(f)$ est $\varphi(\frac{1}{f})$.

Montrons l'assertion (v). Si $\varphi(f) = 0$, alors $f(\mathrm{Sp}(u)) = \mathrm{Sp}(\varphi(f)) = \{0\}$ (car $\mathscr{H} \neq \{0\}$), donc f est nulle sur $\mathrm{Sp}(u)$. Réciproquement, si f est nulle (sur $\mathrm{Sp}(u)$), alors comme φ est un morphisme d'algèbres, nous avons $\varphi(f) = 0$.

Montrons la dernière assertion (vi). Si $x \in \mathscr{H}$ est vecteur propre de u pour la valeur propre λ, alors pour tout polynôme complexe P, nous avons $\varphi(P)(x) = P(u)(x) = P(\lambda)x$. Le fait que $\varphi(f)(x) = f(\lambda)x$ pour tout $f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u))$ découle alors de la densité des applications polynomiales dans $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u))$, et de la continuité de φ. $\square$

Exercice E.17 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur auto-adjoint de $\mathscr{H}$.*

(1) Montrer que le spectre de u est réduit à un point si et seulement si $\mathscr{H} \neq \{0\}$ et u est un multiple réel de l'identité.

(2) Montrer que le cardinal du spectre de u est 2 si et seulement si $\mathscr{H} \neq \{0\}$ et s'il existe un projecteur orthogonal non nul P, différent de l'identité, et $(a, b) \in \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$ tels que $u = aP + b\,\mathrm{id}$.

(3) Montrer que si C est une composante connexe ouverte de $\mathrm{Sp}(u)$, alors il existe un opérateur auto-adjoint v commutant avec u tel que $\mathrm{Sp}(v) = C$.

Exercice E.18 *Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert différent de $\{0\}$.*

(1) Soient v un opérateur auto-adjoint de $\mathscr{H}$ et $\lambda \notin \mathrm{Sp}(v)$. Montrer que

$$\|(v - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}\| = \frac{1}{d(\lambda, \mathrm{Sp}(v))} = \frac{1}{\sup\{r > 0 \ : \ B(\lambda, r) \cap \mathrm{Sp}(v) = \emptyset\}} \ ,$$

c'est-à-dire que la norme de l'inverse de $v - \lambda\,\mathrm{id}$ est égale à la borne inférieure des inverses des rayons des disques de centre λ contenus dans le complémentaire du spectre de v.

Supposons que $\mathscr{H}$ soit la somme directe orthogonale (respectivement la somme hilbertienne) d'une suite finie (respectivement infinie dénombrable) $(\mathscr{H}_n)_{0 \leq n < N}$ (où $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) de sous-espaces fermés de $\mathscr{H}$.

(2) Pour tout indice n, notons u_n un opérateur continu de $\mathscr{H}_n$, et supposons la suite $(\|u_n\|)_{0 \leq n < N}$ bornée. Montrer qu'il existe un unique opérateur continu u de $\mathscr{H}$ dont la restriction à $\mathscr{H}_n$ est u_n pour tout indice n. Montrer que la restriction de u^* à $\mathscr{H}_n$ est égale à u_n^*.

(3) Soit u un opérateur auto-adjoint de $\mathscr{H}$, préservant chaque $\mathscr{H}_n$. Montrer que

$$\mathrm{Sp}(u) = \overline{\bigcup_{0 \leq n < N} \mathrm{Sp}(u_{|\mathscr{H}_n})} \ .$$

Spectre essentiel d'un opérateur auto-adjoint.

Le spectre des opérateurs auto-adjoints admet une autre décomposition, que nous décrivons maintenant.

Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur linéaire continu. Le *spectre essentiel* de u est l'ensemble, noté $\mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u)$, des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathscr{H}$ telle que

(1) $\|x_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(2) la suite $(u(x_n) - \lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0,

(3) la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de sous-suite convergente.

Le spectre essentiel est invariant par conjugaison, au sens suivant. Si $\mathscr{H}'$ est un espace de Hilbert, si $v : \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ est linéaire, continue, bijective (donc v^{-1} est continue), alors

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(v \circ u \circ v^{-1}) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u) .$$

En effet, si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u)$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathscr{H}$ vérifiant les propriétés (1) à (3) ci-dessus, on montre (en utilisant le fait que pour tout $x \in \mathscr{H}$ tel que $\|x\| = 1$, on a $\frac{1}{\|v^{-1}\|} \leq \|v(x)\| \leq \|v\|$) que la suite $\big(x'_n = \frac{v(x_n)}{\|v(x_n)\|}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les propriétés (1) à (3) ci-dessus pour l'opérateur $v \circ u \circ v^{-1}$.

Proposition 1.48 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur auto-adjoint. Alors*

$$\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u) \cup \mathrm{Vp}(u)$$

et $\mathrm{Sp}(u) \setminus \mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u)$ est exactement l'ensemble des valeurs propres de multiplicité finie isolées dans le spectre de u.

Démonstration. Le fait que le spectre essentiel de u est contenu dans le spectre de u découle du critère de Weyl (proposition 1.38 (vii)).

Montrons par contraposition que tout point de $\mathrm{Sp}(u) \setminus \mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u)$ est isolé dans $\mathrm{Sp}(u)$. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ n'est pas isolé dans $\mathrm{Sp}(u)$, alors il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Sp}(u)$ qui converge vers λ, telle que $\lambda_n \neq \lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le critère de Weyl (proposition 1.38 (vii)), puisque λ_n est une valeur spectrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un vecteur unitaire x_n dans $\mathscr{H}$ tel que $\|u(x_n) - \lambda_n x_n\| \leq \frac{|\lambda-\lambda_n|}{n}$. Alors $\|x_n\| = 1$ et $\|u(x_n) - \lambda x_n\| \leq \|u(x_n) - \lambda_n x_n\| + |\lambda_n - \lambda|\ \|x_n\|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Pour montrer que λ appartient à $\mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u)$, il suffit donc de montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de sous-suite convergente. Supposons par l'absurde que, quitte à extraire, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in \mathscr{H}$. Alors $\|x\| = 1$ et $u(x) - \lambda x = 0$, par continuité. Donc

$$\begin{aligned}(\lambda - \lambda_n)\langle x_n, x\rangle &= (\lambda - \lambda_n)\langle x_n, x\rangle + \langle x_n, (u - \lambda\,\mathrm{id})(x)\rangle \\ &= (\lambda - \lambda_n)\langle x_n, x\rangle + \langle (u - \lambda\,\mathrm{id})(x_n), x\rangle = \langle u(x_n) - \lambda_n x_n, x\rangle .\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par la construction de x_n, nous avons donc

$$|\lambda - \lambda_n|\ |\langle x_n, x\rangle| \leq \frac{|\lambda - \lambda_n|}{n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\lambda_n \neq \lambda$, nous avons donc $|\langle x_n, x\rangle| \leq \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais ceci contredit le fait que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur unitaire x.

Lemme 1.49 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe et $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur auto-adjoint. Toute valeur spectrale μ de v isolée dans le spectre de v est une valeur propre de v. Si $\mathrm{Sp}(v)$ est discret ou (de manière équivalente) fini, alors $\mathrm{Sp}(v) = \mathrm{Vp}(v)$.*

Démonstration. L'application $f : \mathrm{Sp}(v) \to \mathbb{C}$ valant 1 en μ et 0 ailleurs est continue et non identiquement nulle sur $\mathrm{Sp}(v)$, et $x \mapsto (x - \mu)f(x)$ est l'application nulle. Donc par le calcul fonctionnel continu, $(v - \mu\,\mathrm{id}) \circ f(v) = 0$. Donc l'image de $f(v)$, qui n'est pas réduite à 0 car $f(v)$ n'est pas l'opérateur nul (par l'assertion (v) du théorème 1.45), est contenue dans le noyau de $v - \mu\,\mathrm{id}$. Donc μ est une valeur propre de v. Comme un espace compact est discret si et seulement s'il est fini, et que toute partie finie de $\mathbb{C}$ est composée de points isolés, la dernière assertion en découle. $\square$

Par ce lemme et ce qui le précède, tout point λ de $\mathrm{Sp}(u) \setminus \mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u)$ est donc une valeur propre. Si par l'absurde l'espace propre E_λ de λ était de dimension infinie, il existerait une suite orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E_λ. Celle-ci n'admettrait pas de sous-suite convergente, serait unitaire et vérifierait $u(e_n) - \lambda e_n = 0$, donc λ appartiendrait à $\mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u)$, une contradiction.

Réciproquement, soit λ une valeur propre de u, isolée dans $\mathrm{Sp}(u)$, d'espace propre E_λ de dimension finie.

Puisque l'opérateur continu u est auto-adjoint et préserve E_λ, il préserve l'orthogonal $E_\lambda^\perp$, et $u_{|E_\lambda^\perp}$ est auto-adjoint. Montrons tout d'abord par l'absurde que λ n'appartient pas à $\mathrm{Sp}(u_{|E_\lambda^\perp})$. Sinon, comme $\mathrm{Sp}(u_{|E_\lambda^\perp})$ est contenu dans $\mathrm{Sp}(u)$ (voir par exemple l'exercice E.4), le nombre réel λ serait une valeur spectrale isolée de $u_{|E_\lambda^\perp}$, non valeur propre, ce qui contredirait le lemme 1.49. Donc $u_{|E_\lambda^\perp} - \lambda\,\mathrm{id}_{|E_\lambda^\perp}$ est inversible, et nous notons c la norme de son inverse.

Montrons maintenant que λ n'appartient pas au spectre essentiel de u. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de vecteurs unitaires de $\mathscr{H}$ telle que la suite $(u(x_n) - \lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, ce qui entraîne que $\lambda \notin \mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u)$. Écrivons $x_n = y_n + z_n$ avec $y_n \in E_\lambda$ et $z_n \in E_\lambda^\perp$. Puisque E_λ est un espace vectoriel de dimension finie et $\|y_n\| \leq \|x_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, vers $y \in \mathscr{H}$. De plus, $\|z_n\| \leq c\,\|u(z_n) - \lambda z_n\| = c\,\|u(x_n) - \lambda x_n\|$, donc la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente (vers y), ce qui montre le résultat. $\square$

Le fait (énoncé dans le lemme 1.49) que tout point isolé de $\mathrm{Sp}(u)$ est une valeur propre de u est une des justifications à l'appellation de « spectre ponctuel » pour désigner l'ensemble des valeurs propres de u. Mais on prendra bien garde qu'il peut y avoir des éléments non isolés de $\mathrm{Sp}(u)$ qui sont aussi des valeurs propres de u : la réunion dans l'égalité $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u) \cup \mathrm{Vp}(u)$ énoncée dans la proposition 1.48 n'est pas forcément disjointe.

Exercice E.19 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur auto-adjoint compact. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, notons p_λ la projection orthogonale de $\mathscr{H}$ sur le sous-espace vectoriel (fermé) $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})$.*

(1) Pour toute application $f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u))$ telle que $f(0) = 0$ si $0 \in \mathrm{Sp}(u)$, montrer que l'opérateur continu $f(u)$ est compact.

(2) Montrer que $u = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \lambda\, p_\lambda$ (avec convergence dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$).

(3) Pour toute application $f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u))$ telle que $f(0) = 0$, montrer que $f(u) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} f(\lambda)\, p_\lambda$.

L'écriture $u = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \lambda\, p_\lambda$ obtenue dans cet exercice s'appelle la *résolution spectrale de l'opérateur auto-adjoint compact u*. Le but de la partie suivante est de montrer que tout opérateur auto-adjoint admet une telle décomposition, quitte à remplacer somme d'opérateurs par intégrale d'opérateurs en un sens à définir (son spectre n'étant pas forcément dénombrable).

1.7 Résolution spectrale des opérateurs auto-adjoints

Le but de ce chapitre est, outre d'étendre le calcul fonctionnel continu à des fonctions plus générales que les fonctions continues, de décrire un opérateur auto-adjoint d'un espace de Hilbert par des quantités définies sur son spectre.

Résolutions de l'identité.

Un rôle important pour notre but va être joué par les projecteurs orthogonaux. Un *projecteur orthogonal* d'un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ est un opérateur continu p de $\mathscr{H}$ tel qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé F de $\mathscr{H}$ tel que $p(x)$ soit la projection orthogonale de x sur F pour tout $x \in \mathscr{H}$. Notons que F est alors l'image de p.

Proposition 1.50 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe, et $P \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Alors P est un projecteur orthogonal (c'est-à-dire l'application de projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}$) si et seulement si P est un opérateur auto-adjoint* idempotent *(c'est-à-dire qui vérifie $P^2 = P$) de $\mathscr{H}$. De plus, P est alors positif, de norme au plus 1, vérifie $\langle P(x), x\rangle = \|P(x)\|^2$ pour tout $x \in \mathscr{H}$, et P est le projecteur orthogonal sur son image $P(\mathscr{H})$.*

Démonstration. Si P est l'application de projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé F de $\mathscr{H}$, alors pour tous les x et y dans $\mathscr{H}$, les vecteurs $P(x) \in F$ et $y - P(y) \in F^\perp$, ainsi que $P(x) - x \in F^\perp$ et $P(y) \in F$, sont orthogonaux, et donc $\langle P(x), y\rangle = \langle P(x), P(y)\rangle = \langle x, P(y)\rangle$. Ceci montre que P est auto-adjoint, et positif, car $\langle P(x), x\rangle = \langle P(x), P(x)\rangle \geq 0$. Comme la restriction de P à F est l'identité, P est idempotent.

Réciproquement, soit P un opérateur auto-adjoint idempotent. Si $y = P(x)$, alors $P(y) = P^2(x) = P(x) = y$. Donc l'image $P(\mathscr{H})$ de P est contenue dans le noyau de $\mathrm{id} - P$, donc égal à ce noyau (car réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - P)$, alors $x = P(x)$, donc x appartient à l'image de P). En particulier, $P(\mathscr{H})$ est fermé. Puisque P est auto-adjoint, pour tous les x et y dans $\mathscr{H}$, nous avons $\langle P(y), x - P(x)\rangle = \langle y, P(x) - P^2(x)\rangle = 0$. Donc $P(x)$ est un vecteur de $P(\mathscr{H})$ tel que $P(x) - x$ soit orthogonal à $P(\mathscr{H})$, ce qui montre que P est le projecteur orthogonal sur $P(\mathscr{H})$. Le fait que P est de norme au plus 1 est alors immédiat (outre ce qui a été vu dans le théorème 1.11, si $z = x + y$ avec x et y orthogonaux, alors $\|x\| \leq \|z\|$). □

Définition 1.51 *Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert. Une famille $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ d'opérateurs auto-adjoints de $\mathscr{H}$ est appelée une* résolution de l'identité *de $\mathscr{H}$ si*

(a) $P_\lambda \circ P_\mu = P_{\min\{\lambda,\mu\}}$;

(b) $P_\lambda = 0$ si λ est assez petit, et $P_\lambda = \mathrm{id}$ si λ est assez grand ;

(c) pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous avons $\lim_{\mu\to\lambda^+} P_\mu(x) = P_\lambda(x)$.

Remarquons que par la condition (a), les opérateurs continus P_λ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ commutent deux à deux. Remarquons aussi que par la proposition 1.50, puisque P_λ est idempotent ($P_\lambda \circ P_\lambda = P_\lambda$ par la condition (a)), l'opérateur continu P_λ est un projecteur orthogonal.

La première propriété s'appelle la *propriété de croissance*, la troisième la *propriété de continuité faible à droite*. Lorsque l'on s'intéresse à des opérateurs linéaires continus dont le domaine de définition n'est pas tout l'espace de départ (dit *non bornés*), la condition (b) est remplacée par $\lim_{\mu\to-\infty} P_\mu(x) = 0$ et $\lim_{\mu\to+\infty} P_\mu(x) = x$, pour tout $x \in \mathscr{H}$.

Exemple. Soit u un opérateur auto-adjoint compact d'un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, notons $E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})$. Par le théorème 1.41, ces sous-espaces vectoriels sont fermés, deux à deux orthogonaux, et réduits à $\{0\}$ sauf pour au plus un ensemble dénombrable d'entre eux. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, notons P_λ la projection orthogonale sur la somme hilbertienne des E_μ pour $\mu \leq \lambda$. Alors $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est une résolution de l'identité.

Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ une résolution de l'identité de $\mathscr{H}$. Il découle des propriétés (a), (b), (c) des résolutions de l'identité et des propriétés des projections orthogonales que pour tout x dans $\mathscr{H}$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\lambda \mapsto \langle P_\lambda(x), x\rangle$$

est une application nulle au voisinage de $-\infty$, égale à $\|x\|^2$ au voisinage de $+\infty$, continue à droite, et croissante (car pour tout $x \in \mathscr{H}$, si $\lambda \leq \mu$, alors

$$\langle P_\lambda(x), x\rangle = \|P_\lambda(x)\|^2 = \|P_\lambda \circ P_\mu(x)\|^2 \leq \|P_\mu(x)\|^2 = \langle P_\mu(x), x\rangle$$

puisque P_λ est de norme au plus 1).

Le résultat suivant est montré par exemple dans [Coh, page 23].

Théorème 1.52 *Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, croissante, continue à droite, nulle sur $]-\infty, m[$ et constante sur $]M, +\infty[$, alors il existe une unique mesure positive borélienne finie μ sur $\mathbb{R}$, à support contenu dans $[m, M]$, telle que $\mu(]-\infty, \lambda]) = F(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.* □

Une telle mesure est appelée une *mesure de Stieltjes*,[13] et notée dF. Si $t \geq 0$ et si $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une autre telle fonction, alors $F + tG$ est aussi bornée, croissante, continue à droite, nulle sur $]-\infty, m[$ et constante sur $]M, +\infty[$, et, par unicité, $d(F+tG) = dF + t dG$. De plus, la masse totale de la mesure de Stieltjes dF est

$$\|dF\| = \lim_{\lambda\to+\infty} F(\lambda) = \max F\ .$$

Pour tout $x \in \mathscr{H}$, nous noterons $d\langle P_\lambda(x), x\rangle$ la mesure de Stieltjes de l'application $\lambda \mapsto \langle P_\lambda(x), x\rangle$, qui vérifie les hypothèses du théorème ci-dessus.

Proposition 1.53 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ une résolution de l'identité, et $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Il existe un unique opérateur continu $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que, pour tout $x \in \mathscr{H}$,*

$$\langle u(x), x\rangle = \int_{\lambda\in\mathbb{R}} f(\lambda)\ d\langle P_\lambda(x), x\rangle\ . \tag{12}$$

Cet opérateur continu est auto-adjoint si f est à valeurs réelles, et positif si f est à valeurs positives.

---

13. 
Stieltjes
(1856-1894)

Cet opérateur continu sera noté

$$u = \int_{\lambda \in \mathbb{R}} f(\lambda)\, dP_\lambda\ . \tag{13}$$

Cette notation est purement formelle, c'est une aide mnémotechnique pour se souvenir de la formule (12).

Démonstration. L'unicité de u découle de l'identité de polarisation (4), puisque le produit scalaire est non dégénéré.

Montrons l'existence de u. Pour tout $x \in \mathscr{H}$, notons $q(x) = \int_{\lambda\in\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\langle P_\lambda(x), x\rangle$. Par les propriétés des mesures de Stieltjes, la mesure positive $d\langle P_\lambda(x), x\rangle$ est finie, car sa masse totale est égale à $\|x\|^2$, et son support est compact, contenu dans $[m, M]$ si $P_\lambda = 0$ pour $\lambda < m$ et $P_\lambda = \mathrm{id}$ pour $\lambda > M$. Donc $q(x)$ est bien défini, et si $C = \max_{\lambda\in[m,\,M]}\ |f(\lambda)|$ (qui est fini), alors pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous avons $|q(x)| \le C\|x\|^2$. Par les propriétés des mesures de Stieltjes, on montre aisément que l'application $a : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ définie par

$$a(x, y) = \frac{1}{2}\big(q(x + y) - q(x) - q(y)\big) + \frac{i}{2}\big(q(x + iy) - q(x) - q(y)\big)$$

est sesquilinéaire, hermitienne si f est réelle et positive si f est positive. Par exemple, la linéarité à gauche découle du fait que pour tous les $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x, x', y \in \mathscr{H}$,

$$\begin{aligned}&\langle P_\lambda(x + x' + y), x + x' + y\rangle + \langle P_\lambda(x), x\rangle + \langle P_\lambda(x'), x'\rangle + \langle P_\lambda(y), y\rangle\\ &\qquad = \langle P_\lambda(x + y), x + y\rangle + \langle P_\lambda(x' + y), x' + y\rangle + \langle P_\lambda(x + x'), x + x'\rangle\ ,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}&d\langle P_\lambda(x + x' + y), x + x' + y\rangle - d\langle P_\lambda(x + x'), x + x'\rangle - d\langle P_\lambda(y), y\rangle\\ &\qquad = \big(d\langle P_\lambda(x + y), x + y\rangle - d\langle P_\lambda(x), x\rangle - d\langle P_\lambda(y), y\rangle\big)\\ &\qquad\qquad + \big(d\langle P_\lambda(x' + y), x' + y\rangle - d\langle P_\lambda(x'), x'\rangle - d\langle P_\lambda(y), y\rangle\big)\ .\end{aligned}$$

Pour tous les x et y dans $\mathscr{H}$ de norme 1, nous avons $|a(x, y)| \le 6C$, d'où a est continue.

Le résultat découle alors du corollaire 1.14 au théorème de dualité de Riesz-Fréchet, qui montre l'existence d'un (unique) $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que $\langle u(x), y\rangle = a(x, y)$ pour tous les $x, y \in \mathscr{H}$. □

L'un des buts de la partie suivante est de montrer que tout opérateur (linéaire continu) auto-adjoint sur un espace de Hilbert complexe peut s'écrire comme une "intégrale" donnée par la formule (13) avec $f : \lambda \mapsto \lambda$.

Résolutions spectrales et calcul fonctionnel borné.

Théorème 1.54 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe non réduit à $\{0\}$ et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur auto-adjoint de $\mathscr{H}$.*

$\boxed{A}$ **(Résolution spectrale)** *Il existe une et une seule résolution de l'identité $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, appelée la* résolution spectrale *de u, telle que, pour tout $f \in \mathscr{C}\big(\mathrm{Sp}(u)\big)$,*

$$f(u) = \int_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} f(\lambda)\, dP_\lambda\ . \tag{14}$$

$\boxed{B}$ **(Calcul fonctionnel borné)** *Il existe un et un seul morphisme d'algèbres involutives ψ de $\mathscr{L}^\infty\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que $\psi(\mathrm{id}) = u$, vérifiant la propriété de continuité ($\#$) : si $g \in \mathscr{L}^\infty\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$ est limite simple d'une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{L}^\infty\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$ uniformément bornée, alors $\psi(g_n)(x)$ converge vers $\psi(g)(x)$ dans $\mathscr{H}$, pour tout $x \in \mathscr{H}$.*

De plus, pour tout $g \in \mathscr{L}^\infty\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$,

(i) la restriction de ψ à $\mathscr{C}\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$ est φ ;

(ii) la norme de ψ est au plus 1 ;

(iii) si g est à valeurs réelles, alors l'opérateur continu $\psi(g)$ est auto-adjoint ; si g est à valeurs positives ou nulles, alors l'opérateur continu $\psi(g)$ est positif ;

(iv) $\psi(g)$ commute avec tout opérateur continu commutant avec u ;

(v) si λ est une valeur propre de u, alors $g(\lambda)$ est une valeur propre de $\psi(g)$ et l'espace propre $\operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})$ de u associé à λ est contenu dans l'espace propre $\operatorname{Ker}(\psi(g) - g(\lambda)\,\mathrm{id})$ de $\psi(g)$ associé à $g(\lambda)$.

Nous utiliserons dans la suite la notation $g(u)$ au lieu de $\psi(g)$, pour tout élément $g \in \mathscr{L}^\infty\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$. L'application $g \mapsto g(u)$ de $\mathscr{L}^\infty\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ vérifie donc, pour tous les $g, g' \in \mathscr{L}^\infty\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

- $(g + \lambda g')(u) = g(u) + \lambda g'(u)$,
- $g(u)^* = \overline{g}\,(u)$,
- $(gg')(u) = g(u) \circ g'(u)$ et $\mathrm{id}(u) = u$,
- $\|g(u)\| \leq \|g\|_\infty$,

Si g est continue, alors la notation $g(u)$ coïncide par (i) avec celle introduite après l'énoncé du théorème 1.45.

Démonstration. L'assertion (i) est immédiate, par la propriété d'unicité du calcul fonctionnel continu φ, car $\psi_{|\mathscr{C}(\operatorname{Sp}(u))} : \mathscr{C}\big(\operatorname{Sp}(u)\big) \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est un morphisme d'algèbres involutives envoyant id sur u.

Montrons l'unicité de ψ. Puisque toute fonction mesurable bornée de $\operatorname{Sp}(u)$ dans $\mathbb{R}$ est limite simple de fonctions continues uniformément bornées de $\operatorname{Sp}(u)$ dans $\mathbb{R}$ (voir par exemple [Coh]), l'unicité résulte de l'assertion (i), et de la propriété de continuité ($\#$).

Montrons l'existence de ψ. Par le calcul fonctionnel continu, pour tous les x et y dans $\mathscr{H}$, l'application de $\mathscr{C}\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f \mapsto \langle f(u)x, y\rangle$ (en notant pour alléger les notations $f(u)x = f(u)(x)$) est une forme linéaire continue, de norme au plus $\|x\|\|y\|$ (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et puisque $\|f(u)\| = \|f\|_\infty$). Donc par le théorème de représentation de Riesz 1.6, il existe une unique mesure borélienne complexe $\mu_{x,y}$ sur l'espace compact $\operatorname{Sp}(u)$ telle que, pour tout $f \in \mathscr{C}(\operatorname{Sp}(u))$,

$$\int_{\operatorname{Sp}(u)} f\, d\mu_{x,y} = \langle f(u)x, y\rangle\ .$$

Nous allons montrer les propriétés suivantes :

(1) $\|\mu_{x,y}\| \leq \|x\|\|y\|$;

(2) $\mu_{x+\lambda x',y} = \mu_{x,y} + \lambda\, \mu_{x',y}$;

(3) $\mu_{y,x} = \overline{\mu_{x,y}}$;

(4) pour tout $h \in \mathscr{C}(\operatorname{Sp}(u))$, nous avons $h\, d\mu_{x,y} = d\mu_{h(u)x,y}$.

Les trois premières propriétés signifient que l'application $(x, y) \mapsto \mu_{x,y}$ est une application sesquilinéaire hermitienne continue de norme au plus 1 de $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ dans l'espace de Banach complexe $\mathscr{M}_{\mathbb{C}}\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$ des mesures boréliennes complexes sur $\operatorname{Sp}(u)$.

La première assertion découle de la définition de la norme d'une mesure complexe sur $\operatorname{Sp}(u)$, comme norme duale de la forme linéaire continue sur $\mathscr{C}\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$ qu'elle définit (voir le théorème 1.6). La seconde est immédiate par unicité. Si f est à valeurs réelles, alors $f(u)$ est auto-adjoint, donc pour tous les x et y dans $\mathscr{H}$, nous avons $\langle f(u)x, y\rangle = \langle x, f(u)y\rangle = \overline{\langle f(u)y, x\rangle}$; deux mesures complexes qui donnent les mêmes valeurs aux fonctions continues à valeurs réelles coïncident ; la troisième assertion en découle. Enfin, la dernière assertion vient du fait que $(fh)(u) = f(u) \circ h(u)$ pour tous les $f, h \in \mathscr{C}\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$.

Pour toute application mesurable bornée $g : \operatorname{Sp}(u) \to \mathbb{C}$, l'application de $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $(x, y) \mapsto \int_{\operatorname{Sp}(u)} g \; d\mu_{x,y}$ est une forme sesquilinéaire par les assertions (2) et (3), qui entraînent que $\mu_{x,\,y+\lambda y'} = \mu_{x,\,y} + \overline{\lambda}\,\mu_{x,\,y'}$. Cette forme sesquilinéaire est continue en 0 par l'assertion (1) et puisque g est bornée, donc est continue. Donc par le corollaire 1.14 du théorème de Riesz-Fréchet, il existe un unique opérateur continu $\psi(g) \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que, pour tous les x et y dans $\mathscr{H}$,

$$\langle \psi(g)x, y\rangle = \int_{\operatorname{Sp}(u)} g \; d\mu_{x,\,y} \;.$$

Notons que $\psi(g) = g(u)$ si g est continue, et en particulier $\psi(\mathrm{id}) = u$. Par unicité, l'application $\psi : g \mapsto \psi(g)$ de $\mathscr{L}^\infty\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ est linéaire. Nous avons, pour tous les x et y dans $\mathscr{H}$,

$$\langle \psi(\overline{g})x, y\rangle = \int_{\operatorname{Sp}(u)} \overline{g} \; d\mu_{x,\,y} = \overline{\int_{\operatorname{Sp}(u)} g \; d\mu_{y,\,x}} = \overline{\langle \psi(g)y, x\rangle} = \langle \psi(g)^* x, y\rangle \;,$$

donc $\psi(\overline{g}) = \psi(g)^*$. Soient f et g dans $\mathscr{L}^\infty\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$, montrons que $\psi(fg) = \psi(f) \circ \psi(g)$. Pour tous les x et y dans $\mathscr{H}$, pour tout $h \in \mathscr{C}(\operatorname{Sp}(u))$, nous avons par l'assertion (4),

$$\begin{aligned}\int_{\operatorname{Sp}(u)} fh \; d\mu_{x,\,y} &= \int_{\operatorname{Sp}(u)} f \; d\mu_{h(u)x,\,y} = \langle \psi(f)\big(h(u)x\big), y\rangle = \langle h(u)x, \psi(f)^* y\rangle \\ &= \int_{\operatorname{Sp}(u)} h \; d\mu_{x,\,\psi(f)^* y} \;.\end{aligned}$$

Les mesures complexes $f \; d\mu_{x,\,y}$ et $d\mu_{x,\,\psi(f)^* y}$ sont donc égales, donc

$$\langle \psi(fg)x, y\rangle = \int_{\operatorname{Sp}(u)} fg \; d\mu_{x,\,y} = \int_{\operatorname{Sp}(u)} g \; d\mu_{x,\,\psi(f)^* y} = \langle \psi(g)x, \psi(f)^* y\rangle = \langle \psi(f)\psi(g)x, y\rangle \;,$$

ce qui montre le résultat cherché.

Nous avons donc montré que ψ est un morphisme d'algèbres involutives entre l'algèbre normée involutive $\mathscr{L}^\infty\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$ et l'algèbre stellaire $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. En particulier, par la proposition 1.44 (2), l'application ψ est de norme au plus 1, ce qui montre (ii).

Montrons que ψ vérifie la propriété de continuité (#). Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite uniformément bornée dans $\mathscr{L}^\infty\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$ qui converge simplement vers $g \in \mathscr{L}^\infty\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$. Pour tous les x et y dans $\mathscr{H}$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que $\langle \psi(g_n)x, y\rangle = \int_{\operatorname{Sp}(u)} g_n \; d\mu_{x,\,y}$ converge vers $\langle \psi(g)x, y\rangle = \int_{\operatorname{Sp}(u)} g \; d\mu_{x,\,y}$. Donc $(\psi(g_n)x)_{n\in\mathbb{N}}$

converge faiblement vers $\psi(g)x$ dans $\mathscr{H}$. De plus $(\overline{g_n}g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite uniformément bornée qui converge simplement vers $\overline{g}g$, et puisque ψ est un morphisme d'algèbres involutives, nous avons

$$\|\psi(g_n)x\|^2 = \langle\psi(g_n)^*\psi(g_n)x, x\rangle = \langle\psi(\overline{g_n}g_n)x, x\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle\psi(\overline{g}g)x, x\rangle = \|\psi(g)x\|^2 \ .$$

Par le critère de convergence forte 1.22, la suite $(\psi(g_n)x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $\psi(g)x$ dans $\mathscr{H}$.

Montrons l'unicité d'une résolution spectrale de u. Si $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est une résolution de l'identité vérifiant l'équation (14) pour tout $f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u))$, alors pour tout $x \in \mathscr{H}$, la mesure de Stieltjes $d\langle P_\lambda(x), x\rangle$ est uniquement déterminée (par l'unicité dans le théorème de représentation de Riesz 1.6). Or une mesure de Stieltjes μ détermine uniquement la fonction F qui la définit, puisque $F(\lambda) = \mu(]-\infty, \lambda])$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $\langle P_\lambda(x), x\rangle$ est uniquement déterminé, et par l'identité de polarisation (4), les produits scalaires

$$\begin{aligned}\langle P_\lambda(x), y\rangle = &\frac{1}{2}\big(\langle P_\lambda(x+y), x+y\rangle - \langle P_\lambda(x), x\rangle - \langle P_\lambda(y), y\rangle\big)\\ &+ \frac{i}{2}\big(\langle P_\lambda(x+iy), x+iy\rangle - \langle P_\lambda(x), x\rangle - \langle P_\lambda(y), y\rangle\big)\end{aligned}$$

sont uniquement déterminés, donc la résolution de l'identité $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est uniquement déterminée, puisque le produit scalaire est non dégénéré.

Montrons l'existence d'une résolution spectrale de u. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, notons χ_λ la fonction caractéristique de l'intervalle $]-\infty, \lambda]$ (qui est mesurable bornée), et posons $P_\lambda = \psi(\chi_\lambda)$. Remarquons que

- $\chi_\lambda\chi_\mu = \chi_{\inf\{\lambda,\,\mu\}}$,
- χ_λ vaut 0 (respectivement 1) sur le compact $\mathrm{Sp}(u)$ de $\mathbb{R}$ si λ est assez petit (respectivement assez grand),
- χ_μ converge simplement vers χ_λ quand μ tend vers λ par valeurs supérieures,
- les χ_λ sont réelles et uniformément bornées par 1.

Puisque ψ est un morphisme d'algèbres de $\mathscr{L}^\infty\big(\mathrm{Sp}(u)\big)$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ vérifiant la propriété de continuité (#), la famille $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est donc une résolution de l'identité. Puisque le support de $\mu_{x,\,x}$ est contenu dans $\mathrm{Sp}(u)$, nous avons

$$\langle P_\lambda(x), x\rangle = \int_{\mathrm{Sp}(u)} \chi_\lambda \; d\mu_{x,\,x} = \mu_{x,\,x}(]-\infty, \lambda])$$

pour tout x dans X. Par unicité, la mesure de Stieltjes $d\langle P_\lambda(x), x\rangle$ est donc égale à $\mu_{x,x}$. Ceci montre en particulier que la mesure $\mu_{x,x}$ est positive. La formule (14) dans la partie A du théorème 1.54 découle alors de la définition des mesures $\mu_{x,\,y}$.

Montrons l'assertion (iii). Si g est à valeurs réelles, puisque ψ est un morphisme d'algèbres involutives, nous avons $\psi(g)^* = \psi(\overline{g}) = \psi(g)$, donc $\psi(g)$ est auto-adjoint. Si g est à valeurs positives, puisque $\mu_{x,\,x}$ est une mesure positive, nous avons $\langle\psi(g)x, x\rangle = \int_{\mathrm{Sp}(u)} g \; d\mu_{x,\,x} \geq 0$ pour tout $x \in \mathscr{H}$, donc $\psi(g)$ est positive.

Montrons l'assertion (iv). Si $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ commute avec u, alors v commute avec $P(u)$ pour tout polynôme u, donc avec $f(u)$ pour tout $f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u))$ par densité et par continuité du calcul fonctionnel continu φ. Par la propriété de continuité (#) (puisque toute fonction mesurable bornée est limite simple de fonctions continues uniformément bornées) et par la continuité de v, pour tous les $g \in \mathscr{L}^\infty(\mathrm{Sp}(u))$ et $x \in \mathscr{H}$, nous avons donc $\psi(g)(v(x)) = v(\psi(g)x)$, donc v commute avec $\psi(g)$.

Montrons la dernière assertion (v). Si $x \in \mathscr{H}$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ, alors, par les propriétés du calcul fonctionnel continu, $\psi(f)(x) = f(u)(x) = f(\lambda)x$ pour tout $f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u))$. Comme toute fonction mesurable bornée est limite simple de fonctions continues uniformément bornées, la propriété de continuité ($\#$) implique que $\psi(g)(x) = g(\lambda)x$ pour tout $g \in \mathscr{L}^\infty(\mathrm{Sp}(u))$. □

L'exercice suivant est à résoudre après l'exercice récapitulatif E.24.

Exercice E.20 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$.*

(1) Montrer que si u est inversible, alors il existe un unique couple (v, w) d'éléments de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ tels que v soit unitaire, w positif et $u = v \circ w$.

(2) Montrer que si u est auto-adjoint, alors il existe un couple (v, w) d'éléments de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ tels que v soit unitaire, w soit positif, $u = v \circ w$ et u, v et w commutent deux à deux.

Ce couple (v, w) est appelé la *décomposition polaire* de u, si u est inversible, et une *décomposition polaire* de u, si u est auto-adjoint. Remarquons qu'il n'y a pas unicité en général dans l'assertion (2), car l'opérateur nul 0 est auto-adjoint, et s'écrit $v \circ 0$ pour tout opérateur unitaire v.

Lorsque $\mathscr{H} = \mathbb{C}$, tout opérateur linéaire inversible u est la multiplication par un nombre complexe non nul z, et v et w sont les multiplications par respectivement $\frac{z}{|z|} = e^{i \arg z}$ et $|z|$. Si $\mathscr{H} = \mathbb{C}^n$, le résultat (1) est déjà connu : pour tout élément M de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique couple $(U, P) \in \mathrm{U}(n) \times \mathrm{Herm}_+(n)$ tel que $M = UP$, où $\mathrm{U}(n)$ est le groupe unitaire de $\mathbb{C}^n$ (des matrices $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $U^{-1} = U^*$) et $\mathrm{Herm}_+(n)$ est le sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices hermitiennes définies positives (les matrices P telles que $P = P^*$ et à valeurs propres strictement positives).

Mesures spectrales.

Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur auto-adjoint de $\mathscr{H}$. Pour tout $x \in \mathscr{H}$, il existe une et une seule mesure borélienne positive finie μ_x sur $\mathbb{R}$ de support contenu dans $\mathrm{Sp}(u)$ telle que, pour toute application mesurable bornée $f : \mathrm{Sp}(u) \to \mathbb{C}$, nous ayons

$$\langle f(u)x, x\rangle = \int_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} f(\lambda)\, d\mu_x(\lambda)\ . \tag{15}$$

Elle est appelée la *mesure spectrale* de x pour l'opérateur auto-adjoint u. L'unicité de μ_x découle de l'unicité dans le théorème de représentation de Riesz 1.6. Pour l'existence, il suffit de remarquer que la mesure notée $\mu_{x,x}$ dans la démonstration du théorème 1.54 convient. Si $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est la résolution spectrale de u, alors comme vu dans la démonstration ci-dessus, μ_x est la mesure de Stieltjes de l'application $\lambda \mapsto \langle P_\lambda(x), x\rangle$: avec les notations déjà vues,

$$d\mu_x(\lambda) = d\langle P_\lambda(x), x\rangle\ .$$

Un vecteur x de $\mathscr{H}$ est dit *cyclique* (ou *totalisateur*) pour un opérateur linéaire continu $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ si le plus petit sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}$ contenant les $v^n(x)$ pour

$n \in \mathbb{N}$ est égal à $\mathscr{H}$. Un opérateur linéaire continu $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est dit (topologiquement) *irréductible* si $\mathscr{H}$ n'admet pas de sous-espace vectoriel fermé différent de $\{0\}$ et $\mathscr{H}$ invariant par v. Si v est irréductible, alors v admet un vecteur cyclique : tout vecteur non nul x de $\mathscr{H}$ est un vecteur cyclique pour v, car le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant les $v^n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ est non nul et invariant par v, par linéarité et continuité de v. Mais la réciproque n'est pas vraie en général.

Exercice E.21 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert séparable et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur auto-adjoint. Montrer que $\mathscr{H}$ est somme directe orthogonale finie ou somme hilbertienne d'une suite finie ou dénombrable $(\mathscr{H}_n)_{0 \leq n < N}$ (où $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) de sous-espaces vectoriels fermés de $\mathscr{H}$, invariants par u et admettant un vecteur cyclique pour la restriction de u.*

Les propriétés fondamentales des mesures spectrales (outre leur définition) sont résumées dans le résultat suivant.

Proposition 1.55 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur auto-adjoint de $\mathscr{H}$, $x \in \mathscr{H}$ et μ_x la mesure spectrale de x pour u.*

(a) La masse totale de la mesure spectrale μ_x est $\|x\|^2$.

(b) Pour toute application mesurable bornée $g \in \mathscr{L}^\infty(\mathrm{Sp}(u))$, la mesure spectrale $\mu_{g(u)x}$ de $g(u)x$ pour u est absolument continue par rapport à la mesure spectrale de x et μ_x-presque partout

$$\frac{d\mu_{g(u)x}}{d\mu_x} = |g|^2 \ .$$

(c) Si x est un vecteur cyclique pour u, alors le support de la mesure spectrale μ_x est égal au spectre de u.

(d) Si $\mathscr{H}$ est séparable, alors le spectre de u est égal à l'adhérence de la réunion des supports des mesures spectrales des éléments de $\mathscr{H}$.

Démonstration. (a) Il suffit de prendre la fonction constante égale à 1 dans l'équation (15) définissant la mesure spectrale.

(b) Le calcul fonctionnel borné étant un morphisme d'algèbres involutives, nous avons, pour tout $h \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u))$,

$$\int_{\mathrm{Sp}(u)} h \ d\mu_{g(u)x} = \langle h(u)g(u)x, g(u)x\rangle = \langle g(u)^* h(u)g(u)x, x\rangle = \langle(\overline{g}hg)(u)x, x\rangle$$
$$= \int_{\mathrm{Sp}(u)} \overline{g}hg \ d\mu_x = \int_{\mathrm{Sp}(u)} h \ |g|^2 \, d\mu_x \ ,$$

ce qui montre le résultat, par l'unicité dans le théorème de représentation de Riesz 1.6.

(c) Voir par exemple [Lev].

(d) Ceci découle de (c) et des exercices E.21 et E.18 (3). □

1.8 Exercices récapitulatifs

Exercice E.22 Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe, et v et w deux éléments de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ tels que $w - v$ soit un opérateur compact. Montrer que

$$\mathrm{Sp}(w) - \mathrm{Vp}(w) \subset \mathrm{Sp}(v) \; .$$

Exercice E.23 Montrer que la composition de deux opérateurs à noyau de type Hilbert-Schmidt est encore un opérateur à noyau de type Hilbert-Schmidt : avec les notations de l'exemple (3) de la partie 1.4, montrer que si $(X, \mathscr{A}, \mu)$, $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ et $(Z, \mathscr{C}, \omega)$ sont trois espaces mesurés, et si $N \in \mathbb{L}^2\big((X, \mathscr{A}, \mu) \times (Y, \mathscr{B}, \nu)\big)$ et $N' \in \mathbb{L}^2\big((Y, \mathscr{B}, \nu) \times (Z, \mathscr{C}, \omega)\big)$, alors $K_N \circ K_{N'} = K_{N''}$ où

$$N''(x, z) = \int_{y \in Y} N(x, y)\, N'(y, z)\; d\nu(y) \; .$$

Exercice E.24 Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe.

(1) Pour tout opérateur continu positif $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ et pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, montrer qu'il existe un et un seul opérateur continu positif $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que $v^n = u$, que nous noterons $v = \sqrt[n]{u}$ (et $v = \sqrt{u}$ si $n = 2$). Calculer le spectre de $\sqrt[n]{u}$ en fonction du spectre de u. Montrer que $\sqrt[n]{u}$ est inversible si u l'est, et calculer l'inverse de $\sqrt[n]{u}$ en fonction de l'inverse de u.

(2) Pour tout $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, montrer que $\sqrt{u^* u}$ est l'unique opérateur continu positif $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que $\|v(x)\| = \|u(x)\|$ pour tout $x \in \mathscr{H}$.

1.9 Correction des exercices

Correction de l'exercice E.1. Montrons que $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert.

D'après ce qui précède l'énoncé de l'exercice, $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel produit $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{H}_n$, et l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}} : \mathscr{H}\times\mathscr{H}\to\mathbb{C}$ est bien définie (par une somme convergente). Pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'application $p_n : \mathscr{H}\to\mathscr{H}_n$ définie par $p_n\big((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\big) = x_n$ est une application linéaire, et pour tous les x et y dans $\mathscr{H}$, nous avons $\langle x,y\rangle_{\mathscr{H}} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle p_n(x),p_n(y)\rangle_{\mathscr{H}_n}$. Puisque $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}_n}$ est une forme sesquilinéaire hermitienne, par passage à la limite des égalités, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}}$ est aussi une forme sesquilinéaire hermitienne. Puisque qu'une série convergente de termes positifs ou nuls est positive ou nulle, et est nulle si et seulement si chacun de ses termes est nul, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}}$ est définie positive. Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}}$ est un produit scalaire sur $\mathscr{H}$, dont la norme associée est

$$\|x\| = \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}}\|x_k\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

si $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. En particulier, $\|p_n(x)\| = \|x_n\| \le \|x\|$, donc p_n est 1-lipschitzienne, donc continue.

Montrons que $\mathscr{H}$ est complet. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{H}$, montrons qu'elle converge. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ fixé, puisque p_n est 1-lipschitzienne, la suite $\big(p_n(X_i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{H}_n$ est de Cauchy dans $\mathscr{H}_n$, donc converge dans $\mathscr{H}_n$ qui est complet, vers un élément $y_n\in\mathscr{H}_n$. Posons $Y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrons que la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers Y. Pour tout $\epsilon>0$, soit $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tous les $i,j\ge N$, nous ayons $\|X_i-X_j\|_{\mathscr{H}}\le\epsilon$, c'est-à-dire

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\|p_n(X_i)-p_n(X_j)\|^2_{\mathscr{H}_n}\le\epsilon^2\ . \tag{16}$$

Pour tout i fixé, appliquons le théorème de convergence dominé de Lebesgue à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ et à la suite de fonctions $(f_j)_{j\ge N}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_j : n\mapsto\|p_n(X_i)-p_n(X_j)\|^2_{\mathscr{H}_n}$, qui converge simplement vers la fonction $n\mapsto\|p_n(X_i)-y_n\|^2_{\mathscr{H}_n}$ quand j tend vers $+\infty$. Nous avons donc, par passage à la limite dans l'équation (16),

$$\|X_i-Y\|^2=\sum_{n\in\mathbb{N}}\|p_n(X_i)-y_n\|^2_{\mathscr{H}_n}\le\epsilon^2\ .$$

Ceci montre que d'une part $\|Y\|_{\mathscr{H}}\le\epsilon+\|X_N\|_{\mathscr{H}}$ en prenant $i=N$ dans la formule centrée ci-dessus et par l'inégalité triangulaire, donc que Y appartient bien à $\mathscr{H}$; et d'autre part, que $\|X_i-Y\|_{\mathscr{H}}$ tend vers 0 quand i tend vers $+\infty$, donc que la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tend vers Y dans $\mathscr{H}$, ce qu'il fallait démontrer.

Montrons maintenant la seconde assertion. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $\mathscr{D}_n$ une partie dénombrable dense dans $\mathscr{H}_n$, que l'on peut supposer contenir 0. Notons $\mathscr{D}$ l'ensemble des éléments de $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{H}_n$, dont la n-ème composante appartient à $\mathscr{D}_n$ pour tout n, et n'ayant qu'un nombre fini de composantes non nulles. Alors $\mathscr{D}$ est dénombrable (comme union dénombrable de produits finis d'ensembles dénombrables), et contenu dans $\mathscr{H}$. Montrons que $\mathscr{D}$ est dense dans $\mathscr{H}$.

En effet, soient $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{H}$ et $\epsilon>0$. Montrons qu'il existe y dans $\mathscr{D}$ tel que $\|x-y\|\le\epsilon$, ce qui conclut. Soit $N\in\mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N}^{+\infty}\|x_n\|^2\le\frac{\epsilon^2}{2}$ ce qui est possible par sommabilité. Pour tout $n\in\{0,\dots,N-1\}$, soit $y_n\in\mathscr{D}_n$ tel que $\|x_n-y_n\|\le\frac{\epsilon}{\sqrt{2N}}$, ce qui est possible par densité de $\mathscr{D}_n$ dans $\mathscr{H}_n$. Notons y l'élément de $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{H}_n$ dont les N premières composantes sont les y_n pour $n=0,\dots,N-1$, et dont les composantes suivantes sont nulles, qui appartient bien à $\mathscr{D}$. Alors

$$\|x-y\| = \Big(\sum_{n=0}^{N-1}\|x_n-y_n\|^2+\sum_{n=N}^{+\infty}\|x_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(N\Big(\frac{\epsilon}{\sqrt{2N}}\Big)^2+\frac{\epsilon^2}{2}\Big)^{\frac{1}{2}} = \epsilon\;.$$

Le résultat en découle.

Correction de l'exercice E.2. Pour tout x dans E, pour tout y dans $F=E^\perp$, nous avons $\langle x,y\rangle=0$, donc $E\subset F^\perp$.

Si $F^\perp=E$, alors E est fermé, car l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel est toujours fermé. Réciproquement, si E est fermé, alors par le corollaire 1.12 (1), F est un supplémentaire de E, donc pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous pouvons écrire $x=x'+x''$ avec $x'\in E$ et $x''\in F$. Si $x\in F^\perp$, alors $0=\langle x,x''\rangle=\|x''\|^2_{\mathscr{H}}$. Donc $x=x'\in E$, et $F^\perp\subset E$. Comme nous avions montré l'autre inclusion, il en découle que $F^\perp=E$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice E.3. Il est immédiat que E_n est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$. Il est fermé comme intersection de fermés, car en notant $p_n:\mathscr{H}\to\mathscr{H}_n$ l'application n-ème composante (voir la correction de l'exercice E.1),

$$E_n=\{x\in\mathscr{H}\ :\ \forall\,k\in\mathbb{N}-\{n\},\ p_k(x)=0\}=\bigcap_{k\in\mathbb{N}-\{n\}}p_k^{-1}(\{0\})$$

et p_k est continue (car 1-lipschitzienne) pour tout $k\in\mathbb{N}$. De plus la restriction $p_{n|E_n}:E_n\to\mathscr{H}_n$ est un isomorphisme linéaire (car clairement injectif et surjectif), et isométrique (par définition de la norme de $\mathscr{H}$).

Il est immédiat par définition du produit scalaire de $\mathscr{H}$ que E_n et E_m sont orthogonaux si $n\neq m$. Pour tout $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathscr{H}$, soit $N\in\mathbb{N}$ tel que $\big(\sum_{k=N}^{+\infty}\|x_k\|^2\big)^{\frac{1}{2}}<\epsilon$, et soit y l'élément de $\mathscr{H}$ dont les N premières composantes sont $x_0,\dots,x_{N-1}$ et dont les autres composantes sont nulles. Alors y est un élément de la somme directe des E_n (car somme finie d'éléments des E_n). De plus $\|x-y\|=\big(\sum_{k=N}^{+\infty}\|x_k\|^2\big)^{\frac{1}{2}}<\epsilon$. Donc la somme directe des E_n est dense dans $\mathscr{H}$. Ceci montre que $\mathscr{H}$ est la somme hilbertienne de $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (Mais $\mathscr{H}$ n'est pas égale à la somme directe des E_n, cette somme directe étant l'ensemble des éléments de $\mathscr{H}$ dont toutes les composantes sauf un nombre fini sont nulles).

Correction de l'exercice E.4. Rappelons que si un isomorphisme linéaire v d'un espace vectoriel V dans lui-même préserve une décomposition en somme directe $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_n$, alors son inverse v^{-1} aussi : pour tout $x\in V_i$, il existe $y_1\in V_1,\dots,y_n\in V_n$ tels que $v^{-1}(x)=y_1+\cdots+y_n$. Mais alors $v(y_1)\in V_1,\dots,v(y_n)\in V_n$ et $x=v(y_1)+\cdots+v(y_n)$. Par la propriété de somme directe, nous avons donc $v(y_j)=0$ si $j\neq i$, donc $y_j=0$ car v est injective, donc $v^{-1}(x)=y_i$ appartient bien à E_i.

Le résultat découle alors tout simplement du fait que $u-\lambda\,\mathrm{id}_E$ est inversible (respectivement injectif et d'image dense) si et seulement si $u_{|E_i}-\lambda\,\mathrm{id}_{E_i}$ est inversible (respectivement injectif et d'image dense) pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$.

Correction de l'exercice E.6. L'idée clef est d'utiliser les coordonnées hilbertiennes, ce qui est naturel vu l'énoncé, et d'appliquer moultes fois le théorème de Parseval 1.17.

a) *Unicité, existence et continuité de u.*

Pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous noterons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coordonnées hilbertiennes de x dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par linéarité et continuité, si un tel opérateur u existe, alors pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous avons $u(x) = u(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n x_n e_n$, ce qui montre l'unicité. Réciproquement, pour tout x dans $\mathscr{H}$, puisque C est compact, il existe $\Lambda > 0$ tel que $|\lambda_n| \leq \Lambda$ pour tout n, et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n x_n|^2$, majorée par $\Lambda^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2$, qui est égal à $\Lambda^2\|x\|^2$ par l'égalité de Parseval, converge. Par la partie réciproque du théorème de Parseval 1.17, la série $y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n x_n e_n$ converge donc dans $\mathscr{H}$, et nous posons $u(x) = y$. Il est immédiat que u est linéaire, et que $\|u\| \leq \Lambda$ (toujours par l'égalité de Parseval). Donc u est continue, ce qui montre l'existence. [Une autre manière de montrer l'existence est de définir u sur l'espace vectoriel engendré par les e_n par linéarité, sa norme étant au plus Λ sur cet espace vectoriel, puis d'étendre u à $\mathscr{H}$ tout entier par le théorème de prolongement A.1 (par uniforme continuité de u, complétude de $\mathscr{H}$ et densité de $\mathrm{Vect}\{e_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$).]

b) *Calcul des valeurs propres et espaces propres de u.*

Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u(e_n) = \lambda_n e_n$ et $e_n \neq 0$. Donc λ_n est une valeur propre de u. Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u. Il existe donc x appartenant à $\mathscr{H}$, non nul, tel que $u(x) = \lambda x$. Par conséquent, par unicité des coordonnées hilbertiennes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\lambda_n x_n = \lambda x_n$, égalité qui est équivalente à $x_n = 0$ ou $\lambda = \lambda_n$. Or puisque x est non nul, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \neq 0$. Donc $\lambda = \lambda_{n_0}$. Donc les valeurs propres sont exactement les λ_n pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{Vp}(u) = \{\lambda_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}\;.$$

Si λ est une valeur propre, son espace propre E_λ, qui est par ce qui précède l'ensemble des $x \in \mathscr{H}$ tels que $x_n = 0$ si $\lambda_n \neq \lambda$, est donc l'adhérence du sous-espace vectoriel somme directe des $\mathbb{C}e_n$ pour les $n \in \mathbb{N}$ tels que $\lambda_n = \lambda$ (attention, si une infinité de λ_n prennent la valeur λ, cet espace propre E_λ n'est pas la somme directe de ces droites, qui n'est pas fermée, mais est la somme hilbertienne de ces droites).

c) *Calcul du spectre de u.*

Comme le spectre $\mathrm{Sp}(u)$ est fermé, et contient $\mathrm{Vp}(u)$ qui est dense dans C, nous avons donc l'inclusion $C \subset \mathrm{Sp}(u)$. Pour montrer que cette inclusion est une égalité, soit $\lambda \in \mathbb{C} - C$. Comme C est compact, il existe $\epsilon > 0$ tel que le disque de centre λ et de rayon $\epsilon > 0$ soit contenu dans le complémentaire de C. En particulier, $|\lambda_n - \lambda| \geq \epsilon > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrons que $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est surjectif. Pour tout y dans $\mathscr{H}$, posons $x_i = \frac{y_i}{\lambda_i - \lambda}$ (le dénominateur ne s'annule pas). Alors la série $\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^2$, majorée par $\frac{1}{\epsilon^2}\sum_{i\in\mathbb{N}} |y_i|^2$, qui est égal à $\frac{\|y\|^2}{\epsilon^2}$ par l'égalité de Parseval, converge. Par la partie réciproque du théorème de Parseval 1.17, la série $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ converge donc dans $\mathscr{H}$. Par linéarité et continuité de u, nous avons

$$u(x) - \lambda x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_n - \lambda) x_n e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n e_n = y\;,$$

ce qui montre la surjectivité.

Montrons que $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est injectif. D'une part, c'est immédiat car $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$ implique que $\lambda \notin \mathrm{Vp}(u)$. D'autre part, pour tout x dans $\mathscr{H}$, par l'égalité de Parseval, nous avons $\|u(x) - \lambda x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(\lambda_n - \lambda)x_n|^2 \geq \epsilon^2\|x\|^2$, donc $u(x) - \lambda x$ ne s'annule que si x est nul, ce qui montre d'une autre manière l'injectivité.

Donc $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est bijectif, et tout $\lambda \notin C$ est une valeur régulière de u. Ceci montre que

$$\mathrm{Sp}(u) = C\ .$$

c) *Calcul du spectre résiduel de u.*

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ non valeur propre de u, montrons que l'image de $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est dense dans $\mathscr{H}$. Ceci montre que le spectre résiduel de u est vide.

Méthode 1. Pour tout y dans $\mathscr{H}$ et tout $\epsilon > 0$, soit N tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} |y_i|^2 \leq \epsilon^2$ (ce qui est possible par la convergence de la série $\sum |y_i|^2$ par l'égalité de Parseval). Posons $x_i = \frac{y_i}{\lambda_i - \lambda}$ pour $i = 0, \dots, N$ (les dénominateurs ne s'annulent pas) et $x = \sum_{i=0}^{N} x_i e_i$. Alors

$$u(x) - \lambda x = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i x_i e_i - \lambda x_i e_i = \sum_{i=0}^{N} y_i e_i\ .$$

Par l'égalité de Parseval, $\|(u(x) - \lambda x) - y\| = \big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |y_i|^2\big)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon$. Ceci montre que $\mathrm{Im}(u - \lambda\,\mathrm{id})$ est dense dans $\mathscr{H}$, donc que

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \emptyset\ .$$

Méthode 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $\lambda \neq \lambda_n$ et $u(e_n) = \lambda_n e_n$, nous avons $e_n = (u - \lambda\,\mathrm{id})\big(\frac{e_n}{\lambda_n - \lambda}\big)$. Donc e_n appartient à l'image I de $u - \lambda\,\mathrm{id}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette image I, étant un sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$, contient donc le sous-espace vectoriel V engendré par les e_n pour $n \in \mathbb{N}$. Puisque V est dense dans $\mathscr{H}$, par les propriétés des bases hilbertiennes, l'image I est dense aussi ($V \subset I$ implique $\mathscr{H} = \overline{V} \subset \overline{I} \subset \mathscr{H}$, donc $\overline{I} = \mathscr{H}$ par sandwich).

Correction de l'exercice E.7. Pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous noterons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coordonnées hilbertiennes de x dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'unicité de u se montre comme dans l'exercice E.6. La série à termes deux à deux orthogonaux $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i e_{i+1}$, dont la somme des carrés des normes des termes est $\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^2 = \|x\|^2$, converge par le théorème de Parseval 1.17. Donc $u(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i e_{i+1}$ est bien définie (par la réciproque du théorème de Parseval 1.17), et clairement linéaire, et est isométrique : $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout x dans $\mathscr{H}$. En particulier u est injective de norme 1, donc de rayon spectral au plus 1 (voir le théorème 1.25 (i)), et le spectre de u est contenu dans le disque unité fermé $D = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| \leq 1\}$ de $\mathbb{C}$.

Comme u est injective, 0 n'est pas valeur propre. Si $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $u(x) = \lambda x$, alors par unicité des coordonnées hilbertiennes, $\lambda x_0 = 0$ et $\lambda x_{i+1} = x_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Ceci implique par récurrence que $x_i = 0$ pour tout i, donc $x = 0$, et u n'a pas de valeur propre.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$. Montrons que $u - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas d'image dense dans $\mathscr{H}$. Ceci montrera que le spectre résiduel contient le disque unité ouvert. Comme le spectre résiduel est contenu dans le spectre, qui est fermé, ceci montrera l'autre inclusion $D \subset \mathrm{Sp}(u)$, et donc que

$$\mathrm{Sp}(u) = D\ .$$

Notons $\varphi : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ la forme linéaire $y \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda^i y_i$, qui est bien définie, car la suite des coordonnées hilbertiennes $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée et $|\lambda| < 1$, donc la série $\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda^i y_i$ converge. Il est immédiat de voir que φ est continue (les coordonnées hilbertiennes le sont et la série

$\sum_{i\in\mathbb{N}}|\lambda|^i$ converge). Son noyau est un hyperplan vectoriel fermé. Montrons que l'image de $u-\lambda\,\mathrm{id}$ est contenue dans ce noyau, qui n'est pas dense car fermé et de codimension 1, ce qui conclut. Soient $x,y\in\mathscr{H}$. Si $y=u(x)-\lambda x$, alors, par unicité des coordonnées hilbertiennes, nous avons $y_0=-\lambda x_0$ (équation E_{-1}) et $y_{i+1}=x_i-\lambda x_{i+1}$ (équation E_i) pour tout $i\in\mathbb{N}$. En multipliant par λ^{i+1} l'équation E_i pour tout $i\in\mathbb{N}\cup\{-1\}$ et en ajoutant les $n+1$ premières équations, nous obtenons $\sum_{i=0}^n\lambda^i y_i=-\lambda^{n+1}x_n$. Comme la suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée et $|\lambda|<1$, par passage à la limite, nous obtenons que y appartient au noyau de φ, ce qui montre le résultat.

[Deux autres méthodes sont possibles :

(1) Soit $|\lambda|<1$, supposons par l'absurde que $\mathrm{Im}(u-\lambda\,\mathrm{id})$ soit dense. Montrons que $v=u-\lambda\,\mathrm{id}$ est surjective. Pour tout $y\in\mathscr{H}$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{H}$ telle que $\lim_{n\to\infty}v(x_n)=y$. En particulier, la suite $(v(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Ceci implique que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, car, l'opérateur u étant isométrique,

$$\|v(x_{n+p})-v(x_n)\|=\|u(x_{n+p}-x_n)-\lambda(x_{n+p}-x_n)\|\geq(1-|\lambda|)\|x_{n+p}-x_n\|\;.$$

Donc par complétude, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x\in\mathscr{H}$, et par continuité de v, nous avons $v(x)=y$.

Mais on vérifie facilement, par un argument de série géométrique de raison >1, que e_0 n'appartient pas à l'image de $u-\lambda\,\mathrm{id}$, ce qui est une contradiction.

(2) Si $|\lambda|<1$, on peut exhiber un élément non nul dans l'orthogonal de $\mathrm{Im}(u-\lambda\,\mathrm{id})$, ce qui montre que $\mathrm{Im}(u-\lambda\,\mathrm{id})$ est non dense (voir le corollaire 1.12 (2)).]

Pour obtenir que $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u)$ est exactement le disque unité ouvert, il reste à montrer que si $|\lambda|=1$, alors $u-\lambda\,\mathrm{id}$ est d'image dense. Pour cela, par le corollaire 1.12 (2) (disant qu'un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert est dense si et seulement si son orthogonal est nul), il suffit de montrer que si $y\in\mathscr{H}$ est orthogonal à l'image de $u-\lambda\,\mathrm{id}$, alors $y=0$.

Soit donc $y\in\mathscr{H}$ tel que pour tout $i\in\mathbb{N}$, le vecteur y soit orthogonal à $u(e_i)-\lambda e_i=e_{i+1}-\lambda e_i$. En notant $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite des coordonnées hilbertiennes de y dans la base hilbertienne donnée, nous avons donc $0=\langle y,e_{i+1}-\lambda e_i\rangle=y_{i+1}-\overline{\lambda}\,y_i$. Donc $|y_{i+1}|=|y_i|$. Mais alors la convergence (assurée par le théorème de Parseval 1.17) de la série $\sum_{i\in\mathbb{N}}|y_i|^2$ implique que $y_i=0$ pour tout $i\in\mathbb{N}$, ce qui montre le résultat.

[Autre méthode pour montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u)$ est contenu dans le disque unité ouvert :

Puisque $\mathrm{Vp}(u)=\emptyset$, nous avons $\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u)$ si et seulement si $\mathrm{im}(u-\lambda\,\mathrm{id})^\perp\neq\{0\}$. Or, si $x\in\mathrm{im}(u-\lambda\,\mathrm{id})^\perp-\{0\}$, alors $\langle x,u(x)-\lambda x\rangle=0$, donc $\overline{\lambda}\,\|x\|^2=\langle x,u(x)\rangle$, d'où par le cas d'inégalité dans l'égalité de Cauchy-Schwarz (de nouveau puisque $\mathrm{Vp}(u)=\emptyset$)

$$|\lambda|\;\|x\|^2=|\langle x,u(x)\rangle|<\|x\|^2\|u\|=1\;,$$

et par conséquent $|\lambda|<1$.]

Correction de l'exercice E.12. Pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous noterons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coordonnées hilbertiennes de x dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Existence et norme de u.

Considérons la série à termes deux à deux orthogonaux $\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{x_i}{i+1}e_{i+1}$. La somme des carrés des normes de ses termes est, par le théorème de Parseval 1.17, égale à

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{|x_i|^2}{(i+1)^2}\leq\sum_{i\in\mathbb{N}}|x_i|^2=\|x\|^2<+\infty$$

Donc par la partie réciproque du théorème de Parseval 1.17, l'application $u : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ donnée par $x \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{x_i}{i+1} e_{i+1}$ est bien définie, et clairement linéaire. Elle est de norme 1 (donc est continue), car nous venons de montrer que $\|u(x)\| \leq \|x\|$ pour tout x dans $\mathscr{H}$, et $\|u(e_0)\| = \|e_1\| = 1$. L'unicité de u se montre comme dans l'exercice E.6.

b) Montrons que l'opérateur u est compact.

Pour tout $\epsilon > 0$, par le théorème de Bolzano-Weierstrass et la complétude de $\mathscr{H}$, il suffit de montrer que l'on peut recouvrir (l'adhérence de) $u(\overline{B}_{\mathscr{H}})$ par un nombre fini de boules fermées de rayon ϵ.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N+1} \leq \frac{\epsilon}{2}$. Notons F_N le sous-espace vectoriel engendré par $e_0, \dots, e_N$. Remarquons que si $x \in \overline{B}_{\mathscr{H}} \cap F_N^{\perp}$, alors $x_0, \dots, x_N = 0$, et donc

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|x_n|^2}{(n+1)^2} \leq \frac{\|x\|^2}{(N+1)^2} \leq \frac{1}{(N+1)^2} \leq \Big(\frac{\epsilon}{2}\Big)^2 .$$

Pour tout $x \in \overline{B}_{\mathscr{H}}$, écrivons $x = x' + x''$ avec $x' \in F_N$ et $x'' \in F_N^{\perp}$. Remarquons que par le théorème de Pythagore, $\|x'\| \leq 1$ et $\|x''\| \leq 1$. Puisque F_N est de dimension finie et u est continue, par le théorème de Riesz, $u(F_N \cap \overline{B}_{\mathscr{H}})$ est compact, donc peut être recouvert par des boules $\overline{B}(y_p, \frac{\epsilon}{2})$ de rayon $\frac{\epsilon}{2}$ en nombre fini. Puisque $\|u(x) - u(x')\| \leq \|u(x'')\| \leq \frac{\epsilon}{2}$, et par l'inégalité triangulaire, le sous-ensemble $u(\overline{B}_{\mathscr{H}})$ est recouvert par les boules fermées $\overline{B}(y_p, \epsilon)$ de rayon ϵ en nombre fini (donc son adhérence aussi). Le résultat en découle.

[Voici deux autres méthodes.

(1) Une autre méthode consiste à considérer l'opérateur $u_n : x \mapsto \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{i+1} e_{i+1}$, qui est linéaire, continu, de rang fini, et à montrer que $\|u_n - u\|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(2) Encore une autre méthode est de montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\overline{B}_{\mathscr{H}}$, alors la suite $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. En effet, quitte à extraire (par compacité faible), la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x, et donc $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $u(x)$. Par la proposition 1.22, il suffit alors de montrer que la suite $(\|u(x_n)\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|u(x)\|$. Pour cela, écrire $x_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{n,k}\, e_k$ et $x = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\, e_k$, remarquer que

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n,k} = \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle = a_k$$

et appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.]

c) Calcul du spectre de u.

Il est immédiat que u est injective (si $u(x) = 0$, alors $\frac{1}{n+1} x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par unicité des coordonnées hilbertiennes, donc $x = 0$). Donc 0 n'est pas valeur propre. Soit $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. Pour tout $x \in \mathscr{H}$, si $u(x) = \lambda x$, alors $\lambda x_0 = 0$ et $\frac{1}{n+1} x_n = \lambda x_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Donc puisque $\lambda \neq 0$ et par récurrence, nous avons $x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $x = 0$. Donc λ n'est pas valeur propre, et

$$\mathrm{Vp}(u) = \emptyset .$$

Comme le spectre d'un opérateur compact u en dimension infinie est égal à $\{0\} \cup \mathrm{Vp}(u)$, nous avons donc

$$\mathrm{Sp}(u) = \{0\} .$$

Nous avons en particulier construit un opérateur continu, de spectre réduit à 0, qui est non nul (car de norme non nulle).

d) Calcul du spectre résiduel de u.

Puisque $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) \subset \mathrm{Sp}(u)$, nous savons que $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u)$ est ou bien vide ou bien réduit à $\{0\}$. L'image de u est contenue dans l'hyperplan fermé engendré par $(e_i)_{i\in\mathbb{N}-\{0\}}$ (d'équation $x_0 = 0$, c'est l'orthogonal de e_0). Elle n'est donc pas dense, et comme 0 n'est pas valeur propre par ce qui précède, nous avons

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \{0\} .$$

Correction de l'exercice E.13. Soit $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que $v(e_n) = \overline{\lambda_n}\, e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui existe par l'exercice E.6. Pour tous les $x, y \in \mathscr{H}$, de coordonnées hilbertiennes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons, par linéairité et continuité,

$$\langle u(x), y\rangle = \sum_{i,\,j\in\mathbb{N}} x_i\,\overline{y_j}\,\langle u(e_i), e_j\rangle = \sum_{i,\,j\in\mathbb{N}} x_i\,\overline{y_j}\,\lambda_i\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\,\overline{y_n}\,\lambda_n .$$

De même, $\langle x, v(y)\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\,\overline{y_n}\,\lambda_n$. D'où $v = u^*$ par unicité de l'adjoint.

De plus, u est auto-adjoint si et seulement si $u(x) = v(x)$ pour tout x dans $\mathscr{H}$, donc si et seulement si $u(e_n) = v(e_n)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ (car $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne et u, v sont linéaires et continues), donc si et seulement si $\lambda_n = \overline{\lambda_n}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, donc si et seulement si λ_n est réel pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Pour montrer la dernière assertion, soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans K, qui existe car K est compact et non vide. Par l'exercice E.6, le spectre de l'unique opérateur $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que $u(e_n) = \lambda_n\, e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifie $\mathrm{Sp}(u) = \overline{\{\lambda_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}} = K$. Par ce qui précède, puisque K est contenu dans $\mathbb{R}$, l'opérateur u est auto-adjoint.

Correction de l'exercice E.14. Les mesures sous-entendues sont toujours les mesures de Lebesgue.

(1) Notons $N : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ la fonction caractéristique du triangle $\{(x,y) \in [0,1]^2\ :\ y \leq x\}$, qui est mesurable bornée, donc appartient à $\mathbb{L}^2([0,1]^2)$. Par définition, l'opérateur de Volterra V est l'opérateur de type Hilbert-Schmidt de noyau N. Donc par l'exemple (3) de la partie 1.4, l'opérateur V est bien défini, continu et compact.

(2) Pour montrer que le spectre de V est réduit à $\{0\}$, il suffit de montrer par la proposition 1.36 (5) (puisque $\mathscr{H}$ est de dimension infinie) que V n'a pas de valeur propre non nulle.

Soient donc $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $f \in \mathscr{H} - \{0\}$ tels que $Vf = \lambda f$. Quitte à modifier f sur un ensemble de mesure nulle, nous avons donc $\lambda f(x) = \int_0^x f(t)dt$, pour tout $x \in [0,1]$. En particulier, pour tous les x et y dans $[0,1]$ tels que $x \leq y$, si $\chi_{[x,y]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[x,y]$, nous avons, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= \frac{1}{|\lambda|}\,\Big|\int_0^y f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt\Big| \leq \frac{1}{|\lambda|}\int_x^y |f(t)|\,dt = \frac{1}{|\lambda|}\int_0^1 \chi_{[x,y]}(t)|f(t)|\,dt \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|}\Big(\int_0^1 \chi_{[x,y]}(t)^2\,dt \int_0^1 |f(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} = \frac{1}{|\lambda|}\sqrt{y-x}\,\|f\|_2 . \end{aligned} \tag{17}$$

Donc f est continue. L'application $g : x \mapsto \int_0^x f(x)\,dx$ est donc dérivable, et vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre $g' = \frac{1}{\lambda}\,g$, avec condition initiale $g(0) = 0$. Donc

g est nulle et puisque $g'(x) = f(x)$ pour tout x dans $[0,1]$, l'application f est aussi nulle. Le noyau de $V - \lambda\,\mathrm{id}$ est donc réduit à 0, donc λ n'est pas valeur propre.

(3) Puisque V est un opérateur de type Hilbert-Schmidt de noyau la fonction caractéristique $N = \chi_{\{(x,\,y)\in[0,1]^2\,:\,y\leq x\}}$, son adjoint V^* est l'opérateur de type Hilbert-Schmidt de noyau $N^* : (x,y) \mapsto \overline{N(y,x)}$, c'est-à-dire la fonction caractéristique $\chi_{\{(x,\,y)\in[0,1]^2\,:\,y\geq x\}}$:

$$V^* f : x \mapsto \int_x^1 f(t)\; dt\ .$$

(4) Nous avons, en notant χ_I la fonction caractéristique d'un intervalle I,

$$V^*Vf(x) = \int_0^1 \int_0^1 f(t)\,\chi_{[0,u]}(t)\,\chi_{[x,1]}(u)\; dt\; du\ .$$

La fonction $g : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ définie par $(t,u) \mapsto f(t)\,\chi_{[0,u]}(t)\,\chi_{[x,1]}(u)$ est $\mathbb{L}^2$, car $\|g\|_2 \leq \|f\|_2$. Donc par le théorème de Fubini,

$$V^*Vf(x) = \int_0^1 f(t) \int_0^1 \chi_{[0,u]}(t)\,\chi_{[x,1]}(u)\; du\; dt = \int_0^1 f(t)\big(1 - \max\{x,t\}\big)\; dt\ .$$

Ceci donne l'expression

$$V^*Vf(x) = \int_0^1 f(t)\; dt - x\int_0^x f(t)\; dt - \int_x^1 t f(t)\; dt \tag{18}$$

cherchée pour $V^*Vf(x)$.

[Une autre méthode pour établir cette formule est la suivante. Comme $V^*Vf(x) = \int_x^1 \big(1 \times \int_0^y f(t)\; dt\big)\, dy$, une intégration par partie (en utilisant le théorème de dérivation de Lebesgue qu'une fonction $\mathbb{L}^1$ est presque partout la dérivée de son intégrale et puisque $\mathbb{L}^2([0,1]) \subset \mathbb{L}^1([0,1])$) donne l'expression cherchée pour $V^*Vf(x)$.]

Comme V^*V est auto-adjoint positif, ses valeurs propres sont forcément réelles et positives ou nulles.

Soient $\lambda \in [0,+\infty[$ et $f \in \mathscr{H} - \{0\}$ tels que $V^*Vf = \lambda f$. Si $\lambda = 0$, comme l'application $g : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est continue car $|g(x) - g(y)| \leq \sqrt{|y-x|}\ \|f\|_2$ comme vu dans la formule (17), l'application $x \mapsto \int_x^1 g(t)dt$ est dérivable, et comme elle est nulle, sa dérivée l'est aussi. Donc g est l'application nulle. Mais puisque $f \in \mathbb{L}^1([0,1])$, l'application g est dérivable presque partout, de dérivée presque partout égale à f (en utilisant le théorème de dérivation de Lebesgue qu'une fonction $\mathbb{L}^1$ est presque partout la dérivée de son intégrale). Donc f est presque partout nulle. Ceci montre que 0 n'est pas une valeur propre de V^*V.

[Une autre méthode pour montrer que 0 n'est pas une valeur propre de V^*V est la suivante. Soit $f \in \mathscr{H}$ tel que $V^*Vf = 0$. Alors $\|Vf\|_2^2 = \langle f, V^*Vf\rangle_2 = 0$, donc $Vf = 0$ presque partout. D'où pour presque tout $x \in [0,1]$, nous avons $\langle f, V^*Vf\rangle_2 = 0$. Comme l'application de $[0,1]$ dans $\mathscr{H}$ définie par $x \mapsto \mathbb{1}_{[0,\,x]}$ est continue, nous avons $\langle f, \mathbb{1}_{[0,\,x]}\rangle_2 = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Donc par différence, $\langle f, \mathbb{1}_{[x,\,y]}\rangle_2 = 0$ pour tous les $x, y \in [0,1]$. Donc par sommation, $\langle f, g\rangle_2 = 0$ pour toute fonction étagée g. Par densité des fonctions étagées dans $\mathscr{H}$, nous avons donc $\langle f, f\rangle_2 = 0$, donc $f = 0$ presque partout.]

Si λ est non nul, un raisonnement analogue à celui utilisé pour montrer la formule (17) (en écrivant, si $y \geq x$,

$$|f(y)-f(x)| = \frac{1}{|\lambda|}\,|V^*Vf(y)-V^*Vf(x)| \leq \frac{1}{|\lambda|}\int_x^y |g(t)|\,dt \leq \frac{1}{|\lambda|}\,\sqrt{y-x}\;\|g\|_2\;)$$

montre que f est continue, donc par itération que f est de classe C^∞. En dérivant deux fois l'équation $V^*Vf = \lambda f$ où V^*V est donné par la formule (18) (ou tout simplement par la formule $V^*Vf = \int_x^1 \int_0^u f(t)\,dt\,du$), on obtient que f vérifie l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$\lambda f'' = -f\ .$$

Donc il existe des nombres complexes a et b non tous deux nuls tels que $f(t) = a\cos\frac{t}{\sqrt{\lambda}} + b\sin\frac{t}{\sqrt{\lambda}}$. En écrivant que $\lambda f(x) = \int_x^1 \int_0^y f(t)\ dt\ dy$ pour tout x dans $[0,1]$, on obtient $f'(0) = 0$ et $f(1) = 0$. Donc $b = 0$ et $\cos\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0$, c'est-à-dire que $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ est de la forme $(k+\frac{1}{2})\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, donc $k \in \mathbb{N}$. En posant, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$e_k : t \mapsto \sqrt{2}\cos\big(\pi(k+\frac{1}{2})t\big)\ ,$$

la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{H}$ unitaires et deux à deux orthogonaux (ce que l'on peut déduire du fait que deux espaces propres de valeurs propres distinctes d'un opérateur auto-adjoint sont orthogonaux), vecteurs propres de V^*V pour les valeurs propres $\frac{1}{(k+\frac{1}{2})^2\pi^2}$, qui sont de multiplicité 1, par la résolution ci-dessus. Puisque $\mathscr{H}$ est séparable, puisque tout opérateur auto-adjoint compact de $\mathscr{H}$ est diagonalisable en base hilbertienne, et puisque les seules valeurs propres sont les $\frac{1}{(k+\frac{1}{2})^2\pi^2}$, qui sont de multiplicité 1, la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathscr{H}$.

[Une autre manière de montrer que $\mathrm{Vect}\{e_k\ :\ k\in\mathbb{N}\}$ est dense est la suivante. Notons T l'opérateur linéaire continu de $\mathbb{L}^2([0,1])$ défini en posant, pour tous les $f \in \mathbb{L}^2([0,1])$ et $t \in [0,1]$,

$$Tf(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(f(t)\,e^{i\pi t/2} + f(1-t)\,e^{-i\pi t/2}\big)\ .$$

Cet opérateur est bien continu car clairement $\|Tf\| \leq \sqrt{2}\ \|f\|$ pour tout $f \in \mathbb{L}^2([0,1])$. Posons $\epsilon_n : t \mapsto e^{2i\pi nt}$, et rappelons que $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est, à un multiple constant près, une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2([0,1])$ par les propriétés des séries de Fourier. On vérifie que $T(\epsilon_n) = e_{2n}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $T(\epsilon_n) = e_{-(2n+1)}$ si $n \in \mathbb{Z}$ et $n < 0$. Or T est surjective, car pour tout $g \in \mathbb{L}^2([0,1])$, si $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\big(g(t)\,e^{-i\pi t/2} + g(1-t)\,e^{i\pi(1-t)/2}\big)$, alors on vérifie que $Tf = g$. Donc, par continuité de T,

$$\begin{aligned}\mathbb{L}^2([0,1]) = T(\mathbb{L}^2([0,1])) &= T(\,\overline{\mathrm{Vect}\{\epsilon_n\ :\ n\in\mathbb{Z}\}}\,) \subset \overline{T(\mathrm{Vect}\{\epsilon_n\ :\ n\in\mathbb{Z}\})}\\ &= \overline{\mathrm{Vect}\{T(\epsilon_n)\ :\ n\in\mathbb{Z}\}} = \overline{\mathrm{Vect}\{e_k\ :\ k\in\mathbb{N}\}}\ .]\end{aligned}$$

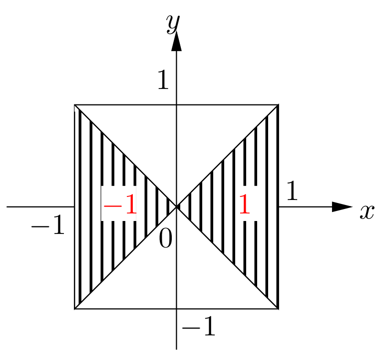
(5) La plus grande valeur propre de V^*V est $4/\pi^2$ (obtenue pour $k=0$). Puisque V^*V est auto-adjoint, sa norme est égale à son rayon spectral, donc à sa plus grande valeur propre puisqu'il est compact (car être compact est stable par composition (à droite et) à gauche par une application linéaire continue) et positif. D'où

$$\|V^*V\| = \frac{4}{\pi^2}\ .$$

Puisque $\|V^*V\| = \|V\|^2$ (par la propriété d'algèbre stellaire démontrée dans la proposition 1.37), nous avons donc
$$\|V\| = \frac{2}{\pi}\ .$$

(6) Soient $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $f, g \in \mathscr{H}$ tels que $g = R_V(\lambda) f$. Alors $(V - \lambda\,\mathrm{id})g = f$, donc
$$\int_0^x g(t)\,dt - \lambda g(t) = f(x)$$
pour presque tout $x \in [0,1]$. Supposons tout d'abord que f est C^∞. Alors (quitte à modifier g presque nulle part), l'application $g : x \mapsto \frac{1}{\lambda}\big(\int_0^x g(t)\,dt - f(x)\big)$ est continue, donc C^∞ en itérant. Par conséquent, g vérifie l'équation différentielle $g(x) - \lambda g'(x) = f'(x)$ et la condition initiale $g(0) = -\frac{1}{\lambda} f(0)$. En posant $h : x \mapsto e^{-\frac{x}{\lambda}} g(x) \in \mathscr{H}$, l'application h vérifie l'équation différentielle $h'(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} f'(x)$ et la condition initiale $h(0) = g(0)$. Donc
$$h(x) = -\frac{1}{\lambda^2}\int_0^x e^{-\frac{t}{\lambda}} f(t)\,dt - \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} f(x)$$
et
$$g(x) = -\frac{1}{\lambda^2} e^{\frac{x}{\lambda}} \int_0^x e^{-\frac{t}{\lambda}} f(t)\,dt - \frac{1}{\lambda} f(x)\ .$$
Par densité des fonctions C^∞ dans $\mathbb{L}^2([0,1])$, nous avons donc
$$R_V(\lambda) f : x \mapsto -\frac{1}{\lambda^2}\int_0^x e^{\frac{x-t}{\lambda}} f(t)\,dt - \frac{1}{\lambda} f(x)$$
pour tout $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $f \in \mathscr{H}$.

(7) Soient
$$A_+ = \{(x,y) \in [-1,1]^2\ :\ |y| \le x\}\quad\text{et}\quad A_- = \{(x,y) \in [-1,1]^2\ :\ |y| \le -x\}$$
(respectivement les parties de droite et de gauche du dessin hachuré ci-dessous) et $N_0 = \chi_{A_+} - \chi_{A_-}$ où χ_B est la fonction caractéristique d'un sous-ensemble B du plan réel.



Il est immédiat que V_0 est l'opérateur de type Hilbert-Schmidt de noyau N_0 sur $\mathscr{H}_0$. En particulier, V_0 est un opérateur (linéaire continu) compact de $\mathscr{H}_0$.

[Autre méthode : Soient $\varphi_1 : \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}$ et $\varphi_2 : \mathscr{H} \to \mathscr{H}_0$ définies respectivement par $f \mapsto \{x \mapsto f(x) + f(-x)\}$ et
$$f \mapsto \left\{x \mapsto \left\{\begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x \ge 0 \\ -f(-x) & \text{si } x < 0 \end{array}\right.\right\}$$

Alors φ_1, φ_2 sont bien définies, linéaires, continues (de norme au plus 2) et $V_0 = \varphi_2 \circ V \circ \varphi_1$. Donc V_0 est un opérateur compact, car V l'est par (1) et être un opérateur compact est stable par précomposition et postcomposition par un opérateur linéaire continu.]

(8) Pour tout $f \in \mathscr{H}_0$, d'une part $V_0 f$ est une fonction impaire, et d'autre part, si f est impaire, alors par symétrie du domaine d'intégration, $V_0 f$ est nulle. Donc $V_0 \circ V_0$ est l'opérateur nul. Par la formule du rayon spectral de V_0 (voir le théorème 1.25 (iii)), nous avons donc $\rho(V_0) = 0$. D'où, puisque le spectre de V_0 est non vide (car $\mathscr{H}_0 \neq \{0\}$),

$$\mathrm{Sp}(V_0) = \{0\}\ .$$

On peut aussi utiliser le fait que $\mathrm{Sp}(V_0) = \{0\} \cup \mathrm{Vp}(V_0)$ (par la question (6), car $\mathscr{H}_0$ est de dimension infinie) et que si $\lambda \in \mathrm{Vp}(V_0)$, alors $\lambda^2 \in \mathrm{Vp}(V_0^2)$, donc $\lambda = 0$ car $V_0 \circ V_0 = 0$.

(9) Rappelons que le produit scalaire de l'espace de Hilbert produit $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ est $\langle (g_1, h_1), (g_2, h_2) \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle + \langle h_1, h_2 \rangle$, de norme associée $\|(g, h)\| = \big(\|g\|^2 + \|h\|^2\big)^{\frac{1}{2}}$.

L'application ψ est clairement linéaire. Pour tout $f \in \mathscr{H}_0$, nous avons

$$\begin{aligned}\|\psi(f)\|^2 = \|f_{\mathrm{asym}}\|^2 + \|f_{\mathrm{sym}}\|^2 &= \frac{1}{2}\int_0^1 |f(t) - f(-t)|^2\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 |f(t) + f(-t)|^2\,dt \\ &= \int_0^1 |f(t)|^2\,dt + \int_0^1 |f(-t)|^2\,dt = \int_{-1}^1 |f(t)|^2\,dt = \|f\|^2\ .\end{aligned}$$

Donc ψ est isométrique, et on vérifie que l'application

$$(g, h) \mapsto \left\{\ t \mapsto \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{2}}\big(g(t) + h(t)\big) & \text{si } t \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\big(h(-t) - g(-t)\big) & \text{sinon} \end{array}\right.\ \right\}$$

est un inverse de ψ. Ceci montre que ψ est un isomorphisme linéaire isométrique.

Pour tout $(g, h) \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}$, l'application $f = V_0 \circ \psi^{-1}(g, h) \in \mathscr{H}_0$ est impaire et pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-x}^x \psi^{-1}(g, h)(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2}}\big(g(t) + h(t)\big)\,dt + \int_{-x}^0 \frac{1}{\sqrt{2}}\big(h(-t) - g(-t)\big)\,dt \\ &= \sqrt{2}\int_0^x h(t)\,dt\ .\end{aligned}$$

Donc $f_{\mathrm{asym}} = \sqrt{2} f = 2\,V h$ et $f_{\mathrm{sym}} = 0$. D'où $\psi \circ V_0 \circ \psi^{-1}(g, h) = (2Vh, 0)$.

Par conséquent, l'opérateur linéaire continu $\psi \circ V_0 \circ \psi^{-1}$ de l'espace de Hilbert $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ est nul sur le premier facteur, et envoie le second facteur sur le premier par 2 fois l'opérateur V : sa matrice par blocs dans la décomposition $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 2V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sa norme d'opérateur est $2\|V\|$. Puisque ψ est un isomorphisme linéaire isométrique, et par la question (5), nous avons donc

$$\|V_0\| = \|\psi \circ V_0 \circ \psi^{-1}\| = 2\,\|V\| = \frac{4}{\pi}\ .$$

Correction de l'exercice E.16. Si u est unitaire, alors par la propriété d'algèbre stellaire, nous avons $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|\operatorname{id}\| = 1$, donc $\|u\| = 1$. Puisque u est inversible et $u^{-1} = u^*$, nous avons aussi $\|u^{-1}\| = \|u^*\| = \|u\| = 1$. Donc par la proposition 1.43, les spectres de u et de u^{-1} sont contenus dans le disque unité fermé $\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| \leq 1\}$. Or puisque u est inversible, nous avons $\operatorname{Sp}(u^{-1}) = \operatorname{Sp}(u)^{-1}$. Donc $\operatorname{Sp}(u)$ est contenu dans le cercle unité $\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| = 1\}$.

Correction de l'exercice E.17. (1) Si $\operatorname{Sp}(u) = \{a\}$, alors $a \in \mathbb{R}$ car le spectre d'un opérateur auto-adjoint est réel, et $\mathscr{H} \neq \{0\}$ car $\operatorname{Sp}(u) \neq \emptyset$. De plus, l'application polynomiale $f : x \mapsto x - a$ est l'application nulle sur $\operatorname{Sp}(u)$, donc $f(u) = u - a\operatorname{id}$ est l'opérateur nul, ce qui montre le résultat.

La réciproque a déjà été vue dans la partie 1.3.

(2) Supposons que le spectre $\operatorname{Sp}(u)$ de $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ contienne exactement deux points. En particulier, il est non vide, donc $\mathscr{H} \neq \{0\}$. Puisque $\operatorname{Sp}(au + b\operatorname{id}) = a\operatorname{Sp}(u) + b$ si $(a, b) \in \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$ par les remarques (5) et (6) de la partie 1.3, qui sont des cas très particuliers du théorème 1.45 (ii), nous pouvons supposer que $\operatorname{Sp}(u) = \{0, 1\}$. L'application polynomiale $f : x \mapsto x^2 - x$ est alors l'application nulle sur $\operatorname{Sp}(u)$, donc $f(u) = u^2 - u$ est l'opérateur nul, ce qui montre le résultat par la proposition 1.50, car u est auto-adjoint (et non nul, car de spectre non réduit à $\{0\}$, et non l'identité, car de spectre non réduit à $\{1\}$).

Réciproquement, si $u = aP + b\operatorname{id}$ où P est un projecteur orthogonal de $\mathscr{H}$ différent de 0 ou id (ce qui en fait implique que $\mathscr{H} \neq \{0\}$), puisque $\operatorname{Sp}(au + b\operatorname{id}) = a\operatorname{Sp}(u) + b$, nous pouvons supposer, quitte à remplacer u par $\frac{1}{a}(u - b\operatorname{id})$, qui est auto-adjoint car a et b sont réels, que $(a, b) = (1, 0)$. Soit $f : x \mapsto x^2 - x$, alors $f(u) = 0$, donc $f(\operatorname{Sp}(u)) = \operatorname{Sp}(f(u)) = \{0\}$, donc $\operatorname{Sp}(u)$ est contenu dans $\{0, 1\}$. Puisque $u \neq 0, \operatorname{id}$ et u est auto-adjoint, ceci implique par l'assertion (1) que $\operatorname{Sp}(u)$ (non vide car $\mathscr{H} \neq \{0\}$) est égal à $\{0, 1\}$.

(3) Soit $x_0 \in C$. L'application f valant l'identité sur C et x_0 ailleurs est continue sur $\operatorname{Sp}(u)$ (car les composantes connexes sont fermées par le théorème de l'arbre et de l'écorce, donc de complémentaires ouverts). L'opérateur $f(u)$ commute avec u (car l'algèbre $\mathscr{C}\big(\operatorname{Sp}(u)\big)$ est commutative), et son spectre est l'image par f du spectre de u par le théorème 1.45 (ii), c'est-à-dire C.

Correction de l'exercice E.18. (1) L'application $f : x \mapsto \frac{1}{x-\lambda}$ est définie et continue sur $\operatorname{Sp}(v)$, car $\lambda \notin \operatorname{Sp}(v)$. Le calcul fonctionnel continu étant isométrique, nous avons

$$\|f(v)\| = \sup_{z \in \operatorname{Sp}(v)} |f(z)|\;.$$

Le résultat en découle.

(2) Soit $a \geq 0$ tel que $\|u_n\| \leq a$ pour tout indice n. Pour tout $x \in \mathscr{H}$, notons x_n la projection orthogonale de x sur $\mathscr{H}_n$, de sorte que, par le théorème de Parseval, $x = \sum_{0 \leq n < N} x_n$ et $\|x\|^2 = \sum_{0 \leq n < N} \|x_n\|^2$. Si u existe, alors, par linéarité et continuité, nous avons $u(x) = \sum_{0 \leq n < N} u_n(x_n)$ pour tout $x \in \mathscr{H}$, ce qui montre l'unicité. Posons $u(x) = \sum_{0 \leq n < N} u_n(x_n)$, qui existe, par la partie réciproque du théorème de Parseval, car

$$\sum_{0 \leq n < N} \|u_n(x_n)\|^2 \leq \sum_{0 \leq n < N} a^2 \|x_n\|^2 = a^2 \|x\|^2\;.$$

Ceci montre aussi que $u : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, qui est clairement linéaire et de restriction à $\mathscr{H}_n$ égale à u_n, est continu (de norme au plus a).

Si $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est l'unique opérateur continu tel que $v_{|\mathscr{H}_n} = {u_n}^*$ pour tout indice n, alors il est immédiat que $u^* = v$. En effet, pour tous les $x, y \in \mathscr{H}$, nous avons

$$\begin{aligned}\langle u(x), y\rangle &= \sum_{i,j} \langle u_i(x_i), y_i\rangle = \sum_{i,j} \langle u_i(x_i), y_i\rangle = \sum_{n} \langle u_n(x_n), y_n\rangle = \sum_{n} \langle x_n, {u_n}^*(y_n)\rangle \\ &= \langle x, v(y)\rangle \ .\end{aligned}$$

(3) Notons $u_n = u_{|\mathscr{H}_n}$. Il est immédiat que $\mathrm{Sp}(u_n)$ est contenu dans $\mathrm{Sp}(u)$, et comme $\mathrm{Sp}(u)$ est fermé, il contient l'adhérence de la réunion des $\mathrm{Sp}(u_n)$. Réciproquement, soit λ n'appartenant pas à cette adhérence. Il existe donc $r > 0$ tel que pour tout indice n, nous ayons $d(\lambda, \mathrm{Sp}(u_n)) \geq r$. Par la question (1), nous avons donc $\|(u_n - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}\| \leq \frac{1}{r}$ pour tout indice n. Par la question (2), il existe donc un opérateur continu u' de $\mathscr{H}$ dont la restriction à $\mathscr{H}_n$ est égal à $(u_n - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$. L'opérateur u' est donc l'inverse de $u - \lambda\,\mathrm{id}$, et λ n'appartient pas à $\mathrm{Sp}(u)$.

Correction de l'exercice E.19. (1) Nous pouvons supposer que $\mathscr{H}$ est de dimension infinie, sinon le résultat est immédiat. En particulier, 0 appartient au spectre de u. Puisque le sous-ensemble $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ des opérateurs compacts de $\mathscr{H}$ est une sous-algèbre (non unifère) de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ (voir la proposition 1.33), pour tout polynôme P tel que $P(0) = 0$, l'opérateur $P(u)$ est compact (attention, l'identité n'est pas un opérateur compact, c'est pour cela qu'il faut enlever les polynômes constants). Tout élément $f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u))$ tel que $f(0) = 0$ est limite uniforme sur $\mathrm{Sp}(u)$ d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes tels que $P_n(0) = 0$ (si $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathrm{Sp}(u)$, alors $P_n = Q_n - Q_n(0)$ convient). Par continuité du calcul fonctionnel continu, l'opérateur $f(u)$ est donc limite des opérateurs compacts $P_n(u)$. Puisque $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ est fermé (voir la proposition 1.33), le résultat en découle.

(2) Puisque u est auto-adjoint compact, par le théorème 1.41, l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ est la somme hilbertienne des E_λ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ (remarquer que $\mathrm{Sp}(u)$ est (fini ou) dénombrable). Pour tout $x \in \mathscr{H}$, écrivons $x = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} x_\lambda$, où $x_\lambda = p_\lambda(x)$, la décomposition de x dans cette somme hilbertienne. Puisque u est continue et vaut $\lambda\,\mathrm{id}$ sur E_λ, nous avons donc, pour tout $x \in \mathscr{H}$,

$$u(x) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \lambda\, x_\lambda \ .$$

C'est exactement ce qu'il fallait démontrer.

(3) Notons que la somme ci-dessus est infinie si $\mathrm{Sp}(u)$ est infinie. Par linéarité et continuité, pour tous les $P \in \mathbb{C}[X]$ et $x \in \mathscr{H}$, il découle de la formule centrée ci-dessus que

$$P(u)(x) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} P(\lambda)\, x_\lambda \ .$$

Par le théorème de Stone-Weierstrass, soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications polynomiales convergeant uniformément sur le compact $\mathrm{Sp}(u)$ vers l'application continue f. Puisque $f(0) = 0$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous les $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ tels que $|\lambda| < \eta$, nous avons $|P_n(\lambda)| < \epsilon$. Donc la série $\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} P(\lambda)\, x_\lambda$ dont les termes sont deux à deux orthogonaux converge par Parseval (et puisque $\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \|x_\lambda\|^2$ converge vers $\|x\|^2$)

vers $\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} f(\lambda)\, x_\lambda$ quand $n\to+\infty$. Par la continuité du calcul fonctionnel continu et de l'évaluation en un vecteur x fixé des éléments de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, nous avons donc, pour tout $x\in\mathscr{H}$,

$$f(u)(x)=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} f(\lambda)\, x_\lambda\ ,$$

ce qui montre le résultat.

Correction de l'exercice E.20. (1) Si $u=vw$ où v est unitaire et w positif (donc auto-adjoint), alors $u^*u=w^*v^*vw=w^2$. Donc w est un opérateur positif, dont le carré est égal à l'opérateur auto-adjoint positif u^*u. Par unicité (voir l'exercice E.24 (2)), nous avons donc $w=\sqrt{u^*u}$, qui est uniquement déterminé en fonction de u. Si u est inversible, alors w aussi et $v=uw^{-1}=u(\sqrt{u^*u}\,)^{-1}$ est aussi uniquement déterminé en fonction de u. Ceci montre l'unicité dans la question (1).

Montrons l'existence. Par l'exercice E.24 (1), soit $w=\sqrt{u^*u}$ l'unique opérateur positif, dont le carré est égal à l'opérateur auto-adjoint positif u^*u, et soit $v=uw^{-1}=u(\sqrt{u^*u}\,)^{-1}$. Alors

$$vv^*=u(\sqrt{u^*u}\,)^{-1}(\sqrt{u^*u}\,)^{-1}u^*=u(u^*u)^{-1}u^*=uu^{-1}(u^*)^{-1}u^*=\mathrm{id}$$

et de même

$$v^*v=(\sqrt{u^*u}\,)^{-1}u^*u\,(\sqrt{u^*u}\,)^{-1}=(\sqrt{u^*u}\,)^{-1}(\sqrt{u^*u}\,)^2(\sqrt{u^*u}\,)^{-1}=\mathrm{id}\ .$$

Donc v est unitaire et $vw=u$.

(2) Soit $f:\lambda\mapsto\lambda/|\lambda|$ si $\lambda\neq0$ et $f(0)=1$. Soit $g:\lambda\mapsto|\lambda|$. Alors f et g sont des fonctions mesurables bornées de $\mathrm{Sp}(u)$ dans $\mathbb{C}$, telles que g est positive, f ne s'annule pas et $\frac{1}{f}=\overline{f}$, et $(fg)(z)=z$ pour tout $z\in\mathrm{Sp}(u)$. Puisque u est auto-adjoint, et par le calcul fonctionnel borné (qui est un morphisme d'algèbres involutives envoyant fonctions positives sur opérateurs positifs), si $v=f(u)$ et $w=g(u)$, alors v est unitaire, w est positif, et $u=vw$. Le fait que u,v,w commutent deux à deux vient du fait que le calcul fonctionnel borné est un morphisme d'algèbres, que l'algèbre des fonctions mesurables bornées sur $\mathrm{Sp}(u)$ est commutative, donc son image aussi, et que $u=\mathrm{id}(u),v$ et w sont dans l'image.

Correction de l'exercice E.21. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans $\mathscr{H}$. Notons $\mathscr{H}_0$ le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant les $u^k(x_0)$ pour $k\in\mathbb{N}$ (par convention $u^0=\mathrm{id}$). Il est invariant par u, et x_0 est un vecteur cyclique pour la restriction de u à $\mathscr{H}_0$. Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons $\mathscr{H}_0,\dots,\mathscr{H}_n$ construits, deux à deux orthogonaux, invariants par u, contenant chacun un vecteur cyclique, et dont la somme $E=\mathscr{H}_0+\dots+\mathscr{H}_n$ contient $x_0,\dots,x_n$. Si $E=\mathscr{H}$, alors posons $N=n+1$, et la suite $(\mathscr{H}_n)_{0\le n<N}$ convient. Sinon, l'orthogonal $E^\perp$ de E dans $\mathscr{H}$ est non nul et invariant par u, car u est auto-adjoint et préserve E. Notons $m_n\ge n+1$ la borne inférieure des entiers $m\in\mathbb{N}$ tels que la projection orthogonale x'_m de x_m sur $E^\perp$ soit non nulle. Notons $\mathscr{H}_{n+1}$ le plus petit sous-espace vectoriel fermé de $E^\perp$ contenant les $u^k(x'_{m_n})$ pour $k\in\mathbb{N}$. Il est orthogonal à $\mathscr{H}_0,\dots,\mathscr{H}_n$, invariant par u, contient le vecteur cyclique x'_{m_n} pour la restriction de u à $\mathscr{H}_{n+1}$, et la somme $\mathscr{H}_0+\dots+\mathscr{H}_{n+1}$ contient $x_0,\dots,x_{n+1}$. Donc si la construction ne s'arrête pas, alors $\mathscr{H}$ est égal à la somme hilbertienne de $(\mathscr{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, car cette somme contient la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est dense dans $\mathscr{H}$.

Correction de l'exercice E.22. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, posons $w_\lambda = w - \lambda\,\mathrm{id}$ et $v_\lambda = v - \lambda\,\mathrm{id}$, de sorte que $w_\lambda - v_\lambda$ est un opérateur compact. Soit λ une valeur spectrale de w qui n'est pas une valeur propre de w. Supposons par l'absurde que λ n'est pas une valeur spectrale de v. Alors v_λ est inversible, donc

$$w_\lambda = v_\lambda \circ \big(\mathrm{id} + v_\lambda^{-1} \circ (w_\lambda - v_\lambda)\big)\ .$$

Comme $w_\lambda - v_\lambda$ est compact, l'opérateur $u = v_\lambda^{-1} \circ (w_\lambda - v_\lambda)$ est aussi compact. Les valeurs spectrales non nulles d'un opérateur compact étant des valeurs propres, ou bien -1 est une valeur propre de u, ou bien $\mathrm{id} + u$ est inversible. Dans le premier cas, $w_\lambda = v_\lambda \circ (\mathrm{id} + u)$ n'est pas injectif, dans le second cas, $w_\lambda = v_\lambda \circ (\mathrm{id} + u)$ est inversible. Ceci contredit les hypothèses sur λ.

Correction de l'exercice E.24. (1) Puique $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert complexe, l'opérateur positif u est auto-adjoint. De plus, son spectre est contenu dans $[0, +\infty[$. L'application $f : \mathrm{Sp}(u) \to \mathbb{C}$ définie par $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est donc bien définie et continue. Le calcul fonctionnel continu étant un morphisme d'algèbres, l'opérateur $v = f(u)$ vérifie $v^n = f^n(u) = \mathrm{id}(u) = u$. De plus, par le théorème spectral, son spectre, qui est égal à $f(\mathrm{Sp}(u))$, est contenu dans $[0, +\infty[$. Comme $v = f(u)$ est auto-adjoint (f est à valeurs réelles), l'opérateur v est donc positif. Nous avons vu que

$$\mathrm{Sp}(\sqrt[n]{u}) = \sqrt[n]{\mathrm{Sp}(u)}\ .$$

Si w est un autre opérateur positif (donc auto-adjoint) tel que $w^n = u$, soit A_w la sous-algèbre stellaire de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ engendrée par w. Le calcul fonctionnel continu dit que l'application $f \mapsto f(w)$ est un isomorphisme d'algèbres involutives de $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(w))$ dans A_w. Comme $v = \sqrt[n]{u} = \sqrt[n]{w^n}$, l'opérateur v appartient à A_w. Comme une fonction positive continue sur $\mathrm{Sp}(w) = \sqrt[n]{\mathrm{Sp}(u)} = \mathrm{Sp}(v)$ admet une unique racine n-ème positive, nous avons donc $v = w$.

L'opérateur $\sqrt[n]{u}$ est inversible si et seulement si 0 n'appartient pas à son spectre $\mathrm{Sp}(\sqrt[n]{u}) = \sqrt[n]{\mathrm{Sp}(u)}$, donc si et seulement si 0 n'appartient pas au spectre $\mathrm{Sp}(u)$ de u, donc si et seulement si u est inversible. Comme $1/\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{1/x}$ pour tout $x \in [0, +\infty[$, et puisque le calcul fonctionnel continu est un morphisme d'algèbres, nous avons donc

$$\big(\sqrt[n]{u}\big)^{-1} = \sqrt[n]{u^{-1}}\ .$$

(2) L'opérateur $u^* u$ est positif, car $\langle u^*u(x), x\rangle = \langle u(x), u(x)\rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathscr{H}$. Donc $v = \sqrt{u^*u}$ est bien défini par (1), et est un opérateur positif (donc auto-adjoint) tel que

$$\|v(x)\|^2 = \langle v(x), v(x)\rangle = \langle v^2(x), x\rangle = \langle u^*u(x), x\rangle = \langle u(x), u(x)\rangle = \|u(x)\|^2\ .$$

Réciproquement, si v est un opérateur positif tel que $\|v(x)\| = \|u(x)\|$ pour tout $x \in \mathscr{H}$, alors v est auto-adjoint et

$$\langle v^2(x), x\rangle = \langle v(x), v(x)\rangle = \|v(x)\|^2 = \|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle u^*u(x), x\rangle$$

pour tout $x \in \mathscr{H}$. Donc $\langle v^2(x), y\rangle = \langle u^*u(x), y\rangle$ pour tous les x et y dans $\mathscr{H}$ (par l'identité de polarisation). D'où v est un opérateur positif tel que $v^2 = u^*u$, ce qui montre le résultat, par l'unicité dans la question (1).

2 De quelques thèmes d'analyse harmonique

L'opérateur laplacien $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ et ses variantes interviennent dans de nombreux domaines en mathématique et en physique : théorie du potentiel (analyse harmonique et sous-harmonique), géométrie riemannienne (spectre du laplacien), processus stochastique (mouvement brownien), théorie de la diffusion (équation de la chaleur), dynamique des fluides (équation de Navier [14]-Stokes [12] pour les flots incompressibles), électromagnétisme (équation des ondes).

Les références particulièrement recommandées pour ce chapitre sont [Rud1, Bre, Far].

2.1 L'espace vectoriel des fonctions harmoniques planes

Nous identifions $\mathbb{R}^2$ dont un point générique est noté (x, y) avec $\mathbb{C}$ dont un point générique est noté z, par l'application $(x, y) \mapsto z = x+iy$. Nous notons $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ les dérivées par rapport à la première coordonnée et à la seconde coordonnée dans $\mathbb{R}^2$ respectivement, ainsi que

$$\partial = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big) \quad \text{et} \quad \overline{\partial} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big) \ .$$

L'opérateur *laplacien* (de l'espace euclidien de dimension 2), agissant sur les fonctions complexes (a priori deux fois différentiables) définies sur un ouvert de $\mathbb{C}$, est

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\,\partial\overline{\partial} = 4\,\overline{\partial}\partial \ ,$$

comme le montrent immédiatement un petit calcul et le lemme de Schwarz (de commutation de $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$). Il est linéaire et la première formule montre qu'il envoie toute fonction réelle (deux fois différentiable) sur une fonction réelle.

Une *fonction harmonique* est une application deux fois différentiable $f : \Omega \to \mathbb{C}$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, telle que

$$\Delta f = 0 \ .$$

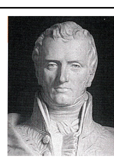
Cette équation s'appelle l'*équation de Laplace* [12] dans Ω.

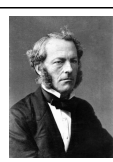
Exemples. (1) Toute fonction holomorphe est harmonique, car une application holomorphe est deux fois différentiable, et si $\overline{\partial} f = 0$, alors $\partial\overline{\partial} f = 0$. Par contre, l'application $z \mapsto \operatorname{Re} z$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est harmonique, mais n'est pas holomorphe.

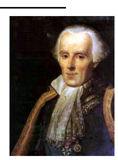
(2) Une application d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est harmonique si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

L'ensemble $\operatorname{Harm}(\Omega)$ des fonctions harmoniques de Ω dans $\mathbb{C}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel complexe des applications de Ω dans $\mathbb{C}$, stable par conjugaison et par passage aux parties réelles et imaginaires.

14.


Navier (1785-1836)


Stokes (1819-1903)


Laplace (1749-1827)


Poisson (1781-1840)


Lebesgue (1875-1941)

Le produit des applications harmoniques $z \mapsto z$ et $z \mapsto \overline{z}$ est l'application non harmonique $z \mapsto |z|^2$ (car $\partial\overline{\partial}(z\overline{z}) = \partial z = 1$).

(3) Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$, $f : U \to V$ une fonction holomorphe et $h : V \to \mathbb{C}$ une application de classe C^2. Alors

$$\Delta(h \circ f) = (\Delta h) \circ f \ |f'|^2 \ .$$

En effet, puisque $\partial\overline{f} = \overline{\overline{\partial} f} = 0$, nous avons

$$\begin{aligned}\overline{\partial}\partial(h \circ f) &= \overline{\partial}\big(\partial h \circ f \ \partial f + \overline{\partial} h \circ f \ \partial\overline{f}\,\big) = \overline{\partial}\big(\partial h \circ f \ f'\big) = \overline{\partial}\big(\partial h \circ f\big) \ f' \\ &= \big(\,\partial^2 h \circ f \ \overline{\partial}\, f + \overline{\partial}\partial h \circ f \ \overline{\partial}\,\overline{f}\,\big) f' = \overline{\partial}\partial h \circ f \ \overline{f'} \ f' \ .\end{aligned}$$

En particulier, si f est holomorphe et si h est harmonique, alors leur application composée $h \circ f$ est harmonique.

Par contre, la composée des deux fonctions harmoniques $z \mapsto \operatorname{Re} z$ de $\mathbb{C} - i\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^\times$ et $z \mapsto \ln|z|$ de $\mathbb{C}^\times$ dans $\mathbb{C}$ est l'application non harmonique $z \mapsto \ln|\operatorname{Re} z|$ (car localement $\partial\overline{\partial}\ln|z| = \frac{1}{2}\partial\overline{\partial}(\ln z + \ln\overline{z}) = 0$ et $\Delta(\ln|\operatorname{Re} z|) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln|x| = -\frac{1}{x^2} \neq 0$).

2.2 Noyau et intégrale de Poisson [12] sur le cercle

Le but de cette partie est d'étudier l'espace des fonctions harmoniques définies sur le disque unité ouvert du plan.

Notons $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$ le disque unité ouvert, $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1\}$ le disque unité fermé et $\mathbb{S}_1 = \partial\mathbb{D} = \partial\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$.

La mesure de Lebesgue [12] sur le cercle unité.

La *mesure de Lebesgue* σ sur $\mathbb{S}_1$ est l'unique mesure borélienne positive de masse totale 2π, invariante par les rotations. Si λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et si $p : [0, 2\pi[\ \to \mathbb{S}_1$ est l'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$, alors $\sigma = p_*\lambda$ est la mesure image de (la restriction à $[0, 2\pi[$ de) λ par p, c'est-à-dire que pour tout borélien A du cercle, $\sigma(A) = \lambda(p^{-1}(A))$. De manière équivalente, σ est l'unique mesure borélienne positive de masse totale 2π sur le cercle telle que, pour toute fonction continue $f : \mathbb{S}_1 \to \mathbb{C}$, en notant de manière usuelle $d\theta = d\lambda(\theta)$,

$$\int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} f(\zeta) \ d\sigma(\zeta) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \ d\theta \ .$$

Bien sûr, par invariance par translations de λ, nous pouvons remplacer l'intervalle $[0, 2\pi]$ par n'importe quel intervalle de longueur 2π. De plus, f est intégrable pour σ (c'est-à-dire appartient à $\mathbb{L}^1(\mathbb{S}_1, \sigma; \mathbb{C})$) si et seulement si l'application $\theta \mapsto f(e^{i\theta})$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0, 2\pi]$ (c'est-à-dire appartient à $\mathbb{L}^1([0, 2\pi], \lambda; \mathbb{C})$), et alors l'égalité précédente est encore vérifiée.

Rappelons qu'un *automorphisme conforme* (ou *biholomorphisme*) d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est une bijection de Ω dans Ω, holomorphe et d'inverse holomorphe. Muni de la composition des applications, l'ensemble $\operatorname{Aut}(\Omega)$ des automorphismes conformes de Ω est un groupe. Rappelons (voir par exemple [Rud1, chap. 12]) que l'ensemble $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ des automorphismes conformes du disque ouvert $\mathbb{D}$ est l'ensemble des applications

$$\phi_{\theta,\,a} : z \mapsto e^{i\theta}\,\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}$$

où $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{D}$.

Il est facile de voir que cette application $\phi_{\theta,\,a}$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$, et même holomorphe sur le disque ouvert strictement plus grand $\{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < \frac{1}{|a|}\}$. Elle préserve le disque ouvert unité $\mathbb{D}$ et le cercle unité $\mathbb{S}_1$ car le réel

$$\Big|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\Big|^2 = \frac{|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{a}) + |a|^2}{1 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{a}z) + |a|^2|z|^2}$$

est égal à 1 (respectivement est strictement inférieur à 1) si $|z| = 1$ (respectivement $|z| < 1$). Elle est bijective de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, d'inverse

$$\phi_{-\theta,\,-a\,e^{i\theta}} : w \mapsto e^{-i\theta}\,\frac{z + a\,e^{i\theta}}{1 + \overline{a}\,e^{-i\theta}z}\ .$$

Elle envoie le point a sur le point 0. En particulier, les automorphismes conformes de $\mathbb{D}$ fixant 0 sont exactement les rotations $\phi_{\theta,\,0} : z \mapsto e^{i\theta}z$.

La mesure de Lebesgue σ sur $\mathbb{S}_1$ est invariante par les rotations, mais elle n'est pas invariante par tous les automorphismes conformes de $\mathbb{D}$. En effet, par le théorème de changement de variable et le fait que le jacobien [15] d'une fonction holomorphe soit le module de sa dérivée complexe, en posant $e^{is} = \phi_{\theta,\,a}(e^{it})$, nous avons, pour tout $f \in \mathscr{C}(\mathbb{S}_1;\mathbb{C})$,

$$\int_0^{2\pi} f(e^{is})\,ds = \int_0^{2\pi} f\circ\phi_{\theta,\,a}(e^{it})\big|\phi'_{\theta,\,a}(e^{it})\big|\,dt\ . \tag{19}$$

Pour tout $\zeta \in \mathbb{S}_1$, le jacobien en ζ de l'application holomorphe $\phi_{\theta,\,a}$ pour la mesure de Lebesgue σ existe donc et vaut

$$\big|\phi'_{\theta,\,a}(\zeta)\big| = \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}\,\zeta|^2} = \frac{1-|a|^2}{|\zeta - a|^2}\ ,$$

puisque $\zeta = 1\,/\,\overline{\zeta}$. Ce jacobien n'est pas constant égal à 1 si $a \neq 0$ (il vaut alors par exemple $\frac{1+|a|}{1-|a|} > 1$ au point $\zeta = \frac{a}{|a|}$). Ce jacobien, qui est indépendant de θ, sera noté $P_a(\zeta)$ et, en tant que fonction de a et ζ, sera appelé le noyau de Poisson de $\mathbb{D}$ dans ce qui suit.

Le noyau de Poisson. [10]

Le *noyau de Poisson* de $\mathbb{D}$ est l'application continue $P : \mathbb{D}\times\mathbb{S}_1 \to\ ]0,+\infty[$ définie par

$$(z,\zeta) \mapsto P_z(\zeta) = \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}\ .$$

15. **Remarque.** Si $\varphi : U \to V$ est un difféomorphisme C^1 entre ouverts de $\mathbb{R}^n$, nous avons (égalité pour presque tout $x \in U$ pour la mesure de Lebesgue λ) la relation suivante entre d'une part la dérivée de Radon-Nykodim de la mesure image $\varphi_*\lambda$ par rapport à λ et d'autre part le *jacobien* $\mathrm{jac}\,\varphi : x \mapsto |\det(d_x\varphi)|$:

$$\frac{d\varphi_*\lambda}{d\lambda}(\varphi(x)) = \frac{1}{\mathrm{jac}\,\varphi(x)}\ .$$

Donc si $g : V \to \mathbb{C}$ est continue, nous avons

$$\int_V g\,d\lambda = \int_U g\circ\varphi\ \mathrm{jac}\,\varphi\ d\lambda\ .$$

Des petits calculs donnent les expressions suivantes du noyau de Poisson, où $\zeta = e^{it} \in \mathbb{S}_1$ et $z = r\,e^{i\theta} \in \mathbb{D}$:

$$P_z(\zeta) = \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right) \tag{20}$$

$$= \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t-\theta) + r^2} \tag{21}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(t-\theta)} \ . \tag{22}$$

(Utiliser $\mathrm{Re}\,\frac{a}{b} = \frac{1}{2}(\frac{a}{b} + \frac{\overline{a}}{\overline{b}}) = \frac{1}{2}\frac{a\overline{b}+\overline{a}b}{|b|^2}$ pour obtenir la formule (20). Remplacer z par $re^{i\theta}$ et ζ par e^{it} dans la définition de P pour obtenir (21). Pour la formule (22), il suffit d'écrire la série absolument convergente $\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int'}$ en séparant les $n < 0$, $n = 0$, $n > 0$; deux séries géométriques apparaissent, et la somme de cette série est alors $\frac{r\,e^{-it'}}{1-r\,e^{-it'}} + 1 + \frac{r\,e^{it'}}{1-r\,e^{it'}}$.)

Énonçons les propriétés de base du noyau de Poisson. La formule (22), ou directement la formule de changement de variable (19), montre que

$$\int_{\mathbb{S}_1} P_z(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{S}_1} d\sigma = 2\pi \ .$$

La définition du noyau de Poisson montre que

$$P_z(\zeta) = P_{\overline{z}}(\overline{\zeta}\,) \ ,$$

que si $\zeta' \in \mathbb{S}_1$ et $r \in [0,1[$, alors, en utilisant le fait que $w^{-1} = \overline{w}$ si $w \in \mathbb{S}_1$,

$$P_{r\zeta'}(\zeta) = P_{r\zeta}(\zeta') = P_r(\zeta'\,\overline{\zeta}\,) \ ,$$

et que, par l'inégalité triangulaire,

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq P_z(\zeta) = \frac{(1-|z|)(1+|z|)}{|\zeta - z|^2} \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \ .$$

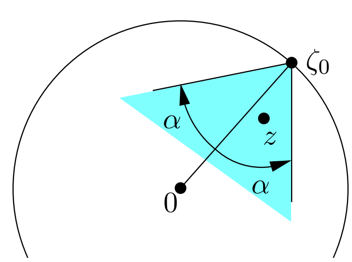
La formule (20) montre que, pour tout $\zeta \in \mathbb{S}_1$, l'application $z \mapsto P_z(\zeta)$ de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$ est harmonique, comme partie réelle d'une application holomorphe. La formule (21) montre que l'application $t \mapsto P_z(e^{it})$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[\theta, \theta + \pi]$ si $z = r\,e^{i\theta}$. Remarquons que pour tous les $\zeta_0, \zeta \in \mathbb{S}_1$, nous avons

$$\lim_{z\to\zeta_0} P_z(\zeta) = 0 \ \text{ si } \ \zeta_0 \neq \zeta \ .$$

De plus, la convergence vers 0 de $P_z(\zeta)$ quand z tend vers ζ_0 est uniforme pour ζ en dehors de tout voisinage de ζ_0.

Soit $\zeta_0 \in \mathbb{S}_1$. Pour tout $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$, notons

$$C_\alpha(\zeta_0) = \{z \in \mathbb{D} \ : \ \left|\arg\left(1 - \frac{z}{\zeta_0}\right)\right| \leq \alpha\} \ .$$



Nous dirons qu'une application $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *converge radialement vers* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ quand z tend vers ζ_0 s'il existe $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\lim_{z\to\zeta_0,\, z\in C_\alpha(\zeta_0)} f(z) = \ell$.

Pour tous les $\zeta_0 \in \mathbb{S}_1$, l'application $z \mapsto P_z(\zeta_0)$ converge radialement vers $+\infty$ quand z tend vers ζ_0 : en fait, pour tout $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$, nous avons

$$\lim_{z \to \zeta_0,\ z \in C_\alpha(\zeta_0)} P_z(\zeta_0) = +\infty\ .$$

En effet, en posant $1 - \frac{z}{\zeta_0} = re^{i\theta}$, si $z \in C_\alpha(\zeta_0)$, alors $|\theta| \leq \alpha$ et

$$P_z(\zeta_0) = \frac{1 - |1 - re^{i\theta}|^2}{r^2} = \frac{2\cos\theta - r}{r} \geq \frac{2\cos\alpha - r}{r}\ ,$$

qui converge vers $+\infty$ quand z converge vers ζ_0, car $\cos\alpha > 0$ et r converge vers 0.

Remarque. En terme de mesures, la convergence uniforme pour ζ en dehors de tout voisinage de ζ_0 de $P_z(\zeta)$ vers 0 quand z tend vers ζ_0, ainsi que le fait que l'intégrale sur $\zeta \in \mathbb{S}_1$ de $P_z(\zeta)$ vaille 2π, entraîne que la mesure de probabilité $\frac{1}{2\pi} P_z(\zeta)\ d\sigma(\zeta)$ sur $\mathbb{S}_1$ converge (pour la convergence faible-étoile, dite aussi *vague*) vers la masse de Dirac unité en ζ_0 quand $z \to \zeta_0$. Rappelons qu'une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de mesures boréliennes de probabilité sur un espace topologique compact X converge vaguement vers une mesure borélienne de probabilité μ sur X si et seulement si, pour tout $f \in \mathscr{C}(X;\mathbb{C})$, la suite $\big(\mu_n(f) = \int_X f\ d\mu_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mu(f) = \int_X f\ d\mu$ dans $\mathbb{C}$.

L'intégrale de Poisson.

Si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{S}_1, \sigma; \mathbb{C})$ est une application intégrable sur le cercle à valeurs dans $\mathbb{C}$, nous appellerons *intégrale de Poisson* de f l'application $Pf = P[f] : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ définie par

$$Pf(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} P_z(\zeta) f(\zeta)\ d\sigma(\zeta)\ .$$

Si μ est une mesure borélienne complexe sur $\mathbb{S}_1$ (voir la définition dans la partie 1.1), nous appellerons *intégrale de Poisson* de μ l'application $P\mu = P[\mu] : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ définie par

$$P\mu(z) = \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} P_z(\zeta)\ d\mu(\zeta)\ .$$

Certaines références (dont [Rud1]) mettent un facteur $\frac{1}{2\pi}$ devant cette intégrale. Bien sûr, si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{S}_1, \sigma; \mathbb{C})$, alors $d\mu(\zeta) = \frac{1}{2\pi} f(\zeta)\ d\sigma(\zeta)$ est une mesure borélienne complexe sur $\mathbb{S}_1$, et $P\mu = Pf$.

Par les propriétés de continuité des intégrales à paramètres, le noyau de Poisson étant, pour tout compact K de $\mathbb{D}$, uniformément continu sur $K \times \mathbb{S}_1$, l'intégrale de Poisson est continue sur $\mathbb{D}$ (nous verrons que sa régularité est bien plus importante, en particulier C^∞, par le théorème de Poisson 2.1 (1) et la proposition 2.3).

Notons que $\mu \mapsto P\mu$ est une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_1)$ des mesures boréliennes complexes sur $\mathbb{S}_1$ à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathbb{D};\mathbb{C})$ des applications continues de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{C}$, et donc que $f \mapsto Pf$ est une application linéaire de $\mathbb{L}^1(\mathbb{S}_1, \sigma; \mathbb{C})$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{D};\mathbb{C})$. Lorsque $\mathscr{C}(\mathbb{D};\mathbb{C})$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, ces applications sont continues : pour tout compact K de $\mathbb{D}$, si $c_K = \sup_{(z,\zeta)\in K\times\mathbb{S}_1} P_z(\zeta)$, nous avons, pour tous les $\mu \in \mathscr{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_1)$ et $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{S}_1, \sigma; \mathbb{C})$,

$$\sup_{z\in K} |P\mu(z)|\ \leq\ c_K\ \|\mu\|_{\mathscr{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_1)} \quad \text{et} \quad \sup_{z\in K} |Pf(z)|\ \leq\ c_K\ \|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{S}_1, \frac{\sigma}{2\pi}; \mathbb{C})}\ .$$

Théorème 2.1 (Théorème de Poisson) *(1) Pour toute mesure borélienne complexe μ sur $\mathbb{S}_1$, l'application $P\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est harmonique ; elle est à valeurs réelles (respectivement positives) si μ est une mesure réelle (respectivement positive).*

(2) Si une application $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{S}_1, \sigma; \mathbb{C})$ est continue en un point $\zeta_0 \in \mathbb{S}_1$, alors l'application $u : \mathbb{D} \cup \{\zeta_0\} \to \mathbb{C}$, qui coïncide avec Pf sur $\mathbb{D}$ et vaut $f(\zeta_0)$ en ζ_0, est continue.

(3) Si $u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ est une application continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et harmonique sur $\mathbb{D}$, alors u coïncide sur $\mathbb{D}$ avec l'intégrale de Poisson de sa restriction à $\mathbb{S}_1$: pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$u(z) = P[u_{|\mathbb{S}_1}](z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} P_z(\zeta)\, u(\zeta)\, d\sigma(\zeta)\,. \tag{23}$$

En particulier, si u est réelle, alors u est égale sur $\mathbb{D}$ à la partie réelle de l'application holomorphe $z \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, u(\zeta)\, d\sigma(\zeta)$.

Il découle de (1) que pour tout $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{S}_1, \sigma; \mathbb{C})$, l'application $Pf : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est bien définie et harmonique ; de plus, Pf est à valeurs réelles (respectivement à valeurs positives ou nulles) si f l'est.

Il découle de (2) que si $f \in \mathscr{C}(\mathbb{S}_1; \mathbb{C})$ est une application continue du cercle dans $\mathbb{C}$, alors l'application $u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ qui coïncide avec f sur $\mathbb{S}_1$ et avec Pf sur $\mathbb{D}$ est continue.

La formule (23) est appelée la *formule de Poisson*.

Démonstration. (1) Si μ est une mesure réelle, alors pour tout $z \in \mathbb{D}$, nous avons

$$P\mu(z) = \mathrm{Re}\Big(\int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu(\zeta)\Big)\,.$$

Donc $P\mu$ est harmonique, comme partie réelle d'une application holomorphe (ceci par la proposition B.1 de l'appendice B, ou par le théorème de dépendance holomorphe en le paramètre d'une intégrale à paramètre). Comme toute mesure complexe μ s'écrit $\mu_1 + i\mu_2$ où μ_1 et μ_2 sont des mesures réelles, le premier résultat en découle par linéarité. Comme le noyau de Poisson est à valeurs positives, les autres affirmations sont immédiates.

(2) Rappelons que la famille $(P_z)_{z\in\mathbb{D}}$ d'applications continues de $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes des familles régularisantes :

- $P_z \geq 0$,
- $\|P_z\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{S}_1, \frac{\sigma}{2\pi}; \mathbb{C})} = 1$,
- pour tout $\delta > 0$ fixé, $P_z(\zeta)$ converge vers 0, uniformément sur $\{\zeta \in \mathbb{S}_1 \;:\; |\zeta - \zeta_0| \geq \delta\}$, quand z tend vers ζ_0.

Par cette dernière propriété, et par la continuité en ζ_0 de f, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\zeta \in \mathbb{S}_1$ tel que $|\zeta - \zeta_0| \leq \delta$, nous ayons $|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \leq \epsilon$ et tel que, pour tout z assez proche de ζ_0 et pour tout $\zeta \in \mathbb{S}_1$ tel que $|\zeta - \zeta_0| \geq \delta$, nous ayons

$P_z(\zeta) \leq \epsilon$. Alors, puisque $\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} P_z(\zeta)\, \frac{d\sigma(\zeta)}{2\pi} = 1$, si z est assez proche de ζ_0, nous avons

$$
\begin{aligned}
|Pf(z) - f(\zeta_0)| &= \Big|\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} (f(\zeta) - f(\zeta_0))\, P_z(\zeta)\, \frac{d\sigma(\zeta)}{2\pi}\Big| \leq \int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} |f(\zeta) - f(\zeta_0)|\, P_z(\zeta)\, \frac{d\sigma(\zeta)}{2\pi} \\
&\leq \Big(\sup_{|\zeta-\zeta_0|\geq\delta} P_z(\zeta)\Big) \int_{|\zeta-\zeta_0|\geq\delta} |f(\zeta) - f(\zeta_0)|\, \frac{d\sigma(\zeta)}{2\pi} \\
&\quad + \Big(\sup_{|\zeta-\zeta_0|\leq\delta} |f(\zeta) - f(\zeta_0)|\Big) \int_{|\zeta-\zeta_0|\leq\delta} P_z(\zeta)\, \frac{d\sigma(\zeta)}{2\pi} \\
&\leq \epsilon\big(\|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{S}_1,\frac{\sigma}{2\pi};\mathbb{C})} + |f(\zeta_0)| + 1\big)\ ,
\end{aligned}
$$

ce qui montre le résultat.

(3) Par linéarité, en écrivant une fonction à valeurs complexes comme somme de sa partie réelle et de sa partie imaginaire multipliée par i, nous pouvons supposer que u est à valeurs réelles. Notons v l'application de $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $v_{|\mathbb{D}} = u - P[u_{|\mathbb{S}_1}]$ et $v_{|\mathbb{S}_1} = 0$. Elle est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, nulle sur $\mathbb{S}_1$ et harmonique sur $\mathbb{D}$, par les assertions (2) et (1). Montrons que $v = 0$. Par l'absurde, supposons qu'il existe un point $z_0 \in \mathbb{D}$ en lequel v ne s'annule pas. Quitte à remplacer u par $-u$, nous pouvons supposer que $v(z_0) > 0$. Posons $\epsilon = \frac{v(z_0)}{8} > 0$. L'application $w : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ définie par

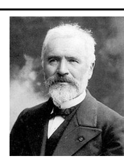
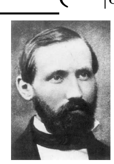
$$
w(z) = v(z) + \epsilon\,(\mathrm{Re}(z - z_0))^2 - 4\epsilon
$$

est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, négative ou nulle sur $\mathbb{S}_1$ (car $|z - z_0| \leq |z| + |z_0| \leq 2$), et strictement positive en z_0, par la définition de ϵ. Elle atteint donc son maximum sur le compact $\overline{\mathbb{D}}$ en un point z_1 de $\mathbb{D}$. En particulier, les dérivées $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ sont négatives ou nulles en z_1. Donc $\Delta w(z_1) \leq 0$. Mais un petit calcul, puisque v est harmonique en z_1, montre que $\Delta w(z_1) = 2\epsilon > 0$, une contradiction. $\square$

Une première conséquence immédiate du théorème de Poisson est la possibilité de résoudre l'équation de Laplace avec des valeurs continues données au bord, dans le cas du disque. Nous reviendrons sur ce problème, appelé le *problème de Dirichlet*,[16] pour des ouverts plus généraux dans la partie 2.3.

Corollaire 2.2 (Problème de Dirichlet dans les disques) *Soient $\Omega = B(a, r)$ le disque ouvert de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$, et $f : \partial\Omega = S(a, r) \to \mathbb{C}$ une application continue sur le cercle de centre a et de rayon r à valeurs dans $\mathbb{C}$. Il existe une et une seule application continue $u : \overline{\Omega} = \overline{B}(a, r) \to \mathbb{C}$ sur le disque fermé de centre a et de rayon r à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $u_{|\Omega}$ soit de classe C^2 et*

$$
\begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{dans } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = f\,. \end{cases}
$$

16.    

Dirichlet (1805-1859)	Jordan (1838-1922)	Riemann (1826-1866)	Carathéodory (1873-1950)

Démonstration. L'application $v : z \mapsto a + rz$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est holomorphe, bijective d'inverse holomorphe. Elle envoie $\mathbb{D}$ sur $B(a,r)$. L'application u valant f sur $S(a,r)$ et valant $P[f \circ v_{|\mathbb{S}_1}] \circ v^{-1}$ sur $B(a,r)$ convient par les assertions (1) et (2) du théorème de Poisson (et parce que précomposer par une application holomorphe préserve le caractère harmonique). C'est la seule solution u au problème de Dirichlet, par l'assertion (3) appliquée à $u \circ v$. $\square$

Exercice E.25 *Le* demi-plan supérieur *est l'ouvert* $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im} z > 0\}$ *de* $\mathbb{C}$.

(1) Montrer que l'application $Q : \mathbb{H} \times \mathbb{R} \to \,]0, +\infty[$ *définie par*

$$(z,t) \mapsto Q_z(t) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z-t|^2}$$

est continue, strictement positive sur $\mathbb{H}$ *et vérifie :*

$$\int_{t \in \mathbb{R}} Q_z(t) \; dt = \pi \ ,$$

$$Q_z(t) = \operatorname{Im}\Big(\frac{1+tz}{t-z}\Big) \; \frac{1}{1+t^2} \ .$$

Cette application est appelée le noyau de Poisson *de* $\mathbb{H}$.

En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$*, l'application* $z \mapsto Q_z(t)$ *est harmonique. Pour tout* $t_0 \in \mathbb{R}$*, montrer que* $Q_z(t_0)$ *converge vers* $+\infty$ *quand* z *tend vers* t_0 radialement *(c'est-à-dire en restant dans un domaine* $\{w \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im} w \geq (\sin \epsilon)|\operatorname{Re} w - t_0|\}$*, où* $\epsilon \in \,]0, \pi[$ *est fixé) et que* $Q_z(t)$ *tend vers* 0 *quand* z *tend vers* $t_0 \neq t$*, uniformément pour* $t \in \mathbb{R}$ *en dehors de tout voisinage de* t_0*. Montrer que* $Q_z(t)$ *tend vers* 0 *quand* $|z|$ *tend vers* $+\infty$*, uniformément pour* t *dans un compact de* $\mathbb{R}$.

(2) Notons λ *la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$ *(et comme d'habitude* $dt = d\lambda(t)$*). Pour tout* $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \lambda; \mathbb{C})$*, montrer que l'application* $P_{\mathbb{H}} f = P_{\mathbb{H}}[f] : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ *définie par*

$$P_{\mathbb{H}} f : z \mapsto \frac{1}{\pi} \int_{t \in \mathbb{R}} Q_z(t) \, f(t) \; dt$$

est harmonique ; montrer que $P_{\mathbb{H}} f$ *est à valeurs réelles (respectivement positives ou nulles) si* f *l'est.*

(3) Une application $g : A \to \mathbb{C}$*, où* A *est une partie non bornée de* $\mathbb{C}$*, est dite* nulle à l'infini *si* $g(z)$ *converge vers* 0 *quand* $z \in A$ *et* $|z|$ *tend vers* $+\infty$*. Si* $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \lambda; \mathbb{C})$ *est continue en un point* $t_0 \in \mathbb{R}$*, montrer que l'application* $u : \mathbb{H} \cup \{t_0\} \to \mathbb{C}$*, qui coïncide avec* $P_{\mathbb{H}} f$ *sur* $\mathbb{H}$ *et vaut* $f(t_0)$ *en* t_0*, est continue. En déduire que si* f *est continue et intégrable, alors l'application* $u : \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*, qui coïncide avec* $P_{\mathbb{H}} f$ *sur* $\mathbb{H}$ *et vaut* f *sur* $\mathbb{R}$*, est continue ; montrer de plus que* u *est nulle à l'infini si* f *est nulle à l'infini.*

(4) Pour tout $z_0 \in \mathbb{H}$*, montrer que l'application* $h = h_{z_0}$ *de* $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im} z > -1\}$ *dans* $[0, +\infty[$ *définie par* $z \mapsto \big(\operatorname{Im} \frac{z - z_0}{(z+i)(z_0+i)}\big)^2$ *est* C^∞*, nulle en* z_0*, majorée par* 4 *en tout point de* $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$*, et de laplacien strictement positif sur* $\mathbb{H}$*. Montrer que* $h(z)$ *converge vers une valeur strictement inférieure à* 1 *quand* $|z|$ *tend vers* $+\infty$.

(5) Montrer que si $u : \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est une application continue, harmonique sur* $\mathbb{H}$*, intégrable sur* $\mathbb{R}$ *(pour la mesure de Lebesgue) et nulle à l'infini, alors pour tout* $z \in \mathbb{H}$*,*

$$u(z) = P_{\mathbb{H}}[u_{|\mathbb{R}}](z) = \frac{1}{\pi} \int_{t \in \mathbb{R}} Q_z(t) \, u(t) \; dt \ .$$

Dans les sous-parties suivantes, nous déduisons du théorème de Poisson plusieurs propriétés fondamentales des fonctions harmoniques.

Analycité des applications harmoniques.

Nous avions vu qu'une application holomorphe est harmonique, mais que la réciproque n'est pas vraie. Nous montrons maintenant que toute fonction harmonique réelle est localement la partie réelle d'une application holomorphe (ce qui découle facilement du théorème de Poisson), et donc vérifie des propriétés de régularités bien plus fortes que d'être deux fois différentiables.

Proposition 2.3 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $u : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction harmonique.*

Si u est à valeurs réelles, pour tout $z \in \Omega$, il existe un ouvert U de $\mathbb{C}$ et une application holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ tels que $z \in U \subset \Omega$ et $u = \operatorname{Re} f$ sur U.

L'application u est de classe C^∞ sur Ω, et même analytique réelle (voir l'appendice B pour une définition).

L'application u vérifie le principe du prolongement analytique *: si Ω est connexe, et si u et toutes ses dérivées partielles de tous ordres s'annulent en un point donné z_0 de Ω, alors u est l'application nulle.*

Démonstration. Pour tout $z_0 \in \Omega$, soit $r > 0$ tel que le disque fermé $\overline{B}(z_0, r)$ soit contenu dans Ω. Supposons que u soit à valeurs réelles, et montrons que u est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur le disque ouvert $B(z_0, r)$. Quitte à précomposer u par l'application holomorphe $z \mapsto z_0 + rz$ (ce qui préserve le caractère harmonique), nous pouvons supposer que $z_0 = 0$ et $r = 1$. Alors l'application u, qui est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et harmonique sur $\mathbb{D}$, coïncide sur $\mathbb{D}$ avec $P[u_{|\mathbb{S}_1}]$ par l'assertion (3) du théorème de Poisson. C'est donc la partie réelle d'une application holomorphe, comme nous l'avons vu dans la démonstration de l'assertion (1) du théorème de Poisson.

Rappelons (voir l'appendice B) qu'une application holomorphe est analytique réelle, qu'une application à valeurs dans $\mathbb{C}$ est analytique réelle si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont, et qu'une application analytique réelle vérifie le principe du prolongement analytique. Ceci conclut. $\square$

Exercice E.26 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une application harmonique. Montrer que l'application $v : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par*

$$(x, y) \mapsto x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$$

est harmonique.

Propriété de la valeur moyenne et principe du maximum.

Le résultat suivant donne une caractérisation purement continue des fonctions harmoniques u, qui permet en particulier d'éviter d'avoir à vérifier en préalable qu'elles sont de classe C^2 : il faut et il suffit que u soit en tout point z égale à sa moyenne sur des cercles de rayons suffisamment petits centrés en z. Le caractère nécessaire de cette condition est une application immédiate du théorème de Poisson.

Théorème 2.4 (Formule de la moyenne) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $u : \Omega \to \mathbb{C}$ une application continue. Alors u est harmonique si et seulement si, pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r \in \,]0, r_0[\,$,*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r\, e^{i\theta})\, d\theta \ .$$

Nous montrerons que cette propriété est en fait vraie pour tout $r_0 > 0$ tel que le disque ouvert $B(z_0, r_0)$ soit contenu dans Ω : un tel r_0 dépend de z_0 et de Ω, mais peut être choisi de sorte à ne pas dépendre de la fonction harmonique u définie sur Ω.

Nous montrerons ce résultat en même temps que le suivant, à rapprocher bien sûr du principe du maximum pour les applications holomorphes : une fonction harmonique réelle qui atteint sa borne supérieure en un point (intérieur) d'un ouvert connexe est constante.

Théorème 2.5 (Principe du maximum) *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $u : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction harmonique. Supposons qu'il existe un point $z_0 \in \Omega$ et un voisinage Ω' de z_0 dans Ω tels que*

$$\forall\, z \in \Omega', \quad |u(z)| \leq |u(z_0)|$$

ou, si u est à valeurs réelles, tel que

$$\forall\, z \in \Omega', \quad u(z) \leq u(z_0) \ .$$

Alors u est constante sur Ω.

Avant de démontrer ces résultats, donnons un corollaire immédiat du théorème 2.5, aussi parfois appelé principe du maximum.

Corollaire 2.6 *Soient Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{C}$ et $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ une application continue, harmonique dans Ω. Alors $|u|$ et $\mathrm{Re}(u)$ atteignent leur maximum en au moins un point de la frontière de Ω.*

Il est important de faire attention à la formulation de ce résultat : par exemple, si u est constante, alors $|u|$ et $\mathrm{Re}(u)$ atteignent aussi leur maximum en un point intérieur de Ω (ainsi qu'en tout point de la frontière de Ω !).

Démonstration. Puisque u est continue et $\overline{\Omega}$ compact, $|u|$ (respectivement $\mathrm{Re}(u)$) atteint bien son maximum sur $\overline{\Omega}$. Si ce maximum est atteint en un point intérieur $z_0 \in \Omega$, alors, par le principe du maximum, u (respectivement $\mathrm{Re}(u)$) est constante sur la composante connexe Ω_0 de z_0 dans Ω, donc sur son adhérence par continuité. Donc $|u|$ (respectivement $\mathrm{Re}(u)$) atteint aussi son maximum en au moins un point de la frontière de Ω_0, qui est contenue dans celle de Ω. □

Démonstration des théorèmes 2.4 et 2.5. Notons que puisque Ω est ouvert et u continue, l'intégrale dans l'énoncé du théorème de la moyenne est bien définie pour r_0 assez petit.

Étape 1. Supposons que u soit harmonique sur Ω, et montrons que u vérifie la propriété de la valeur moyenne.

Pour tout $z_0 \in \Omega$, soit $r_0 > 0$ tel que la boule ouverte $B(z_0, r_0)$ soit contenue dans Ω, et montrons que la formule de la moyenne est vérifiée pour tout $r \in \,]0, r_0[\,$. Supposons tout d'abord que $z_0 = 0$ et que $r = 1$. Alors $r_0 > 1$, et u est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et harmonique sur $\mathbb{D}$. Par le théorème de Poisson 2.1 (3), et puisque $P_0(\zeta) = 1$ pour tout $\zeta \in \mathbb{S}_1$, nous avons donc

$$u(0) = P[u_{|\mathbb{S}_1}](0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\; d\theta\;,$$

ce qui montre le résultat. Le cas général s'en déduit, en précomposant u par l'application holomorphe $z \mapsto z_0 + rz$.

Étape 2. Supposons que u vérifie la propriété de la valeur moyenne, et montrons que u vérifie le principe du maximum.

Soit $z_0 \in \Omega$ vérifiant l'une des deux conditions de l'énoncé du théorème 2.5. Nous pouvons supposer que Ω' est connexe. Quitte à multiplier u par un nombre complexe de module 1 dans le premier cas, ou quitte à ajouter à u une constante suffisamment grande dans le second cas, nous pouvons supposer que $u(z_0) \geq 0$. Notons A l'ensemble des points $z \in \Omega'$ tels que $u(z) = u(z_0)$. Il est non vide, et fermé car u est continue. Montrons qu'il est ouvert. Par la connexité de Ω', ceci montre que u est constante sur Ω'. Par le principe du prolongement analytique (voir la proposition 2.3) et par la connexité de Ω, ceci implique le résultat.

Soit $z \in A$. Soit $r_0 > 0$ tel que $B(z, r_0) \subset \Omega'$. Par la propriété de la valeur moyenne, quitte à diminuer r_0, pour tout $r \in \,]0, r_0[\,$, nous avons (en utilisant le fait que $u(z_0) = |u(z_0)|$ dans le premier cas)

$$\begin{aligned} u(z_0) = u(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + r\,e^{i\theta})\; d\theta \\ &\leq \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(z + r\,e^{i\theta})|\; d\theta \leq |u(z_0)| = u(z_0) & \text{dans le premier cas} \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0)\; d\theta = u(z_0) & \text{dans le second cas.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Les cas d'égalités (rappelons que si f est continue à valeurs complexes et $|\int f| = \int |f|$ alors f est d'argument constant) entraînent donc que $u(z + r\,e^{i\theta})$ est réel positif, égal à $u(z_0)$. Donc $B(z, r_0) \subset A$, et A est ouvert, ce qu'il fallait démontrer.

Étape 3. Supposons que u vérifie la propriété de la valeur moyenne, et montrons que u est harmonique.

Soient $a \in \Omega$ et $R > 0$ tels que le disque fermé $\overline{B}(a, R)$ soit contenu dans Ω et u vérifie la propriété de la moyenne dans $B(a, r)$. Notons $v : \overline{B}(a, R) \to \mathbb{C}$ la solution du problème de Dirichlet sur le disque $\overline{B}(a, R)$ telle que $v_{|S(a,\,R)} = u_{|S(a,\,R)}$ (voir le corollaire 2.2). Alors $v - u$ est continue sur $\overline{B}(a, R)$ et vérifie la propriété de la valeur moyenne dans $B(a, R)$, par l'étape (1) et par linéarité. Par l'étape (2), $v - u$ vérifie donc le principe du maximum. Le corollaire 2.6, dont la démonstration n'utilise que le principe du maximum, peut être appliqué à $v - u$. Donc $|v - u|$ atteint son maximum sur la frontière du disque (connexe) $B(a, R)$. Comme $u = v$ sur cette frontière, ce maximum est nul, donc $0 \leq |u - v| \leq 0$: l'application u coïncide donc avec v sur $B(a, R)$, et par conséquent u est harmonique sur $B(a, R)$. Comme la propriété d'être harmonique est locale, ceci conclut l'étape 3.

La combinaison des étapes 1 et 2 montre le théorème 2.5 du principe du maximum. L'étape 1 est le sens direct du théorème 2.4 de la formule de la moyenne, et l'étape 3 en est le sens réciproque. $\square$

Le but de l'exercice suivant est de montrer qu'une fonction harmonique réelle h n'a pas de zéro isolé, c'est-à-dire que si $h(z) = 0$, alors il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers z, telle que $z_n \neq z$ et $h(z_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice E.27 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une application harmonique réelle. Pour tout $z_0 \in \Omega$ tel que $u(z_0) = 0$, pour tout disque ouvert D de centre z_0 et d'adhérence contenue dans Ω, montrer que u s'annule sur ∂D. En déduire qu'une fonction harmonique réelle n'a pas de zéro isolé.*

Inégalités de Harnack et théorème de Harnack.

Le but de cette partie est de montrer des théorèmes de compacité pour les fonctions harmoniques. Le lemme crucial consiste à montrer qu'une fonction harmonique ne peut pas avoir de variations trop brutales : plus précisément, si une application est harmonique, positive ou nulle, au voisinage d'un disque, alors ses valeurs au bord de ce disque sont contrôlées en fonction du rayon de ce disque et de la valeur au centre du disque.

Lemme 2.7 (Inégalités de Harnack) *Soit $u : B(z_0, R) \to \mathbb{C}$ une fonction harmonique, positive ou nulle. Pour tous les $r \in [0, R[$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, nous avons*

$$\frac{R-r}{R+r}\, u(z_0) \leq u(z_0 + r\, e^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r}\, u(z_0)\ .$$

Démonstration. Par passage à la limite quand ϵ tend vers 0, il suffit de montrer que pour tous les $\epsilon \in\,]0, R[\,$, $r \in [0, R-\epsilon[$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, nous avons

$$\frac{R-\epsilon-r}{R-\epsilon+r}\, u(z_0) \leq u(z_0 + r\, e^{i\theta}) \leq \frac{R-\epsilon+r}{R-\epsilon-r}\, u(z_0)\ .$$

Traitons tout d'abord le cas particulier où $z_0 = 0$ et $R-\epsilon = 1$. Alors, puisque $1 = R-\epsilon < R$, l'application u est harmonique sur $\mathbb{D}$ et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. Par le théorème de Poisson 2.1 (3), nous avons donc, puisque $r < R - \epsilon = 1$,

$$u(r\, e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} P_{r\, e^{i\theta}}(\zeta)\; u(\zeta)\; d\sigma(\zeta)\ .$$

Comme

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq P_z(\zeta) \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}\ ,$$

et puisque $u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} u(\zeta)\; d\sigma(\zeta)$ par la formule de la moyenne, nous en déduisons donc que

$$\frac{1-r}{1+r}\, u(0) \leq u(r\, e^{i\theta}) \leq \frac{1+r}{1-r}\, u(0)\ ,$$

ce qui montre le cas particulier considéré. Le cas général s'y ramène, en précomposant u par l'application holomorphe $z \mapsto z_0 + (R-\epsilon)z$ (ce qui préserve le caractère harmonique positif) et en appliquant le cas particulier à $r/(R-\epsilon) < 1$. $\square$

Voici les propriétés fondamentales de convergence des fonctions harmoniques. La première assertion, analogue au cas des fonctions holomorphes (voir par exemple [Rud1]), dit que le sous-espace vectoriel $\mathrm{Harm}(\Omega)$ de l'espace $\mathscr{C}(\Omega; \mathbb{C})$ des applications continues de Ω dans $\mathbb{C}$, constitué de celles qui sont harmoniques, est fermé pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts (aussi appelée topologie compact-ouvert). Le second résultat est souvent utile pour obtenir des applications harmoniques comme solutions de problèmes de minimisation.

Théorème 2.8 (Théorème de Harnack) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions harmoniques de Ω dans $\mathbb{C}$.*

(1) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une application $u:\Omega\to\mathbb{C}$ uniformément sur les compacts de Ω, alors u est harmonique.

(2) Si Ω est connexe, si u_n est à valeurs réelles pour tout $n\in\mathbb{N}$ et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors ou bien elle converge uniformément sur les compacts vers une fonction harmonique $u:\Omega\to\mathbb{C}$, ou bien $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$ pour tout $z\in\Omega$.

Bien sûr, en prenant les opposés, si les applications u_n sont à valeurs réelles et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors pour toute composante connexe Ω_0 de Ω, ou bien cette suite converge uniformément sur les compacts de Ω_0 vers une fonction harmonique $u:\Omega_0\to\mathbb{C}$, ou bien $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-\infty$ pour tout $z\in\Omega_0$.

Démonstration. (1) Soient $z_0\in\Omega$ et $r_0>0$ tels que le disque ouvert $B(z_0,r_0)$ soit contenu dans Ω. Pour tous les $r\in\,]0,r_0[$ et $n\in\mathbb{N}$, par la formule de la moyenne (voir le théorème 2.4 et le commentaire qui suit son énoncé), nous avons

$$u_n(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_n(z_0+re^{i\theta})\,d\theta\ .$$

Puisque u_n converge vers u uniformément sur le compact $\overline{B}(z_0,r)$, et par passage à la limite dans l'égalité ci-dessus, l'application u est continue et vérifie aussi la propriété de la valeur moyenne, donc est harmonique.

(2) Quitte à remplacer u_n par u_n-u_0, nous pouvons supposer que $u_0\geq 0$. En particulier, u_n est harmonique positive. Notons $u=\sup_{n\in\mathbb{N}}u_n$ et $A=\{z\in\Omega\ :\ u(z)=+\infty\}$. Pour tout z_0 dans Ω, soit $R=R_{z_0}>0$ tel que $B(z_0,R)\subset\Omega$. Par les inégalités de Harnack, nous avons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $r\in\ [0,\frac{R}{2}]$ (et comme alors $\frac{R+r}{R-r}\leq\frac{R+R/2}{R-R/2}=3$, $\frac{R-r}{R+r}\geq\frac{R-R/2}{R+R/2}=\frac{1}{3}$),

$$\frac{1}{3}\,u_n(z_0)\leq u_n(z_0+r\,e^{i\theta})\leq 3\,u_n(z_0)\ .$$

Donc en prenant la borne supérieure sur $n\in\mathbb{N}$, nous en déduisons que A et le complémentaire de A sont ouverts. Par connexité de Ω, nous en déduisons que ou bien $A=\Omega$, ce qui est l'une des alternatives souhaitées, ou bien $A=\emptyset$, et donc pour tout $z\in\Omega$, la suite croissante $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel qui est égal à $u(z)$ par la définition de u.

Pour tous les $n,p\in\mathbb{N}$ tels que $n\geq p$, par l'inégalité de Harnack appliquée à la fonction harmonique positive u_n-u_p, nous avons, pour tout $z\in B(z_0,R/2)$,

$$u_n(z)-u_p(z)\leq 3\big(u_n(z_0)-u_p(z_0)\big)\ .$$

En faisant tendre n vers l'infini, nous avons donc $u(z)-u_p(z)\leq 3\big(u(z_0)-u_p(z_0)\big)$. La convergence au point z_0 implique alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers u

sur $B(z_0, R/2)$. Puisque tout compact de K de Ω peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes $B(z, R_z/2)$ où z parcourt K, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers u sur tout compact de Ω. Par l'assertion (1), l'application u est harmonique. □

2.3 Introduction à la théorie du potentiel dans le plan

Problème de Dirichlet dans un domaine de Jordan. [14]

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Pour toute application continue $f : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ de la frontière de Ω dans $\mathbb{C}$, le *problème de Dirichlet* sur Ω (pour l'équation de Laplace) de donnée frontière f consiste à étudier l'existence et l'unicité d'une application continue $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, harmonique sur Ω, dont la restriction à la frontière de Ω est égale à f, c'est-à-dire à étudier l'existence et l'unicité d'une application continue $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ vérifiant le système d'équations

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ sur } \Omega \text{ (équation de Laplace sur } \Omega) \\ u_{|\partial\Omega} = f \ \text{ (valeurs au bord)} \ . \end{cases}$$

Nous avons vu dans le corollaire 2.2 que si Ω est un disque ouvert, alors le problème de Dirichlet admet une et une seule solution, pour toute application continue donnée sur la frontière du disque. Le but de cette partie est d'étendre ce résultat à d'autres ouverts de $\mathbb{C}$, en utilisant le théorème de représentation conforme de Riemann. [14]

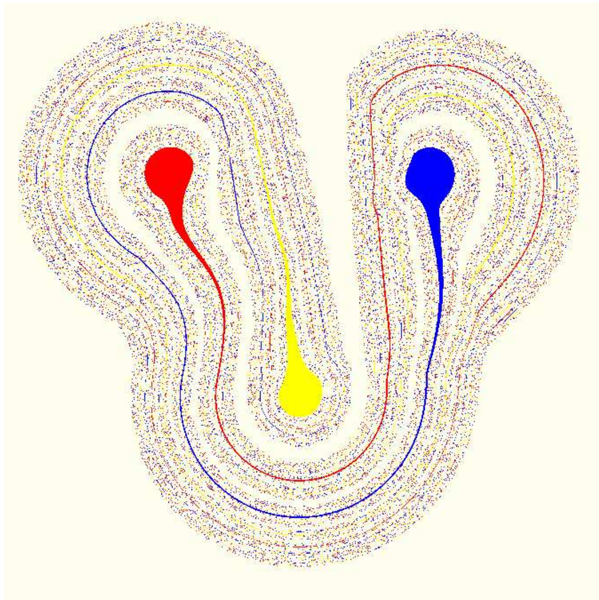
Rappelons qu'une *courbe fermée* dans Ω est une application continue f du cercle $\mathbb{S}_1$ dans Ω. Elle est dite *simple*, et appelée une *courbe de Jordan*, si elle est injective (par compacité, c'est alors un homéomorphisme sur son image). Elle est dite *homotope à zéro* dans Ω si elle se prolonge continûment en une application du disque dans Ω, c'est-à-dire s'il existe une application continue $F : \overline{\mathbb{D}} \to \Omega$ telle que $F_{|\mathbb{S}_1} = f$.

L'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est dit *simplement connexe* s'il est connexe et si toute courbe fermée dans Ω est homotope à zéro dans Ω (voir la proposition B.2 de l'appendice B pour des conditions équivalentes).

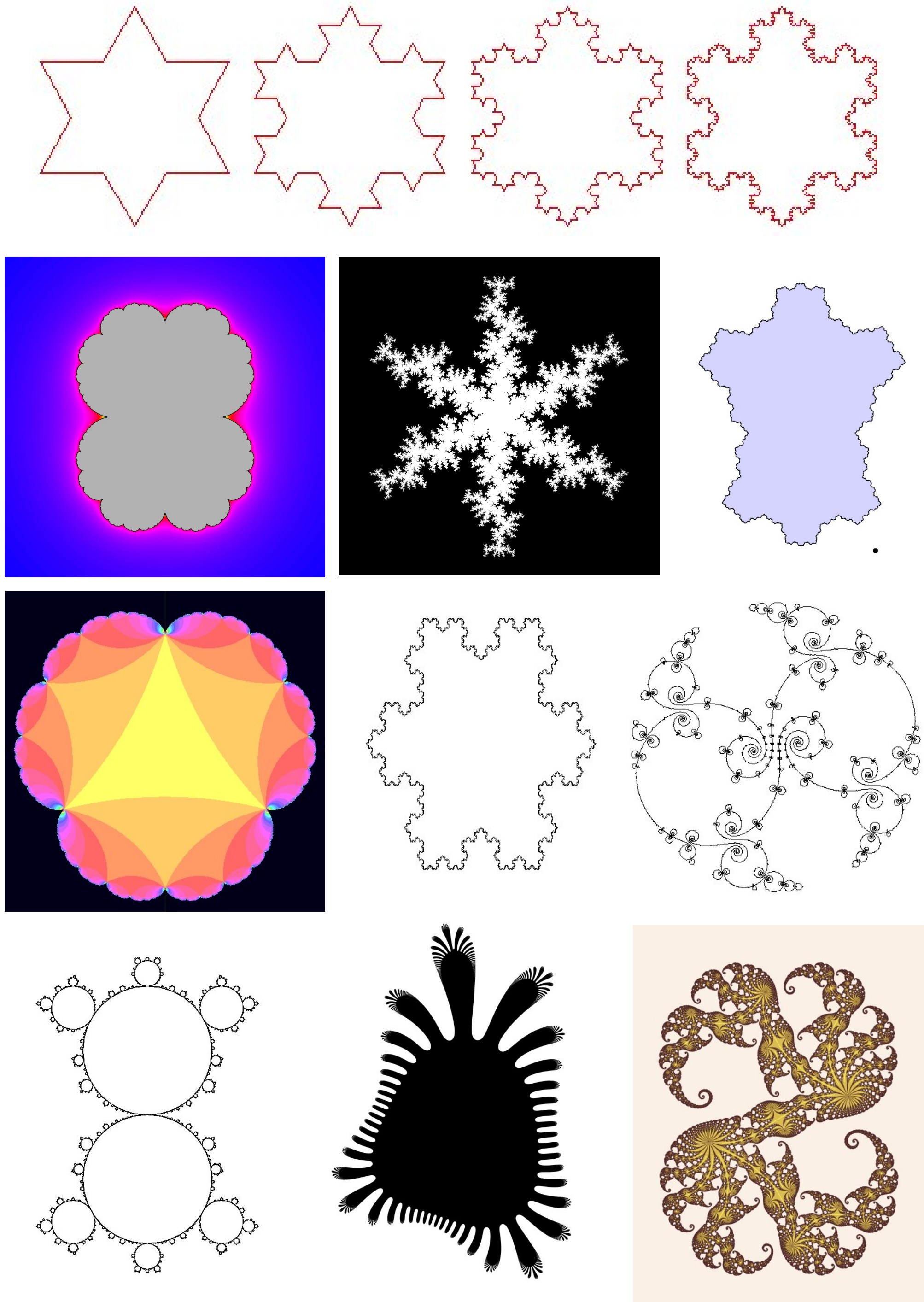
Un *domaine de Jordan* dans $\mathbb{C}$ est un ouvert borné Ω de $\mathbb{C}$ dont la frontière $\partial\Omega$ est une courbe de Jordan. Le résultat suivant, que nous admettrons, dit en particulier qu'un domaine de Jordan est simplement connexe.

Théorème 2.9 (Théorème de Jordan) *Le complémentaire d'une courbe de Jordan γ dans $\mathbb{C}$ admet exactement deux composantes connexes, l'une bornée, homéomorphe à $\mathbb{D}$ et d'adhérence homéomorphe à $\overline{\mathbb{D}}$, l'autre non bornée, et γ est la frontière de chacune d'entre elles.* □

L'existence de phénomènes du type *lacs de Wada* montre l'importance de la condition sur γ d'être une courbe de Jordan. Il existe en effet trois ouverts disjoints dans le carré unité $[-1, 1]^2$ de réunion dense dans $[-1, 1]^2$, ayant exactement la même frontière. Evidemment, ce ne sont pas des domaines de Jordan ! Voir par exemple [Cou], dont est extrait le dessin ci-dessous.



Voici quelques exemples (et un intrus !) de courbes de Jordan et de domaines de Jordan.



Rappelons que deux ouverts Ω_1 et Ω_2 de $\mathbb{C}$ sont *conformément équivalents* s'il existe une application holomorphe bijective f de Ω_1 dans Ω_2. La bijection réciproque est alors holomorphe (voir par exemple [Rud1, Theo. 10.32+10.34]), et donc la relation « être conformément équivalent à » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des ouverts de $\mathbb{C}$. Rappelons le résultat suivant (voir par exemple [Rud1, Theo. 14.8]).

Théorème 2.10 (Théorème de représentation de Riemann) *Tout ouvert simplement connexe non vide Ω de $\mathbb{C}$, différent de $\mathbb{C}$, est conformément équivalent au disque $\mathbb{D}$.* $\square$

Ainsi, la classification, à équivalence conforme près, des ouverts simplement connexes de $\mathbb{C}$ est très simple : il n'y a que trois classes, celles de $\emptyset, \mathbb{C}, \mathbb{D}$. La description de l'espace des modules (c'est-à-dire de l'ensemble des classes d'équivalence conforme) des ouverts non simplement connexes est bien plus compliquée. Par exemple (voir par exemple [Neh]), considérons les *anneaux de Jordan* (c'est-à-dire les ouverts Ω de $\mathbb{C}$ tels qu'il existe deux domaines de Jordan Ω_1, Ω_2 tels que $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ et $\Omega = \Omega_2 - \overline{\Omega_1}$. Tout anneau de Jordan est conformément équivalent à un anneau $A(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ r_1 < |z| < r_2\}$ où $0 < r_1 < r_2 < +\infty$. De plus, deux anneaux $A(r_1, r_2)$ et $A(r_1', r_2')$ sont conformément équivalents si et seulement si $r_2/r_1 = r_2'/r_1'$. L'espace des modules d'anneaux de Jordan est en particulier non dénombrable (en bijection avec $]0, +\infty[$.

Toute application holomorphe bijective $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ est appelée une *représentation conforme* de Ω. Si φ_1 et φ_2 sont deux représentations conformes, alors $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ est un automorphisme conforme du disque ouvert $\mathbb{D}$ (voir la partie 2.2). Donc une représentation conforme est unique modulo précomposition par un automorphisme conforme du disque.

Exercice E.28 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.*

(1) Montrer que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe ne s'annulant pas, alors $\ln |f| : \Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique.

(2) Montrer que Ω est simplement connexe si et seulement si toute fonction harmonique sur Ω à valeurs réelles est la partie réelle d'une application holomorphe définie sur Ω.

Le résultat suivant donne un critère pour qu'une représentation conforme d'un ouvert simplement connexe s'étende continûment à la frontière.

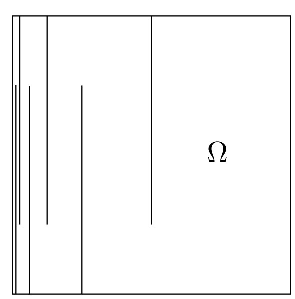
Théorème 2.11 (Théorème d'extension de Carathéodory [14]) *Soit Ω un domaine de Jordan. Alors toute représentation conforme $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ s'étend en un homéomorphisme $\overline{\mathbb{D}} \to \overline{\Omega}$.*

Nous noterons souvent encore $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\Omega}$ l'extension continue de φ, appelée l'*extension de Carathéodory* de φ.

Par exemple, si

$$\Omega =]0,1[\times]0,1[- \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\frac{1}{2^{2n}}\} \times [0, \frac{3}{4}] - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\frac{1}{2^{2n+1}}\} \times [\frac{1}{4}, 1]$$

est l'ouvert (simplement connexe) ci-contre, la représentation conforme $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ ne s'étend même pas en une application continue de $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\overline{\Omega}$ (voir par exemple [Oht]).



Corollaire 2.12 (Problème de Dirichlet dans les domaines de Jordan) *Soient Ω un domaine de Jordan et $f : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ une application continue. Il existe une et une seule solution du problème de Dirichlet sur Ω de donnée frontière f.*

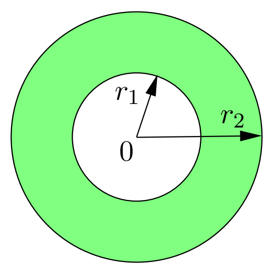
Démonstration. Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ une représentation conforme de Ω. Par le théorème de Carathéodory 2.11, l'application φ s'étend en un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\overline{\Omega}$, que nous notons encore φ. Alors $f \circ \varphi_{|\partial\mathbb{D}}$ est une application continue de $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{C}$. Par le corollaire 2.2, il existe une unique application continue $u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, harmonique sur $\mathbb{D}$, qui coïncide avec $f \circ \varphi_{|\partial\mathbb{D}}$ sur $\partial\mathbb{D}$. La précomposition par une application holomorphe conservant le caractère harmonique, l'application $u \circ \varphi^{-1}$ est une solution au problème de Dirichlet sur Ω de donnée au bord f. L'unicité est immédiate, que ce soit par l'unicité dans le cas du disque, ou par le théorème du maximum. □

Le but de l'exercice suivant est

- de montrer qu'il y a toujours unicité pour le problème de Dirichlet dans les ouverts bornés,
- de donner un exemple où, par contre, il n'y a pas existence,
- de caractériser les fonctions harmoniques réelles sur le disque épointé $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{0\}$, en montrant que celles qui ne sont pas des parties réelles d'applications holomorphes définies sur tout $\mathbb{D}^*$ ont une singularité logarithmique en 0. Comme $\mathbb{D}^*$ n'est pas simplement connexe, ceci montre de manière explicite pourquoi la conclusion de l'assertion (2) de l'exercice E.28 n'est pas vérifiée pour l'ouvert non simplement connexe $\Omega = \mathbb{D}^*$.

Exercice E.29 *(1) Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et $f : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ une application continue. Montrer que le problème de Dirichlet sur Ω de donnée frontière f admet au plus une solution.*

(2) Pour $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$, notons $A(r_1, r_2)$ l'anneau ouvert $\{z \in \mathbb{C} \;:\; r_1 < |z| < r_2\}$. Une application $u : A(r_1, r_2) \to \mathbb{C}$ est dite radiale *si elle est invariante par rotations ou, de manière équivalente, s'il existe une application $v :]{r_1}^2, {r_2}^2[\to \mathbb{C}$ telle que $u(z) = v(|z|^2)$ pour tout $z \in A(r_1, r_2)$.*



Montrer que pour toute application harmonique radiale u de $A(r_1, r_2)$ dans $\mathbb{C}$, il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall z \in A(r_1, r_2), \quad u(z) = a + b \ln(|z|) \; .$$

(3) Soient $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{0\} = A(0, 1)$ le disque épointé, et $f : \partial\mathbb{D}^* \to \mathbb{R}$ l'application telle que $f(0) = 1$ et $f(\zeta) = 0$ pour tout $\zeta \in \mathbb{S}_1$.

a⟩ Soit $u : \overline{\mathbb{D}^*} \to \mathbb{C}$ une application continue, harmonique sur $\mathbb{D}^*$, telle que $u_{|\partial\mathbb{D}^*} = f$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{S}_1$, montrer que les applications u et $z \mapsto u(\lambda z)$ de $\overline{\mathbb{D}^*}$ dans $\mathbb{C}$ sont égales.

b⟩ En déduire que le problème de Dirichlet sur $\mathbb{D}^*$, de donnée frontière f, n'admet pas de solution.

(4) Soit $u : \mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{0\} \to \mathbb{C}$ une fonction harmonique.

a⟩ Montrer que $\partial u : \mathbb{D}^* \to \mathbb{C}$ est holomorphe.

b⟩ Soient $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \, z^n$ le développement en série de Laurent de ∂u (voir par exemple le théorème 1.28), et $f : \mathbb{D}^* \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z},\, n \neq -1} \frac{2c_n}{n+1} \, z^{n+1}$. Montrer que si u est à valeurs réelles, alors $c_{-1} \in \mathbb{R}$ et il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall \; z \in \mathbb{D}^*, \quad u(z) = \operatorname{Re} f(z) + 2c_{-1} \ln |z| + c \; .$$

Fonctions harmoniques positives et frontière de Martin.

Le but de cette sous-partie est de décrire les fonctions harmoniques positives sur le disque $\mathbb{D}$: ce sont exactement les intégrales de Poisson des mesures boréliennes positives finies sur le cercle $\mathbb{S}_1$.

Rappelons qu'un *cône convexe* d'un espace vectoriel réel ou complexe V est une partie C de V telle que pour tous les $x, y \in C$ et $s, t \in [0, +\infty[$, nous ayons $sx + ty \in C$. Rappelons aussi qu'une application $f : C \to C'$ entre deux cônes convexes d'espaces vectoriels réels ou complexes est *affine* si pour tous les $x, y \in C$ et $s, t \in [0, +\infty[$, nous avons $f(sx + ty) = sf(x) + tf(y)$.

Nous noterons $\mathscr{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_1)$ l'espace de Banach complexe des mesures boréliennes complexes sur $\mathbb{S}_1$, qui contient le cône convexe $\mathscr{M}(\mathbb{S}_1)$ des mesures boréliennes positives finies sur $\mathbb{S}_1$ (voir la partie 1.1 pour des rappels). Nous noterons $\mathrm{Harm}_+(\mathbb{D})$ le cône convexe des fonctions harmoniques positives sur $\mathbb{D}$, contenu dans l'espace vectoriel complexe $\mathrm{Harm}(\mathbb{D})$.

Théorème 2.13 *L'application de $\mathscr{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_1)$ dans $\mathrm{Harm}(\mathbb{D})$, définie par $\mu \mapsto P\mu$, est un isomorphisme linéaire de $\mathscr{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_1)$ sur le sous-espace vectoriel des fonctions harmoniques h sur $\mathbb{D}$ telles que*

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} |h(r\,\zeta)|\, d\sigma(\zeta) < +\infty\,. \tag{24}$$

De plus, cette application induit une bijection affine de $\mathscr{M}(\mathbb{S}_1)$ dans $\mathrm{Harm}_+(\mathbb{D})$.

Démonstration. Nous avons déjà vu que l'application $\mu \mapsto P\mu$ est linéaire, et qu'elle envoie $\mathscr{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_1)$ dans $\mathrm{Harm}(\mathbb{D})$ et $\mathscr{M}(\mathbb{S}_1)$ dans $\mathrm{Harm}_+(\mathbb{D})$.

Montrons qu'elle est injective. Soit $\mu \in \mathscr{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_1)$ telle que $P\mu = 0$. Alors pour tout $f \in \mathscr{C}(\mathbb{S}_1; \mathbb{C})$, par la compacité de $\overline{\mathbb{D}}$ et par le théorème de Poisson 2.1, l'application $Pf(r\zeta')$ converge vers $f(\zeta')$ quand r tend vers 1 dans $[0, 1[$, uniformément en $\zeta' \in \mathbb{S}_1$. Donc par le théorème de Fubini et puisque le noyau de Poisson vérifie $P_{r\zeta'}(\zeta) = P_{r\zeta}(\zeta')$, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}_1} f\, d\mu &= \lim_{r \to 1^-} \int_{\zeta' \in \mathbb{S}_1} Pf(r\zeta')\, d\mu(\zeta') \\
&= \lim_{r \to 1^-} \int_{\zeta' \in \mathbb{S}_1} \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} P_{r\zeta'}(\zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta)\, d\mu(\zeta') \\
&= \lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} \int_{\zeta' \in \mathbb{S}_1} P_{r\zeta}(\zeta')\, d\mu(\zeta')\, f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\
&= \lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} P\mu(r\zeta)\, f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = 0\,.
\end{aligned}$$

Comme une mesure complexe, donnant une intégrale nulle à toute fonction continue, est nulle, ceci montre l'injectivité.

Si $\mu \in \mathscr{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_1)$, alors par le théorème de Fubini, puisque le noyau de Poisson vérifie $0 \leq P_{r\zeta}(\zeta') = P_r(\zeta'\,\overline{\zeta})$ pour tous les $r \in [0, 1[$ et $\zeta, \zeta' \in \mathbb{S}_1$, par l'invariance par les rotations et par la conjugaison complexe de la mesure de Lebesgue σ du cercle, et puisque

$\int_{\mathbb{S}_1} P_r(\zeta'')\, d\sigma(\zeta'') = 2\pi$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} |P\mu(r\zeta)|\, d\sigma(\zeta) &\le \int_{\zeta\in\mathbb{S}_1}\int_{\zeta'\in\mathbb{S}_1} P_{r\zeta}(\zeta')\, d|\mu|(\zeta')\, d\sigma(\zeta)\\ &= \int_{\zeta'\in\mathbb{S}_1}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} P_r(\zeta'\,\overline{\zeta})\, d\sigma(\zeta)\, d|\mu|(\zeta')\\ &= \int_{\zeta'\in\mathbb{S}_1} 2\pi\, d|\mu|(\zeta') = 2\pi\|\mu\| < +\infty\ .\end{aligned}$$

Donc $h = P\mu$ vérifie la condition (24).

Réciproquement, soit h une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ vérifiant la condition (24). Montrons que h est l'intégrale de Poisson d'une mesure complexe. Notons

$$M = \sup_{0\le r<1}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} |h(r\,\zeta)|\, d\sigma(\zeta)\ .$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons $\ell_n : \mathscr{C}(\mathbb{S}_1;\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ l'application définie par

$$\ell_n : f\mapsto \int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} h\Big(\frac{n-1}{n}\,\zeta\Big) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta)\ .$$

Alors ℓ_n est une forme linéaire sur l'espace de Banach $\mathscr{C}(\mathbb{S}_1;\mathbb{C})$ (pour la norme uniforme), qui est continue car de norme au plus M finie par la condition (24). Par le théorème de Banach-Alaoglu de compacité des boules du dual topologique de $\mathscr{C}(\mathbb{S}_1;\mathbb{C})$ pour la convergence faible-étoile (voir par exemple [Bre]), il existe donc une sous-suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une forme linéaire continue ℓ sur $\mathscr{C}(\mathbb{S}_1;\mathbb{C})$ telle que pour tout $f\in\mathscr{C}(\mathbb{S}_1;\mathbb{C})$, nous ayons $\ell(f) = \lim_{k\to+\infty}\ell_{n_k}(f)$. Par le théorème de représentation de Riesz (voir le théorème 1.6), il existe donc une (unique) mesure borélienne complexe μ sur l'espace compact $\mathbb{S}_1$ telle que $\ell(f) = \int_{\mathbb{S}_1} f\, d\mu$ pour tout $f\in\mathscr{C}(\mathbb{S}_1;\mathbb{C})$. Posons $r_k = \frac{n_k-1}{n_k}$, qui tend vers 1 quand $k\to+\infty$. Notons que l'application $z\mapsto h(r_k\, z)$ de $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\mathbb{C}$ est continue, et harmonique sur $\mathbb{D}$. Pour tout $z\in\mathbb{D}$, nous avons la suite d'égalités suivantes, la première par définition de μ, la seconde par la formule de Poisson (théorème 2.1 (3)) appliquée à la fonction de $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $w\mapsto h(r_k w)$, qui est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et harmonique sur $\mathbb{D}$, la dernière par continuité de h en z :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}_1} P_z(\zeta)\, d\mu(\zeta) = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}_1} P_z(\zeta) h(r_k\zeta)\, d\sigma(\zeta) = \lim_{k\to+\infty} h(r_k z) = h(z)\ .$$

Donc $h = P[\frac{\mu}{2\pi}]$, ce qui est le résultat cherché.

Remarquons que si h est une fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}$, alors par la formule de la moyenne,

$$\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} |h(r\zeta)|\, d\sigma(\zeta) = \int_0^{2\pi} h(r\, e^{i\theta})\, d\theta = 2\pi\, h(0)\ ,$$

et donc h vérifie la condition (24). Ceci montre la dernière assertion du théorème 2.13. □

Expliquons pour conclure le titre de cette sous-partie.

Une *compactification* d'un espace topologique localement compact X est un couple $(\widehat{X},\iota)$ où $\widehat{X}$ est un espace topologique compact et $\iota : X\to\widehat{X}$ est un homéomorphisme sur son image, tel que $\iota(X)$ soit un ouvert dense de $\widehat{X}$. Nous identifierons $x \in X$ avec $\iota(x) \in \widehat{X}$, et nous noterons par abus $\widehat{X}$ le couple $(\widehat{X}, \iota)$.

Une *compactification de Martin* d'un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$ est un espace topologique permettant de donner une représentation intégrale de toutes les fonctions harmoniques positives sur Ω : plus précisément, c'est la donnée d'une compactification $\widehat{\Omega}$ de Ω (sa frontière est appelée une *frontière* (ou *bord*) *de Martin*) et d'une fonction continue K : $\Omega \times (\widehat{\Omega} - \Omega) \to [0, +\infty[$ (appelée le *noyau de Martin* de Ω) telles que pour toute fonction harmonique positive $h : \Omega \to [0, +\infty[$, il existe une mesure borélienne finie $\mu = \mu_h$ sur $\widehat{\Omega} - \Omega$ telle que, pour tout $x \in \Omega$,

$$h(x) = \int_{y \in \widehat{\Omega} - \Omega} K(x, y)\, d\mu(y)$$

(voir [Doo] pour une définition plus précise et plus générale). Par exemple, le théorème 2.13 montre que le cercle $\mathbb{S}_1$ est une frontière de Martin du disque unité ouvert $\mathbb{D}$, de noyau de Martin égal au noyau de Poisson. Le théorème de représentation conforme permet plus généralement d'exhiber une compactification de Martin de n'importe quel domaine de Jordan.

Théorème 2.14 *Soient Ω un domaine de Jordan de $\mathbb{C}$ et $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\Omega}$ l'extension de Carathéodory d'une représentation conforme de Ω. Alors l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω dans $\mathbb{C}$ est une compactification de Martin de Ω, de noyau de Martin l'application $K : \Omega \times \partial\Omega \to [0, +\infty[$ définie par*

$$K(x, y) = P_{\varphi^{-1}(x)}(\varphi^{-1}(y)) \ ,$$

où $(z, \zeta) \mapsto P_z(\zeta)$ est le noyau de Poisson de $\mathbb{D}$.

Démonstration. Rappelons que par le théorème 2.11, l'extension de Carathéodory φ : $\overline{\mathbb{D}} \to \overline{\Omega}$ est un homéomorphisme, holomorphe sur $\mathbb{D}$. Une application $h : \Omega \to \mathbb{C}$ est harmonique positive si et seulement si $h \circ \varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est harmonique positive, donc si et seulement s'il existe une mesure positive $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{S}_1)$ telle que $h \circ \varphi = P\mu$, par le théorème 2.13. Posons $\nu = \varphi_* \mu$ la mesure image de μ sur $\partial\Omega = \overline{\Omega} - \Omega$. Par changement de variable, nous avons alors, pour tout $x \in \Omega$,

$$h(x) = h \circ \varphi(\varphi^{-1}(x)) = \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} P_{\varphi^{-1}(x)}(\zeta)\, d\mu(\zeta) = \int_{y \in \partial\Omega} P_{\varphi^{-1}(x)}(\varphi^{-1}(y))\, d\nu(y) \ .$$

Ceci montre le résultat. □

Par exemple, la frontière de Martin (minimale, en un sens que nous ne précisons pas ici, voir [Doo]) de l'ouvert Ω dessiné après l'énoncé du théorème 2.11 ne coïncide pas avec la frontière topologique $\partial\Omega$ de Ω.

Fonctions harmoniques bornées et frontière de Poisson.

Le but de cette sous-partie est de décrire les fonctions harmoniques bornées sur le disque $\mathbb{D}$: ce sont exactement les intégrales de Poisson des applications essentiellement bornées sur le cercle $\mathbb{S}_1$.

Rappelons (voir la partie 1.1) que $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{S}_1, \sigma)$ est l'espace de Banach complexe des applications mesurables de $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{C}$, bornées en dehors d'un ensemble de mesure de

Lebesgue nulle, modulo les applications presque partout nulles, de norme $f \mapsto \|f\|_\infty$. Nous noterons $\mathrm{Harm}_b(\mathbb{D})$ le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel complexe $\mathrm{Harm}(\mathbb{D})$ formé des fonctions harmoniques bornées de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{C}$. Nous munirons $\mathrm{Harm}_b(\mathbb{D})$ de la norme uniforme :

$$\|h\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |h(z)| \ .$$

Théorème 2.15 *L'application de $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{S}_1, \sigma)$ dans $\mathrm{Harm}_b(\mathbb{D})$, définie par $f \mapsto Pf$, est un isomorphisme linéaire isométrique.*

Démonstration. Par finitude de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{S}_1$, nous avons $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{S}_1, \sigma) \subset \mathbb{L}^1(\mathbb{S}_1, \sigma)$, et donc l'application $f \mapsto Pf$ est bien définie sur $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{S}_1, \sigma)$, et elle est à valeurs dans l'espace des applications harmoniques sur $\mathbb{D}$ par le théorème de Poisson 2.1 (1). Nous avons vu qu'elle est linéaire. Puisque le noyau de Poisson est positif et d'intégrale égale à 2π, nous avons

$$\begin{aligned}\|Pf\|_\infty &= \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{S}_1} P_z(\zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \right| \\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}_1} P_z(\zeta)\, \|f\|_\infty\, d\sigma(\zeta) \leq \|f\|_\infty \ ,\end{aligned} \tag{25}$$

donc $Pf \in \mathrm{Harm}_b(\mathbb{D})$ si $f \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{S}_1, \sigma)$.

L'étape cruciale de la démonstration du théorème 2.15 est le résultat suivant de Fatou [17] sur la convergence radiale des fonctions harmoniques, que nous admettons dans ces notes (voir par exemple [Rud1, chap. 11]).

Théorème 2.16 (Théorème de Fatou) *Pour toute mesure borélienne complexe μ sur $\mathbb{S}_1$, l'intégrale de Poisson $P\mu(r\zeta)$ admet une limite finie quand $r \in [0, 1[$ tend vers 1 pour presque tout $\zeta \in \mathbb{S}_1$ (pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{S}_1$). De plus, si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{S}_1, \sigma; \mathbb{C})$, alors pour presque tout ζ dans $\mathbb{S}_1$, nous avons*

$$\lim_{r\to 1^-} Pf(r\zeta) = f(\zeta) \ . \quad \square$$

Si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{S}_1, \sigma; \mathbb{C})$ est de plus continue, alors cette dernière affirmation découle du théorème de Poisson 2.1. Elle fait de plus écho aux propriétés de convergence radiale vers une masse de Dirac du noyau de Poisson (voir les propriétés du noyau de Poisson dans la partie 2.2).

Soient $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une application et $\zeta \in \mathbb{S}_1$, nous dirons que h *admet une limite radiale* en ζ si la limite $\lim_{r\to 1^-} h(r\zeta)$ existe, et cette limite est alors appelée la *limite radiale* de h en ζ.

En particulier, le théorème de Fatou ci-dessus implique que toute fonction harmonique qui vérifie la condition (24) (comme par exemple toute fonction harmonique bornée), qui

17.


Fatou (1878-1929)


Sobolev (1908-1989)


Poincaré (1854-1912)

s'écrit comme l'intégrale de Poisson d'une mesure borélienne complexe par le théorème 2.13, admet des limites radiales en presque tout point de $\mathbb{S}_1$.

Donc pour toute application harmonique bornée h sur $\mathbb{D}$, notons $\phi_h : \mathbb{S}_1 \to \mathbb{C}$ sa fonction limite radiale, bien définie en presque tout point de $\mathbb{S}_1$. Puisque $\phi_h(\zeta) = \lim_{r\to 1^-} h(r\zeta)$ pour presque tout $\zeta \in \mathbb{S}_1$, l'application ϕ_h est clairement essentiellement bornée, et

$$\|\phi_h\|_\infty \leq \|h\|_\infty \ . \tag{26}$$

Par la seconde assertion du théorème de Fatou, pour tout $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{S}_1, \sigma; \mathbb{C})$, nous avons $\phi_{Pf} = f$. L'application $f \mapsto Pf$ est isométrique (donc injective) car

$$\|f\|_\infty = \|\phi_{Pf}\|_\infty \leq \|Pf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

par les inégalités (26) et (25).

Enfin, pour montrer la surjectivité de cette application, il suffit de montrer que $h = P[\phi_h]$ pour tout $h \in \mathrm{Harm}_b(\mathbb{D})$. Pour tout $r < 1$, puisque l'application $z \mapsto h(rz)$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et harmonique sur $\mathbb{D}$, la formule de Poisson donne, pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$h(rz) = \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} P_z(\zeta) h(r\zeta)\, d\sigma(\zeta) \ .$$

Puisque $h(r\zeta)$ est uniformément borné en r, et converge pour presque tout ζ vers $\phi_h(\zeta)$ quand r tend vers 1 par valeurs inférieures, le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre que le second membre de l'égalité précédente converge vers $P[\phi_h](z)$ quand $r \to 1^-$. Comme le premier membre converge vers $h(z)$, le résultat en découle. □

Une *compactification de Poisson* d'un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$ est un espace mesuré permettant de donner une représentation intégrale de toutes les fonctions harmoniques bornées sur Ω : plus précisément, c'est la donnée d'une compactification $\widehat{\Omega}$ de Ω, d'une mesure de probabilité ν sur $\widehat{\Omega} - \Omega$ (l'espace mesuré $(\widehat{\Omega} - \Omega, \nu)$ est appelé une *frontière* (ou un *bord*) *de Poisson* de Ω) et d'une fonction continue $K : \Omega \times (\widehat{\Omega} - \Omega) \to [0, +\infty[$ (appelée le *noyau de Poisson* de Ω) telles que pour toute fonction harmonique bornée $h : \Omega \to \mathbb{C}$, il existe $f \in \mathbb{L}^\infty(\widehat{\Omega} - \Omega; \nu)$ telle que, pour tout $x \in \Omega$,

$$h(x) = \int_{y\in\widehat{\Omega}-\Omega} K(x, y)\, f(y)\, d\nu(y)$$

(voir [Doo] pour une définition plus précise et plus générale). Par exemple, le théorème 2.15 montre que le cercle $\mathbb{S}_1$ muni de la mesure de Lebesgue (normalisée pour être de probabilité) est une frontière de Poisson du disque unité ouvert $\mathbb{D}$, de noyau de Poisson égal au noyau de Poisson au sens de la partie 2.2. Le théorème de représentation conforme permet plus généralement d'exhiber une compactification de Poisson de n'importe quel domaine de Jordan.

Théorème 2.17 *Soient Ω un domaine de Jordan de $\mathbb{C}$ et $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\Omega}$ l'extension de Carathéodory d'une représentation conforme de Ω. Alors l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω dans $\mathbb{C}$ est une compactification de Poisson de Ω, de noyau de Poisson l'application $K : \Omega\times\partial\Omega \to [0, +\infty[$ définie par*

$$K(x, y) = P_{\varphi^{-1}(x)}(\varphi^{-1}(y)) \ ,$$

où $(z, \zeta) \mapsto P_z(\zeta)$ est le noyau de Poisson de $\mathbb{D}$.

Démonstration. Rappelons que par le théorème 2.11, l'extension de Carathéodory $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\Omega}$ est un homéomorphisme, holomorphe sur $\mathbb{D}$. Une application $h : \Omega \to \mathbb{C}$ est harmonique bornée si et seulement si $h \circ \varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est harmonique bornée, donc si et seulement s'il existe $f \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{S}_1, \sigma)$ telle que $h \circ \varphi = Pf$, par le théorème 2.15. Posons $\nu = \frac{1}{2\pi}\varphi_*\sigma$ la mesure image de σ sur $\partial\Omega = \overline{\Omega} - \Omega$ (renormalisée pour être de probabilité). Par changement de variable, nous avons alors, pour tout $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} h(x) = h \circ \varphi(\varphi^{-1}(x)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} P_{\varphi^{-1}(x)}(\zeta)\, f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \int_{y \in \partial\Omega} P_{\varphi^{-1}(x)}(\varphi^{-1}(y))\, f \circ \varphi^{-1}(y)\, d\nu(y)\ . \end{aligned}$$

Ceci montre le résultat. □

2.4 Spectre du laplacien des ouverts bornés de $\mathbb{R}^m$

Le but de cette partie est d'étudier les propriétés spectrales de l'opérateur laplacien $\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

La première étape est de définir les espaces de Hilbert sur lesquels les opérateurs continus utiles à cette étude vont agir.

Les espaces de Sobolev [15] **$W^{1,2}(\Omega)$ et $W_0^{1,2}(\Omega)$.**

Soient $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ et Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^m$. Rappelons que le produit scalaire de l'espace de Hilbert complexe $\mathbb{L}^2(\Omega)$ des applications mesurables de Ω dans $\mathbb{C}$, de carré sommable (pour la mesure de Lebesgue λ sur Ω), modulo applications presque partout nulles, est défini par $\langle f, g\rangle_{\mathbb{L}^2} = \int_\Omega f\,\overline{g}\; d\lambda$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous munirons $\mathbb{L}^2(\Omega)^k$ de la structure usuelle d'espace de Hilbert produit (voir l'exemple (2) de la partie 1.2) et nous noterons encore $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{L}^2}$ son produit scalaire, et $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2}$ sa norme. L'ensemble $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ des applications C^∞ à support compact de Ω dans $\mathbb{C}$ est un sous-espace vectoriel dense de $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Notons $W^{1,2}(\Omega)$ le sous-espace vectoriel complexe des applications $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ telles qu'il existe des applications $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ pour $i = 1, \dots, m$ vérifiant

$$\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), \quad \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2} = -\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle_{\mathbb{L}^2}\ , \tag{27}$$

muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{W^{1,2}} = \langle f, g\rangle_{\mathbb{L}^2} + \sum_{i=1}^m \big\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i}\big\rangle_{\mathbb{L}^2}\ .$$

Remarquons qu'une application $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ vérifiant la condition (27), si elle existe, est unique (car deux éléments g et g' dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ tels que $\langle g - g', h\rangle_{\mathbb{L}^2} = 0$ pour tout $h \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ coïncident, par densité de $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$). Cette application est appelée la i-ème *dérivée partielle au sens des distributions* de f. Cette propriété d'unicité montre que $W^{1,2}(\Omega)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{L}^2(\Omega)$: si $f, g \in W^{1,2}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}$ est la i-ème dérivée partielle au sens des distributions de $f + \lambda g$, par la linéarité des équations (27).

Nous noterons
$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\Big) \in \mathbb{L}^2(\Omega)^m \;,$$
appelé le *gradient au sens des distributions* de f, de sorte que
$$\|\nabla f\|_{\mathbb{L}^2} = \Big(\sum_{i=1}^m \Big\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big\|_{\mathbb{L}^2}^2\Big)^{1/2} \;.$$
L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle_{W^{1,2}}$ est bien définie, et est bien un produit scalaire sur $W^{1,2}(\Omega)$, de norme associée
$$\|f\|_{W^{1,2}} = \big(\|f\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\nabla f\|_{\mathbb{L}^2}^2\big)^{1/2} \tag{28}$$
(car si $\|f\|_{W^{1,2}} = 0$, alors $\|f\|_{\mathbb{L}^2} = 0$).

Proposition 2.18 *L'espace préhilbertien complexe $W^{1,2}(\Omega)$ est séparable, complet.*

La notation $H^1(\Omega)$ est fréquemment utilisée pour désigner l'espace de Hilbert $W^{1,2}(\Omega)$, mais nous ne le ferons pas dans ces notes, car elle est en conflit avec la notation pour désigner l'un des espaces de Hardy (outre le premier groupe de cohomologie de l'ouvert Ω !).

Démonstration. L'application $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}$ de $W^{1,2}(\Omega)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ est linéaire, par unicité et par la linéarité de la condition (27). Par construction, l'application ψ de $W^{1,2}(\Omega)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)^{m+1}$ définie par $f \mapsto (f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m})$ est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens sur son image. Pour montrer que $W^{1,2}(\Omega)$ est complet, il suffit donc de montrer que son image est fermée : elle sera alors complète. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $W^{1,2}(\Omega)$ telle que $(f_k, \frac{\partial f_k}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial x_m})$ converge vers un élément noté $(f, g_1, \dots, g_m)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)^{m+1}$ quand $k \to +\infty$. Pour tous les $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ et $1 \le i \le m$, nous avons, par convergence faible et par la condition (27),
$$\langle g_i, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2} + \langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle_{\mathbb{L}^2} = \lim_{k\to+\infty} \langle \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2} + \langle f_k, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle_{\mathbb{L}^2} = 0 \;.$$
Ceci montre que $f \in W^{1,2}(\Omega)$ et que $g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ par unicité. Le résultat en découle, car tout sous-espace d'un espace métrique séparable est séparable [18]. □

Par intégration par partie, les applications f de classe C^∞ à support compact de Ω dans $\mathbb{C}$ vérifient l'équation (27), en prenant, pour les dérivées partielles au sens des distributions de f, ses dérivées partielles usuelles. Donc $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ est contenu dans $W^{1,2}(\Omega)$.

Nous noterons $W_0^{1,2}(\Omega)$ l'adhérence dans $W^{1,2}(\Omega)$ du sous-espace vectoriel $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$. Muni de la restriction du produit scalaire de $W^{1,2}(\Omega)$, c'est un espace de Hilbert complexe (il est complet car fermé dans un espace complet). La notation $H_0^1(\Omega)$ est fréquemment utilisée pour le désigner, mais nous ne le ferons pas dans ces notes.

Les résultats d'analyse sur $W_0^{1,2}(\Omega)$ qui nous seront le plus utile par la suite sont les suivants.

18. Si P est une partie dénombrable dense d'un espace métrique X et si Y est une partie de X, pour tout rationnel $r > 0$ et pour tout $p \in P$, notons $y_{p,\,r}$ un point de $B(p,r)\cap Y$ si cette intersection est non vide. Alors l'ensemble (dénombrable) de ces $y_{p,\,r}$ est dense dans Y, car pour tout $y \in Y$, pour tout $\epsilon > 0$, si r est un rationnel tel que $0 < r < \frac{\epsilon}{2}$, il existe $p \in P$ tel que $d(y,p) < r$ (en particulier, le point $y_{p,\,r}$ existe) et $d(y, y_{p,\,r}) \le d(y,p) + d(p, y_{p,\,r}) < 2r < \epsilon$.

Théorème 2.19 (Inégalité de Poincaré [15]) *Si Ω est borné, alors il existe une constante $c = c_\Omega > 0$ telle que, pour tout $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, nous ayons*

$$\|u\|_{\mathbb{L}^2} \leq c\, \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}\ .$$

Notons que la restriction $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ au lieu de $u \in W^{1,2}(\Omega)$ est nécessaire, car les applications constantes non nulles, qui sont dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ puisque Ω est borné, ne vérifient pas l'inégalité de Poincaré.

Remarquons que l'inégalité de Poincaré implique que, pour tout $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, nous avons

$$\|u\|_{W^{1,2}} \leq \sqrt{1 + c_\Omega^2}\ \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}\ . \tag{29}$$

Démonstration. Nous ne ferons la démonstration que si $m = 1$, en renvoyant à [Bre] pour une démonstration générale. Si $m = 1$, soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\Omega \subset [a, b]$, et étendons à tout $\mathbb{R}$ les applications à support compact dans Ω, en les prolongeant par 0 en dehors de Ω.

Par densité, il suffit de montrer le résultat pour $u \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$. Pour tout $x \in \Omega$, nous avons, puisque $u(a) = 0$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\, u(x)^2\, | = \Big| \int_a^x 2u(t)u'(t)\ dt \Big| \leq 2\, \|u\|_{\mathbb{L}^2} \|u'\|_{\mathbb{L}^2}\ .$$

En intégrant sur Ω pour la mesure de Lebesgue λ, nous avons donc

$$\|u\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq 2\lambda(\Omega) \|u\|_{\mathbb{L}^2} \|u'\|_{\mathbb{L}^2}\ ,$$

ce qui montre le résultat. □

Le résultat de compacité suivant, un analogue $\mathbb{L}^2$ du théorème d'Ascoli (et plus précisément de l'exercice E.10 de la partie 1.4), sera utile. Il dit que l'inclusion (définie par $x \mapsto x$) de $W_0^{1,2}(\Omega)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ (qui est continue de norme au plus 1, par l'inégalité $\|f\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|f\|_{W^{1,2}}$ provenant de la définition (28) de la norme $W^{1,2}$) est un opérateur compact. Nous renvoyons par exemple à [Eva, Sect. 5.7], [Bre] pour des versions plus générales de ce résultat.

Théorème 2.20 (Théorème de Rellich-Kondrachov) [19] *Si Ω est borné, alors toute suite bornée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ admet une sous-suite convergente dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.*

Avant de commencer la démonstration, rappelons quelques propriétés du *produit de convolution* $*$. Si $f, g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m)$, si λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$, notons $dy = d\lambda(y)$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f * g\,(x) = \int_{y\in\mathbb{R}^m} f(y)\, g(x - y)\ dy\ .$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et par l'invariance de la mesure de Lebesgue par translations et par l'antipodie $y \mapsto -y$, l'application $f * g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ est bien définie, et

$$\|f * g\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq \|f\|_{\mathbb{L}^2} \|g\|_{\mathbb{L}^2}\ . \tag{30}$$

19. En fait, ce résultat est dû à Rellich. C'est l'extension aux espaces $\mathbb{L}^p$ qui est due à Vladimir Iosifovich Kondrashov, qui fit sa thèse avec Sobolev.

De plus, si $g \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$, alors par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $f * g \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$ et, pour $1 \leq r \leq m$, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x_r}(f * g) = f * \frac{\partial g}{\partial x_r} \ . \tag{31}$$

L'inégalité suivante est plus délicate.

Lemme 2.21 *Si $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m)$ et $g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^m)$, alors $f * g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m)$ et*

$$\|f * g\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|f\|_{\mathbb{L}^2}\ \|g\|_{\mathbb{L}^1} \ .$$

En particulier, pour tout $g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^m)$, l'application $f \mapsto f * g$ de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m)$ dans lui-même est linéaire, continue, de norme au plus $\|g\|_{\mathbb{L}^1}$.

Démonstration. Puisque $|f * g| \leq |f| * |g|$, nous pouvons supposer que f et g sont à valeurs positives ou nulles, et par homogénéité que $\|g\|_{\mathbb{L}^1} = 1$. Rappelons (voir par exemple [Rud1, Theo. 3.3]) *l'inégalité de Jensen* qui dit que si $(X, \mathscr{B}, \mu)$ est un espace de probabilité, si $h : X \to \mathbb{R}$ est une application intégrable pour la mesure μ et si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application continue convexe, alors

$$\varphi\Big(\int_X h\, d\mu\Big) \leq \int_X \varphi \circ h\, d\mu \ .$$

En l'appliquant à $\varphi : t \mapsto t^2$, $X = \mathbb{R}^m$, $d\mu(y) = g(x-y)\, d\lambda(y)$ (qui est bien une mesure de probabilité car $\|g\|_{\mathbb{L}^1} = 1$), pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ et $h : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ mesurable bornée (donc intégrable pour la mesure de probabilité μ), nous avons

$$h * g(x)^2 \leq \int_{y \in \mathbb{R}^m} h(y)^2 g(x-y)\, d\lambda(y) \ .$$

Prenons pour h les éléments d'une suite de fonctions mesurables bornées positives qui converge simplement en croissant vers f (par exemple $h = \min\{f, n\}$). Nous avons alors, par le théorème de convergence monotone de Lebesgue, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$,

$$f * g(x)^2 \leq \int_{y \in \mathbb{R}^m} f(y)^2 g(x-y)\, d\lambda(y) \ .$$

Donc par le théorème de Fubini et un changement de variable $x' = x - y$,

$$\|f * g\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \int_{y \in \mathbb{R}^m} f(y)^2 \int_{x \in \mathbb{R}^m} g(x-y)\, dx\, dy = \|f\|_{\mathbb{L}^2}^2 \|g\|_{\mathbb{L}^1} \ .$$

Puisque $\|g\|_{\mathbb{L}^1} = 1$, le résultat en découle. □

Démonstration du théorème 2.20. Nous prolongeons à tout $\mathbb{R}^m$ les fonctions dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ par la valeur 0 en dehors de Ω.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. Soit $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$ une application positive ou nulle, à support dans la boule unité, d'intégrale 1 pour la mesure de Lebesgue. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, posons $\varphi_i : x \mapsto 2^{m\,i}\, \varphi(2^i x)$, qui est un élément de $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$, et encore d'intégrale 1. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ fixé, nous avons, par la majoration (30),

$$\|f_n * \varphi_i\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq \|f_n\|_{\mathbb{L}^2}\ \|\varphi_i\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|f_n\|_{W^{1,2}}\ \|\varphi_i\|_{\mathbb{L}^2} \ .$$

Donc la suite $(f_n * \varphi_i)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications C^∞ est uniformément majorée. Pour $1 \le r \le m$, nous avons, par la formule (31),

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial x_r}(f_n * \varphi_i)\Big\|_{\mathbb{L}^\infty} = \Big\|f_n * \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_r}\Big\|_{\mathbb{L}^\infty} \le \|f_n\|_{\mathbb{L}^2}\ \Big\|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_r}\Big\|_{\mathbb{L}^2} \le \|f_n\|_{W^{1,2}}\ \Big\|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_r}\Big\|_{\mathbb{L}^2},$$

qui est borné uniformément en n. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe donc $c_i > 0$ tel que pour tous les $x, y \in \mathbb{R}^m$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\big|f_n * \varphi_i(x) - f_n * \varphi_i(y)\big| \le c_i \|x - y\| \ .$$

Puisque Ω est borné, son adhérence $\overline{\Omega}$ est compacte. Par le théorème d'Ascoli 1.32, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n * \varphi_i)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications équicontinues, uniformément majorées sur le compact $\overline{\Omega}$, admet une sous-suite qui converge uniformément sur ce compact. Par extraction diagonale, il existe donc une suite strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite d'applications continues $(f_{n_k} * \varphi_i)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω, et en particulier est uniformément de Cauchy, donc est de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Montrons que $\|f_n - f_n * \varphi_i\|_{\mathbb{L}^2}$ converge vers 0 quand i tend vers $+\infty$ uniformément en n. Comme

$$\|f_{n_k} - f_{n_\ell}\|_{\mathbb{L}^2} \le \|f_{n_k} - f_{n_k} * \varphi_i\|_{\mathbb{L}^2} + \|f_{n_k} * \varphi_i - f_{n_\ell} * \varphi_i\|_{\mathbb{L}^2} + \|f_{n_\ell} * \varphi_i - f_{n_\ell}\|_{\mathbb{L}^2}\ ,$$

ceci montrera que la suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, donc converge par complétude, ce qui conclut.

Posons $c' = \max_{1\le r\le m} \int_{\mathbb{R}^m} |x_r|\, \varphi(x)\ dx \ \in\ ]0, +\infty[$. Montrons que pour tout $f \in W_0^{1,2}(\Omega)$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\|f - f * \varphi_i\|_{\mathbb{L}^2} \le \frac{m\, c'}{2^i}\ \|\nabla f\|_{\mathbb{L}^2}\ , \tag{32}$$

ce qui conclut (car $\|\nabla f\|_{\mathbb{L}^2} \le \|f\|_{W^{1,2}}$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,2}(\Omega)$).

Par continuité (voir en particulier l'assertion suivant le lemme 2.21, comme $\|\varphi_i\|_{\mathbb{L}^1} = 1$), il suffit de montrer l'inégalité (32) pour f dans le sous-espace dense dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ des applications C^∞ à support compact dans Ω. Rappelons que pour toute application de classe C^1 de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{C}$, nous avons, pour tous les $x, y \in \mathbb{R}^m$,

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(x + t(y-x)))\ dt = \sum_{r=1}^m \int_0^1 (y_r - x_r)\frac{\partial f}{\partial x_r}(x + t(y-x))\ dt\ .$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, puisque $\int \varphi_i(x-y)\ dy = 1$, par le théorème de Fubini, en faisant le changement de variable $y' = x + t(y-x)$ (de sorte que $dy = \frac{dy'}{t^m}$), et encore par le théorème de Fubini, nous avons

$$\begin{aligned}
f * \varphi_i(x) - f(x) &= \int_{y\in\mathbb{R}^m} (f(y) - f(x))\varphi_i(x-y)\ dy \\
&= \sum_{r=1}^m \int_0^1 \int_{y\in\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial x_r}(x + t(y-x))(y_r - x_r)\varphi_i(x-y)\ dy\ dt \\
&= -\sum_{r=1}^m \int_{y'\in\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial x_r}(y') \int_0^1 \frac{x_r - y'_r}{t}\ \varphi_i\big(\frac{x-y'}{t}\big)\ \frac{dt}{t^m}\ dy' \\
&= -\sum_{r=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_r} * \psi_{r,i}(x)\ ,
\end{aligned}$$

où $\psi_{r,i}(x) = \int_0^1 x_r\,\varphi_i(\frac{x}{t})\;\frac{dt}{t^{m+1}}$. Or, par le théorème de Fubini et en faisant le changement de variable $x' = 2^i\frac{x}{t}$ (de sorte que $dx' = \frac{2^{mi}}{t^m}\,dx$ et $x'_r = 2^i\frac{x_r}{t}$),

$$\begin{aligned}\|\psi_{r,i}\|_{\mathbb{L}^1} &\leq \int_{x\in\mathbb{R}^m}\int_0^1 |x_r|\,\varphi_i\big(\frac{x}{t}\big)\;\frac{dt}{t^{m+1}}\;dx = \int_0^1\int_{x\in\mathbb{R}^m} |x_r|\;2^{mi}\varphi\big(2^i\frac{x}{t}\big)\;dx\;\frac{dt}{t^{m+1}}\\ &= \int_0^1 dt\int_{x\in\mathbb{R}^m} 2^{-i}|x'_r|\,\varphi(x')\;dx' \leq \frac{c'}{2^i}\;.\end{aligned}$$

Par le lemme 2.21, nous avons donc

$$\|f*\varphi_i - f\|_{\mathbb{L}^2} \leq m\max_{1\leq r\leq m}\Big\|\frac{\partial f}{\partial x_r}*\psi_{r,i}\Big\|_{\mathbb{L}^2} \leq m\max_{1\leq r\leq m}\Big\|\frac{\partial f}{\partial x_r}\Big\|_{\mathbb{L}^2}\|\psi_{r,i}\|_{\mathbb{L}^1} \leq \frac{m\,c'}{2^i}\;\|\nabla f\|_{\mathbb{L}^2}\;.$$

ce qui démontre l'inégalité (32). □

L'opérateur de Green.

Nous introduisons maintenant un opérateur auto-adjoint compact qui va permettre d'appliquer les résultats spectraux de la partie 1.5.

Le fil directeur de cette partie est le problème de la résolution (en un certain sens qui sera précisé) de l'*équation de Poisson*

$$-\Delta u = f$$

sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^m$, où $f:\Omega\to\mathbb{C}$ est une application donnée (dont la régularité sera précisée plus tard), avec des conditions au bord, de type Dirichlet, d'annulation (en un sens qui sera précisé plus tard) de la fonction inconnue u. Ces conditions frontières sont utiles pour avoir des propriétés d'unicité. Une interprétation possible de cette équation provient de l'électrostatique : étant donné une distribution de charges f dans un domaine Ω, dont la frontière est mise à la masse (c'est-à-dire que son potentiel est maintenu à 0 volt), le potentiel électrique u dans ce domaine, engendré par la distribution de charge f, est la solution de l'équation de Poisson s'annulant au bord.

Bref, nous allons construire un inverse (en un sens qui sera précisé plus tard) de l'opérateur moins laplacien, qui sera appelé l'opérateur de Green. Comme très souvent dans ce type de problèmes, nous allons trouver ces solutions (en un certain sens qui sera précisé plus tard) en minimisant une certaine fonctionnelle, que nous introduisons maintenant.

Soient $m\in\mathbb{N}-\{0\}$ et Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^m$. L'hypothèse que Ω est borné est importante pour ce qui suit. Pour tous les $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ et $f\in\mathbb{L}^2(\Omega)$, notons

$$Q_f(u) = \frac{1}{2}\;\|\nabla u\|^2_{\mathbb{L}^2} - \mathrm{Re}\,\langle f,u\rangle_{\mathbb{L}^2}\;.$$

Il faut penser à la fonctionnelle Q_f comme à une énergie, somme d'une énergie cinétique et d'une énergie potentielle.

Proposition 2.22 *Soit $f\in\mathbb{L}^2(\Omega)$.*

(1) L'application $Q_f : W_0^{1,2}(\Omega)\to\mathbb{R}$ est continue, strictement convexe *(c'est-à-dire que $Q_f(tu+(1-t)v) < tQ_f(u)+(1-t)Q_f(v)$ pour tous les $t\in\,]0,1[$ et $u\neq v$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$), et* propre *(c'est-à-dire que $|Q_f(u)|$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|u\|_{W^{1,2}}$ tend vers $+\infty$).*

(2) L'application Q_f admet un et un seul minimum.

(3) Un élément $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ est un minimum de Q_f si et seulement si u est une solution faible *(ou* au sens des distributions*) de l'équation $-\Delta u = f$, c'est-à-dire si*

$$\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \quad \langle \nabla u, \nabla \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2} = \langle f, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2} \ .$$

Notons que toute solution $u \in \mathrm{C}^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ d'une équation de Poisson $-\Delta u = f$ (où f doit donc appartenir à $\mathrm{C}^\infty(\Omega;\mathbb{C})$) en est une solution faible, car par intégration par partie, pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$, nous avons

$$0 = \langle -\Delta u - f, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2} = -\langle \Delta u, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2} - \langle f, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2} = \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2} - \langle f, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2} \ .$$

Démonstration. (1) L'application Q_f est bien définie et à valeurs réelles. Sa continuité est immédiate : pour tous les $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, par les inégalités triangulaire et de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\big|Q_f(u) - Q_f(v)\big| &\leq \frac{1}{2}\,\big|\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2 - \|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2}^2\big| + |\langle f, u-v\rangle_{\mathbb{L}^2}| \\
&\leq \frac{1}{2}\,\|\nabla(u-v)\|_{\mathbb{L}^2}(\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2} + \|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2}) + \|f\|_{\mathbb{L}^2}\|u-v\|_{\mathbb{L}^2} \\
&\leq \big(\frac{1}{2}\,\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2} + \frac{1}{2}\,\|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2} + \|f\|_{\mathbb{L}^2}\big)\|u-v\|_{W^{1,2}} \ .
\end{aligned}$$

Pour montrer que Q_f est strictement convexe, par sesquilinéarité du produit scalaire et linéarité de ∇, il suffit de montrer que dans tout espace de Hilbert, l'application $x \mapsto \|x\|^2$ est strictement convexe. Or l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $t \mapsto at^2 + bt + c$ est strictement convexe pour tous les $a > 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$, et

$$\|tx + (1-t)y\|^2 = \|t(x-y) + y\|^2 = t^2\|x-y\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}\,\langle x-y, y\rangle + \|y\|^2 \ .$$

Donc l'application $f : t \mapsto \|tx + (1-t)y\|^2$ est convexe, et en particulier, si $t \in]0,1[$,

$$\|tx+(1-t)y\|^2 = f(t) = f(t\times 1 + (1-t)\times 0) \leq t\,f(1) + (1-t)\,f(0) = t\,\|x\|^2 + (1-t)\|y\|^2 \,,$$

avec inégalité stricte si $t \in]0,1[$ et $x \neq y$, ce qu'il s'agissait de montrer.

Pour montrer que Q_f est propre, il suffit d'appliquer les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré (voir la formule (29) suivant le théorème 2.19) : pour tout $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, puisque $\|u\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|u\|_{W^{1,2}}$ et $\|u\|_{W^{1,2}}^2 = \|u\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq (1 + c_\Omega^2)\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2$, nous avons

$$Q_f(u) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2 - \|f\|_{\mathbb{L}^2}\|u\|_{\mathbb{L}^2} \geq \frac{1}{2(1+c_\Omega^2)}\,\|u\|_{W^{1,2}}^2 - \|f\|_{\mathbb{L}^2}\|u\|_{W^{1,2}} \ ,$$

qui tend évidemment vers $+\infty$ quand $\|u\|_{W^{1,2}}$ tend vers $+\infty$.

(2) Ceci découle immédiatement (et sans même besoin de la question (1)) de la seconde assertion du théorème de Lax-Milgram 1.15 appliquée aux fonctions a et φ suivantes. L'application $a : W_0^{1,2}(\Omega)\times W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{C}$ définie par $a(u,v) = \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{\mathbb{L}^2}$ est sesquilinéaire et hermitienne. Elle est continue par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}\|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|u\|_{W^{1,2}}\|v\|_{W^{1,2}} \ ,$$

et coercive par l'inégalité de Poincaré 2.19 (voir la formule (29)) :

$$|a(u,u)| = \|\nabla u\|^2_{\mathbb{L}^2} \geq \frac{1}{1+c_\Omega^2}\ \|u\|^2_{W^{1,2}}\ .$$

De plus, l'application $\varphi : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{C}$ définie par $u \mapsto \langle f, u\rangle_{\mathbb{L}^2}$ est une forme anti-linéaire, et continue par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\varphi(u)| \leq \|f\|_{\mathbb{L}^2}\|u\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|f\|_{\mathbb{L}^2}\|u\|_{W^{1,2}}\ .$$

Mais voici une démonstration utilisant la question (1), qui peut être utile dans d'autres contextes. Si u et v étaient deux minima distincts de Q_f, de valeur minimale $a = Q_f(u) = Q_f(v)$, alors par stricte convexité de Q_f, nous aurions $Q_f(\frac{u+v}{2}) < \frac{Q_f(u)+Q_f(v)}{2} = a$, une contradiction.

Puisque Q_f est propre, soit $R > 0$ tel que $Q_f(u) \geq 0$ si $\|u\|_{W^{1,2}} \geq R$. Pour montrer l'existence d'un minimum, puisque $Q_f(0) = 0$, il suffit de montrer que Q_f admet un minimum dans la boule fermée $\overline{B}(0,R)$: ce sera un minimum de Q_f sur $W_0^{1,2}(\Omega)$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\overline{B}(0,R)$ telle que $\lim_{n\to+\infty} Q_f(x_n) = \inf_{y\in\overline{B}(0,R)} Q_f(y)$. Quitte à extraire, nous pouvons supposer qu'elle converge faiblement vers x (voir le théorème 1.21). L'application Q_f est continue et convexe, donc faiblement semi-continue inférieurement (voir la proposition 1.23). D'où $Q_f(x) \leq \lim_{n\to+\infty} Q_f(x_n) = \inf_{y\in\overline{B}(0,R)} Q_f(y)$, et x est un minimum de Q_f.

(3) Ceci découle immédiatement de la première assertion du théorème de Lax-Milgram 1.15 appliquée aux fonctions a et φ ci-dessus, et de la densité de $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. Mais voici une démonstration directe.

Pour tout $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}_{|t=0} Q_f(u+t\varphi) &= \frac{d}{dt}_{|t=0}\Big(\frac{1}{2}\langle\nabla(u+t\varphi),\nabla(u+t\varphi)\rangle_{\mathbb{L}^2} - \mathrm{Re}\,\langle f, u+t\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2}\Big)\\ &= \mathrm{Re}\,\langle\nabla u,\nabla\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2} - \mathrm{Re}\,\langle f,\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2}\ .\end{aligned}$$

Donc en remplaçant φ par $i\varphi$ pour obtenir les parties imaginaires, si u est un minimum de Q_f, alors u est une solution faible de l'équation $-\Delta u = f$.

Réciproquement, si u est une solution faible de l'équation $-\Delta u = f$, alors pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}) - \{0\}$, la valeur $t = 0$ est le minimum (qui est le seul extremum) de la fonction strictement convexe et propre $t \mapsto Q_f(u+t\varphi)$. Par densité de $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, ceci implique que u est un minimum de Q_f. □

Nous noterons $G : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega)$ l'application qui à un élément f de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ associe l'unique élément u de $W_0^{1,2}(\Omega)$ qui minimise Q_f, ou de manière équivalente, l'unique solution faible $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ de l'équation de Poisson $-\Delta u = f$. Nous appellerons G *l'opérateur de Green* de Ω. Notons que l'image de G est bien plus petite que $\mathbb{L}^2(\Omega)$: elle est contenue dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, ce qui sera crucial pour le résultat suivant.

Proposition 2.23 *L'opérateur de Green $G : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega)$ est linéaire, continu, auto-adjoint, positif, compact, d'image contenue dans $W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Démonstration. La linéarité de G découle de l'unicité et de la linéarité en (u, f) des équations $\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2} = \langle f, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2}$ pour $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$.

Montrons que G est continu. Si $G(f) = u$, alors u minimisant Q_f, nous avons

$$0 = \frac{d}{dt}_{|t=1} Q_f(tu) = \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2 - \mathrm{Re}\ \langle f, u \rangle_{\mathbb{L}^2}\ .$$

Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \|f\|_{\mathbb{L}^2} \|u\|_{\mathbb{L}^2}$. Par l'inégalité de Poincaré 2.19,

$$\|u\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq c_\Omega^2\ \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq c_\Omega^2 \|f\|_{\mathbb{L}^2} \|u\|_{\mathbb{L}^2}\ .$$

D'où $G : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega)$ est continu, de norme $\|G\|$ au plus c_Ω^2.

Montrons que G est auto-adjoint. Soient $f, g \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, notons $u = G(f)$ et $v = G(g)$, qui appartiennent à $W_0^{1,2}(\Omega)$. Par construction, nous avons $\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2} = \langle f, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2}$ pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$. Donc par densité de $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, nous avons $\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{L}^2} = \langle f, v \rangle_{\mathbb{L}^2}$. En prenant les conjugués, nous avons $\langle v, f \rangle_{\mathbb{L}^2} = \langle \nabla v, \nabla u \rangle_{\mathbb{L}^2}$, et de même en échangeant f et g, ce qui échange u et v. Donc

$$\langle G(g), f \rangle_{\mathbb{L}^2} = \langle v, f \rangle_{\mathbb{L}^2} = \langle \nabla v, \nabla u \rangle_{\mathbb{L}^2} = \overline{\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{L}^2}} = \overline{\langle u, g \rangle_{\mathbb{L}^2}} = \langle g, u \rangle_{\mathbb{L}^2} = \langle g, G(f) \rangle_{\mathbb{L}^2}\ .$$

Montrons que G est positif, et même strictement positif, c'est-à-dire que $\langle G(f), f \rangle_{\mathbb{L}^2} > 0$ pour tout élément non nul f de $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Comme vu ci-dessus, nous avons

$$\langle G(f), f \rangle_{\mathbb{L}^2} = \big\|\nabla\big(G(f)\big)\big\|_{\mathbb{L}^2}^2\ ,$$

qui est positif, et qui est nul seulement si $G(f)$ est nul, par l'inégalité de Poincaré 2.19. Donc $\langle G(f), f \rangle_{\mathbb{L}^2}$ est nul seulement si f est nulle par unicité, car si l'application nulle est une solution faible de l'équation de Poisson $-\Delta u = f$, alors f est nulle.

Montrons enfin que G est un opérateur compact, c'est-à-dire que l'image par G de toute suite bornée de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ admet une sous-suite convergente dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Remarquons que G est d'image contenue dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ et que G est continue de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, car

$$\begin{aligned}\|G(f)\|_{W^{1,2}} &= \|G(f)\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \big\|\nabla\big(G(f)\big)\big\|_{\mathbb{L}^2}^2 = \|G(f)\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \langle G(f), f \rangle_{\mathbb{L}^2} \\ &\leq (\|G\|^2 + \|G\|)\|f\|_{\mathbb{L}^2}^2\ .\end{aligned}$$

Donc l'image par G de toute suite bornée de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ est une suite bornée dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, et le résultat découle du théorème de Rellich-Kondrachov 2.20. □

Décomposition spectrale du laplacien.

Soient $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ et Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^m$. L'opérateur laplacien Δ n'est pas défini sur tout l'espace de Hilbert $\mathbb{L}^2(\Omega)$, mais a priori seulement de son sous-espace dense $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ dans lui-même. Il est la première instance de ce qui est appelé un opérateur non borné (voir par exemple [Bre, Yos]), mais nous n'en développerons pas la théorie générale. Nous allons montrer qu'il existe une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ formée de vecteurs propres de l'opposé du laplacien, de valeurs propres associées positives qui convergent vers l'infini.

Théorème 2.24 *Soient $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ et Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^m$. Il existe une suite $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, croissante, qui converge vers $+\infty$, et une base hilbertienne $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'application f_i soit une solution C^∞ de l'équation $-\Delta f_i = \lambda_i f_i$.*

Démonstration. Puisque l'opérateur de Green $G : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega)$ est auto-adjoint, strictement positif, compact (et $\mathbb{L}^2(\Omega)$ est séparable et de dimension infinie), il est diagonalisable en base hilbertienne, à valeurs propres strictement positives décroissantes tendant vers 0 : il existe une suite $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, décroissante, convergente vers 0, et une base hilbertienne $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ telle que $G(f_i) = \epsilon_i f_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Posons $\lambda_i = \frac{1}{\epsilon_i}$. Alors par définition de l'opérateur de Green, $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ telle que f_i soit une solution faible de l'équation $-\Delta f_i = \lambda_i f_i$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Nous ne montrerons pas ici que les applications f_i sont en fait C^∞ (propriété dite de *régularité elliptique*, découlant d'un principe du maximum, voir par exemple [Bre]). L'application f_i est alors une vraie solution de l'équation $-\Delta f_i = \lambda_i f_i$. □

2.5 Introduction à l'analyse harmonique des sphères

La référence de base pour cette partie est [Far, Chap. IX].

Dans toute cette partie, nous noterons n un élément de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 1$, $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées dans la base canonique d'un élément x de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$ le produit scalaire usuel et la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{B}_{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$. L'objet principal d'étude dans cette partie est

$$\mathbb{S}_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \|x\| = 1\} \ ,$$

la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$. Nous noterons $\mathrm{O}(n+1)$ le groupe orthogonal de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$, c'est-à-dire le groupe des automorphismes linéaires de $\mathbb{R}^{n+1}$ préservant son produit scalaire :

$$\forall\, g \in \mathrm{O}(n+1),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \langle gx, gy \rangle = \langle x, y \rangle \ .$$

Ce sont les applications linéaires de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans lui-même dont les matrices dans la base canonique sont inversibles, d'inverse égale à leur transposée. Bien sûr, l'action linéaire de $\mathrm{O}(n+1)$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ préserve la sphère $\mathbb{S}_n$:

$$\forall\, g \in \mathrm{O}(n+1),\ \forall x \in \mathbb{S}_n, \quad gx \in \mathbb{S}_n \ .$$

L'action de $\mathrm{O}(n+1)$ est transitive sur $\mathbb{S}_n$, et de même celle du *groupe des rotations* de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\mathrm{SO}(n+1) = \{g \in \mathrm{O}(n+1) \ : \ \det g = 1\} \ :$$

pour tous les $x, y \in \mathbb{S}_n$, il existe (au moins) une rotation envoyant x sur y. En effet, l'application fixant l'orthogonal du plan orienté de base (x, y) si $x \neq \pm y$, ou n'importe quel plan orienté contenant x sinon, valant sur ce plan la rotation d'angle $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos\theta = \langle x, y \rangle$ ou celle d'angle $-\theta$, convient.

En tant que fermé et borné de l'espace vectoriel réel $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme d'opérateur, le groupe $\mathrm{O}(n+1)$ est un espace topologique compact. Pour tout $h \in \mathrm{O}(n+1)$, les applications $g \mapsto hg$ et $g \mapsto gh^{-1}$ de $\mathrm{O}(n+1)$ dans lui-même, appelées respectivement la *translation à gauche* par h et la *translation à droite* par h, sont des homéomorphismes, d'inverses les translations à gauche et à droite par h^{-1}.

Le but de cette partie est d'étudier les propriétés spectrales d'un opérateur de type laplacien sur $\mathbb{S}_n$.

Mesure de Lebesgue des sphères.

Nous commençons par généraliser aux sphères de dimensions supérieures la construction de la mesure de Lebesgue sur le cercle (voir la partie 2.2). Rappelons qu'une mesure μ sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$ est *invariante* par une transformation mesurable $g : X \to X$ si $g_*\mu = \mu$, où $g_*\mu$ est la mesure image de μ par g (définie par $g_*\mu(A) = \mu(g^{-1}(A))$ pour toute partie mesurable A), ou, de manière équivalente, si pour toute application mesurable $f : X \to \mathbb{R}$, nous avons

$$\int_X f \circ g \; d\mu = \int_X f \; d\mu$$

(au sens que l'une de ces deux intégrales existe si et seulement si l'autre existe, et qu'elles sont alors égales).

Proposition 2.25 *Il existe une et une seule mesure borélienne de probabilité σ_n sur $\mathbb{S}_n$ invariante par toutes les rotations.*

Démonstration. Montrons tout d'abord l'existence de σ_n. Pour tout borélien A de $\mathbb{S}_n$, notons $c(A) = \{tx \;:\; t \in \,]0,1], x \in A\}$ le cône épointé sur A de centre 0 dans $\mathbb{B}_{n+1}$, qui est encore un borélien. Le cône commute avec les opérations booléennes sur les parties de $\mathbb{B}_{n+1} - \{0\}$:

$$c\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} c(A_i), \quad c\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} c(A_i), \quad c(\mathbb{S}_n - A) = (\mathbb{B}_{n+1} - \{0\}) - c(A)\;.$$

Si λ_{n+1} est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^{n+1}$ et si $\varpi_{n+1} = \lambda_{n+1}(\mathbb{B}_{n+1})$, alors par l'invariance de λ_{n+1} par les rotations, l'application $\sigma_n : \mathscr{B} \to [0, +\infty[$, où $\mathscr{B}$ est la tribu (σ-algèbre) borélienne de $\mathbb{S}_n$, définie par $A \mapsto \sigma_n(A) = \frac{1}{\varpi_{n+1}}\lambda_{n+1}(c(A))$ convient.

Montrons maintenant l'unicité de σ_n, en commençant par une remarque préliminaire. Le théorème de Stone-Weierstrass 1.1 implique la densité de l'ensemble des combinaisons linéaires d'applications $y \mapsto e^{i\langle x,\, y\rangle}$ (où $x \in \mathbb{R}^{n+1}$) dans l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{C}$ pour la convergence uniforme sur les compacts. Puisque deux mesures boréliennes positives sur $\mathbb{R}^{n+1}$, donnant même intégrale à toute fonction continue à support compact, coïncident, il en découle qu'une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ est uniquement déterminée par sa *fonction caractéristique*

$$\widehat{\mu} : x \mapsto \int_{y\in\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\langle x,\, y\rangle} \; d\mu(y)\;.$$

Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^{n+1}$, à support dans $\mathbb{S}_n$, invariantes par les rotations. Pour tous les $g \in \mathrm{SO}(n+1)$ et $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, nous avons

$$\widehat{\mu}(gx) = \int_{y\in\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\langle gx,\, y\rangle} \; d\mu(y) = \int_{y\in\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\langle x,\, g^{-1}y\rangle} \; d\mu(y) = \widehat{\mu}(x)\;.$$

Donc les fonctions caractéristiques de μ et de ν sont invariantes par les rotations. Pour tout $r \geq 0$, nous avons, en rappelant que e_0 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, par l'invariance par les rotations de $\widehat{\mu}$ et la transitivité de l'action de $\mathrm{SO}(n+1)$ sur $\mathbb{S}_n$, et puisque ν est une mesure de probabilité de support $\mathbb{S}_n$,

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}(re_0) &= \int_{\mathbb{S}_n} \widehat{\mu}(re_0)\, d\nu(x) = \int_{\mathbb{S}_n} \widehat{\mu}(rx)\, d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \widehat{\mu}(rx)\, d\nu(x) \\ &= \iint_{(x,\,y)\in\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}} e^{ir\langle x,,y\rangle}\, d\mu(y)\, d\nu(x)\ .\end{aligned}$$

Puisque le dernier terme est symétrique en μ et ν par le théorème de Fubini, nous en déduisons donc que les fonctions caractéristiques $\widehat{\mu}$ et $\widehat{\nu}$ coïncident sur la demi-droite $\mathbb{R}_+e_0$, donc sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par l'invariance par les rotations. D'où $\mu = \nu$ par la remarque préliminaire. □

La mesure de probabilité σ_n sera appelée la *mesure de Lebesgue* (normalisée) de $\mathbb{S}_n$. Dans la suite, nous noterons $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_n) = \mathbb{L}^2(\mathbb{S}_n, \sigma_n; \mathbb{C})$. Avec la notation σ de la partie 2.2, nous avons $\sigma_1 = \frac{\sigma}{2\pi}$.

L'opérateur laplacien sphérique.

Rappelons que le laplacien (euclidien) est l'opérateur linéaire, agissant sur les fonctions de classe C^2 d'un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, défini par

$$\Delta = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\ .$$

Pour tout $k \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty\}$, une application $f : \mathbb{S}_n \to \mathbb{C}$ est dite *de classe* C^k si l'application[20] $\underline{f} : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}$ définie par $x \mapsto f(\frac{x}{\|x\|})$ est de classe C^k. Par exemple, la restriction à $\mathbb{S}_n$ de toute application de classe C^k définie sur un voisinage ouvert de $\mathbb{S}_n$ est de classe C^k, par le théorème de dérivation des applications composées. Nous renvoyons à un cours de géométrie différentielle (par exemple [Laf]) pour une définition intrinsèque de la propriété d'être de classe C^k sur $\mathbb{S}_n$.

Le *laplacien sphérique* Δ_S est l'opérateur linéaire, agissant sur les applications de classe C^2 de $\mathbb{S}_n$ dans $\mathbb{C}$, défini par

$$\Delta_S\, f = \big(\Delta\, \underline{f}\,\big)_{|\mathbb{S}_n}\ . \tag{33}$$

On définit de même le laplacien sphérique agissant sur les applications de classe C^2 d'un ouvert Ω de $\mathbb{S}_n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, mais nous n'étudierons ci-dessous que le cas $\Omega = \mathbb{S}_n$.

Nous donnons dans la fin de cette partie quelques propriétés du laplacien euclidien Δ.

L'opérateur laplacien Δ possède des propriétés de symétries importantes. Il est clairement invariant par permutation des coordonnées. Mais en fait, il admet beaucoup plus de symétries, comme le montre le résultat suivant. Même si cela n'apparaîtra peut-être pas clairement dans la suite, ce sont ces propriétés de symétries qui vont nous permettre de diagonaliser en base hilbertienne l'opérateur laplacien sphérique, de manière explicite.

20. appelée *l'extension radialement constante* de f

Proposition 2.26 *Le laplacien euclidien Δ est invariant par* $\mathrm{O}(n+1)$ *: pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^{n+1}$ invariant par* $\mathrm{O}(n+1)$*, pour tout $f : U \to \mathbb{C}$ de classe* C^2*, nous avons*

$$\forall\, g \in \mathrm{O}(n+1), \quad \Delta(f \circ g) = (\Delta f) \circ g\ .$$

Il découle de la proposition 2.26 que le laplacien sphérique Δ_S est aussi invariant par $\mathrm{O}(n+1)$: pour toute application $f : \mathbb{S}_n \to \mathbb{C}$ de classe C^2, pour tout $g \in \mathrm{O}(n+1)$, nous avons $\underline{f \circ g} = \underline{f} \circ g$ et donc $\Delta_S(f \circ g) = (\Delta_S f) \circ g$.

Démonstration. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ invariant par $\mathrm{O}(n+1)$, $f : U \to \mathbb{C}$ une application C^2, $g \in \mathrm{O}(n+1)$ et $x \in U$. Notons $H_x f = \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\Big)_{0 \le i,\, j \le n}$ la matrice *hessienne* de f en x, c'est-à-dire la matrice (symétrique) dans la base canonique de l'application bilinéaire différentielle seconde $d^2 f_x$ de f en x. Par définition, nous avons

$$\Delta f\,(x) = \operatorname{trace}\ H_x f\ .$$

Par la linéarité de g, nous avons, pour tous les $v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$d(f \circ g)_x(v) = df_{g(x)}(g(v)) \quad \text{et} \quad d^2(f \circ g)_x(v, w) = d^2 f_{g(x)}(g(v), g(w))\ .$$

Si G est la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, nous avons donc $H_x(f \circ g) = {}^tG\ H_{g(x)} f\ G$. Par les propriétés de la trace et puisque $G^{-1} = {}^tG$, nous avons donc

$$\operatorname{trace} H_x(f \circ g) = \operatorname{trace}\big({}^tG\ H_{g(x)} f\ G\big) = \operatorname{trace}\big(G\,{}^tG\ H_{g(x)} f\big) = \operatorname{trace}\big(H_{g(x)} f\big)\ .$$

Ceci montre le résultat. □

Une application $f : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}$ est dite *radiale* si elle est invariante par $\mathrm{O}(n+1)$ (c'est-à-dire si $f(gx) = f(x)$ pour tous les $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ et $g \in \mathrm{O}(n+1)$), ou, de manière équivalente, s'il existe une application $F :]0, +\infty[\ \to \mathbb{C}$ telle que $f(x) = F(\|x\|)$. Une telle application F est unique, car nous avons alors $F(r) = f(r\, e_0)$ pour tout $r > 0$. De plus, ceci montre que F est de classe C^2 si f l'est. Par exemple, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'application $x \mapsto \|x\|^k$ est radiale.

Proposition 2.27 *Soient $f : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}$ une application radiale* C^2*, et $F :]0, +\infty[\ \to \mathbb{C}$ telle que $f(x) = F(\|x\|)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, nous avons*

$$\Delta f(x) = LF(\|x\|)\ ,$$

où $LF(r) = \frac{d^2 F}{dr^2}(r) + \frac{n}{r}\frac{dF}{dr}(r)$.

Démonstration. Notons $r = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=0}^n x_i^2}$. Pour $0 \le i \le n$, nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial\big(F(r)\big)}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} F'(r)\ , \tag{34}$$

et en dérivant une nouvelle fois,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{x_i^2}{r^2} F''(r) + \Big(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\Big) F'(r)\ .$$

Le résultat en découle, par sommation. □

Décomposition spectrale du laplacien sphérique.

Nous noterons $\underline{i} = (i_0, i_1, \dots, i_n)$ les éléments de $\mathbb{N}^{n+1}$ (appelés *multi-entiers*), ainsi que $|\,\underline{i}\,| = i_0 + i_1 + \dots + i_n$ (appelé la *longueur* de $\underline{i}$) et $\underline{i}! = i_0!\, i_1! \dots i_n!$ (appelé *factorielle* de $\underline{i}$). Pour tout $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, posons

$$x^{\underline{i}} = x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \ .$$

Notons $\mathscr{P}$ l'algèbre complexe des applications polynomiales de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{C}$, et, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}_m = \Big\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \sum_{\underline{i}\,\in\,\mathbb{N}^{n+1}\,:\,|\,\underline{i}\,|\,=\,m} a_{\underline{i}}\, x^{\underline{i}} \ :\ a_{\underline{i}} \in \mathbb{C} \Big\}$$

son sous-espace vectoriel complexe des applications polynomiales homogènes de degré m. Les applications $x \mapsto x^{\underline{i}}$ pour $\underline{i} \in \mathbb{N}^{n+1}$ sont appelées les applications *monomiales*, et forment une base de l'espace vectoriel complexe $\mathscr{P}$. Remarquons que $\mathscr{P} = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_m$ et que si $p \in \mathscr{P}_m$ et $q \in \mathscr{P}_\ell$, alors $pq \in \mathscr{P}_{m+\ell}$ (l'algèbre $\mathscr{P}$, munie de la suite de sous-espaces vectoriels $(\mathscr{P}_m)_{m\in\mathbb{N}}$, est ainsi une *algèbre graduée*). Nous noterons δ_m la dimension de l'espace vectoriel complexe $\mathscr{P}_m$.

Remarquons que l'opérateur laplacien Δ est un opérateur linéaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$, qui envoie $\mathscr{P}_m$ dans $\mathscr{P}_{m-2}$ (avec la convention que $\mathscr{P}_{-1} = \mathscr{P}_{-2} = \{0\}$). Notons $\mathscr{H}_m$ le noyau de $\Delta_{|\mathscr{P}_m}$, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel complexe de $\mathscr{P}_m$ des applications polynomiales harmoniques :

$$\mathscr{H}_m = \{p \in \mathscr{P}_m \ :\ \Delta p = 0\} \ ,$$

et $\mathscr{HS}_m$ l'espace vectoriel des restrictions des éléments de $\mathscr{H}_m$ à la sphère $\mathbb{S}_n$. Remarquons que l'application de restriction de $\mathscr{H}_m$ dans $\mathscr{HS}_m$ (qui à $p \in \mathscr{H}_m$ associe $p_{|\mathbb{S}_n} \in \mathscr{HS}_m$) est un isomorphisme linéaire, car une application polynomiale p, homogène de degré m, qui est nulle sur la sphère unité, est nulle, par la formule $p(x) = \|x\|^m p\big(\frac{x}{\|x\|}\big)$. Les espaces vectoriels complexes $\mathscr{H}_m$ et $\mathscr{HS}_m$ sont donc de même dimension, notée d_m. Les espaces $\mathscr{H}_m$ et $\mathscr{HS}_m$ sont stables par la conjugaison complexe (et donc par passage aux parties réelle et imaginaire). Les éléments de $\mathscr{HS}_m$ s'appellent les *harmoniques sphériques* de degré m.

Nous notons $[t] = \sup\{n \in \mathbb{Z} \ :\ n \le t\}$ la partie entière (inférieure, aussi notée $\lfloor t \rfloor$) d'un élément $t \in \mathbb{R}$ et Q l'application polynomiale $(x_0, \dots, x_n) \mapsto x_0^2 + \dots + x_n^2$, qui appartient à $\mathscr{P}_2$.

Proposition 2.28 *(1) Pour toute application polynomiale p homogène de degré m, il existe des applications polynomiales harmoniques $h_k \in \mathscr{H}_{m-2k}$ pour $0 \le k \le [\frac{m}{2}]$ telles que*

$$p = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} Q^k h_k \ .$$

(2) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, les espaces vectoriels complexes $\mathscr{P}_m$, $\mathscr{H}_m$ et $\mathscr{HS}_m$ sont de dimension finie :

$$\delta_m = \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{P}_m = \binom{m+n}{n} \ ,$$

$$d_m = \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{H}_m = \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{HS}_m = (2m+n-1)\frac{(m+n-2)!}{(n-1)!\,m!}\ .$$

Démonstration. Définissons un produit scalaire hermitien $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ sur l'espace vectoriel complexe $\mathscr{P}$ par

$$\langle\langle p,q\rangle\rangle = \sum_{\underline{i}\in\mathbb{N}^{n+1}} \underline{i}!\; p_{\underline{i}}\; \overline{q_{\underline{i}}}\ ,$$

où $p : x \mapsto \sum_{\underline{i}\in\mathbb{N}^{n+1}} p_{\underline{i}}\, x^{\underline{i}}$ et $q : x \mapsto \sum_{\underline{i}\in\mathbb{N}^{n+1}} q_{\underline{i}}\, x^{\underline{i}}$ (ces sommes n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls). Montrons que l'adjoint pour ce produit scalaire de l'opérateur linéaire $\Delta : \mathscr{P}\to\mathscr{P}$ est l'opérateur $Q\times$ de multiplication par $Q : x \mapsto x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$:

$$\forall\, p,q\in\mathscr{P},\quad \langle\langle \Delta p,q\rangle\rangle = \langle\langle p,Qq\rangle\rangle\ . \tag{35}$$

En itérant et par sommation, il suffit de vérifier que l'adjoint de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ est l'opérateur de multiplication par x_k pour $0\le k\le n$, c'est-à-dire pour tous les $p,q\in\mathscr{P}$, nous avons $\langle\langle \frac{\partial p}{\partial x_k},q\rangle\rangle = \langle\langle p, x_k q\rangle\rangle$. Par linéarité, il suffit de vérifier cette dernière formule lorsque p est une application monomiale quelconque $x\mapsto x^{\underline{i}}$, où $\underline{i}=(i_0,i_1,\dots,i_n)$.

Si $i_k = 0$, alors $\langle\langle \frac{\partial x^{\underline{i}}}{\partial x_k},q\rangle\rangle = 0$ et $\langle\langle x^{\underline{i}}, x_k q\rangle\rangle = 0$, donc la formule d'adjonction (35) est vérifiée. Sinon, posons $\underline{i'} = (i_0,\dots,i_{k-1},i_k-1,i_{k+1},\dots,i_n)$. Comme $\frac{\partial\, x^{\underline{i}}}{\partial x_k} = i_k\; x^{\underline{i'}}$ et $(x_k q)_{\underline{i}} = q_{\underline{i'}}$, le résultat en découle par la définition du produit scalaire :

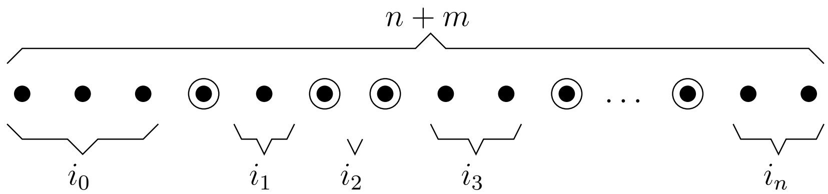
$$\langle\langle \frac{\partial x^{\underline{i}}}{\partial x_k},q\rangle\rangle = i_k\,\langle\langle x^{\underline{i'}},q\rangle\rangle = i_k\;\underline{i'}!\;q_{\underline{i'}} = \underline{i}!\;q_{\underline{i'}} = \langle\langle x^{\underline{i}}, x_k q\rangle\rangle\ .$$

(1) Montrons que $\mathscr{P}_m = \mathscr{H}_m \oplus Q\mathscr{P}_{m-2}$ si $m\ge 2$. Les applications polynomiales de degré 0 ou 1 étant harmoniques, l'assertion (1) en découle par récurrence. Ceci montre aussi que si $m\ge 2$, alors $\dim_{\mathbb{C}}\mathscr{H}_m = \dim_{\mathbb{C}}\mathscr{P}_m - \dim_{\mathbb{C}}\mathscr{P}_{m-2}$, c'est-à-dire, en posant $d_m = \dim_{\mathbb{C}}\mathscr{H}_m$ et $\delta_m = \dim_{\mathbb{C}}\mathscr{P}_m$,

$$\forall\, m\ge 2,\quad d_m = \delta_m - \delta_{m-2}\ .$$

Il suffit de montrer que l'orthogonal dans $\mathscr{P}_m$ (pour la restriction du produit scalaire $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ à $\mathscr{P}_m$) du sous-espace vectoriel $Q\mathscr{P}_{m-2}$ est le sous-espace vectoriel $\mathscr{H}_m$. Ceci découle du fait que le noyau de $\Delta : \mathscr{P}_m \to \mathscr{P}_{m-2}$ est l'orthogonal de l'image de son adjoint $Q\times : \mathscr{P}_{m-2}\to\mathscr{P}_m$. En effet, soit $p\in\mathscr{P}_m$. Alors par la formule d'adjonction (35), nous avons $\langle\langle p,Qq\rangle\rangle = 0$ pour tout $q\in\mathscr{P}_{m-2}$ si et seulement si $\langle\langle\Delta p,q\rangle\rangle = 0$ pour tout $q\in\mathscr{P}_{m-2}$, ce qui équivaut à $\Delta p = 0$, car l'opérateur laplacien envoie $\mathscr{P}_m$ dans $\mathscr{P}_{m-2}$. Ceci montre le résultat.

(2) Comme l'application de restriction induit un isomorphisme linéaire de $\mathscr{H}_m$ dans $\mathscr{HS}_m$, nous avons $\dim_{\mathbb{C}}\mathscr{H}_m = \dim_{\mathbb{C}}\mathscr{HS}_m$. Par l'expression ci-dessus de d_m si $m\ge 2$, et le fait que $\mathscr{H}_0 = \mathscr{P}_0$ et $\mathscr{H}_1 = \mathscr{P}_1$ sont de dimension 1 et $n+1$ respectivement, il suffit de calculer la valeur de δ_m. Or δ_m est le nombre de $(n+1)$-uplets $\underline{i} = (i_0,i_1\dots,i_n)$ dans $\mathbb{N}^{n+1}$ tels que $|\,\underline{i}\,| = i_0+i_1+\cdots+i_n = m$, qui vaut le nombre d'arrangements $\begin{pmatrix} m+n\\ n\end{pmatrix}$, car le choix de n éléments (les points entourés d'un cercle ci-dessous) d'une suite ordonnée de $n+m$ éléments détermine $n+1$ intervalles ordonnés dont la somme des longueurs est m.



□

Le résultat suivant implique que l'opérateur laplacien sphérique Δ_S, qui est défini sur le sous-espace dense de $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_n)$ formé des applications C^∞, est diagonalisable en base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_n)$.

Théorème 2.29 *L'espace de Hilbert complexe $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_n)$ est somme hilbertienne des sous-espaces vectoriels de dimension finie $\mathscr{HS}_m$ pour $m \in \mathbb{N}$, et tout élément de $\mathscr{HS}_m$ est un vecteur propre de l'opposé du laplacien sphérique $-\Delta_S$ associé à la valeur propre $m(m+n-1)$:*

$$\forall\, f \in \mathscr{HS}_m, \quad -\Delta_S\, f = m(m+n-1)\, f\ .$$

Remarquons que lorsque m varie dans $\mathbb{N}$, ces valeurs propres sont deux à deux distinctes, et de multiplicités finies, la multiplicité de $m(m+n-1)$ étant

$$d_m = (2m+n-1)\frac{(m+n-2)!}{(n-1)!\, m!}$$

par la proposition 2.28 (2).

Démonstration. (1) Montrons tout d'abord l'orthogonalité de $\mathscr{HS}_m$ et $\mathscr{HS}_\ell$ si $m \neq \ell$.

Rappelons la *formule de Green*. Si f est une application C^2 d'un voisinage ouvert de $\mathbb{B}_{n+1}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, nous noterons, pour tout $x \in \mathbb{S}_n$,

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) = df_x(x)$$

la *dérivée radiale* de f en x. Notons ϖ_{n+1} la mesure de $\mathbb{B}_{n+1}$ pour la mesure de Lebesgue λ_{n+1} de $\mathbb{R}^{n+1}$. La formule de Green dit que si u et v sont deux applications C^2 d'un voisinage ouvert de $\mathbb{B}_{n+1}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors

$$\int_{\mathbb{B}_{n+1}} \big(u\Delta v - v\Delta u\big)\, d\lambda_{n+1} = \varpi_{n+1} \int_{\mathbb{S}_n} \big(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\big)\, d\sigma_n\ .$$

Rappelons la *formule d'Euler*[21] : si $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$ est une application polynomiale homogène de degré m, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, nous avons

$$df_x(x) = m\, f(x)\ .$$

21. Par linéarité, il suffit de la montrer lorque f est une application monomiale $(x_0, \dots, x_n) \mapsto x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}$, auquel cas le résultat est immédiat par la formule $df_x(x) = \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Pour une autre méthode, dériver en $t=1$ l'équation $f(tx) = t^m f(x)$, vérifiée pour tous les $t \in [0, +\infty[$ et $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ si f est homogène de degré m.

Pour tous les $p \in \mathscr{H}_m$ et $q \in \mathscr{H}_\ell$, nous avons donc

$$\begin{aligned}(m-\ell)\,\langle p_{|\mathbb{S}_n}, q_{|\mathbb{S}_n}\rangle_{\mathbb{L}^2} &= \int_{\mathbb{S}_n} (m\,p\,\overline{q} - p\,\overline{\ell\,q}\,)\;d\sigma_n = \int_{\mathbb{S}_n} \Big(\overline{q}\,\frac{\partial p}{\partial \nu} - p\,\frac{\partial \overline{q}}{\partial \nu}\Big)\;d\sigma_n \\ &= \frac{1}{\varpi_{n+1}} \int_{\mathbb{B}_{n+1}} \big(\overline{q}\;\Delta p - p\;\Delta \overline{q}\big)\;d\lambda_{n+1} = 0\;,\end{aligned}$$

ce qui montre le résultat.

(2) Montrons que le sous-espace vectoriel $\oplus_{m\in\mathbb{N}}\mathscr{HS}_m$ est dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_n)$, ce qui, avec l'assertion (1), montre que $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_n)$ est somme hilbertienne des $\mathscr{HS}_m$ pour $m \in \mathbb{N}$. Par densité pour la norme $\mathbb{L}^2$ des applications continues dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_n)$, et puisque la convergence uniforme d'applications continues implique leur convergence $\mathbb{L}^2$ par finitude de la mesure, il suffit de démontrer que $\oplus_{m\in\mathbb{N}}\mathscr{HS}_m$ est dense dans $\mathscr{C}(\mathbb{S}_n;\mathbb{C})$ pour la norme uniforme. Les fonctions coordonnées appartiennent à $\mathscr{P}$, donc l'ensemble des restrictions à $\mathbb{S}_n$ des éléments de $\mathscr{P}$ est une sous-algèbre séparante de $\mathscr{C}(\mathbb{S}_n;\mathbb{C})$. Par le théorème de Stone-Weierstrass 1.1, cet ensemble est donc dense pour la norme uniforme. Comme toute application polynomiale est somme d'applications polynomiales homogènes, il suffit de montrer que toute application polynomiale homogène coïncide, en restriction à $\mathbb{S}_n$, avec une somme d'applications polynomiales homogènes harmoniques. Ceci découle de la proposition 2.28 (1), car l'application polynomiale Q vaut 1 sur $\mathbb{S}_n$.

(3) Montrons que tout élément de $\mathscr{HS}_m$ est un vecteur propre de $-\Delta_S$ associé à la valeur propre $m(m+n-1)$.

Rappelons la *formule de Leibniz*[22] qui dit que si U est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ et si $u, v : U \to \mathbb{C}$ sont deux applications C^2, alors

$$\Delta(uv) = (\Delta u)v + 2\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + u(\Delta v)\;.$$

Soit f un élément de $\mathscr{HS}_m$, restriction de $p \in \mathscr{H}_m$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nul, en notant $r = \|x\|$, nous avons, avec la notation $\underline{f}$ utilisée pour définir l'opérateur laplacien sphérique (voir la formule (33)),

$$\underline{f}(x) = p\Big(\frac{x}{r}\Big) = \frac{p(x)}{r^m}\;.$$

L'application $u : x \mapsto \frac{1}{r^m}$ est radiale. Par l'équation (34) et la formule d'Euler, nous avons donc

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial p}{\partial x_i} = \sum_{i=0}^{n} -\frac{m\,x_i}{r^{m+2}}\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\frac{m}{r^{m+2}}\sum_{i=0}^{n} x_i\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\frac{m}{r^{m+2}}\;dp_x(x) = -\frac{m^2}{r^{m+2}}\;p(x)\;.$$

Par la proposition 2.27, nous avons

$$\Delta u = \frac{m(m+1)}{r^{m+2}} - \frac{mn}{r^{m+2}} = \frac{m(m+1-n)}{r^{m+2}}\;.$$

22. Anciennement francisé en Leibnitz, à l'attention des personnes agées, dont l'auteur, qui l'ont appris avec cet orthographe dans leur lointaine jeunesse.

Par la formule de Leibniz, et puisque p est harmonique, nous avons donc

$$-\Delta\ \underline{f} = -\Delta(up) = (-m(m+1-n)+2m^2)\frac{1}{r^{m+2}}\ p\ .$$

Donc $-\Delta_S f = m(m+n-1)f$. $\square$

Le but de la partie suivante est de donner une description explicite des harmoniques sphériques, c'est-à-dire des éléments de $\mathscr{HS}_m$ pour tout m, ou encore des vecteurs propres de $-\Delta_S$ pour la valeur propre $m(m+n-1)$.

Introduction aux polynômes sphériques.

Notons K le stabilisateur dans $\mathrm{O}(n+1)$ du dernier vecteur e_n de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$K = \left\{ \left(\begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)\ :\ A \in \mathrm{O}(n) \right\}\ .$$

Notons que K est un sous-groupe fermé de $\mathrm{O}(n+1)$, donc un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$. L'application $A \mapsto \left(\begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$ est un isomorphisme de groupes et un homéomorphisme de $\mathrm{O}(n)$ dans K.

Pour tout sous-groupe compact G de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$, pour toute mesure (borélienne) de probabilité ν sur G, nous dirons que ν est *invariante par translations à gauche* par G si pour tout $g \in G$, pour toute application continue $f : G \to \mathbb{C}$, nous avons

$$\int_{h\in G} f(gh)\ d\nu(h) = \int_{h\in G} f(h)\ d\nu(h)\ .$$

Nous dirons que ν est *invariante par translations à droite* par G si pour tout $g \in G$, pour toute application continue $f : G \to \mathbb{C}$, nous avons

$$\int_{h\in G} f(hg)\ d\nu(h) = \int_{h\in G} f(h)\ d\nu(h)\ .$$

De manière équivalente, en notant $L_g : G \to G$ l'application $h \mapsto gh$ et $R_g : G \to G$ l'application $h \mapsto hg$ pour tout $g \in G$, la loi ν est invariante à gauche (respectivement à droite) par G si et seulement si pour tout $g \in G$, la loi image $(L_g)_*\nu$ (respectivement $(R_g)_*\nu$) est égale à ν.

Le résultat ci-dessous est un cas particulier de l'existence et de l'unicité, sur tout sous-groupe compact G de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$, d'une mesure borélienne de probabilité invariante par translations à droite et à gauche (voir par exemple [Coh, §9]), appelée *mesure de Haar* de G.

Proposition 2.30 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une et une seule mesure borélienne de probabilité μ_n sur* $\mathrm{O}(n)$ *invariante par translations à gauche.*

De plus, μ_n est invariante par translations à droite, mais nous ne nous servirons pas de ce fait.

Démonstration. Puisque $\mathrm{O}(1) = \{\pm 1\}$, notons μ_0 la mesure d'équiprobabilité sur $\mathrm{O}(1)$, qui est bien invariante par translations à gauche.

Par récurrence, supposons μ_n construite, et notons μ_K la mesure sur K image de μ_n par $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est une mesure de probabilité. Pour toute application continue $f : \mathrm{O}(n+1) \to \mathbb{R}$ (qui est uniformément continue car $\mathrm{O}(n+1)$ est compact), l'application de $\mathrm{O}(n+1)$ dans $\mathbb{C}$ définie par $g \mapsto \int_K f(gk)\, d\mu_K(k)$ est continue. [En effet, en munissant $\mathrm{O}(n+1)$ de la restriction de la distance de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par la norme d'opérateur, pour tout $\epsilon > 0$, soit $\eta > 0$ tel que pour tous les $x, y \in \mathbb{S}_n$, si $\|x - y\| \leq \eta$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$. Alors pour tous les $g, g' \in \mathrm{O}(n+1)$ tels que $\|g - g'\| \leq \eta$, pour tout $k \in K$, nous avons $\|gk - g'k\| \leq \|g - g'\|\,\|k\| = \|g - g'\| \leq \eta$, donc, puisque μ_K est une mesure de probabilité,

$$\Big| \int_K f(gk)\, d\mu_K(k) - \int_K f(g'k)\, d\mu_K(k) \Big| \leq \epsilon\ .\ ]$$

Puisque μ_n, et donc μ_K, est invariante par translations à gauche, cette application passe au quotient pour donner une application continue $\overline{f}$ définie sur l'espace topologique quotient $\mathrm{O}(n+1)/K$ dans $\mathbb{R}$, qui est constante égale à 1 si f l'est.

Rappelons que l'application $g \mapsto ge_n$ de $\mathrm{O}(n+1)$ dans $\mathbb{S}_n$, qui est continue et surjective, induit par passage au quotient une bijection continue de $\mathrm{O}(n+1)/K$ dans $\mathbb{S}_n$. Par compacité, cette application est un homéomorphisme, équivariant pour les actions de $\mathrm{O}(n+1)$, par laquelle nous identifions ces deux espaces. L'application $f \mapsto \int_{x\in\mathbb{S}_n} \overline{f}(x)\, d\sigma_n(x)$ est une forme linéaire positive sur $\mathscr{C}(\mathrm{O}(n+1); \mathbb{R})$. Par le théorème de représentation de Riesz 1.6, elle définit donc une mesure (borélienne, positive) μ_{n+1} sur $\mathrm{O}(n+1)$, telle que, pour tout $f \in \mathscr{C}(\mathrm{O}(n+1); \mathbb{R})$,

$$\int_{\mathrm{O}(n+1)} f\, d\mu_{n+1} = \int_{x\in\mathbb{S}_n} \overline{f}(x)\, d\sigma_n(x)\ .$$

Il est immédiat de voir que μ_{n+1} est une mesure de probabilité invariante par translations à gauche, ce qui conclut la récurrence.

Pour montrer l'unicité, soient μ_n et μ'_n deux mesures de probabilité invariantes par translations à gauche sur $\mathrm{O}(n)$. Posons $\mu''_n = \frac{1}{2}(\mu_n + \mu'_n)$, qui est aussi une mesure de probabilité invariante par translations à gauche sur $\mathrm{O}(n)$. Pour toute application continue $f : \mathrm{O}(n) \to \mathbb{R}$, nous avons, en utilisant respectivement

- le fait que μ''_n est une mesure de probabilité,
- l'invariance par translations à gauche de μ_n en remplaçant x par $y^{-1}x$,
- le théorème de Fubini,
- l'invariance par translations à gauche de μ''_n en remplaçant y par xy,
- le fait que μ_n est une mesure de probabilité,

$$\begin{aligned}
\int_{x\in \mathrm{O}(n)} f(x)\, d\mu_n(x) &= \int_{y\in \mathrm{O}(n)} \int_{x\in \mathrm{O}(n)} f(x)\, d\mu_n(x)\, d\mu_n''(y)\\
&= \int_{y\in \mathrm{O}(n)} \int_{x\in \mathrm{O}(n)} f(y^{-1}x)\, d\mu_n(x)\, d\mu_n''(y)\\
&= \int_{x\in \mathrm{O}(n)} \int_{y\in \mathrm{O}(n)} f(y^{-1}x)\, d\mu_n''(y)\, d\mu_n(x)\\
&= \int_{x\in \mathrm{O}(n)} \int_{y\in \mathrm{O}(n)} f(y^{-1})\, d\mu_n''(y)\, d\mu_n(x)\\
&= \int_{y\in \mathrm{O}(n)} f(y^{-1})\, d\mu_n''(y)\ .
\end{aligned}$$

Puisque le dernier terme reste inchangé après la permutation de μ_n et de μ'_n, nous avons $\int_{x\in \mathrm{O}(n)} f(x)\, d\mu_n(x) = \int_{x\in \mathrm{O}(n)} f(x)\, d\mu'_n(x)$ pour toute application continue $f : \mathrm{O}(n) \to \mathbb{R}$. Donc $\mu_n = \mu'_n$, ce qui montre le résultat. □

Dans la suite, nous notons μ_K la mesure image de μ_n par l'application $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, qui est l'unique mesure (borélienne) de probabilité sur K invariante par translations à gauche : pour tous les $k' \in K$ et $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{C})$,

$$\int_{k\in K} f(k'k)\, d\mu_K(k) = \int_{k\in K} f(k)\, d\mu_K(k)\ .$$

Remarque. On peut montrer que μ_K est aussi invariante par translations à droite.

Une application $p : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$ (ainsi que sa restriction à $\mathbb{S}_n$) est dite *invariante* par un sous-groupe G de $\mathrm{O}(n+1)$ si $p \circ g = p$ pour tout $g \in G$. Un ensemble E d'applications de $\mathbb{R}^{n+1}$ (ou de $\mathbb{S}_n$) dans $\mathbb{C}$ est dit *invariant* par G si $p \circ g \in E$ pour tous les $g \in G$ et $p \in E$.

Exemples. (1) Une application $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$ est invariante par K si et seulement si $f(x)$ ne dépend que de la dernière coordonnée de x, pour tout $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ (car K contient toutes les rotations d'axe $\mathbb{R}e_n$).

(2) Si $p \in \mathscr{P}_m$, alors p est invariant par $\mathrm{O}(n+1)$ si et seulement si sa restriction à $\mathbb{S}_n$ l'est.

(3) Le lemme suivant détermine les polynômes invariants par tout le groupe orthogonal.

Lemme 2.31 *Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une application polynomiale en $n \geq 1$ variables réelles, invariante par le groupe orthogonal* $\mathrm{O}(n)$*. Alors il existe $\ell \in \mathbb{N}$ et $\alpha_0, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{C}$ tels que*

$$q(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{j=0}^{\ell} \alpha_j\, (x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2)^j\ .$$

Démonstration. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $t \mapsto q(ty)$ est polynomiale (en une variable réelle) et ne dépend pas de $y \in \mathbb{S}_{n-1}$, par l'hypothèse et la transitivité de l'action de $\mathrm{O}(n)$ sur $\mathbb{S}_{n-1}$. En particulier (en remplaçant y par $-y$), l'application f est paire. Elle s'écrit donc $f : t \mapsto \sum_{j=0}^{\ell} \alpha_j \; t^{2j}$ où $\ell \in \mathbb{N}$ et $\alpha_0, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{C}$. Pour tout $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, nous avons donc

$$q(x) = f(\|x\|) = \sum_{j=0}^{\ell} \alpha_j \, (x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2)^j \; . \quad \square$$

Considérons les applications de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{C}$ définies par

$$q_m : x = (x_0, \ldots, x_n) \mapsto (x_n + i x_0)^m$$

et

$$p_m : x \mapsto \int_{k \in K} q_m(k^{-1}x) \; d\mu_K(k) \; .$$

L'application p_m est appelée le m-ème *polynôme sphérique*. Nous donnerons dans la démonstration du théorème 2.32 ci-dessous une autre expression de p_m. Notons $\Pi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$\Pi_m : t \mapsto p_m(t e_n) \; .$$

Rappelons l'expression de la célèbre *fonction Gamma*, définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\Gamma : s \mapsto \int_0^{+\infty} t^{s-1} \, e^{-t} \; dt \; .$$

Elle vérifie $\Gamma(1) = 1$ et par intégration par partie $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ pour tout $s \in \,]0, +\infty[$ (donc en particulier $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$).

Théorème 2.32 *(1) L'application p_m est une application polynomiale en $n+1$ variables réelles, homogène de degré m, invariante par K, harmonique telle que $p_m(e_n) = 1$. En particulier, Π_m est une application polynomiale (en une variable réelle) et $p_m(x) = \Pi_m(x_n)$.*

(2) L'ensemble ${\mathscr{HS}_m}^K$ des éléments de $\mathscr{HS}_m$ invariants par K est la droite vectorielle complexe engendrée par la restriction $p_{m|\mathbb{S}_n}$ de p_m à $\mathbb{S}_n$:

$$\{f \in \mathscr{HS}_m \; : \; \forall\, k \in K, \;\; f \circ k = f\} = \mathbb{C}\, p_{m|\mathbb{S}_n} \; .$$

(3) Tout sous-espace vectoriel de $\mathscr{HS}_m$ invariant par $\mathrm{O}(n+1)$ est égal à $\{0\}$ ou à $\mathscr{HS}_m$.

(4) Tout élément de $\mathscr{HS}_m$ est de la forme $\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \, (p_m \circ g_j)_{|\mathbb{S}_n}$, où $\ell \in \mathbb{N}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ et $g_j \in \mathrm{O}(n+1)$.

(5) **(Formule de Rodriguez)** *Pour tout $t \in \,]-1, 1[$, nous avons*

$$\Pi_m(t) = \frac{(-1)^m \Gamma(\frac{n}{2})}{2^m \Gamma(\frac{n}{2} + m)} \; \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{n}{2}-1}} \; \frac{d^m}{dt^m}\big((1-t^2)^{\frac{n}{2}-1+m}\big) \; .$$

Il découle en particulier de l'assertion (1) que Π_m détermine p_m et réciproquement.

Si n est pair, la formule de Rodriguez est vraie pour tout $t \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ (avec prolongement par continuité en $t = \pm 1$).

Démonstration. (1) L'application q_m est polynomiale, homogène de degré m, harmonique car $\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}(x_n + ix_0)^m = m(m-1)(x_n + ix_0)^{m-2} = -\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}(x_n + ix_0)^m$ si $m \geq 2$, et vérifie $q_m(e_n) = 1$. Par intégration, puisque $x \mapsto q_m(k^{-1}x)$ est une application polynomiale homogène de degré m en x, dont les coefficients dépendent de manière continue de k, l'application p_m est donc polynomiale et homogène de degré m. Elle vérifie $p_m(e_n) = 1$ car K fixe e_n et μ_K est une mesure de probabilité. Elle est invariante par K (c'est-à-dire que $p_m(k'x) = p_m(x)$ pour tous les $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $k' \in K$), par la construction de p_m et l'invariance par translations à gauche de μ_K. Par définition de K (voir l'exemple (1) ci-dessus), ceci implique que $p_m(x)$ ne dépend que de la dernière coordonnée de x. Donc si $x = (x_0, \dots, x_n)$, nous avons $p_m(x) = p_m(x_n e_n) = \Pi_m(x_n)$. Par la proposition 2.26, l'application $q_m \circ k^{-1}$ est harmonique pour tout $k \in K$. Donc par intégration, l'application p_m est harmonique.

(2) Soit $f \in \mathscr{HS}_m{}^K$, restriction à $\mathbb{S}_n$ d'une application polynomiale p harmonique homogène de degré m invariante par K ; montrons que f est un multiple scalaire de $p_{m|\mathbb{S}_n}$. En développant suivant les puissances de x_n, écrivons

$$p = \sum_{j=0}^{m} a_j(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})\, x_n^j$$

où a_j est une application polynomiale en n variables réelles, homogène de degré $m - j$. Pour tout $A \in \mathrm{O}(n)$, pour tout $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $x_n \in \mathbb{R}$, nous avons $p(Ax, x_n) = p(x, x_n)$ puisque p est invariant par K. Puisque deux applications polynomiales en une variable réelle x_n sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux, nous en déduisons que l'application a_j est invariante par $\mathrm{O}(n)$ pour $0 \leq j \leq m$. Par le lemme 2.31 et puisque a_j est homogène de degré $m - j$, nous avons donc $a_j = 0$ si $m - j$ est impair et pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq [\,\frac{m}{2}\,]$, il existe $\alpha_k \in \mathbb{C}$ tel que $a_{m-2k}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \alpha_k(x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2)^k$. Donc, pour tout $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}_n$, puisque $x_0^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = 1 - x_n^2$, nous avons

$$f(x) = p(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} \alpha_k (1 - x_n^2)^k x_n^{m-2k}\ .$$

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, notons $f_\ell : \mathbb{S}_n \to \mathbb{C}$ l'application définie par $x \mapsto {x_n}^\ell$, qui est la restriction à $\mathbb{S}_n$ d'une application polynomiale homogène de degré ℓ. La restriction f de p à $\mathbb{S}_n$ est donc une combinaison linéaire de $f_0, f_1, \dots, f_m$. Par la proposition 2.28 (1), nous avons $f_\ell \in \oplus_{j=0}^{\ell} \mathscr{HS}_j$. Puisque $f \in \mathscr{HS}_m$ et par l'orthogonalité des $\mathscr{HS}_j$ pour le produit scalaire de $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_n)$, nous avons donc que f est un multiple de la projection orthogonale ϕ_m de f_m sur $\mathscr{HS}_m$. En particulier, $\mathscr{HS}_m{}^K$ est contenu dans la droite vectorielle $\mathbb{C}\ \phi_m$. Puisque $p_{m|\mathbb{S}_n}$ est un élément non nul de $\mathscr{HS}_m{}^K$ par l'assertion (1), il engendre donc cette droite, et $\mathscr{HS}_m{}^K = \mathbb{C}\ p_{m|\mathbb{S}_n}$, ce qui montre le résultat.

(3) Par la proposition 2.26, la précomposition d'une application harmonique $p : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$ par un élément g de $\mathrm{O}(n+1)$ est encore harmonique : $\Delta(p \circ g) = (\Delta p) \circ g = 0$. Comme $p \circ g \in \mathscr{P}_m$ si $p \in \mathscr{P}_m$, ceci montre que $\mathscr{HS}_m$ est invariant par $\mathrm{O}(n+1)$. Le sous-espace nul est trivialement invariant par $\mathrm{O}(n+1)$.

Réciproquement, soit E un sous-espace vectoriel non nul de $\mathscr{HS}_m$ invariant par le groupe $\mathrm{O}(n+1)$, montrons que $E = \mathscr{HS}_m$. Notons $E^\perp$ l'orthogonal de E dans $\mathscr{HS}_m$

pour le produit scalaire de $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_n)$, qui est aussi invariant par $\mathrm{O}(n+1)$, puisque $\mathrm{O}(n+1)$ préserve le produit scalaire de $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_n)$ (par invariance de la mesure de Lebesgue σ_n de $\mathbb{S}_n$).

Soient f un élément non nul de E et $x_0 \in \mathbb{S}_n$ tels que $f(x_0) \neq 0$. Soit $g \in \mathrm{O}(n+1)$ tel que $x_0 = g e_n$. Alors $f_1 = f \circ g \in E$ et $f_1(e_n) \neq 0$. Notons $f_2 : \mathbb{S}_n \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$x \mapsto \int_K f_1(k^{-1}x)\, d\mu_K(k)\ .$$

Puisque K fixe e_n, nous avons $f_2(e_n) = f_1(e_n) \neq 0$. Comme vu précédemment, l'application f_2 est invariante par K, et est la restriction à $\mathbb{S}_n$ d'une application polynomiale harmonique homogène de degré m. Donc f_2 appartient à ${\mathscr{HS}_m}^K$. Montrons que f_2 appartient à E. Il suffit de montrer que f_2 est orthogonal à tout élément $h \in E^\perp$. Or, par le théorème de Fubini et par invariance de la mesure de Lebesgue, nous avons

$$\begin{aligned}\langle f_2, h\rangle_{\mathbb{L}^2} &= \int_{\mathbb{S}_n} f_2(x)\,\overline{h(x)}\, d\sigma_n(x) = \int_K \int_{\mathbb{S}_n} f_1(k^{-1}x)\,\overline{h(x)}\, d\sigma_n(x)\, d\mu_K(k) \\ &= \int_K \langle f_1, h\circ k\rangle_{\mathbb{L}^2}\ d\mu_K(k) = 0\ .\end{aligned}$$

Puisque f_2 est non nul, ceci montre que E contient la droite vectorielle ${\mathscr{HS}_m}^K$.

Si $E^\perp$ est non nul, le même raisonnement que ci-dessus montre que $E^\perp$ contient aussi la droite vectorielle ${\mathscr{HS}_m}^K$, ce qui contredit le fait que $E \cap E^\perp = \{0\}$. Donc $E^\perp = \{0\}$ et le résultat en découle.

(4) L'espace vectoriel engendré par les $(p_m \circ g)_{|\mathbb{S}_n}$ pour $g \in \mathrm{O}(n+1)$ est non nul (car $p_m \neq 0$), invariant par $\mathrm{O}(n+1)$ et contenu dans $\mathscr{HS}_m$, donc égal à $\mathscr{HS}_m$ par l'assertion (3). Le résultat en découle.

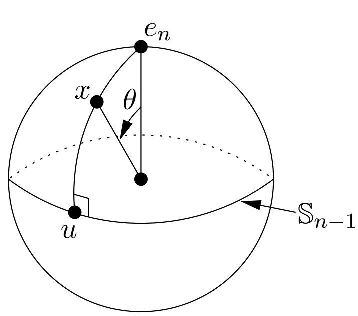
(5) Commençons par le lemme suivant donnant l'expression de la mesure de Lebesgue d'une sphère en coordonnées sphériques par rapport à ses pôles.

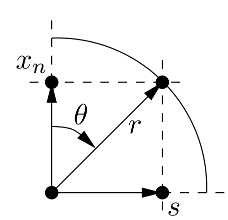
Lemme 2.33 *Pour tout $n \geq 1$, l'application de $\mathbb{S}_{n-1}\times\,]0,\pi[$ dans $\mathbb{S}_n - \{\pm e_n\}$ définie par*

$$(u,\theta) \mapsto x = \cos\theta\ e_n + \sin\theta\ u$$

est un homéomorphisme, et, en notant $\varpi_n = \mathrm{Vol}(\mathbb{B}_n)$ la mesure de Lebesgue de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et $\beta_n = \frac{n\,\varpi_n}{(n+1)\varpi_{n+1}}$, nous avons

$$d\sigma_n(x) = \beta_n \sin^{n-1}\theta\ d\sigma_{n-1}(u)\, d\theta\ .$$





Démonstration. La mesure de Lebesgue λ_{n+1} de $\mathbb{R}^{n+1}$ s'exprime facilement en fonction de la mesure de Lebesgue λ_n de $\mathbb{R}^n$:

$$d\lambda_{n+1} = d\lambda_n \; dx_n \; .$$

Pour tout $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \mathbb{R}e_n$, posons $r = \|x\| > 0$, notons $\theta \in \,]0, \pi[$ l'angle entre e_n et x, et posons $s = \|x - x_n e_n\|$, de sorte que

$$x_n = r \cos\theta \quad \text{et} \quad s = r \sin\theta \; .$$

En particulier, puisque $dx_n = \cos\theta \; dr - r \sin\theta \; d\theta$ et $ds = \sin\theta \; dr + r\cos\theta \; d\theta$, nous avons

$$ds \; dx_n = r \; d\theta \; dr \; .$$

En posant $\alpha_n = n\,\varpi_n$, par la construction de la mesure de Lebesgue des sphères, nous avons

$$d\lambda_n = \alpha_n s^{n-1} \; d\sigma_{n-1} \; ds \;\; \text{et} \;\; d\lambda_{n+1} = \alpha_{n+1} s^n \; d\sigma_n \; dr \; .$$

Donc

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} s^n \; d\sigma_n \; dr = d\lambda_{n+1} = d\lambda_n \; dx_n &= \alpha_n s^{n-1} \; d\sigma_{n-1} \; ds \; dx_n \\ &= \alpha_n \sin^{n-1}\theta \; r^{n-1} r \; d\sigma_{n-1} \; d\theta \; dr \; . \end{aligned}$$

Le résultat en découle. □

Maintenant, considérons le produit scalaire sur $\mathbb{C}[X]$ défini par

$$\langle P, Q\rangle = \beta_n \int_{-1}^{1} P(t) \; \overline{Q(t)} \; (1-t^2)^{\frac{n}{2}-1} \; dt \; .$$

Remarquons que, en posant $t = \cos\theta$, puisque σ_{n-1} est une mesure de probabilité, et par le lemme précédent,

$$\begin{aligned} \langle P, Q\rangle &= \beta_n \int_0^{\pi} P(\cos\theta) \; \overline{Q(\cos\theta)} \; \sin^{n-1}\theta \; d\theta \\ &= \beta_n \int_0^{\pi} \int_{u\in\mathbb{S}_{n-1}} P(\cos\theta) \; \overline{Q(\cos\theta)} \; \sin^{n-1}\theta \; d\sigma_{n-1}(u) \; d\theta \\ &= \int_{x\in\mathbb{S}_n} P(x_n) \; \overline{Q(x_n)} \; d\sigma_n(x) \; . \end{aligned}$$

Posons $R_m = \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{n}{2}-1}} \; \frac{d^m}{dt^m}\Big((1-t^2)^{\frac{n}{2}-1+m}\Big)$, qui est un polynôme de degré au plus m. Nous avons vu dans l'assertion (2) que Π_m est l'unique polynôme de degré au plus m tel que $\Pi_m(1) = 1$ et tel que l'application $x \mapsto \Pi_m(x_n)$ soit orthogonale dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_n, \sigma_n)$ aux applications $x \mapsto {x_n}^{\ell}$ pour $0 \le \ell < m$. Or, en écrivant $(1-t^2) = (1-t)(1+t)$ et en appliquant la règle de Leibniz, on obtient, puisque les termes sont nuls sauf celui obtenu en dérivant systématiquement $1-t$,

$$R_m(1) = (-1)^m 2^m (\frac{n}{2} - 1 + m)(\frac{n}{2} - 1 + m - 1) \cdots (\frac{n}{2} - 1 + 1) = (-1)^m 2^m \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+m)}{\Gamma(\frac{n}{2})} \; .$$

De plus, on vérifie par $m-1$ intégrations par parties que $\langle R_m, t^j\rangle = 0$ si $0 \leq j < m$. Puisque $\mathscr{H}\mathscr{S}_m{}^K$ est de dimension 1 par l'assertion (2), nous avons $\Pi_m = \frac{R_m}{R_m(1)}$, ce qui montre l'assertion (5) et conclut la démonstration du théorème 2.32. $\square$

Remarques. (1) Considérons la suite $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$, où f_j est la restriction à $\mathbb{S}_n$ de l'application $x \mapsto x_n^j$, pour $j \in \mathbb{N}$. Notons $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ la suite d'applications de $\mathbb{S}_n$ dans $\mathbb{C}$ obtenue en appliquant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la suite $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ pour le produit scalaire de $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_n, \sigma_n)$: $\phi_0 = f_0$,

$$\phi_j \in f_j + \mathrm{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_{j-1})$$

et $\langle \phi_{j'}, \phi_j\rangle_{\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_n,\sigma_n)} = 0$ si $0 \leq j < j'$. Alors la démonstration de l'assertion (2) du théorème 2.32 montre que le m-ème polynôme sphérique p_m est l'unique multiple de ϕ_m tel que $p_m(e_n) = 1$. Cette remarque permet de calculer facilement les polynômes sphériques.

(2) Par la démonstration de l'assertion (5) du théorème 2.32, la suite $(\Pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}[X]$ est l'unique suite obtenue par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à partir de la base canonique $(x^m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[X]$ pour le produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\,\overline{Q(t)}\,(1-t^2)^{\frac{n}{2}-1}\,dt\,,$$

vérifiant la condition de normalisation $\Pi_m(1) = 1$. La suite $(\Pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est un exemple de *polynômes orthogonaux*, voir par exemple [Sze, ST].

(3) Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$. Une *représentation (linéaire de dimension finie)* ρ de G est un morphisme de groupes continu ρ de G dans $\mathrm{GL}(V)$ où V est un espace vectoriel réel de dimension finie. Un sous-espace vectoriel E de V est dit *invariant* par ρ (ou par G quand ρ est sous-entendue) si $\rho(g)(E) \subset E$ pour tout $g \in G$. Le *sous-espace fixe* de V par ρ (ou par G quand ρ est sous-entendue) est le sous-espace vectoriel des éléments x de V tels que $\rho(g)(x) = x$ pour tout $g \in G$. Une représentation linéaire de G dans V est dite *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels de V invariants par ρ sont $\{0\}$ et V.

L'assertion (3) du théorème 2.32 dit que la représentation linéaire de $\mathrm{O}(n+1)$ sur $\mathscr{H}\mathscr{S}_m$ est irréductible.

Nous renvoyons par exemple à [Far, Chap. IX] pour de nombreuses autres propriétés des harmoniques sphériques, et d'autres polynômes orthogonaux.

2.6 Correction des exercices

Correction de l'exercice E.25. (1) L'application Q, comme rapport de deux applications continues dont le dénominateur ne s'annule pas, est continue. Elle est strictement positive, car $\operatorname{Im} z > 0$ si $z \in \mathbb{H}$.

Fixons $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$. Alors, en faisant successivement les changements de variables $s = t - x$, $s = yt$ et $t = \tan\theta$, nous avons

$$\int_{t\in\mathbb{R}} Q_z(t)\; dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(t-x)^2+y^2}\; dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{s^2+y^2}\; ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\; dt$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \pi\ .$$

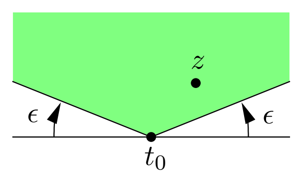
Pour tout $(z,t) \in \mathbb{H}\times\mathbb{R}$, nous avons

$$\operatorname{Im}\Big(\frac{1+tz}{t-z}\Big) = \frac{1}{2i}\Big(\frac{1+tz}{t-z} - \frac{1+t\,\overline{z}}{t-\overline{z}}\Big) = \frac{(1+t^2)(z-\overline{z})}{2i|t-z|^2}\ ,$$

ce qui montre la seconde formule, et l'harmonicité de $z \mapsto Q_z(t)$, comme partie imaginaire d'une application holomorphe.

Montrons la propriété de convergence radiale. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$Q_z(t_0) = \frac{\operatorname{Im}(z-t_0)}{|z-t_0|^2} = \frac{\sin\arg(z-t_0)}{|z-t_0|}\ .$$



Donc si $\arg(z-t_0) \in [\epsilon, \pi-\epsilon]$ pour $\epsilon \in\,]0,\pi[$ fixé, alors $Q_z(t_0) \geq \frac{\sin\epsilon}{|z-t_0|}$ tend vers $+\infty$ quand z tend vers t_0. Or $\arg(z-t_0) \in [\epsilon,\pi-\epsilon]$ si et seulement si $\operatorname{Im}\ z \geq (\sin\epsilon)|\operatorname{Re}(z-t_0)|$ (voir dessin ci-contre), ce qui montre le résultat.

Pour tous les $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, $t_0, t \in \mathbb{R}$ tels que $|t-t_0| \geq \delta$, si z est suffisamment proche de t_0, nous avons $\operatorname{Im}(z) \leq \frac{\delta^2\epsilon}{4}$ et $|t - \operatorname{Re} z| \geq \frac{\delta}{2}$. Donc

$$0 \leq Q_z(t) = \frac{\operatorname{Im} z}{(t-\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \leq \frac{\operatorname{Im} z}{(t-\operatorname{Re} z)^2} \leq \frac{\delta^2\epsilon/4}{\delta^2/4} \leq \epsilon\ .$$

Ceci montre que $Q_z(t)$ converge vers 0, uniformément pour t dans le complémentaire de tout voisinage de t_0, quand z tend vers t_0.

Pour tout compact K de $\mathbb{R}$, soit $A > 0$ tel que $K \subset [-A, A]$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $t \in K$, et pour tout $z \in \mathbb{H}$ tel que $|z| \geq A + \frac{1}{\epsilon}$, nous avons

$$Q_z(t) = \frac{\operatorname{Im}(z-t)}{|z-t|^2} \leq \frac{1}{|z-t|} \leq \frac{1}{|z|-A} \leq \epsilon\ .$$

Donc $Q_z(t)$ tend vers 0 quand $|z| \to +\infty$, uniformément pour $t \in K$.

(2) Comme Q_z est continue et $Q_z(t) \leq \frac{1}{\operatorname{Im} z}$, l'application $t \mapsto Q_z(t)f(t)$ est intégrable, et $P_{\mathbb{H}}f$ est bien définie. Si f est à valeurs réelles, alors pour tout $z \in \mathbb{H}$, nous avons

$$P_{\mathbb{H}}f(z) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\Big(\int_{t\in\mathbb{R}} \frac{1+tz}{t-z}\,\frac{f(t)}{1+t^2}\; dt\Big) = \operatorname{Im}\Big(\int_{t\in\mathbb{R}} \frac{g_1(t)}{t-z}\; dt\Big) + \operatorname{Im}\Big(z\int_{t\in\mathbb{R}} \frac{g_2(t)}{t-z}\; dt\Big)\ ,$$

où nous avons noté g_1 et g_2 les applications dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \lambda; \mathbb{C})$ définies par $g_1(t) = \frac{1}{\pi}\frac{f(t)}{1+t^2}$ et $g_2(t) = \frac{1}{\pi}\frac{tf(t)}{1+t^2}$. Donc $P\mu$ est harmonique, comme somme de parties imaginaires d'applications holomorphes (ceci par la proposition B.1). Si f est à valeurs complexes, alors en écrivant $f = f_1 + if_2$ où f_1 et f_2 sont à valeurs réelles, et intégrables pour la mesure de Lebesgue, l'application $P_{\mathbb{H}}f$ est aussi harmonique. Comme l'application Q est à valeurs positives, les autres affirmations en découlent.

(3) Par la question (1), la famille $(Q_z)_{z\in\mathbb{H}}$ d'applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes des familles régularisantes :

- $Q_z \geq 0$,
- $\|Q_z\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \frac{\lambda}{\pi})} = 1$,
- pour tout $\delta > 0$ fixé, $Q_z(t)$ converge vers 0, uniformément en $t \in \{t \in \mathbb{R} \ : \ |t - t_0| \geq \delta\}$, quand z tend vers t_0.

Par continuité en t_0 de f, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t - t_0| \leq \delta$, nous ayons $|f(t) - f(t_0)| \leq \epsilon$. Pour tout z suffisamment proche de t_0, nous avons $|z - t_0| \leq \delta/2$.

Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé tel que $|t - t_0| \geq \delta$, l'application $z \mapsto Q_z(t)|f(t) - f(t_0)|$ tend vers 0 quand z tend vers t_0. Cette application est de plus majorée par

$$Q_z(t)(|f(t)| + |f(t_0)|) = \frac{\mathrm{Im}(z - t_0)}{|(z - t_0) - (t - t_0)|^2}(|f(t)| + |f(t_0)|) \leq \frac{\delta(|f(t)| + |f(t_0)|)/2}{(|t - t_0| - \delta/2)^2} \ .$$

Remarquons que l'application $t \mapsto \frac{\delta(|f(t)|+|f(t_0)|)/2}{(|t-t_0|-\delta/2)^2}$ est intégrable sur $\{t \in \mathbb{R} \ : \ |t - t_0| \geq \delta\}$. Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, pour tout z suffisamment proche de t_0, nous avons donc $\int_{|t-t_0|\geq\delta} Q_z(t)|f(t) - f(t_0)| \ \frac{dt}{\pi} \leq \epsilon$. Alors

$$\begin{aligned}|P_{\mathbb{H}}f(z) - f(t_0)| &= \Big|\int_{t\in\mathbb{R}} (f(t) - f(t_0))Q_z(t) \ \frac{dt}{\pi}\Big| \leq \int_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - f(t_0)| \, Q_z(t) \ \frac{dt}{\pi} \\ &\leq \int_{|t-t_0|\geq\delta} Q_z(t)|f(t) - f(t_0)| \ \frac{dt}{\pi} \\ &\quad + \Big(\sup_{|t-t_0|\leq\delta} |f(t) - f(t_0)|\Big) \int_{|t-t_0|\leq\delta} Q_z(t) \ \frac{dt}{\pi} \leq 2\epsilon \ ,\end{aligned}$$

ce qui montre le premier résultat de l'assertion (3). Comme une application est continue si et seulement si elle est continue en tout point et puisqu'une suite qui n'a qu'une valeur d'adhérence converge vers celle-ci, la seconde affirmation en découle.

Pour montrer la dernière assertion, puisque f est nulle à l'infini, il suffit de montrer que $P_{\mathbb{H}}f(z)$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers $+\infty$. Pour tout $\epsilon > 0$, soit $A > 0$ tel que $|f(t)| \leq \epsilon$ si $|t| \geq A$. Alors

$$|P_{\mathbb{H}}f(z)| \leq \int_{t\in\mathbb{R}} Q_z(t) \, |f(t)| \ \frac{dt}{\pi} \leq \int_{|t|\leq A} Q_z(t) \, |f(t)| \ \frac{dt}{\pi} + \int_{|t|\geq A} Q_z(t) \, |f(t)| \ \frac{dt}{\pi} \ .$$

Cette dernière intégrale est majorée par $\epsilon \int_{|t|\geq A} Q_z(t) \ \frac{dt}{\pi} \leq \epsilon$. L'avant-dernière intégrale tend vers 0 quand $|z|$ tend vers 0, car l'application continue f est bornée sur l'intervalle compact $[-A, A]$, et puisque $Q_z(t)$ tend vers 0 quand $|z| \to +\infty$, uniformément pour $t \in [-A, A]$, par la question (1).

(4) Comme $\operatorname{Im} z > -1$ et $\operatorname{Im} z_0 > 0$, nous avons $(z+i)(z_0+i) \neq 0$, et donc h est C^∞ comme composée d'applications de classe C^∞. Elle est clairement nulle en z_0. Si $z = x+iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$ où $x, x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 > 0$ et $y \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned}\Big|\operatorname{Im} \frac{z-z_0}{(z+i)(z_0+i)}\Big| &= \Big|\operatorname{Im}\Big(\frac{1}{z_0+i} - \frac{1}{z+i}\Big)\Big| \\ &\leq \Big|\frac{1}{z_0+i}\Big| + \Big|\frac{1}{z+i}\Big| = \frac{1}{x_0^2+(1+y_0)^2} + \frac{1}{x^2+(1+y)^2} \leq 2\ ,\end{aligned}$$

car les dénominateurs sont supérieurs ou égaux à 1, donc $h \leq 2^2 = 4$ sur $\mathbb{H}$. Enfin, l'application g de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $z \mapsto (\operatorname{Im} z)^2$ est C^∞, de laplacien constant égal à 2. L'application f de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \frac{z-z_0}{(z+i)(z_0+i)}$ est holomorphe, de dérivée $f'(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$. Puisque $h = g \circ f$ et par la formule $\Delta(g \circ f) = (\Delta g) \circ f\ |f'|^2$, nous avons donc $\Delta h(z) = \frac{2}{|z+i|^4} > 0$ pour tout $z \in \mathbb{H}$. Enfin, nous avons

$$\lim_{|z| \to +\infty} h(z) = \lim_{|z|\to+\infty} \Big(\operatorname{Im} \frac{1 - z_0/z}{(1+i/z)(z_0+i)}\Big)^2 = \Big(\operatorname{Im} \frac{1}{z_0+i}\Big)^2 \leq \frac{1}{|z_0+i|^2} < 1\ ,$$

car $\operatorname{Im} z_0 > 0$.

(5) [Remarquons que la condition d'être nulle à l'infini est nécessaire, car $u : z \mapsto \operatorname{Im} z$ vérifie les autres hypothèses, mais pas la conclusion.]

Par linéarité, en écrivant une fonction à valeurs complexes comme somme de sa partie réelle et de sa partie imaginaire multipliée par i, nous pouvons supposer que u est à valeurs réelles. Notons v l'application de $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $v_{|\mathbb{H}} = u - P_{\mathbb{H}}[u_{|\mathbb{R}}]$ et $v_{|\mathbb{R}} = 0$, qui est continue sur $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$, à valeurs réelles, nulle sur $\mathbb{R}$ et harmonique sur $\mathbb{H}$, par les questions (3) et (2). Montrons que $v = 0$.

Méthode 1 : Par l'absurde, supposons qu'il existe un point $z_0 \in \mathbb{H}$ en lequel v ne s'annule pas. Quitte à remplacer u par $-u$, nous pouvons supposer que $v(z_0) > 0$. Posons $\epsilon = \frac{v(z_0)}{8} > 0$. En reprenant l'application $h = h_{z_0}$ de la question précédente, l'application $w : \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$w(z) = v(z) + \epsilon(h(z) - 4)$$

est continue sur $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$, négative ou nulle sur $\mathbb{R}$ (car $h(z) \leq 4$), et strictement positive en z_0, par définition de ϵ. Puisque v est nulle à l'infini par la dernière assertion de la question (3), et par la question (4), $w(z)$ tend vers une valeur strictement négative quand $|z|$ tend vers $+\infty$, donc w est strictement négative en dehors d'un gros compact. L'application w atteint donc son maximum (strictement positif) en un point z_1 de $\mathbb{H}$. En particulier les dérivées $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ sont négatives ou nulles en z_1. Donc $\Delta w(z_1) \leq 0$. Mais par la question (4), puisque v est harmonique en z_1, nous avons $\Delta w(z_1) = \epsilon \Delta h(z_1) > 0$, une contradiction.

Méthode 2 (évitant la question (4)) : Alors $|v|$ est continue sur le compact $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et nulle sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par la question (3). Elle atteint donc son maximum, qui est en un point de $\mathbb{H}$ sinon $v = 0$ comme voulu. Comme v est harmonique sur $\mathbb{H}$ (qui est connexe), elle est donc constante sur $\mathbb{H}$ par le principe du maximum (voir le theorème 2.5). Cette constante est nulle, puisque v s'étend continuement par 0 sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Le résultat en découle.

Correction de l'exercice E.26. Puisque le problème est local, quitte à restreindre Ω, nous pouvons supposer qu'il existe une application holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$u = \text{Re } f$. Montrons que $v = \text{Re } g$ où $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est définie par $z \mapsto z\,f'(z)$, ce qui implique que v est harmonique, comme partie réelle d'une fonction holomorphe.

L'équation de Cauchy $\overline{\partial} f = 0$ implique que

$$\frac{\partial(\text{Re } f)}{\partial x} = \frac{\partial(\text{Im } f)}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\text{Im } f)}{\partial x} = -\frac{\partial(\text{Re } f)}{\partial y}\ .$$

Puisque $f' = \partial f = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial(\text{Re } f)}{\partial x} + i\frac{\partial(\text{Im } f)}{\partial x} - i\frac{\partial(\text{Re } f)}{\partial y} + \frac{\partial(\text{Im } f)}{\partial y}\Big)$, nous avons

$$\begin{aligned}\text{Re}(z\,f'(z)) &= \frac{x}{2}\Big(\frac{\partial(\text{Re } f)}{\partial x} + \frac{\partial(\text{Im } f)}{\partial y}\Big) - \frac{y}{2}\Big(\frac{\partial(\text{Im } f)}{\partial x} - \frac{\partial(\text{Re } f)}{\partial y}\Big)\\ &= x\frac{\partial(\text{Re } f)}{\partial x} + y\frac{\partial(\text{Re } f)}{\partial y} = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\ ,\end{aligned}$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

Correction de l'exercice E.27. Notons r le rayon du disque D. Par la formule de la moyenne, nous avons

$$\int_0^{2\pi} u(z_0 + r\,e^{i\theta})\ d\theta = 2\pi\ u(z_0) = 0\ .$$

Par la continuité de u sur le compact ∂D, nous avons donc à la fois $\max_{z\in\partial D} u(z) \geq 0$ et $\min_{z\in\partial D} u(z) \leq 0$ (sinon l'intégrale ci-dessus serait respectivement strictement négative ou strictement positive). Par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction continue u, qui prend une valeur négative ou nulle et une valeur positive ou nulle, prend donc la valeur nulle sur le connexe ∂D.

La dernière assertion se montre en prenant (par ce qui précède) un zéro de u sur des cercles centrés en z_0 de rayons (strictement positifs, suffisamment petits) tendant vers 0.

Correction de l'exercice E.28. (1) Comme f est holomorphe et ne s'annule pas, en prenant localement des déterminations holomorphes du logarithme, nous avons $2\overline{\partial}\partial \ln|f| = \overline{\partial}\partial \ln(f\overline{f}) = \partial(\overline{\partial}\ln f) + \overline{\partial}(\partial \ln \overline{f}) = 0$, et donc $\ln|f|$ est harmonique.

(2) Supposons tout d'abord que Ω soit simplement connexe. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique réelle. Par le théorème de représentation de Riemann, il existe une représentation conforme $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$. L'application $f\circ\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ est donc harmonique (car la précomposition par une application holomorphe préserve l'harmonicité). Par la dernière assertion du théorème de Poisson 2.1, il existe donc une application holomorphe $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ telle que $f\circ\varphi = \text{Re}\, g$. Alors $f = \text{Re}(g\circ\varphi^{-1})$ est la partie réelle d'une application holomorphe.

Réciproquement, soit f une application holomorphe ne s'annulant pas sur Ω, et montrons qu'il existe une application holomorphe $h : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $f = \exp(h)$. Ceci implique que Ω est simplement connexe (voir la proposition B.2 de l'appendice B). Par la question (1), l'application $\log|f|$ est harmonique sur Ω, et à valeurs réelles. Par l'hypothèse, il existe donc une application holomorphe $g : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $\log|f| = \text{Re}(g)$. Comme $|e^z| = e^{\text{Re}\, z}$, l'application $f/\exp(g)$ est holomorphe, et à valeurs dans $\mathbb{S}_1$. Comme $\mathbb{S}_1$ est d'intérieur vide, et par le théorème de l'image ouverte B.3, l'application $f/\exp(g)$ est donc constante. Si sa valeur est $e^{i\theta}$, alors $f = \exp(g + i\theta)$, ce qui montre le résultat.

Correction de l'exercice E.29. (1) Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème de Dirichlet sur Ω de donnée frontière f. Montrons que l'application $u = u_1 - u_2$, qui est continue sur $\overline{\Omega}$, harmonique sur Ω et nulle sur $\partial\Omega$, est nulle sur Ω, ce qui conclut. Par le principe du maximum (voir le corollaire 2.6), l'application $|u|$ atteint son maximum sur $\partial\Omega$. Comme u est nulle sur $\partial\Omega$, et puisque $|u|$ est à valeurs positives ou nulles, nous en déduisons que $|u|$, et donc u, est l'application nulle.

(2) Puisque u est C^∞, l'application v, qui vérifie $v(r) = u(\sqrt{r})$ pour tout $r \in\,]r_1, r_2[$, est aussi C^∞. Puisque $u(z) = v(z\overline{z})$ et $\Delta u = 0$, nous avons donc

$$0 = \overline{\partial}\partial\big(v(z\overline{z})\big) = \overline{\partial}\big(v'(z\overline{z})\overline{z}\,\big) = v'(|z|^2) + v''(|z|^2)|z|^2 \;.$$

Donc l'application lisse $r \mapsto v(r)$ de $]{r_1}^2, {r_2}^2[$ dans $\mathbb{C}$ vérifie l'équation différentielle linéaire du second ordre $rv'' + v' = 0$. L'espace vectoriel complexe des solutions étant de dimension 2, les solutions de cette équation différentielle sont de la forme $v : r \mapsto a + b \ln r$, pour des constantes $a, b \in \mathbb{C}$. Donc $u(z) = a + 2b \ln |z|$, ce qu'il fallait montrer.

(3) *a*⟩ Soit $v : z \mapsto u(\lambda z)$. Alors u et v sont deux applications continues sur $\overline{\mathbb{D}}$, harmoniques sur $\mathbb{D}^*$ (car $z \mapsto \lambda z$ est holomorphe), nulles sur le cercle $\mathbb{S}_1$, et valant 1 au point 0. Par l'unicité dans le problème de Dirichlet sur l'ouvert borné $\mathbb{D}^*$ de donnée frontière f (voir la question (1)), nous avons donc $u = v$.

b⟩ Soit u une éventuelle telle solution. Par *a*⟩, l'application u est radiale dans l'anneau $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} \;:\; 0 < |z| < 1\}$. Par la question (2), elle est donc de la forme $u(z) = a + b\ln(|z|)$ pour des constantes a et b dans $\mathbb{C}$. Comme elle est continue en 0, la constante b doit être nulle. Alors u est constante, ce qui contredit le fait qu'elle prend des valeurs distinctes en 0 et sur $\mathbb{S}_1$.

(4) *a*⟩ En effet, ∂u est différentiable (car u est C^∞) et $\overline{\partial}(\partial u) = \frac{1}{4}\Delta u = 0$. Donc ∂u, vérifiant l'équation de Cauchy-Riemann, est holomorphe.

b⟩ Remarquons que $\partial(2 \ln |z|) = \partial \ln(z\overline{z}) = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z}$, et que si g est une application différentiable définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$ à valeurs réelles, alors $\overline{\partial} g = \overline{\partial \overline{g}} = \overline{\partial g}$. Considérons l'application $w : z \mapsto u(z) - \operatorname{Re} f(z) - 2c_{-1} \ln |z|$ de $\mathbb{D}^*$ dans $\mathbb{C}$, qui est de classe C^∞. Pour montrer que w est égale à une constante, il suffit de montrer que ses dérivées partielles sont nulles.

Or, par le théorème de dérivation des séries entières, et puisque $\partial\overline{f} = \overline{\overline{\partial} f} = 0$ car $f : \mathbb{D}^* \to \mathbb{C}$ est holomorphe,

$$\partial w = \partial u - \frac{1}{2}\partial(f + \overline{f}) - c_{-1}\partial(2 \ln |z|) = \partial u - \frac{1}{2}f' - \frac{c_{-1}}{z} = \partial u - \sum_{n\in\mathbb{Z},\; n\neq -1} c_n\, z^n - \frac{c_{-1}}{z}$$
$$= 0 \;.$$

Donc il existe $g : \mathbb{D}^* \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $w(z) = g(\overline{z})$. Par la formule des résidus, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, nous avons

$$\int_{S(0,\,\epsilon)} g(z)\, dz = 2i\pi \operatorname{Res}_g(0) \;.$$

En prenant la partie imaginaire de cette équation, et puisque u est à valeurs réelles, nous avons

$$2 \operatorname{Im} c_{-1}\;\; \ln \epsilon \;(2\pi\epsilon) = 2\pi \operatorname{Re}(\operatorname{Res}_g(0)) \;.$$

En faisant tendre ϵ vers 0, nous avons $\mathrm{Re}(\mathrm{Res}_g(0)) = 0$, donc $\mathrm{Im}\, c_{-1} = 0$ et c_{-1} est réel. En particulier, w est à valeurs réelles.

[Autre méthode : Par la formule de Laurent pour le résidu de ∂u en 0, pour tout $r > 0$ assez petit, nous avons

$$c_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{S(0,r)} \partial u(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial u(re^{i\theta})\; re^{i\theta}\; d\theta\ .$$

Donc comme u est réelle et $\partial u = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\big)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\, c_{-1} &= \frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \big(\sin\theta\, \frac{\partial u}{\partial x}(re^{i\theta}) - \cos\theta\, \frac{\partial u}{\partial y}(re^{i\theta})\big)\; d\theta \\ &= \frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}(re^{i\theta})\; d\theta = -\frac{1}{4\pi}\Big[u(re^{i\theta})\Big]_0^{2\pi} = 0\ .\quad]\end{aligned}$$

Puisque w est à valeurs réelles, nous avons $\overline{\partial} w = \overline{\partial w} = 0$. Donc w, qui vérifie $\overline{\partial} w = \partial w = 0$, est constante, et le résultat s'en déduit.

3 Problèmes de révision

3.1 Énoncés

Problèmes de théorie spectrale.

Exercice E.30 Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable, de dimension infinie, et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur linéaire continu.

(1) Si u est auto-adjoint et compact, montrer que pour toute application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$ et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $(f(u))(e_n) = \lambda_n e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) Si u est auto-adjoint, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = (1+\frac{u}{n})^n$ converge dans $\mathscr{L}(H)$, et déterminer le spectre de sa limite en fonction du spectre de u.

(3) Supposons qu'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u(e_n)\|^2 < +\infty$.

a) Soient $N \in \mathbb{N}$ et p_N le projecteur orthogonal de $\mathscr{H}$ sur $\mathrm{Vect}\{e_0, \dots, e_N\}$, montrer que

$$\|u - u \circ p_N\|^2 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|u(e_n)\|^2 \,.$$

b) Montrer que u est compact.

Exercice E.31 Considérons la mesure μ sur $[0,1]$ définie par $d\mu(t) = t\,dt$, et notons $\mathscr{H}$ l'espace de Hilbert complexe $\mathbb{L}^2([0,1],\mu)$. Pour tout $f \in \mathscr{H}$ et pour tout $s \in]0,1]$, notons

$$Tf(s) = \ln(s) \int_0^s f(t)\,d\mu(t) + \int_s^1 \ln(t)\,f(t)\,d\mu(t) \,.$$

(1) Montrer que T est un opérateur linéaire continu auto-adjoint compact de $\mathscr{H}$.

(2) Soit $f \in \mathscr{H}$. Montrer que l'application $Tf :]0,1] \to \mathbb{C}$ est continue sur $]0,1]$, vérifie $Tf(1) = 0$ et se prolonge par continuité en $s = 0$. En déduire que si $Tf = \lambda f$ où $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, alors f est C^∞.

(3) Montrer qu'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$ et des nombres réels non nuls $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux à deux distincts tels que $Te_n = \lambda_n e_n$.

Exercice E.32 Soit $\mathscr{H} = \mathbb{L}^2([0,2\pi])$ l'espace de Hilbert des fonctions complexes mesurables de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0,2\pi]$, modulo égalité presque partout. Notons $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sa base hilbertienne usuelle, où $e_n : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{int}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Pour tous les $n \in \mathbb{Z}$ et $f \in \mathscr{H}$, notons $c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt$ et

$$E = \{f \in \mathscr{H} \;:\; \forall\, n < 0,\; c_n(f) = 0\} \,.$$

(1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}$.

(2) Notons π_E la projection orthogonale de $\mathscr{H}$ sur E, $\mathrm{id}_{\mathscr{H}}$ l'opérateur identité de $\mathscr{H}$ et, pour tous les $\phi \in \mathbb{L}^\infty([0, 2\pi])$ et $f \in \mathscr{H}$,

$$u_\phi(f) = (\mathrm{id}_{\mathscr{H}} - \pi_E)(\phi\, \pi_E(f)) .$$

Montrer que $u_\phi : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ est un opérateur linéaire continu, et que $\|u_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$, pour tout $\phi \in \mathbb{L}^\infty([0, 2\pi])$.

Les opérateurs u_ϕ sont appelés des *opérateurs de Hankel*.

(3) a) Pour tout $x \in \mathscr{H}$, exprimer $\pi_E(x)$ en fonction des coordonnées hilbertiennes de x dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

b) Montrer que si ϕ est un polynôme trigonométrique, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{L}^\infty([0, 2\pi])$ de la forme $\sum_{n=-N}^{N} a_n e_n$ où $N \in \mathbb{N}$ et $a_{-N}, \dots, a_N \in \mathbb{C}$, alors l'opérateur u_ϕ est de rang fini.

c) Si ϕ est continue et vérifie $\phi(0) = \phi(2\pi)$, montrer que u_ϕ est un opérateur compact.

Exercice E.33 Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe non nul et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur linéaire continu auto-adjoint.

(1) Montrer que u est positif si et seulement si, pour tout réel positif λ suffisamment grand, nous avons $\|\lambda\, \mathrm{id} - u\| \leq \lambda$.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} u^{2k+1}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Notons v sa limite. Montrer que si $v = 0$, alors le spectre de u est contenu dans $\pi\mathbb{Z}$.

Exercice E.34 Soit $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ tel que $|a| \leq 1$. Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$.

(1) a) Montrer qu'il existe un et un seul opérateur linéaire continu $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u(e_{2n}) = a^n\, e_{2n+1} \quad \text{et} \quad u(e_{2n+1}) = a^n\, e_{2n} .$$

b) Calculer $\|u\|$, déterminer l'adjoint u^* de u, et montrer que u est auto-adjoint si et seulement si a est réel.

(2) Montrer que u est compact si et seulement si $|a| < 1$.

(3) Calculer le spectre de u.

Exercice E.35 Soient $a, b \in \mathbb{C} - \{0\}$ tels que $|a|, |b| \leq 1$. Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie et $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$ indexée par $\mathbb{Z}$.

(1) a) Montrer qu'il existe un et un seul opérateur linéaire continu $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$u(e_{2n}) = a^{\,|2n|}\, e_{2n+1} \quad \text{et} \quad u(e_{2n+1}) = b^{\,|2n+1|}\, e_{2n+2} .$$

b) Calculer $\|u\|$, déterminer l'adjoint u^* de u, et montrer que u n'est pas auto-adjoint.

(2) Montrer que u est compact si et seulement si $|a| < 1$ et $|b| < 1$.

(3) Calculer le spectre de u si $|a| < 1$ et $|b| < 1$.

Exercice E.36 Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $|a|, |b|, |c| \leq 1$.

(1) a) Montrer qu'il existe un et un seul opérateur linéaire continu $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u(e_{2n}) = a^{n+1}\, e_{2n} + b^{n+1} e_{2n+1} \quad \text{et} \quad u(e_{2n+1}) = c^{n+1}\, e_{2n+1}\ .$$

b) Déterminer l'adjoint u^* de u, et montrer que u est auto-adjoint si et seulement si a et c sont réels et b est nul.

(2) Montrer que u est compact si et seulement si $|a|, |b|, |c| < 1$.

(3) Calculer le spectre de u si $|a|, |b|, |c| < 1$.

Exercice E.37 Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathbb{C}$.

(1) Montrer qu'il existe un et un seul opérateur linéaire continu $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u(e_{2n}) = \lambda_{2n}\, e_{2n} + \frac{1}{n+1}\, e_{2n+1} \quad \text{et} \quad u(e_{2n+1}) = \lambda_{2n+1}\, e_{2n+1}\ .$$

(2) Déterminer l'adjoint u^* de u. L'opérateur u est-il auto-adjoint ?

(3) Montrer que u est compact si et seulement si la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(4) Calculer l'ensemble des valeurs propres $\mathrm{Vp}(u)$ et le spectre $\mathrm{Sp}(u)$ de u.

(5) Montrer que pour tout compact non vide K de $\mathbb{C}$, il existe un ensemble non dénombrable d'opérateurs linéaires continus $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tels que $\mathrm{Sp}(v) = K$.

Exercice E.38 Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur auto-adjoint.

1) Montrer que si E est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}$ stable par u, alors le spectre de la restriction de u à E est contenu dans le spectre de u.

2) Supposons dans cette question (2) que tout élément non nul de $\mathrm{Sp}(u)$ est isolé dans $\mathrm{Sp}(u)$.

Soit $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels que ni ϵ_i ni $-\epsilon_i$ n'appartiennent à $\mathrm{Sp}(u)$, et tels que $\lim_{i\to+\infty} \epsilon_i = 0$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, notons $F_i = \{x \in \mathrm{Sp}(u)\ :\ |x| \geq \epsilon_i\}$, et pour tout $x \in \mathrm{Sp}(u)$, posons $f_i(x) = x$ si $x \in F_i$ et $f_i(x) = 0$ sinon.

a) Montrer que F_i est fini et que l'application $f_i : \mathrm{Sp}(u) \to \mathbb{C}$ est continue, à valeurs réelles.

b) Montrer que l'opérateur $f_i(u)$ est auto-adjoint et que $\mathrm{Sp}(f_i(u) - u)$ est contenu dans $[-\epsilon_i, +\epsilon_i]$.

c) Montrer que la suite $f_i(u)$ converge vers u dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$.

3) Soient λ une valeur spectrale de u isolée dans $\mathrm{Sp}(u)$ et $g : \mathrm{Sp}(u) \to \mathbb{C}$ l'application valant 1 en λ et 0 ailleurs. Montrer que g est continue, et que l'image de $g(u)$ est non nulle. En déduire que tout élément de $\mathrm{Sp}(u)$ isolé dans $\mathrm{Sp}(u)$ est une valeur propre de u.

4) Supposons dans cette question (4) que tout élément non nul de $\mathrm{Sp}(u)$ est isolé dans $\mathrm{Sp}(u)$.

a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, notons $E_\lambda = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id})$, et E_0 l'orthogonal de la somme hilbertienne $\overline{\bigoplus}_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)-\{0\}} E_\lambda$. Montrer que E_0 est stable par u et que le spectre de la restriction de u à E_0 est contenu dans le singleton $\{0\}$. En déduire que $\mathscr{H} = \ker(u) \oplus \overline{\bigoplus}_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)-\{0\}} E_\lambda$.

b) Montrer que l'image de $f_i(u)$ est contenue dans $\bigoplus_{\lambda\in F_i} E_\lambda$.

5) En déduire que u est compact si et seulement si toute valeur spectrale non nulle de u est une valeur propre isolée de multiplicité finie.

Exercice E.39 Considérons l'espace de Hilbert complexe, noté $\ell^2(\mathbb{Z})$, des suites complexes $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que $\|x\|_2 = \big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2\big)^{1/2} < +\infty$, et rappelons qu'il est isomorphe à l'espace de Hilbert complexe $\mathbb{L}^2([0,1])$ par l'isomorphisme $\Psi : (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \{t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\, e^{2i\pi nt}\}$. (la transformation de Fourier inverse).

(1) Montrer que l'application $H_0 : (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $y_n = \frac{x_{n-1}+x_{n+1}}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ est un opérateur linéaire continu auto-adjoint de $\ell^2(\mathbb{Z})$.

(2) Considérons l'opérateur linéaire u de $\mathbb{L}^2([0,1])$ défini par $f \mapsto \{t \mapsto \cos(2\pi t)f(t)\}$. Pour tous $t_0 \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, si $f_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ vaut $\sqrt{n}$ sur $[t_0 - \frac{1}{2n}, t_0 + \frac{1}{2n}] \cap [0,1]$ et 0 ailleurs, montrer que $(u - \cos(2\pi t_0)\,\mathrm{id})f_n$ converge vers 0 dans $\mathbb{L}^2([0,1])$ quand $n \to +\infty$. En déduire que le spectre de u est égal à $[-1,1]$.

(3) Montrer que $\Psi \circ H_0 = u \circ \Psi$. En déduire que H_0 n'a pas de valeur propre et que le spectre de H_0 est égal à $[-1,1]$.

Exercice E.40 Soit $(b,c) \in [0,1] \times \mathbb{C}$ tel que $|c| \leq 1$ (par convention $c^0 = 0$ si $c = 0$). Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$.

(1) a) Montrer qu'il existe un et un seul opérateur linéaire continu $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u(e_n) = c^n e_n + b^{n+1} e_{n+1}\ .$$

b) Calculer les images, par l'adjoint u^* de u, des éléments de la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et montrer que u est auto-adjoint si et seulement si $b = 0$ et c est réel.

(2) Montrer que l'opérateur u est compact si et seulement si $|c| < 1$ et $b < 1$.

(3) Calculer le spectre de u si $(|c|, b) \in\,]0,1[^{\,2}$.

Exercice E.41 Soient X un espace métrique compact, μ une mesure borélienne positive finie sur X, $m : X \to \mathbb{C}$ une application mesurable bornée, et $\mathscr{H}$ l'espace de Hilbert complexe séparable $\mathbb{L}^2(X, \mu; \mathbb{C})$. Pour toute application f de X dans $\mathbb{C}$, notons mf l'application de X dans $\mathbb{C}$ définie par $x \mapsto m(x)f(x)$.

(1) Montrer que l'application $m \mapsto \{u_m : f \mapsto mf\}$ de l'algèbre involutive $\mathscr{L}^\infty(X)$ des applications mesurables bornées de X dans $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, est un morphisme d'algèbres involutives.

(2) Appelons *image essentielle* de m l'ensemble noté $\mathrm{Im}_{\mathrm{ess}}(m)$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mu\big(\{x \in X\ :\ |m(x) - \lambda| \leq \epsilon\}\big) > 0$ pour tout $\epsilon > 0$. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Im}_{\mathrm{ess}}(m)$, alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{H}$ d'éléments de norme 1 tels que $(u_m - \lambda\,\mathrm{id})f_n$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$. Montrer que le spectre de u_m est égal à l'image essentielle de m.

(3) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de u_m est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mu\big(m^{-1}(\{\lambda\})\big) > 0$.

(4) Montrer que tout compact non vide sans point isolé de $\mathbb{C}$ est le spectre d'un opérateur continu d'un espace de Hilbert complexe séparable sans valeur propre.

Exercice E.42 Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur (linéaire continu) de $\mathscr{H}$.

Pour tout $w \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, notons w^* l'adjoint de w, $\mathrm{Sp}(w)$ le spectre de w, $\mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(w)$ le spectre essentiel de w, $\rho(w) = \mathbb{C} - \mathrm{Sp}(w)$ et $R_w : \rho(w) \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$ l'application résolvante de w, définie par $z \mapsto (w - z\,\mathrm{id})^{-1}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, appelons *suite de Weyl* pour (u, λ) toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{H}$ telle que $\|y_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\big(u(y_n) - \lambda y_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathscr{H}$ et la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans $\mathscr{H}$. Notons $\mathrm{Sp}'_{\mathrm{ess}}(u)$ l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe une suite de Weyl pour (u, λ).

(1) a) Montrer que si $z \in \rho(u)$, alors $\overline{z} \in \rho(u^*)$ et $R_{u^*}(\overline{z}) = \big(R_u(z)\big)^*$.

b) Montrer que si $z, z' \in \rho(u)$, alors $R_u(z) \circ R_u(z') = R_u(z') \circ R_u(z)$ et

$$R_u(z) - R_u(z') = (z - z')\, R_u(z) \circ R_u(z')\ .$$

(2) a) Montrer que $\mathrm{Sp}'_{\mathrm{ess}}(u)$ est contenu dans $\mathrm{Sp}(u)$.

b) Montrer que si u est auto-adjoint compact, alors $\rho(u)$ est un ouvert dense de $\mathbb{C}$.

(3) a) Montrer que si u est un opérateur compact, si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{H}$ converge faiblement vers un élément x de $\mathscr{H}$, alors la suite $\big(u(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u(x)$ dans $\mathscr{H}$.

b) Soient $u, v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tels que $u - v$ soit un opérateur compact. Montrer que $\mathrm{Sp}'_{\mathrm{ess}}(u) = \mathrm{Sp}'_{\mathrm{ess}}(v)$.

c) Si $z \in \rho(u)$, montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}'_{\mathrm{ess}}(u)$ si et seulement si $\frac{1}{\lambda - z} \in \mathrm{Sp}'_{\mathrm{ess}}(R_u(z))$.

d) Soient $u, v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ et $z \in \rho(u) \cap \rho(v)$ tels que $R_u(z) - R_v(z)$ soit un opérateur compact. Montrer que $\mathrm{Sp}'_{\mathrm{ess}}(u) = \mathrm{Sp}'_{\mathrm{ess}}(v)$.

(4) Montrer que si u est auto-adjoint, alors $\mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u) = \mathrm{Sp}'_{\mathrm{ess}}(u)$.

(5) Un opérateur $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est dit *u-compact* s'il existe $z \in \rho(u)$ tels que $v \circ R_u(z)$ soit un opérateur compact.

a) Montrer que si $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est compact, alors v est u-compact. Montrer que si $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est u-compact, alors pour tout $z' \in \rho(u)$, l'opérateur $v \circ R_u(z')$ est compact.

b) Montrer que si $u, v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ sont auto-adjoints et si v est u-compact, alors $\mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u + v) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u)$.

Exercice E.43 Les questions I, II et III sont indépendantes.

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie.

$\boxed{\text{I}}$ Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux bases hilbertiennes de $\mathscr{H}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathbb{C}$.

1) Montrer qu'il existe un et un seul $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que $u(e_n) = \lambda_n f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Calculer la norme de u et déterminer l'adjoint de u.

3) Montrer que u est compact si et seulement si la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

$\boxed{\text{II}}$ 1) Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux bases hilbertiennes de $\mathscr{H}$ et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Montrer que pour tout $x \in \mathscr{H}$, $\|u(x)\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle u(x), f_k\rangle|^2$, et en déduire que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u(e_n)\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \|u^*(f_k)\|^2$.

Un élément u de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ est dit *de Hilbert-Schmidt* s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$ telle que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u(e_n)\|^2$ converge.

2) Montrer que l'ensemble $\mathrm{HS}(\mathscr{H})$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, stable par l'adjoint (si $u \in \mathrm{HS}(\mathscr{H})$ alors $u^* \in \mathrm{HS}(\mathscr{H})$) et par compositions à droite et à gauche (si $u \in \mathrm{HS}(\mathscr{H})$ et $v, w \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ alors $v\circ u\circ w \in \mathrm{HS}(\mathscr{H})$).

3) Montrer que tout opérateur de Hilbert-Schmidt de $\mathscr{H}$ est compact.

4) Montrer qu'il existe un opérateur auto-adjoint compact de $\mathscr{H}$ qui n'est pas de Hilbert-Schmidt.

5) Montrer que l'espace vectoriel $\mathrm{HS}(\mathscr{H})$ muni du crochet

$$\langle u, v\rangle_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle u(e_n), v(e_n)\rangle \ ,$$

où $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, est un espace de Hilbert, et que si $\|\cdot\|_2$ est sa norme associée, alors $\|u\| \le \|u\|_2$ pour tout $u \in \mathrm{HS}(\mathscr{H})$.

$\boxed{\text{III}}$ Soit $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$.

1) Montrer qu'il existe un opérateur positif $|u| \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que $|u|^2 = u^* \circ u$.

2) Montrer que $\|\,|u|(x)\| = \|u(x)\|$ pour tout $x \in \mathscr{H}$, et que $\operatorname{Ker}|u| = \operatorname{Ker}(u^*\circ u) = \operatorname{Ker} u$. Montrer que pour tout $y \in \operatorname{Im}|u|$, l'élément $v(y) = u(y')$ où $|u|(y') = y$ ne dépend pas du choix de y'.

3) Montrer que $\overline{\operatorname{Im}|u|} = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.

4) Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} u$, $\|v(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in (\operatorname{Ker} v)^\perp$ et $u = v \circ |u|$. Le couple $(v, |u|)$ est appelé la *décomposition polaire* de u.

5) Montrer que si $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ vérifie $\|v(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in (\operatorname{Ker} v)^\perp$ (un tel élément de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ est appelé une *isométrie partielle* de $\mathscr{H}$), alors l'image de v est fermée, et v^* vérifie $\|v^*(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in (\operatorname{Ker} v^*)^\perp$ (c'est dire que v^* est aussi une isométrie partielle). Montrer que $v^* \circ v$ est la projection orthogonale sur $(\operatorname{Ker} v)^\perp$, et que $v \circ v^*$ est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} v$.

$\boxed{\text{IV}}$ (1) Soient $u, v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ et $x \in \mathscr{H}$ un vecteur propre unitaire de v de valeur propre λ. Montrer que

$$\langle |u\circ v|(x), x\rangle \le \langle |u\circ v|^2(x), x\rangle^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \langle u^*\circ u(x), x\rangle^{\frac{1}{2}} \ .$$

(2) Soient $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur auto-adjoint positif compact et $\alpha \in]0, +\infty[$.

a) Montrer que l'opérateur u^α est auto-adjoint positif compact, et déterminer son spectre en fonction de celui de u.

b) Si $\alpha \ge 2$, montrer que $\langle u^2(x), x\rangle^{\frac{\alpha}{2}} \le \langle u^\alpha(x), x\rangle$ pour tout $x \in \mathscr{H}$ unitaire.

(3) Un élément $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est appelé un *opérateur à trace* si l'opérateur $|u|^{\frac{1}{2}}$ est de Hilbert-Schmidt, et on appelle *trace* de u le nombre complexe

$$\operatorname{Tr}(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle u(e_n), e_n\rangle \ ,$$

où $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathscr{H}$.

a) Montrer que $\operatorname{Tr}(u)$ est bien défini.

b) Montrer que pour tous les $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$, si w_1 et w_2 sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $\mathscr{H}$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|(t_1w_1 + t_2w_2)(e_n)\|^2 = \sum_{i,j=1}^{2} t_i\overline{t_j} \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle e_n, w_i^* \circ w_j(e_n)\rangle$. En déduire que $\operatorname{Tr}(u)$ ne dépend pas du choix de la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Soient $u, v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ des opérateurs auto-adjoints positifs compacts. Soient $p \in [2, +\infty[$ et $q \in \,]1, 2]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Montrer que si u^p et v^q sont des opérateurs à trace, alors uv est un opérateur à trace, et

$$\operatorname{Tr}(|uv|) \leq \big(\operatorname{Tr}(u^p)\big)^{\frac{1}{p}}\big(\operatorname{Tr}(v^q)\big)^{\frac{1}{q}} \ .$$

(4) a) Montrer que $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est un opérateur à trace si et seulement s'il existe des opérateurs de Hilbert-Schmidt w_1, w_2 de $\mathscr{H}$ tels que $u = w_1^* w_2$. Montrer qu'un opérateur à trace est de Hilbert-Schmidt.

b) Montrer que l'ensemble $\mathscr{L}_{\rm tr}(\mathscr{H})$ des opérateurs à trace de $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, stable par l'adjoint (si $u \in \mathscr{L}_{\rm tr}(\mathscr{H})$ alors $u^* \in \mathscr{L}_{\rm tr}(\mathscr{H})$) et par compositions à droite et à gauche (si $u \in \mathscr{L}_{\rm tr}(\mathscr{H})$ et $v, w \in \mathscr{L}(w)$ alors $v\circ u\circ w \in \mathscr{L}_{\rm tr}(\mathscr{H})$).

c) Montrer que tout opérateur à trace de $\mathscr{H}$ est compact.

d) Montrer qu'il existe un opérateur auto-adjoint positif compact de $\mathscr{H}$ qui n'est pas à trace, et un opérateur de Hilbert-Schmidt qui n'est pas à trace.

e) Montrer que si $u \in \mathscr{L}_{\rm tr}(\mathscr{H})$ est un opérateur à trace, alors pour tout $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, nous avons

$$\operatorname{Tr}(uv) = \operatorname{Tr}(vu) \ .$$

f) Montrer que l'espace vectoriel $\mathscr{L}_{\rm tr}(\mathscr{H})$ muni de la norme

$$\|u\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle |u|(e_n), v(e_n)\rangle \ ,$$

où $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, est un espace de Banach, et que $\|u\| \leq \|u\|_1$ pour tout $u \in \mathscr{L}_{\rm tr}(\mathscr{H})$. Montrer que

$$\|u\|_1 = \|\,|u|\,\|_1 = \inf_{w_1,\, w_2\,\in\,\mathrm{HS}(\mathscr{H})\,:\,u=w_1^*w_2} \|w_1\|_2\ \|w_2\|_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \ ,$$

où les λ_n pour $n \in \mathbb{N}$ sont les valeurs propres de $|u|$.

g) Montrer qu'il existe deux bases hilbertiennes $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$ et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|$ converge et $u(e_n) = \lambda_n f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice E.44 Notons $\mathscr{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$ l'espace de Hilbert complexe des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{C}$ indexées par $\mathbb{Z}$ telles que $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2} < +\infty$, muni du produit scalaire

$\langle x, y\rangle_2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \overline{y_n}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, notons $e_k \in \mathscr{H}$ la suite dont tous les éléments sont nuls sauf celui indexé par k qui vaut 1.

(1) Montrer qu'il existe un unique opérateur linéaire continu $v : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ tel que $v(e_k) = e_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Pour tous les $f \in \mathscr{H}_0 = \mathbb{L}^2([0, 2\pi])$ et $n \in \mathbb{Z}$, notons $c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta$ le n-ème cœfficient de Fourier de f, $u_0(f) : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ l'application $\theta \mapsto \theta f(\theta)$, et $v_0(f) : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ l'application $\theta \mapsto e^{i\theta} f(\theta)$.

(2) Montrer que $u_0 : \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}_0$ est un opérateur linéaire continu auto-adjoint positif. Pour $\lambda \in \,]0, 2\pi[$ et $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, notons $f_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ l'application valant $\sqrt{k}$ sur $[\lambda - \frac{1}{2k}, \lambda + \frac{1}{2k}] \cap [0, 2\pi]$ et 0 ailleurs. Montrer que $\lim_{k\to+\infty}(u_0(f_k) - \lambda f_k) = 0$ dans $\mathscr{H}_0$. Montrer que $\operatorname{Sp}(u_0) = [0, 2\pi]$.

(3) Montrer que $v_0 : \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}_0$ est un opérateur linéaire continu tel que $\operatorname{Sp}(v_0) = \{z \in \mathbb{C} \ :\ |z| = 1\}$. Montrer que $c_n(v_0(f)) = c_{n-1}(f)$ pour tous les $f \in \mathscr{H}_0$ et $n \in \mathbb{Z}$, et en déduire qu'il existe un isomorphisme d'espaces de Hilbert $\varphi : \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}$ tel que $v = \varphi \circ v_0 \circ \varphi^{-1}$.

(4) Montrer que $\operatorname{Vp}(v) = \emptyset$, que $\operatorname{Sp}(v) = \{e^{i\theta} \ :\ \theta \in [0, 2\pi]\}$ et que $\operatorname{Sp}_{\rm res}(v) = \emptyset$.

(5) Pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathscr{H}$, posons $w(x) = (-x_{n+1} - x_{n-1} + 2x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $w : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ est un opérateur linéaire continu auto-adjoint positif tel que $w = -v - v^{-1} + 2\,\mathrm{id}$. Calculer $\operatorname{Vp}(u)$ et $\operatorname{Sp}(w)$.

L'opérateur $\Delta = -w$ est appelé l'opérateur *laplacien discret* de dimension 1.

Exercice E.45 Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur linéaire continu auto-adjoint.

a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, notons $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'application $\lambda \mapsto e^{it\lambda}$. Montrer que l'application $\lambda \mapsto \frac{f_t(\lambda)-1}{t}$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}$ vers l'application $\lambda \mapsto i\lambda$ quand $t \to 0$, $t \neq 0$.

b) Montrer qu'il existe une famille $(u_t)_{t\in\mathbb{R}}$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ telle que $u_{t+s} = u_t \circ u_s$ pour tous les $t, s \in \mathbb{R}$, l'opérateur u_t est unitaire pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto u_t$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ est continue, et $\lim_{t\to 0,\, t\neq 0} \frac{u_t - \mathrm{id}}{t} = iu$.

c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer le spectre de u_t en fonction de celui de u, et montrer qu'il est contenu dans le cercle $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \ :\ |z| = 1\}$.

Exercice E.46 Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe de dimension infinie, et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur linéaire continu auto-adjoint.

(1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = (\mathrm{id} + i\frac{u}{n})^n$ converge dans $\mathscr{L}(H)$. Notons $v \in \mathscr{L}(H)$ sa limite.

(2) Montrer que v est inversible, que $v^{-1} = v^*$ et que v n'est pas un opérateur compact.

(3) Déterminer le spectre de v en fonction du spectre de u. Montrer que $v = \mathrm{id}$ si et seulement si $\operatorname{Sp}(u) \subset 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice E.47 Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe non nul et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur linéaire continu auto-adjoint.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, u^{2k+1}$. Montrer qu'il existe $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Montrer que si $v = 0$, alors le spectre de u est contenu dans $\pi\mathbb{Z}$.

(2) Supposons dans cette question que u est positif, compact, de rang infini et de norme au plus 1. Montrer qu'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\{z \in \mathbb{C} \ :\ \mathrm{Re}\, z > 0,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ telle que le spectre de l'opérateur $\exp(u) + \exp(iu)$ soit égal à $\{2\} \cup \{z_n \ :\ n \in \mathbb{N}\}$.

(3) Montrer que u est positif si et seulement si, pour tout réel positif λ suffisamment grand, nous avons $\|\lambda\,\mathrm{id} - u\| \le \lambda$.

Exercice E.48 Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur linéaire continu positif inversible.

(1) Montrer que pour toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est l'application $x \mapsto f(x+1)$, alors $g(u) = f(u + \mathrm{id})$.

(2) On rappelle que $\Gamma : \,]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ est l'application $x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$. Montrer qu'il existe un opérateur linéaire continu positif v qui commute avec u tel que $\mathrm{Sp}(u \circ v) = \{\Gamma(x+1) \ :\ x \in \mathrm{Sp}(u)\}$.

Exercice E.49 Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, et $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$ indexée par $\mathbb{Z}$. Notons $\sigma : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ l'unique opérateur linéaire continu tel que $\sigma(e_n) = e_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(1) Montrer que $u = \frac{\sigma+\sigma^{-1}}{2}$ est un opérateur linéaire continu auto-adjoint de norme au plus 1. Montrer que pour tout $\lambda \in [-1, 1]$, le vecteur e_0 n'appartient pas à l'image de $u - \lambda\,\mathrm{id}$. Calculer $\mathrm{Sp}(u)$.

(2) Calculer $\mathrm{Sp}(\,\exp(u + 2\,\mathrm{id}) + \exp((u + 2\,\mathrm{id})^{-1})\,)$.

Exercice E.50 Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur linéaire continu positif.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un et un seul opérateur linéaire continu positif $v_n \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que $(v_n)^n = \mathrm{id} + u$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers id dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$.

Exercice E.51 Soit $\mathscr{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$ l'espace de Hilbert des suites $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |z_n|^2 < +\infty$, muni du produit scalaire $\langle (z'_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (z_n)_{n\in\mathbb{Z}} \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z'_n\, \overline{z_n}$.

(1) Rappelons que la transformée de Fourier $\mathscr{F} : \mathbb{L}^2([0, 2\pi]) \to \mathscr{H}$, définie par $f \mapsto \big(c_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta$, est un isomorphisme d'espaces de Hilbert. Soit $\Delta : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ l'opérateur défini par

$$(z_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (2z_n - z_{n-1} - z_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}\ .$$

a) Montrer que Δ est un opérateur linéaire continu auto-adjoint positif. Il est appelé l'opérateur *laplacien discret* de dimension 1.

b) Montrer que $\mathscr{F}^{-1} \circ \Delta \circ \mathscr{F}$ est l'opérateur $f \mapsto \{\theta \mapsto (2 - 2\cos\theta) f(\theta)\}$.

c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, montrer que $\mathscr{F}^{-1} \circ \Delta \circ \mathscr{F} - \lambda\,\mathrm{id}$ est inversible si et seulement si $\lambda \notin \{2 - 2\cos\theta \ :\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

d) En déduire que le spectre $\mathrm{Sp}(\Delta)$ de Δ est égal à $[0,4]$.

(2) Rappelons que $\mathscr{H}^2 = \mathscr{H} \times \mathscr{H}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle (z',w'),(z,w)\rangle = \langle z',z\rangle + \langle w',w\rangle$.

a) Soit $S : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ l'opérateur *de décalage* défini par $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (z_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$. Montrer que $\Delta = (\mathrm{id} - S)\circ(\mathrm{id} - S^*) = (\mathrm{id} - S^*)\circ(\mathrm{id} - S)$.

b) Si $A,B,C,D \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, notons $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ l'opérateur sur $\mathscr{H}^2$ défini par $(z,w) \mapsto (A(z)+B(w), C(z)+D(w))$. Montrer que cet opérateur est linéaire, continu et calculer son adjoint.

c) Soient $a \in [0,+\infty[$ et $u_a = \begin{pmatrix} a\,\mathrm{id} & \mathrm{id} - S \\ \mathrm{id} - S^* & -a\,\mathrm{id} \end{pmatrix}$. Calculer ${u_a}^2$ et $\mathrm{Sp}({u_a}^2)$.

d) Soient $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ l'opérateur défini par $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (z_{-n})_{n\in\mathbb{Z}}$, et $v = \begin{pmatrix} 0 & iT \\ -iT & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $v \circ u_a \circ v^{-1} = -u_a$. En déduire que

$$\mathrm{Sp}(u_a) = [-\sqrt{a^2+4}, -a] \cup [a, \sqrt{a^2+4}]\,.$$

Exercice E.52 Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie (de produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$) et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur auto-adjoint. On rappelle que pour tout $y \in \mathscr{H}$, il existe une unique mesure (borélienne, positive, finie) μ_y sur le spectre $\mathrm{Sp}(u)$ de u telle que, pour toute application continue $f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u);\mathbb{C})$, en notant $f(u)y = (f(u))(y)$ pour simplifier,

$$\langle f(u)y, y\rangle = \int_{\mathrm{Sp}(u)} f\, d\mu_y\,.$$

(1) On suppose dans cette question seulement que l'opérateur u est compact et injectif.

a) Montrer qu'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$ et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels non nuls tels que pour toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue en 0 et pour tout $x \in \mathscr{H}$,

$$f(u)x = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(\lambda_n)\langle x, e_n\rangle\, e_n\,.$$

b) Montrer que, pour tous les $x \in \mathscr{H}$ et $f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u);\mathbb{C})$, nous avons

$$\int_{\mathrm{Sp}(u)} f\, d\mu_x = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(\lambda_n)|\langle x, e_n\rangle|^2\,.$$

c) En déduire une expression de la mesure μ_x, pour tout $x \in \mathscr{H}$.

(2) Fixons $x \in \mathscr{H}$.

a) Montrer qu'il existe une unique application $\psi : \mathbb{L}^2(\mathrm{Sp}(u),\mu_x;\mathbb{C}) \to \mathscr{H}$ linéaire isométrique telle que $\psi(g) = g(u)x$ pour tout $g \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u);\mathbb{C})$.

b) Supposons que le sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$ engendré par les $u^n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ est dense dans $\mathscr{H}$. Montrer que ψ est surjective. Montrer que $\psi^{-1}\circ u \circ \psi$ est l'opérateur $f \mapsto \phi\, f$ de multiplication des éléments f de $\mathbb{L}^2(\mathrm{Sp}(u),\mu_x;\mathbb{C})$ par l'application $\phi : \lambda \mapsto \lambda$.

Exercice E.53 Dans cet exercice, les suites seront indexées par l'ensemble $\mathbb{Z}$. Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe (séparable de dimension infinie) et $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$. Pour tout $x \in \mathscr{H}$, nous noterons $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les coordonnées hilbertiennes de x dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite bornée dans $\mathbb{C}$. (1) Montrer qu'il existe un et un seul opérateur linéaire continu $u_a \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que

$$u_a(e_n) = (2e_n - e_{n-1} - e_{n+1}) + a_n e_n$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Calculer l'adjoint de u_a. En notant encore 0 la suite nulle, montrer que

$$\langle u_0(x), x\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_{n+1} - x_n|^2$$

pour tout $x \in \mathscr{H}$, et montrer que l'opérateur u_0 est auto-adjoint, positif, de norme au plus 4.

L'opérateur $-u_0$ est appelé l'*opérateur laplacien discret* en dimension 1, et souvent noté Δ. L'opérateur u_a est appelé l'*opérateur de Schrödinger discret de potentiel* a en dimension 1, et souvent noté $-\Delta + a$.

(2) a) Notons $T : \mathscr{H} \to \mathbb{L}^2([0, 2\pi])$ l'application $x \mapsto \{t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\, e^{int}\}$. Montrer que T est un isomorphisme isométrique d'espaces de Hilbert, et que $v_0 = T \circ u_0 \circ T^{-1}$ est l'opérateur linéaire continu de $\mathbb{L}^2([0, 2\pi])$ défini par $f \mapsto \{t \mapsto 2(1 - \cos t)f(t)\}$.

b) Pour tous les $\theta \in\,]0, \pi[$ et $k \in \mathbb{N}$ assez grand, notons $b_k = 2 \arcsin \sqrt{(1 - \cos\theta - \frac{1}{k})/2}$, $c_k = 2 \arcsin \sqrt{(1 - \cos\theta + \frac{1}{k})/2}$, et $f_k \in \mathbb{L}^2([0, 2\pi])$ l'application valant $1/\sqrt{c_k - b_k}$ sur l'intervalle $[b_k, c_k]$ et 0 ailleurs. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \|v_0(f_k) - 2(1 - \cos\theta)f_k\|_2 \ = 0\ .$$

c) Montrer que $\mathrm{Vp}(v_0) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}_{ess}(v_0) = \mathrm{Sp}(v_0) = [0, 4]$, et que $\mathrm{Vp}(u_0) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}_{ess}(u_0) = \mathrm{Sp}(u_0) = [0, 4]$.

(3) a) Soient $u, v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tels que $v - u$ soit un opérateur compact. Montrer que $\mathrm{Sp}_{ess}(u)$ est contenu dans $\mathrm{Sp}(v)$.

b) Supposons que la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est réelle. Montrer que si $\lim_{|n|\to+\infty} a_n = 0$, alors $\mathrm{Sp}_{ess}(u_a) = [0, 4]$. (Pour information, la réciproque est vraie : si $\mathrm{Sp}_{ess}(u_a) = [0, 4]$, alors $\lim_{|n|\to+\infty} a_n = 0$ (voir [DHKS, Theo. 1]).)

(4) Supposons que la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est réelle. Le but de cette question est de montrer que si $\mathrm{Sp}(u_a) = [0, 4]$, alors $a = 0$. (Il s'agit d'un résultat de Killip-Simon (voir [KS], et une démonstration simplifiée dans [Ako, §4]).

Notons $M_a = \sup \mathrm{Sp}(u_a)$, $m_a = \inf \mathrm{Sp}(u_a)$ et $f_a : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ l'application $x \mapsto \langle (u_a - u_0)(x), x\rangle$.

a) Si $U \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est l'unique opérateur linéaire continu de $\mathscr{H}$ tel que $U(e_n) = (-1)^n e_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, montrer que $U \circ u_a \circ U^{-1} = -u_{-a} + 4\,\mathrm{id}$, et que $M_a = 4 - m_{-a}$.

b) Pour tout $p \geq 1$, notons $\phi_p = \sum_{n=-p}^{p} (1 - \frac{|n|}{p})\ e_n \in \mathscr{H}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ fixé, la n-ème coordonnée hilbertienne de ϕ_p tend vers 1 quand p tend vers $+\infty$ et que $\lim_{p\to+\infty} \langle u_0(\phi_p), \phi_p\rangle = 0$.

c) Montrer que si $\liminf_{p\to+\infty} f_a(\phi_p) < 0$, alors $m_a < 0$.

d) Montrer que si $\limsup_{p\to+\infty} f_a(\phi_p) > 0$, alors $M_a > 4$.

e) Montrer que si $\mathrm{Sp}(u_a) = [0,4]$ et si $\lim_{p\to+\infty} f_a(\phi_p) = 0$, alors $a = 0$ (on pourra montrer que l'application $h_a : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}$, définie par $(x,y) \mapsto \langle u_a(x), y\rangle$, est une forme sesquilinéaire positive telle que $\lim_{p\to+\infty} h_a(\phi_p,\phi_p) = 0$, puis montrer que $h_a(\phi_p, x)$ tend vers 0 pour tout $x \in \mathscr{H}$, et enfin montrer que $a_k = 0$ en prenant $x = e_k$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$).

Exercice E.54 Soit $\mathscr{H} = \mathbb{L}^2([0,1])$ l'espace de Hilbert des fonctions mesurables sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ (modulo égalité presque partout).

(1) a) Montrer que l'ensemble F des $f \in \mathscr{H}$ dont l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ est nulle est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}$. Notons $P : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ la projection orthogonale sur F.

b) Notons $V : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ l'opérateur de Volterra défini par $Vf : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ pour tout $f \in \mathscr{H}$. Montrer que V est injectif et que Vf est continue sur $[0,1]$.

c) Notons A l'opérateur PV et T l'opérateur A^*A. Montrer que T est auto-adjoint positif compact et que $0 \notin \mathrm{Vp}(T)$.

(2) Montrer que si $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ est continue, alors Tf est de classe C^2, est nul sur $\{0,1\}$ et vérifie $(Tf)'' = -f$. Calculer $\mathrm{Vp}(T)$, $\mathrm{Sp}(T)$ et $\|A\|$.

(3) Montrer que T est diagonalisable dans une base hilbertienne $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$, formée de vecteurs propres φ_n de T de classe C^∞ associés à des valeurs propres λ_n de multiplicité 1.

(4) Montrer que pour tout $f \in \mathscr{H}$ et presque tout $x \in [0,1]$, nous avons

$$Tf(x) = \int_0^x t f(t)\,dt + x\int_x^1 f(t)\,dt - x\int_0^1 t f(t)\,dt\ .$$

(5) En déduire que pour tous les $x, y \in [0,1]$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(\pi(n+1)x)\,\sin(\pi(n+1)y)}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{2}(\min\{x,y\} - xy)\ .$$

Problèmes d'analyse harmonique.

Exercice E.55 Notons $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < 1\}$, $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| = 1\}$ et σ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{S}_1$ (de masse totale 2π). Pour toute application continue $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, notons

$$\rho(f) = \sup_{0\le r<1} \int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} |f(r\zeta)|\,d\sigma(\zeta)\ \in [0,+\infty]\ .$$

(1) Montrer que si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ est une application harmonique positive, alors $\rho(f) = 2\pi\ f(0)$.

(2) Montrer que pour toute mesure borélienne positive finie μ sur $\mathbb{S}_1$, si $P\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est son intégrale de Poisson (définie par $z \mapsto \int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} P_z(\zeta)\,d\mu(\zeta)$ où $P_z(\zeta) = \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}$ est le noyau de Poisson), alors $\rho(P\mu)$ est finie.

(3) Notons $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $z \mapsto \mathrm{Im}\Big(\big(\frac{1+z}{1-z}\big)^2\Big)$. Montrer que h est harmonique, non identiquement nulle, mais que ses limites radiales $\lim_{r\to 1^-} h(r\ e^{i\theta})$ sont nulles pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

(4) Montrer que h n'est pas égale à la différence de deux fonctions harmoniques positives de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice E.56 Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Notons $\mathbb{S}_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ :\ \|x\| = 1\}$ la sphère unité de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^{n+1}$ (de norme notée $\|\cdot\|$), σ_n l'unique mesure de probabilité invariante par rotations sur $\mathbb{S}_n$, λ_{n+1} la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{n+1}$, et ω_{n+1} le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ et tout $R > 0$, notons $\overline{B}(x, R)$ la boule fermée de centre x et de rayon R dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Rappelons la formule de Green suivante : si $0 < \epsilon < R$, si u et v sont deux applications C^2 à valeurs complexes définies sur un voisinage ouvert de $A(\epsilon, R) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ :\ \epsilon \leq \|x\| \leq R\}$, de dérivées radiales $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = d_x u(\frac{x}{\|x\|})$ et de même pour v, alors

$$\frac{1}{\omega_{n+1}} \int_{A(\epsilon,R)} (u\Delta v - v\Delta u)\ d\lambda_{n+1} = \int_{\mathbb{S}_n} \big(u(R\zeta)\frac{\partial v}{\partial \nu}(R\zeta) - v(R\zeta)\frac{\partial u}{\partial \nu}(R\zeta)\big)\ R^n\ d\sigma_n(\zeta)$$
$$- \int_{\mathbb{S}_n} \big(u(\epsilon\zeta)\frac{\partial v}{\partial \nu}(\epsilon\zeta) - v(\epsilon\zeta)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\epsilon\zeta)\big)\ \epsilon^n\ d\sigma_n(\zeta)\ .$$

(1) Soient $R > 0$ et $h_0 : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$h_0(x) = \frac{1}{(n-1)}\Big(\frac{1}{\|x\|^{n-1}} - \frac{1}{R^{n-1}}\Big)\ .$$

Montrer que h_0 est harmonique et que $\frac{\partial h_0}{\partial \nu}(x) = -\frac{1}{\|x\|^n}$.

(2) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $h : \Omega \to \mathbb{C}$ une application harmonique. Montrer que si $\overline{B}(x_0, R) \subset \Omega$, alors

$$\int_{\mathbb{S}_n} h(x_0 + R\zeta)\ d\sigma_n(\zeta) = h(x_0)\ .$$

(3) Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ une application continue, harmonique dans Ω. Montrer que $|h|$ atteint son maximum en un point du bord $\partial\Omega$ de Ω, et que si Ω est connexe et si $|h|$ atteint son maximum en un point dans Ω, alors h est constante.

Exercice E.57 Soit $p \in [1, +\infty[$. Notons $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ :\ |z| < 1\}$, $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \ :\ |z| = 1\}$, σ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{S}_1$, et $\|\cdot\|_p$ la norme de $\mathbb{L}^p(\mathbb{S}_1, \sigma; \mathbb{C})$. Pour toute application $u : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ et pour tout $r \in\ ]0, 1[$, notons $u_r : \mathbb{S}_1 \to \mathbb{C}$ l'application définie par $\zeta \mapsto u(r\zeta)$. Notons

$$h^p(\mathbb{D}) = \{u : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \ :\ u \text{ est harmonique et } \|u\|_{h^p} = \sup_{0<r<1} \|u_r\|_p < +\infty\}\ .$$

(1) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$. Montrer que si g et h sont deux applications continues de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$, harmoniques sur Ω, telles que $g(\zeta) \leq h(\zeta)$ pour tout $\zeta \in \partial\Omega$, alors $g(z) \leq h(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

Fixons une application harmonique $u : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$.

(2) Montrer que s'il existe une application $v : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ harmonique telle que $|u(z)|^p \leq v(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, alors $\|u\|_{h^p} \leq \sqrt[p]{2\pi v(0)}$ et u appartient à $h^p(\mathbb{D})$.

(3) Pour tout $r \in \,]0,1[\,$, pour tout $z \in B(0,r) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < r\}$, montrer que

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} P_{z/r}(\zeta) u_r(\zeta) \, d\sigma(\zeta) \ .$$

(4) Pour tout $r \in \,]0,1[\,$, notons $v_{(r)}$ l'unique solution du problème de Dirichlet sur le disque $B(0,r)$ de donnée frontière $|u|^p$.

a) Rappelons l'*inégalité de Jensen* : si μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{S}_1$, et si $f : \mathbb{S}_1 \to \mathbb{C}$ est continue, alors $\left| \int_{\mathbb{S}_1} f \, d\mu \right|^p \leq \int_{\mathbb{S}_1} |f|^p \, d\mu$. Montrer que $|u(z)|^p \leq v_{(r)}(z)$ pour tout $z \in B(0,r)$.

b) Montrer que si $0 < r_1 \leq r_2 < 1$, alors $v_{(r_1)}(z) \leq v_{(r_2)}(z)$ pour tout $z \in B(0, r_1)$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $r_n = 1 - \frac{1}{n+2}$. Montrer que si $u \in h^p(\mathbb{D})$, alors la suite $(v_{(r_n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une application $v : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ harmonique telle que $|u(z)|^p \leq v(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(5) Montrer que $h^p(\mathbb{D})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{C}$, et que muni de l'application $\| \cdot \|_{h^p}$, c'est un espace de Banach.

Cet espace de Banach est appelé un *espace de Hardy*. Le but de l'exercice était donc de montrer qu'une application harmonique sur le disque appartient à l'espace de Hardy $h^p(\mathbb{D})$ si et seulement si la puissance p-ème de sa valeur absolue admet un majorant harmonique.

Exercice E.58 (1) Soient Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fonctions harmoniques réelles non constantes.

a) Montrer que u^2 n'est pas harmonique.

b) On suppose que $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y}$ ne s'annule pas sur Ω. Montrer que uv est harmonique si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ tel que l'application $v + ic\,u$ soit holomorphe sur Ω.

(2) Soient $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$ et $u : \mathbb{D} \to [0, +\infty[$ une fonction harmonique positive.

a) Montrer que pour tout $\zeta \in \mathbb{S}_1$, pour tout $r \in \,]0,1[\,$, nous avons

$$|\, u(r\zeta) - u(0) \,| \leq \frac{2r}{1-r} \, u(0) \ .$$

En notant $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y}$, en déduire que $|\nabla u(0)| \leq 2\, u(0)$.

b) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{D}$, l'application $\phi : z \mapsto \frac{z+a}{1+\overline{a}z}$ est une application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ et calculer sa dérivée en 0.

c) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{D}$, nous avons $|\nabla u(a)| \leq \frac{2}{1-|a|^2} \, u(a)$.

Exercice E.59 Notons $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1\}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$, $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$, σ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{S}_1$ (de masse totale 2π) et λ la mesure de Lebesgue sur $\overline{\mathbb{D}}$.

(1) a) Montrer que si $u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ est une application continue, qui est harmonique sur $\mathbb{D}$, alors l'application $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f : z \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \, u(\zeta) \, d\sigma(\zeta)$$

est l'unique application holomorphe sur $\mathbb{D}$ telle que $\operatorname{Re} f = u$ et $\operatorname{Im} f(0) = 0$. L'application $z \mapsto \operatorname{Im} f$ s'appelle le *conjugué harmonique* (normalisé) de f.

b) Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$, et soit $A = \sup_{z\in\mathbb{D}} |\operatorname{Re}(f(z))|$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, nous avons

$$|\operatorname{Im} f(z)| \leq \frac{2A}{\pi} \ln \frac{1+|z|}{1-|z|} .$$

(2) Soit $v : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ une application continue, *sous-harmonique* sur $\mathbb{D}$, c'est-à-dire de classe C^2 sur $\mathbb{D}$ et telle que $-\Delta v(z) \leq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Soient $z_0 \in \mathbb{D}$ et $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset \mathbb{D}$.

a) Soit $u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ l'application continue, harmonique sur $\mathbb{D}$, égale à v sur $\mathbb{S}_1$.

Montrer que $v \leq u$ sur $\mathbb{D}$ (on pourra considérer les applications $w_1 = v - u$ et $w_2 : z \mapsto w_1(z) + \epsilon\,(\operatorname{Re}(z - z_1))^2 - 4\epsilon$ où $\epsilon = \frac{w_1(z_1)}{8} > 0$).

Montrer que

$$\int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \leq 2\pi\, u(z_0) .$$

b) Montrer que si l'application v est positive sur $\mathbb{S}_1$, alors

$$\int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \leq \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|} \int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} v(\zeta)\, d\sigma(\zeta) .$$

(3) Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\overline{\mathbb{D}}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Montrer que pour tout $p > 0$, nous avons $-\Delta(|f|^p) \leq 0$ et

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f|^p\, d\lambda \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p\, d\theta .$$

Cette formule s'appelle l'*inégalité de Hardy.*

Exercice E.60 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une application $f : \Omega \to \mathbb{C}$ vérifie la *propriété de la moyenne faible* dans Ω si elle est continue et si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $]0, +\infty[$ telle que $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$, le disque fermé $\overline{B}(z_0, r_n)$ est contenu dans Ω pour tout $n \in \mathbb{N}$, et

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_n\, e^{i\theta})\, d\theta .$$

(1) Soient $R > 0$ et $h : \overline{B}(a, R) \to \mathbb{R}$ une application continue, nulle sur $S(a, R)$, vérifiant la propriété de la moyenne faible dans $B(a, R)$. Soit $m = \sup_{z\in\overline{B}(a,R)} h(z)$. En considérant $K = \{z \in \overline{B}(a, R) \ : \ h(z) = m\}$ et z_0 un point de K à distance maximale de a, montrer que $m \leq 0$.

(2) Montrer qu'une application $f : \Omega \to \mathbb{C}$ vérifie la propriété de la moyenne faible si et seulement si elle est harmonique.

Exercice E.61 (1) Soient $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$ et $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1\}$.

a) Soit $u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ une fonction continue non constante, harmonique dans $\mathbb{D}$. Montrer que si u atteint son maximum en $\zeta \in \mathbb{S}_1$, alors il existe $c > 0$ tel que $u(\zeta) - u(r\zeta) \geq c(1-r)$ pour tout $r \in [0, 1[$, en commençant par montrer que l'on peut supposer que $u(\zeta) = 0$ et que $-u$ est harmonique positive sur $\mathbb{D}$.

b) En déduire qu'une application u qui est définie et harmonique sur un voisinage ouvert de $\overline{\mathbb{D}}$, à valeurs réelles, et dont les dérivées radiales $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = d_x u(x)$ s'annulent en tout point $x \in \mathbb{S}^1$, est constante sur $\overline{\mathbb{D}}$.

(2) Pour tous les $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, notons $B(a, r)$ (respectivement $\overline{B}(a, r)$) le disque ouvert (respectivement fermé) de centre a et de rayon r, et m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$.

a) Soit $u : \overline{B}(a, r) \to \mathbb{R}$ une fonction continue, harmonique dans $B(a, r)$. Montrer que

$$u(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\overline{B}(a,r)} u \; dm \; .$$

b) Si A, B et C sont des parties d'un ensemble E, notons χ_C la fonction caractéristique de C et $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ la *différence symmétrique*. Montrer que $|\chi_A - \chi_B| = \chi_{A \,\Delta\, B}$. Si $0 < r < r'$, notons $\overline{A}(r, r') = \{z \in \mathbb{C} \ : \ r \leq |z| \leq r'\}$. Montrer que $\overline{B}(a, r) \,\Delta\, \overline{B}(0, r)$ est contenu dans $\overline{A}(r - |a|, r + |a|)$ pour tous les $a \in \mathbb{C}$ et $r > |a|$. Montrer que $\frac{1}{r^2}\, m\big(\overline{A}(r - |a|, r + |a|)\big)$ tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$, pour tout $a \in \mathbb{C}$.

c) En déduire que toute fonction harmonique bornée u sur $\mathbb{C}$ est égale à $u(0)$, donc est constante.

Ce résultat s'appelle le *théorème de Liouville* pour les fonctions harmoniques planes.

Exercice E.62 *Le but de cet exercice est de définir un noyau de Poisson dans les anneaux* $\{z \in \mathbb{C} \ : \ a < |z| < b\}$ *de* $\mathbb{C}$*, d'y donner une formule de Poisson, et d'y résoudre de manière explicite le problème de Dirichlet.*

Identifions de manière usuelle $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ par $(x, y) \mapsto z = x + iy$. Pour tout $r > 0$, notons $B(0, r) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < r\}$ et $S(0, r) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = r\}$ le disque ouvert et le cercle de centre 0 et de rayon r dans $\mathbb{C}$, et aussi $\mathbb{S}_1 = S(0, 1)$. Notons σ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{S}_1$ (de masse totale 2π).

(1) a) Si $\varphi : B(0, \epsilon) \to \mathbb{C}$, où $\epsilon > 0$, est une application holomorphe et si $\operatorname{Re} \varphi$ est homogène de degré $m \in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire si $\operatorname{Re} \varphi(tz) = t^m \operatorname{Re} \varphi(z)$ pour tous les $t \in \,]0, 1]$ et $z \in B(0, \epsilon)$), montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda' \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(z) = \lambda\, z^m + i\lambda'$. [23]

b) Montrer que l'espace vectoriel complexe $\mathscr{H}_m$ des applications polynomiales harmoniques homogènes de degré $m \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs complexes, est égal à $\mathbb{C} z^m + \mathbb{C}\, \overline{z}^m$.

(2) Soient $m, m' \in \mathbb{N}$. Notons $\mathscr{HS}_m = \{p_{|\mathbb{S}_1} \ : \ p \in \mathscr{H}_m\}$ l'espace vectoriel complexe des harmoniques sphériques de degré m sur le cercle $\mathbb{S}_1$. Notons $Z_m : \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1 \to \mathbb{C}$ l'application définie par $Z_0 = 1$ et, si $m \geq 1$,

$$(\zeta = e^{i\theta}, \zeta' = e^{i\theta'}) \mapsto Z_m(\zeta, \zeta') = 2 \cos(m(\theta - \theta')) \; .$$

23. On pourra utiliser le fait qu'une application holomorphe sur $B(0, \epsilon)$ de partie réelle nulle est une constante (imaginaire pure) et le fait que toute fonction holomorphe sur $B(0, \epsilon)$ est, de manière unique, développable en série entière sur $B(0, \epsilon)$.

a) Notons $\widetilde{Z}_m : \mathbb{C} \times \mathbb{S}_1 \to \mathbb{C}$ l'application définie par $\widetilde{Z}_0 = 1$ et, si $m \geq 1$, par $(z, \zeta) \mapsto |z|^m Z_m(\frac{z}{|z|}, \zeta)$ si $z \neq 0$ et $(0, \zeta) \mapsto 0$. Montrer que pour tout $\zeta \in \mathbb{S}_1$, l'application $z \mapsto \widetilde{Z}_m(z, \zeta)$ appartient à $\mathscr{H}_m$.

b) Montrer que pour tous les $f \in \mathscr{H}\mathscr{S}_{m'}$ et $\zeta \in \mathbb{S}_1$, nous avons

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\zeta' \in \mathbb{S}_1} f(\zeta')\, Z_m(\zeta, \zeta')\, d\sigma(\zeta') = \begin{cases} f(\zeta) & \text{si } m' = m \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

À partir de maintenant, fixons $a \in \,]0, 1[$ et notons $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \ : \ a < |z| < 1\}$ l'anneau ouvert compris entre les cercles concentriques $S(0, a)$ et $\mathbb{S}_1$.

(3) Notons $b_0^+ : \Omega \to \mathbb{C}$ (respectivement $b_0^- : \Omega \to \mathbb{C}$) l'application $z \mapsto 1 - \frac{\ln |z|}{\ln a}$ (respectivement $z \mapsto \frac{\ln |z|}{\ln a}$), et pour $m \geq 1$, $b_m^+ : \Omega \to \mathbb{C}$ (respectivement $b_m^- : \Omega \to \mathbb{C}$) l'application $z \mapsto \frac{1 - (\frac{a}{|z|})^{2m}}{1 - a^{2m}}$ (respectivement $z \mapsto \frac{a^m}{|z|^{2m}} \frac{1 - |z|^{2m}}{1 - a^{2m}}$).

a) Montrer que pour tous les $m \in \mathbb{N}$ et $\zeta \in \mathbb{S}_1$, les applications $z \mapsto b_m^{\pm}(z)\, \widetilde{Z}_m(z, \zeta)$ sont harmoniques sur Ω.

b) Montrer que les séries

$$Z^{\pm}(z, \zeta) = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m^{\pm}(z)\ \widetilde{Z}_m(z, \zeta)$$

convergent absolument et uniformément sur les compacts de $\Omega \times \mathbb{S}_1$. En déduire que pour tout $\zeta \in \mathbb{S}_1$, les applications $z \mapsto Z^{\pm}(z, \zeta)$ sont harmoniques sur Ω.

c) Montrer que l'application $\iota : z \mapsto \frac{a}{\overline{z}}$ est un homéomorphisme de $\overline{\Omega}$ dans lui-même, échangeant les cercles $S(0, a)$ et $\mathbb{S}_1$, tel que $Z^+(\iota(z), \zeta) = Z^-(z, \zeta)$ et $f \circ \iota(\zeta) = f(a\zeta)$ pour tous les $f : S(0, a) \to \mathbb{C}$ et $\zeta \in \mathbb{S}_1$.

(4) a) Soient K un espace métrique compact, μ une mesure (borélienne positive) finie sur K et Ω' un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $F : \Omega' \times K \to \mathbb{C}$ une application continue telle que pour tout $x \in K$, l'application $z \mapsto F(z, x)$ soit harmonique sur Ω'. Montrer que l'application $z \mapsto \int_{x \in K} F(x, z)\, d\mu(x)$ est harmonique sur Ω'.

b) Soit $f : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ une application continue. Pour tout $z \in \Omega$, notons

$$P_\Omega[f](z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} f(\zeta)\, Z^+(z, \zeta)\ d\sigma(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} f(a\zeta)\, Z^-(z, \zeta)\ d\sigma(\zeta)\ .$$

Montrer que l'application $P_\Omega[f] : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto P_\Omega[f](z)$ est harmonique sur Ω. Montrer que l'application $u_f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ définie par

$$u_f(z) = \begin{cases} P_\Omega[f](z) & \text{si } z \in \Omega \\ f(z) & \text{si } z \in \partial\Omega \end{cases}$$

est continue sur $\overline{\Omega}$ (on pourra commencer par montrer le cas où $f_{|S(0,a)}$ est nulle et $f_{|\mathbb{S}_1}$ appartient à $\mathscr{H}\mathscr{S}_{m'}$ pour tout $m' \in \mathbb{N}$). Si $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ est une application continue, harmonique sur Ω, qui coïncide avec f sur $\partial\Omega$, montrer que $v = u_f$.

c) Soient $a', b' \in \,]0, +\infty[$ avec $a' < b'$. Montrer que le problème de Dirichlet dans l'anneau $\Omega' = \{z \in \mathbb{C} \ : \ a' < |z| < b'\}$, de donnée au bord une application $f : \partial\Omega' \to \mathbb{C}$ continue, admet une et une seule solution.

Exercice E.63 Soient $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ le demi-plan supérieur (ouvert) de $\mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$. Rappelons qu'une application $g : A \to \mathbb{C}$, où A est une partie non bornée de $\mathbb{C}$, est nulle à l'infini si $g(z)$ converge vers 0 quand $z \in A$ et $|z|$ tend vers $+\infty$.

(1) a) Soit $u : \overline{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}$ une fonction continue non constante, harmonique dans $\mathbb{H}$. Montrer que si u atteint son maximum en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors il existe $c > 0$ tel que

$$u(x_0) - u(x_0 + i + ire^{i\theta}) \geq c\,(1 - r)$$

pour tout $r \in \,]0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, en commençant par montrer que l'on peut supposer que $u(x_0) = 0$ et que $-u$ est harmonique positive sur $\mathbb{H}$.

b) En déduire qu'une application u qui est définie et harmonique sur un voisinage ouvert de $\overline{\mathbb{H}}$ dans $\mathbb{C}$, nulle à l'infini, à valeurs réelles, et dont les dérivées verticales $\frac{\partial u}{\partial y}(x)$ s'annulent en tout point $x \in \mathbb{R}$, est constante sur $\overline{\mathbb{H}}$.

(2) Notons $Q : \mathbb{H} \times \mathbb{R} \to \,]0, +\infty[$ l'application continue, strictement positive, définie par

$$(z, t) \mapsto Q_z(t) = \frac{\mathrm{Im}\, z}{|z - t|^2} = \mathrm{Im}\left(\frac{1 + tz}{t - z}\right) \frac{1}{1 + t^2}\ ,$$

qui converge vers 0 quand $|z|$ tend vers $+\infty$ uniformément en t dans tout compact de $\mathbb{R}$. Notons $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures boréliennes positives finies sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$, posons

$$P_{\mathbb{H}}\mu : z \in \mathbb{H} \mapsto \int_{t \in \mathbb{R}} Q_z(t)\ d\mu(t)\ .$$

Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ continue à support compact sur $\mathbb{R}$, on rappelle que l'application de $\overline{\mathbb{H}}$ dans $\mathbb{C}$ valant f sur $\mathbb{R}$ et $P_{\mathbb{H}} f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{t \in \mathbb{R}} Q_z(t)\, f(t)\ dt$ pour tout $z \in \mathbb{H}$ est continue et nulle à l'infini sur $\overline{\mathbb{H}}$.

a) Montrer que pour tout $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$, l'application $P_{\mathbb{H}}\mu$ est harmonique et positive. Montrer qu'elle vérifie $\sup_{0 < r \leq 1} \int_{t \in \mathbb{R}} P_{\mathbb{H}}\mu(t + ir)\ dt < +\infty$.

b) Pour tous les $f \in \mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ et $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$, montrer que

$$\int_{t \in \mathbb{R}} f(t)\ d\mu(t) = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{t' \in \mathbb{R}} f(t')\, P_{\mathbb{H}}\mu(t' + ir)\ dt'\ .$$

c) Pour toute fonction harmonique positive $h : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ telle que la quantité

$$M(h) = \sup_{0 < r \leq 1} \int_{t \in \mathbb{R}} h(t + ir)\ dt$$

est finie, montrer qu'il existe une suite $(n_k)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$ tendant vers $+\infty$ et $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ telles que pour tout $f \in \mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}; \mathbb{C})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f\ d\mu = \lim_{k \to +\infty} \int_{t' \in \mathbb{R}} h(t' + \frac{i}{n_k + 1})\, f(t')\ dt'\ .$$

d) En déduire que l'application $\mu \mapsto P_{\mathbb{H}}\mu$ de $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ dans l'ensemble des fonctions harmoniques positives h sur $\mathbb{H}$ telles que $M(h) < +\infty$ est une bijection.

Problèmes mélangeant théorie spectrale et analyse harmonique.

Exercice E.64 Nous noterons $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ et $\|\cdot\|_2$ le produit scalaire et la norme de l'espace de Hilbert complexe $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Notons $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel complexe des $u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ tels que l'application $t \mapsto \sqrt{t^2+1}\, u(t)$ appartienne à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ et qu'il existe une application $u' \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ telle que $\langle u', \varphi\rangle_2 = -\langle u, \varphi'\rangle_2$ pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{\mathscr{H}^1} = \langle u', v'\rangle_2 + \big\langle \sqrt{t^2+1}\, u, \sqrt{t^2+1}\, v\big\rangle_2 .$$

(1) Montrer que $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, que $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$, et que l'inclusion de $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ est compacte.

(2) a) Montrer que si $u \in \mathscr{H}^1(\mathbb{R})$, alors $\|u\|_2 \leq \|u\|_{\mathscr{H}^1}$.

b) Pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, montrer que l'application $Q_f : \mathscr{H}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$Q_f(u) = \frac{1}{2}\, \|u\|^2_{\mathscr{H}^1} - \mathrm{Re}\, \langle f, u\rangle_2$$

admet un et un seul minimum.

c) Montrer que $u \in \mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ est un minimum de Q_f si et seulement si $\langle u, \varphi\rangle_{\mathscr{H}^1} = \langle f, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2}$ pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

(3) Montrer que l'opérateur $G : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ qui à $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ associe l'unique minimum de Q_f est un opérateur linéaire continu auto-adjoint positif compact.

(4) En déduire qu'il existe une base hilbertienne $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ et une suite $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $]0, +\infty[$, croissante et convergente vers $+\infty$, telles que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle f_i,\, -\varphi'' + (t^2+1)\varphi\,\rangle_2 = \lambda_i\, \langle f_i, \varphi\rangle_2 .$$

Le but de cet exercice était donc de montrer qu'il existe une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ formé de vecteurs propres (au sens faible) pour l'opérateur $f \mapsto \{t \mapsto -f''(t)+(t^2+1)f(t)\}$.

Exercice E.65 Soient $n \geq 1$ et Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$. Notons $W^{2,2}(\Omega)$ l'espace de Hilbert complexe des applications $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ telles qu'il existe, pour tous les $i, j \in \{1, \dots, n\}$, des applications f_i et $f_{i,j}$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ telles que pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$\langle f_i, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2} = -\langle f, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\rangle_{\mathbb{L}^2} \quad \text{et} \quad \langle f_{i,j}, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2} = \langle f, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\rangle_{\mathbb{L}^2} ,$$

muni du produit scalaire hilbertien

$$\langle f, g\rangle_{W^{2,2}} = \langle f, g\rangle_{\mathbb{L}^2} + \sum_{i=1}^n \langle f_i, g_i\rangle_{\mathbb{L}^2} + \sum_{i,j=1}^n \langle f_{i,j}, g_{i,j}\rangle_{\mathbb{L}^2} .$$

Notons $\Delta f = \sum_{i=1}^n f_{i,i}$ pour tout $f \in W^{2,2}(\Omega)$, et notons $W_0^{2,2}(\Omega)$ l'adhérence dans l'espace de Hilbert $W^{2,2}(\Omega)$ de $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$.

(1) Montrer que $\|f\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|f\|_{W^{1,2}} \leq \|f\|_{W^{2,2}}$ pour tout $f \in W^{2,2}(\Omega)$, et que $W_0^{2,2}(\Omega) \subset W_0^{1,2}(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$.

(2) a) Montrer qu'il existe une constante $c' > 0$ telle que pour tout $f \in W_0^{2,2}(\Omega)$,

$$\|f\|^2_{\mathbb{L}^2} \leq c' \sum_{i,j=1}^n \|f_{i,j}\|^2_{\mathbb{L}^2} .$$

b) Montrer que toute suite bornée dans $W_0^{2,2}(\Omega)$ admet une sous-suite convergente dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

(3) a) Montrer que pour tous les $f, g \in W_0^{2,2}(\Omega)$, nous avons $\langle -\Delta f, g\rangle_{\mathbb{L}^2} = \langle f, -\Delta g\rangle_{\mathbb{L}^2}$ et $\langle -\Delta f, f\rangle_{\mathbb{L}^2} \geq 0$.

b) Montrer que l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe un élément f non nul de $W_0^{2,2}(\Omega)$ qui vérifie $-\Delta f = \lambda f$ est une partie dénombrable de $[0, +\infty[$.

(4) Montrer que pour toute application $V \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui tend vers 0 à l'infini, l'opérateur $u_V : W^{2,2}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ défini par $u \mapsto V\,u$ est compact, en commençant par montrer le cas où $V \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exercice E.66 Rappelons que $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_1)$ est l'espace de Hilbert complexe des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables 2π-périodiques, modulo égalité presque partout, telles que $\|f\|_2 = \big(\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2\, d\theta\big)^{1/2} < +\infty$, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle_2 = \int_0^{2\pi} f(\theta)\,\overline{g(\theta)}\, d\theta$. Rappelons qu'il contient de manière dense l'espace vectoriel complexe $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}_1)$ des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ et 2π-périodiques. Notons $\mathscr{H}^1(\mathbb{S}_1)$ l'espace vectoriel complexe des $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{S}_1)$ tels qu'il existe un élément $f' \in \mathbb{L}^2(\mathbb{S}_1)$ tel que $\langle f', \varphi\rangle_2 = -\langle f, \varphi'\rangle_2$ pour tous les $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}_1)$.

(1) Montrer qu'un tel f' est unique, et que, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle_{\mathscr{H}^1} = \langle f, g\rangle_2 + \langle f', g'\rangle_2$, l'espace vectoriel complexe $\mathscr{H}^1(\mathbb{S}_1)$ est un espace de Hilbert complexe séparable.

(2) En utilisant les séries de Fourier, montrer qu'il existe un unique opérateur linéaire continu $u : \mathscr{H}^1(\mathbb{S}_1) \to \mathbb{L}^2(\mathbb{S}_1)$ tel que pour tout $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}_1)$, nous ayons $u(\varphi) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}_1)$, $u \circ u(\varphi) = -\varphi''$ et $\langle u(\varphi), \varphi\rangle_2 \geq 0$.

(3) Montrer qu'il existe une base hilbertienne $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathscr{H}^1(\mathbb{S}_1)$ et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $[0, +\infty[$ telle que $u(f_n) = \lambda_n f_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice E.67 (1) Notons $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes (réels, en une variable x) définie par $H_0 = 1$ et la relation de récurrrence $H_{n+1} = \big(-\frac{d}{dx} + 2x\big)H_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) = (-1)^n H_n(x)\, e^{-x^2} \;,$$

et que le polynôme H_n est de degré n et de coefficient dominant 2^n. Il est appelé le *n-ème polynôme d'Hermite*.

(2) Rappelons que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$. Nous admettrons que l'ensemble des applications $x \mapsto P(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, où P est un polynôme à coefficients complexes, est dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ (la mesure sous-entendue sur $\mathbb{R}$ est la mesure de Lebesgue). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $c_n = (2^n\, n!\sqrt{\pi}\,)^{-\frac{1}{2}}$ et

$$\psi_n = c_n\, H_n\, e^{-\frac{x^2}{2}} \;.$$

a) Montrer que la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

b) Montrer que

$$\big(\frac{d}{dx} + x\big)\psi_0 = 0 \quad \text{et} \quad \big(-\frac{d}{dx} + x\big)\psi_n = \sqrt{2(n+1)}\; \psi_{n+1} \;.$$

c) Rappelons que la *transformée de Fourier* $\mathscr{F} : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ est l'opérateur linéaire isométrique défini par

$$\mathscr{F}(f) : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-ixt}\, dt\ .$$

Montrer que l'opérateur $\mathscr{F}$ est unitaire et déduire de b) que $\mathscr{F}(\psi_n) = (-i)^n\, \psi_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer l'ensemble des valeurs propres, le spectre et le spectre résiduel de $\mathscr{F}$.

(3) Notons H l'opérateur différentiel du second ordre, appelé *l'oscillateur harmonique*, défini en posant, pour tout $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$,

$$H(f) = -\frac{d^2 f}{dx^2} + x^2 f\ .$$

a) Déduire de (2) b) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$H(\psi_n) = (2n+1)\, \psi_n\ .$$

b) Notons $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞ telles que $\lim_{t\to\pm\infty} |P(t)\, f(t)| = 0$ pour tout polynôme P. Nous admettrons que H est continu sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ pour la norme $\mathbb{L}^2$. Montrer qu'il existe un opérateur linéaire continu compact $G \in \mathscr{L}(\mathbb{L}^2(\mathbb{R}))$ tel que pour tous les $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, nous avons $H(f) = g$ si et seulement si $f = G(g)$.

(4) a) Montrer qu'il existe une famille $(u_t)_{t\in\mathbb{R}}$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{L}^2(\mathbb{R}))$, formée d'opérateurs linéaires continus unitaires, telle que
- $\mathscr{F} = u_1$,
- $u_{t+s} = u_t \circ u_s$ pour tous les $t, s \in \mathbb{R}$,
- pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, l'application $t \mapsto u_t(f)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ est continue.

b) Calculer l'ensemble des valeurs propres, le spectre et le spectre résiduel de u_t pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice E.68 Notons μ_0 et μ_1 les mesures $d\mu_0(t) = e^{-t}\, dt$ et $d\mu_1(t) = t\, e^{-t}\, dt$ sur $[0, +\infty[$. Considérons les espaces de Hilbert complexes $\mathscr{H}_0 = \mathbb{L}^2(\mu_0)$ et $\mathscr{H}_1 = \mathbb{L}^2(\mu_1)$. Notons $\mathscr{H}_2$ l'espace vectoriel complexe des $u \in \mathscr{H}_0$ tels qu'il existe une application $u' \in \mathscr{H}_1$ telle que $\langle u', \varphi\rangle_{\mathscr{H}_1} = \langle u, -t\varphi' - (1-t)\varphi\rangle_{\mathscr{H}_0}$ pour tout $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c([0, +\infty[)$ (de classe C^∞ et à support compact), muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{\mathscr{H}_2} = \langle u', v'\rangle_{\mathscr{H}_1} + \langle u, v\rangle_{\mathscr{H}_0}\ .$$

(1) a) Pour tout $u \in \mathscr{H}_2$, montrer qu'une telle application u' est unique, et que si $u \in \mathrm{C}^\infty_c([0, +\infty[)$, alors u' est la dérivée usuelle de u.

b) Montrer que $\mathscr{H}_2$ est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Nous admettrons que l'inclusion de $\mathscr{H}_2$ dans $\mathscr{H}_0$ est un opérateur compact.

(2) a) Montrer que $\|v\|_{\mathscr{H}_0} \le \|v\|_{\mathscr{H}_2}$ pour tout $v \in \mathscr{H}_2$.

b) Pour tout $f \in \mathscr{H}_0$, notons $Q_f : \mathscr{H}_2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$Q_f(u) = \frac{1}{2}\, \|u\|^2_{\mathscr{H}_2} - \mathrm{Re}\, \langle f, u\rangle_{\mathscr{H}_0}\ .$$

Montrer qu'il existe un et un seul élément $u \in \mathscr{H}_2$ tel que $\langle u, v\rangle_{\mathscr{H}_2} = \langle f, v\rangle_{\mathscr{H}_0}$ pour tout $v \in \mathscr{H}_2$, et que cet élément est l'unique minimum de Q_f.

(3) Montrer que l'opérateur $G : \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}_0$ qui à $f \in \mathscr{H}_0$ associe l'unique minimum de Q_f est un opérateur linéaire continu compact, et que $\langle G(f), f\rangle_{\mathscr{H}_0} \geq 0$ avec égalité si et seulement si $f = 0$ dans $\mathscr{H}_0$.

(4) En déduire qu'il existe une base hilbertienne $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}_0$ et une suite $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $]0, +\infty[$, croissante et convergente vers $+\infty$, telle que, pour toute application $\varphi \in C^\infty_c([0, +\infty[)$,

$$\langle f_i,\, -t\varphi'' - (1-t)\varphi' + \varphi\,\rangle_{\mathscr{H}_0} = \lambda_i\, \langle f_i, \varphi\rangle_{\mathscr{H}_0}\ .$$

(5) Définissons par récurrence une suite d'applications polynomiales $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}[x]$ par $L_0 = 1$, $L_1 = 1 - x$ et pour tout $n \geq 1$,

$$(n+1)L_{n+1} + (x - 2n - 1)L_n + nL_{n-1} = 0\ .$$

a) Montrer que L_n est de degré n, et calculer son coefficient dominant. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que[24] $xL_n' - nL_n + nL_{n-1} = 0$ si $n \geq 1$ et que

$$xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n = 0\ .$$

b) Montrer que les valeurs propres de G sont les $\frac{1}{1+n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Le but de cet exercice était donc de montrer qu'il existe une base hilbertienne de $\mathscr{H}_0$ formé de vecteurs propres (au sens faible) pour l'opérateur

$$f \mapsto \{t \mapsto -t\, f''(t) - (1-t)f(t) + f(t)\}\ .$$

Exercice E.69 Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, de produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}}$ et de norme $\|\cdot\|_{\mathscr{H}}$. Soient $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur linéaire continu de $\mathscr{H}$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$. Pour tout $x \in \mathscr{H}$, notons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coordonnées hilbertiennes de x dans cette base hilbertienne.

(1) a) Notons $\mathscr{S}$ le sous-espace de $\mathscr{H}$ formé des $z \in \mathscr{H}$ dont les coordonnées hilbertiennes dans $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à *décroissance rapide*, c'est-à-dire telles que $\lim_{n\to+\infty} n^k z_n = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un et un seul opérateur linéaire $\delta : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ tel que $\delta(z)_n = n\, z_n$, pour tous les $z \in \mathscr{S}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathscr{S}$ est dense dans $\mathscr{H}$.

b) Notons $\mathscr{H}_1$ le sous-ensemble de $\mathscr{H}$ formé des $x \in \mathscr{H}$ tels qu'il existe $x' \in \mathscr{H}$ tel que $\langle x', z\rangle_{\mathscr{H}} = \langle x, \delta(z)\rangle_{\mathscr{H}}$ pour tout $z \in \mathscr{S}$. Montrer qu'un tel élément x' est unique ; il est noté $\delta(x)$ dans la suite. Montrer que $\mathscr{H}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$, que $\mathscr{S}$ est contenu dans $\mathscr{H}_1$, que la restriction à $\mathscr{S}$ de l'opérateur δ introduit dans cette question b) coïncide avec l'opérateur δ introduit dans la question précédente a), et que $\mathscr{H}_1$, muni de l'application

$$(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle_{\mathscr{H}_1} = \langle \delta(x), \delta(y)\rangle_{\mathscr{H}} + \langle u(x), u(y)\rangle_{\mathscr{H}} + \langle x, y\rangle_{\mathscr{H}}\ ,$$

24. On peut montrer que

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ \frac{(-1)^k}{k!}\ x^k\ ,$$

est un espace de Hilbert.

c) Montrer que l'inclusion $\varphi : x \mapsto x$ de $\mathscr{H}_1$ dans $\mathscr{H}$ est un opérateur linéaire continu compact, tel que $\|x\|_{\mathscr{H}} \leq \|x\|_{\mathscr{H}_1}$ pour tout $x \in \mathscr{H}_1$.

(2) Pour tout $x \in \mathscr{H}$, montrer que l'application $Q_x : \mathscr{H}_1 \to \mathbb{R}$ définie par

$$Q_x(y) = \frac{1}{2}\,\|y\|^2_{\mathscr{H}_1} - \mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle_{\mathscr{H}}$$

admet un et un seul minimum, et que ce minimum est l'unique élément $x'' \in \mathscr{H}_1$ tel que $\langle x'', y\rangle_{\mathscr{H}_1} = \langle x, y\rangle_{\mathscr{H}}$ pour tout $y \in \mathscr{H}_1$.

(3) Montrer que l'application $G : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ qui à $x \in \mathscr{H}$ associe l'unique minimum de Q_x est un opérateur linéaire continu auto-adjoint positif compact.

(4) Montrer qu'il existe un opérateur linéaire continu $w \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, de spectre contenu dans $[0, \mathrm{arctanh}\,\frac{1}{2}]$, tel que $\frac{1}{2}G = (\exp(2w) - \mathrm{id}) \circ (\exp(2w) + \mathrm{id})^{-1}$.

(5) Montrer qu'il existe une base hilbertienne $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$ et une suite $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $]0, +\infty[$, croissante et convergente vers $+\infty$, telles que, pour tout $z \in \mathscr{S}$,

$$\langle f_i, (\delta^2 + u^*u + \mathrm{id})(z)\rangle_{\mathscr{H}} = \lambda_i\,\langle f_i, z\rangle_{\mathscr{H}}\ .$$

Exercice E.70 Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, et $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$ indexée par $\mathbb{Z}$. Nous désignerons par $\mathscr{F}$ le sous-espace vectoriel complexe de $\mathscr{H}$ engendré par les e_n pour $n \in \mathbb{Z}$, par $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}}$ le produit scalaire de $\mathscr{H}$ et, pour tout $x \in \mathscr{H}$, par $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des coordonnées hilbertiennes de x dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux suites réelles strictement positives indexées par $\mathbb{Z}$ telles que $b_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la suite $\big(\frac{a_n}{\min\{b_{n+1}, b_n\}}\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit bornée et $\lim_{|n|\to+\infty} b_n = +\infty$. Pour tout $x \in \mathscr{H}$, notons

$$dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(x_{n+1} - x_n)\, e_n \quad \text{et} \quad Vx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n x_n\, e_n\ .$$

Notons $\mathscr{H}_{a,b}$ le sous-espace vectoriel complexe des $x \in \mathscr{H}$ tels que les séries dx et Vx convergent dans $\mathscr{H}$, muni du produit scalaire

$$\langle x, y\rangle_{\mathscr{H}_{a,b}} = \langle dx, dy\rangle_{\mathscr{H}} + \langle Vx, Vy\rangle_{\mathscr{H}}\ .$$

(1) Montrer que $\mathscr{H}_{a,b}$ est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, que $\|u\|_{\mathscr{H}} \leq \|u\|_{\mathscr{H}_{a,b}}$ pour tout $u \in \mathscr{H}_{a,b}$, que le sous-espace $\mathscr{F}$ est contenu dans $\mathscr{H}_{a,b}$ et que l'inclusion de $\mathscr{H}_{a,b}$ dans $\mathscr{H}$ est un opérateur compact.

(2) Pour tout $x \in \mathscr{H}$, montrer que l'application $\mathscr{Q}_x : \mathscr{H}_{a,b} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y \mapsto \frac{1}{2}\|y\|^2_{\mathscr{H}_{a,b}} - \mathrm{Re}\langle x, y\rangle_{\mathscr{H}}$$

admet un et un seul minimum. Montrer que $y \in \mathscr{H}_{a,b}$ est un minimum de $\mathscr{Q}_x$ si et seulement si

$$\forall\ z \in \mathscr{H}_{a,b}, \quad \langle y, z\rangle_{\mathscr{H}_{a,b}} = \langle x, z\rangle_{\mathscr{H}}\ .$$

(3) Montrer que l'opérateur $G : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ qui à $x \in \mathscr{H}$ associe l'unique minimum de $\mathscr{Q}_x$ est un opérateur linéaire continu auto-adjoint positif compact.

(4) Pour tout $z \in \mathscr{F}$, posons $\Delta z = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big((a_n^2 + a_{n-1}^2)z_n - a_{n-1}^2 z_{n-1} - a_n^2 z_{n+1}\big)e_n$. Montrer qu'il existe une base hilbertienne $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$ et une suite croissante $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels supérieurs ou égaux à 1 qui converge vers $+\infty$, telles que pour tout $z \in \mathscr{F}$, nous ayons

$$\langle f_i, (\Delta + V \circ V)(z)\rangle_{\mathscr{H}} = \lambda_i \, \langle f_i, z\rangle_{\mathscr{H}} \; .$$

3.2 Corrigés

Théorie spectrale.

Correction de l'exercice E.30. (1) Puisque $\mathscr{H}$ est séparable de dimension infinie, l'opérateur auto-adjoint compact u est diagonalisable en base hilbertienne, de spectre réel : il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$ et une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $u(e_n) = \mu_n e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par les propriétés du calcul fonctionnel continu (et puisque f est définie et continue sur le spectre de l'opérateur auto-adjoint u, qui est contenu dans $\mathbb{R}$), puisque e_n est un vecteur propre de valeur propre μ_n pour u, le vecteur e_n est aussi un vecteur propre de valeur propre $f(\mu_n)$ pour $f(u)$, d'où le résultat avec $\lambda_n = f(\mu_n)$.

(2) Il est bien connu que, quand $n \to +\infty$, les fonctions continues $f_n : t \mapsto (1 + \frac{1}{n}t)^n$ convergent uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$ vers la fonction continue $f : t \mapsto e^t$. Par la continuité du calcul fonctionnel continu (puisque l'opérateur u est auto-adjoint), la suite $\big(f_n(u) = (1 + \frac{u}{n})^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc dans $\mathscr{L}(H)$ vers $f(u)$. Par le théorème spectral, le spectre de $f(u)$ est l'ensemble des images par f des éléments du spectre de u :

$$\mathrm{Sp}(f(u)) = \{e^\lambda \; : \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\} \; .$$

(3) Pour tout $x \in \mathscr{H}$, en notant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coordonnées hilbertiennes de x dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$, nous avons par la linéarité et la continuité de u, par la sesquilinéarité et la continuité du produit scalaire, et par (plusieurs variantes de) l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\|u(x) - u\circ p_N(x)\|^2 &= \big\|u\big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} x_n e_n\big)\big\|^2 = \big\|\sum_{n=N+1}^{+\infty} x_n u(e_n)\big\|^2 \\
&= \sum_{p,\,q=N+1}^{+\infty} \langle x_p u(e_p), x_q u(e_q)\rangle \leq \sum_{p,\,q=N+1}^{+\infty} |x_p|\,\|u(e_p)\|\,|x_q|\,\|u(e_q)\| \\
&= \big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n|\,\|u(e_n)\|\big)^2 \leq \big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n|^2\big)\big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \|u(e_n)\|^2\big) \\
&\leq \|x\|^2\big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \|u(e_n)\|^2\big) \; .
\end{aligned}$$

L'affirmation a) en découle. L'opérateur $u\circ p_N$ est de rang fini (son image est engendrée par $u(e_0), \dots, u(e_N)$). Donc u, étant limite (pour la norme d'opérateur) d'opérateurs de rang fini, est compact.

Correction de l'exercice E.31. (1) Soit $k : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $k(0,0) = 0$ et $k(s,t) = \log(\max\{s,t\})$ si $(s,t) \neq (0,0)$. Notons que si $s \in]0,1]$, alors

$$Tf(s) = \int_{t\in[0,1]} k(s,t)\ f(t)\ d\mu(t)\ .$$

Nous avons, pour tout $s \in]0,1]$,

$$\begin{aligned}\int_{(s,t)\in[0,1]^2} |k(s,t)|^2\ d\mu(t)d\mu(s) &= \int_0^1 \Big(\int_0^s s\ln^2 s\ t\ dt + s\int_s^1 \ln^2 t\ t\ dt\Big)\ ds\\ &\leq 2\int_0^1 s\ln^2 s\ ds\ .\end{aligned}$$

Puisque $s\ln^2 s$ est continue sur $[0,1]$, l'application k est de carré intégrable. Donc T est un opérateur de type Hilbert-Schmidt, de noyau k réel et symétrique. Il découle du cours que T est bien défini (quelle que soit la valeur donnée à $Tf(0)$), continu, auto-adjoint, compact.

(2) Il est immédiat que $Tf(1) = 0$. Les applications $t \mapsto \sqrt{t}\ln t$ et $t \mapsto \sqrt{t}f(t)$ sont de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ (la première est continue et $f \in \mathbb{L}^2([0,1],\mu)$). Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'intégrale $\int_0^1 \ln t\ f(t)\ t\ dt$ converge absolument. En posant $Tf(0) = \int_0^1 \ln t\ f(t)\ d\mu(t)$, le second terme de la formule définissant T_f converge vers $Tf(0)$ par (1). Montrons que le premier terme $\ln(s)\int_0^s f(t)\ d\mu(t)$ converge vers 0 quand s tend vers 0, ce qui montre que Tf se prolonge continument en $s = 0$. Toujours par la formule de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\int_0^s (\sqrt{t}\ f(t))\ \sqrt{t}\ dt \leq \|f\|_{\mathbb{L}^2(\mu)}\Big(\int_0^s t\ dt\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{s}{\sqrt{2}}\|f\|_{\mathbb{L}^2(\mu)}\ ,$$

et donc $|\ln(s)\int_0^s f(t)\ d\mu(t)| \leq \frac{s|\ln s|}{\sqrt{2}}\|f\|_{\mathbb{L}^2(\mu)}$, qui tend vers 0 quand s tend vers 0.

Soient $s_0, s \in]0,1]$ et $\epsilon > 0$. Si s est assez proche de s_0, alors $|\ln s - \ln s_0| \leq \epsilon$. Supposons par exemple $s \geq s_0$, l'autre cas se traitant de même. Puisque μ est finie (et par Cauchy-Schwarz), nous avons l'inclusion $\mathbb{L}^2(\mu) \subset \mathbb{L}^1(\mu)$. Par Cauchy-Schwarz encore,

$$\int_{s_0}^s |\ln t|\ |f(t)|\ d\mu(t) = \int_0^1 (\chi_{[s_0,s]}(t)\ |\ln t|)\ |f(t)|\ d\mu(t) \leq \|f\|_{\mathbb{L}^2(\mu)}\Big(\int_{s_0}^s |\ln t|^2\ t\ dt\Big)^{\frac{1}{2}}\ ,$$

qui converge vers 0 quand s tend vers s_0, car $t \mapsto t\,|\ln t|^2$ est continue sur $[0,1]$. De même, $\int_{s_0}^s |f|\ d\mu$ tend vers 0 quand s tend vers s_0. Puisque

$$|Tf(s) - Tf(s_0)| \leq \epsilon\int_0^1 |f|\ d\mu + |\ln s_0|\int_{s_0}^s |f|\ d\mu + \int_{s_0}^s |\ln t|\ |f(t)|\ d\mu(t)\ ,$$

en faisant tendre ϵ vers 0, ceci montre que Tf est continue en s_0, donc sur $[0,1]$.

Si $Tf = \lambda f$ où $\lambda \neq 0$, alors $f = \frac{1}{\lambda}Tf$ est continue, donc Tf est C^1 comme combinaison d'intégrales de fonctions continues, donc f est C^1, et en itérant, f est C^∞.

(3) Nous savons qu'un opérateur auto-adjoint compact d'un espace de Hilbert séparable est diagonalisable en base hilbertienne. Or $\mathbb{L}^2([0,1],\mu)$ est séparable (les polynômes à coefficients rationnels sont denses). Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathbb{L}^2([0,1],\mu)$ tels que $Tf = \lambda f$.

Si $\lambda = 0$, alors par le théorème de dérivation de Lebesgue appliqué aux fonctions $g : t \mapsto t\, f(t)$ et $t \mapsto t\, \ln t\, f(t)$ qui sont dans $\mathbb{L}^2([0,1])$, donc dans $\mathbb{L}^1([0,1])$, nous avons

$$\frac{1}{s}\int_0^s f(t) d\mu(t) dt = 0\ .$$

Donc l'application Vg, où V est l'opérateur de Voltera, est presque partout nulle. Comme l'opérateur de Voltera est injectif, nous en déduisons que g, donc f, est presque partout nulle : 0 n'est pas valeur propre de T (autrement dit, T est injective).

Si $\lambda \neq 0$, alors f est C^∞ par (2), donc en dérivant, nous avons $Tf'(s) = \frac{1}{s}\int_0^s f(t)\, d\mu(t) +$ $\ln s\, f(s)\, s - \ln s\, f(s)\, s$ et $s\, Tf'(s) = \int_0^s f(t)\, t\, dt$. En dérivant encore, $s\, Tf''(s) + Tf'(s) =$ $s\, f(s)$, d'où

$$s\, \lambda\, f''(s) + \lambda f'(s) - s\, f(s) = 0\ .$$

Cette égalité est une équation différentielle linéaire du second ordre, dont l'espace vectoriel des solutions est de dimension 2. Comme $Tf(1) = 0$, nous avons de plus $f(1) = 0$. Soient f_1 et f_2 deux solutions linéairement indépendantes. Leur wronskien $w = \begin{vmatrix} f_1 & f_1' \\ f_2 & f_2' \end{vmatrix}$ vérifie l'équation différentielle

$$w' = \begin{vmatrix} f_1 & f_1'' \\ f_2 & f_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & \frac{sf_1 - \lambda f_1'}{\lambda s} \\ f_2 & \frac{sf_2 - \lambda f_2'}{\lambda s} \end{vmatrix} = -\frac{1}{s}\, w\ .$$

Dons $w(s) = \frac{w_1}{s}$ où $w_1 \neq 0$, et en particulier f_1 et f_2 ne peuvent pas s'annuler simultanément en 1. Donc l'espace vectoriel des solutions du système linéaire $s\, \lambda f''(s) + \lambda f'(s) -$ $s\, f(s) = 0$ et $f(1) = 0$ est de dimension au plus 1, donc égale à 1 si non nulle. La multiplicité d'une valeur propre de T est donc 1, et comme 0 n'est pas valeur propre, le résultat en découle.

Correction de l'exercice E.32. (1) L'application $c_n : f \mapsto c_n(f)$ de $\mathscr{H}$ dans $\mathbb{C}$ est linéaire par linéarité de l'intégrale et continue (par exemple parce que c'est une coordonnée hilbertienne dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathscr{H}$, ou parce que $|c_n(f)|^2 \leq$ $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2{}^2$ par Parseval, ou parce que $|\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt| \leq \|1\|_2\, \|f\|_2 =$ $\sqrt{2\pi}\, \|f\|_2$ par Cauchy-Schwarz). Donc E est un sous-espace vectoriel fermé comme intersection d'hyperplans fermés, noyaux de formes linéaires continues.

(2) La multiplication d'une fonction $g \in \mathbb{L}^2$ par une fonction $\phi \in \mathbb{L}^\infty$ est $\mathbb{L}^2$, avec $\|\phi\ g\|_2 \leq \|\phi\|_\infty \|g\|_2$. Donc l'opérateur u_ϕ est bien défini, clairement linéaire. Puisque $\mathrm{id}_{\mathscr{H}} - \pi_E$ est la projection orthogonale sur l'orthogonal de E, les opérateurs $\mathrm{id}_{\mathscr{H}} - \pi_E$ et π_E sont de norme au plus 1. Donc

$$\|u_\phi(f)\|_2 \leq \|\phi\ \pi_E(f)\|_2 \leq \|\phi\|_\infty \|\pi_E(f)\|_2 \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_2\ .$$

D'où $\|u_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$, et l'opérateur linéaire u_ϕ est continu.

(3) a) Puisque $\mathscr{H}$ est le sous-espace vectoriel formé des éléments de $\mathscr{H}$ dont les coordonnées d'indice strictement négatif dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont nuls, le vecteur e_n appartient à $\mathscr{H}$ si $n \geq 0$, et est orthogonal à $\mathscr{H}$ si $n < 0$. Donc $\pi_E(e_n) = e_n$ si $n \geq 0$ et $\pi_E(e_n) = 0$ sinon. Par continuité de π_E, nous avons donc, si $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n \in \mathscr{H}$,

$$\pi_E\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n\ .$$

b) Par a), si $\phi = \sum_{n=-N}^{N} b_n e_n$ où $N \in \mathbb{N}$, pour tout $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n \in \mathscr{H}$, nous avons

$$\phi\pi_E(x) = \Big(\sum_{n=-N}^{N} b_n e_n\Big)\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n\Big) = \sum_{n=-N}^{+\infty} c_n e_n$$

pour des éléments $c_n \in \mathbb{C}$. Par a), nous avons $(\mathrm{id}_{\mathscr{H}} - \pi_E)\big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e_n\big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}-\mathbb{N}} x_n e_n$. Donc

$$u_\phi(x) = (\mathrm{id}_{\mathscr{H}} - \pi_E)(\phi\pi_E(x)) = (\mathrm{id}_{\mathscr{H}} - \pi_E)\Big(\sum_{n=-N}^{+\infty} c_n e_n\Big) = \sum_{n=-N}^{-1} c_n e_n \;.$$

Donc l'image de u_ϕ, contenue dans le sous-espace vectoriel engendré par $(e_n)_{-N\leq n<0}$, est de dimension finie.

c) Par le théorème de Stone-Weiertrass, l'algèbre des polynômes trigonométriques, qui est séparante, est dense pour la topologie uniforme dans l'espace des fonctions continues ϕ sur $[0, 2\pi]$ vérifiant $\phi(0) = \phi(2\pi)$. Soit donc $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément (donc dans $\mathbb{L}^\infty([0, 2\pi])$) vers ϕ. L'application $\psi \mapsto u_\psi$ entre les espaces de Banach $\mathbb{L}^\infty([0, 2\pi])$ et $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ est clairement linéaire et continue, de norme au plus 1, par la question (2). Donc $\|u_{\phi_i} - u_\phi\| \leq \|\phi_i - \phi\|_\infty$ tend vers 0 quand $i \to +\infty$. Donc u_ϕ, limite des opérateurs de rang fini u_{ϕ_i}, est compact.

Correction de l'exercice E.33. (1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons $m = \min_{\|x\|=1}\langle u(x), x\rangle$: l'opérateur u est positif si et seulement si $m \geq 0$, donc si et seulement si

$$\max_{\|x\|=1} \langle(\lambda\,\mathrm{id} - u)(x), x\rangle = \lambda - m \leq \lambda \;.$$

Or nous avons vu en cours que puisque $\lambda\,\mathrm{id} - u$ est auto-adjoint (λ est réel),

$$\|\lambda\,\mathrm{id} - u\| = \max\big\{\max_{\|x\|=1}\langle(\lambda\,\mathrm{id} - u)(x), x\rangle, -\min_{\|x\|=1}\langle(\lambda\,\mathrm{id} - u)(x), x\rangle\big\} \;.$$

Notons que $\max_{\|x\|=1}\langle(u - \lambda\,\mathrm{id})(x), x\rangle = \max_{\|x\|=1}\langle u(x), x\rangle - \lambda \leq \|u\| - \lambda$ est inférieur à λ dès que $\lambda \geq \frac{\|u\|}{2}$. Le résultat en découle.

(2) Pour tous $m \geq n$, nous avons, par les propriétés de la norme d'opérateur,

$$\|v_m - v_n\| \leq \sum_{k=n}^{m} \frac{\|u^{2k+1}\|}{(2k+1)!} \leq \sum_{k=n}^{m} \frac{\|u\|^{2k+1}}{(2k+1)!} \;.$$

La série $\sum \frac{t^n}{n!}$ étant convergente pour tout $t \geq 0$, son reste tend vers 0. Par conséquent, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge dans l'espace de Banach (en particulier complet) $\mathscr{L}(\mathscr{H})$.

L'application sin est continue sur $\mathbb{C}$, et par continuité du calcul fonctionnel continu, nous avons $v = \sin u$. Par le théorème spectral, $\mathrm{Sp}(v) = \sin\big(\mathrm{Sp}(u)\big)$. Comme u est auto-adjoint, son spectre est réel. Donc $\mathrm{Sp}(u)$ est contenu dans l'ensemble des zéros réels de sin, qui est $\pi\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice E.34. (1) a) Pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous noterons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coordonnées hilbertiennes de x dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par linéarité et continuité, si un tel opérateur $u = u_a$ existe, alors pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous avons $u(x) = u(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a^n x_{2n} e_{2n+1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} a^n x_{2n+1} e_{2n}$, ce qui montre l'unicité.

Notons E le sous-espace vectoriel dense de $\mathscr{H}$ de base vectorielle $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons $u : E \to \mathscr{H}$ l'unique application linéaire prenant pour valeurs sur les éléments de cette base celles données par l'énoncé. Pour tout $x = \sum_{n=0}^{2N} x_n e_n \in E$, nous avons, puisque la base est orthonormée,

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{n=0}^{N} |a|^{2n} |x_{2n}|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} |a|^{2n} |x_{2n+1}|^2 \leq \sum_{n=0}^{2N} |x_n|^2 = \|x\|^2 \ .$$

Donc u est continu, de norme au plus 1. Par le théorème de prolongement (l'espace de départ E est dense dans $\mathscr{H}$ et l'espace d'arrivée $\mathscr{H}$ est complet), l'application linéaire continue u se prolonge donc en une application linéaire continue de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$, de norme au plus 1.

b) Comme $\|u(e_0)\| = \|e_1\| = 1$, nous avons $\|u\| = 1$. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\langle u(e_{2n}), e_p\rangle = \langle a^n e_{2n+1}, e_p\rangle = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } p \neq 2n+1 \\ a^n \text{ si } p = 2n+1 \end{array}\right. ,$$

$$\langle u(e_{2n+1}), e_p\rangle = \langle a^n e_{2n}, e_p\rangle = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } p \neq 2n \\ a^n \text{ si } p = 2n \end{array}\right.$$

Comme les coordonnées hilbertiennes de $u^*(e_p)$ sont les $\langle u^*(e_p), e_n\rangle = \overline{\langle u(e_n), e_p\rangle}$ pour $n \in \mathbb{N}$, nous avons donc $u^*(e_{2n}) = \overline{a}^{\,n} e_{2n+1}$ et $u^*(e_{2n+1}) = \overline{a}^{\,n} e_{2n}$. Donc $(u_a)^* = u_{\overline{a}}$.

L'opérateur linéaire continu u est auto-adjoint si et seulement si $u = u^*$, donc si et seulement si $u(e_n) = u^*(e_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc si et seulement si $a^n = \overline{a}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire si et seulement si a est réel.

(2) Supposons que $|a| < 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N} - \{0\}$, soit $u_N : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ l'opérateur linéaire qui coïncide avec u sur l'espace vectoriel E_N engendré par $(e_n)_{0\leq n\leq N-1}$, et qui est nul sur son orthogonal. Il est continu, de rang fini. De plus, pour tout $x \in \mathscr{H}$, nous avons par le théorème de Parseval

$$\|(u - u_N)(x)\|^2 = \|\sum_{n=N}^{+\infty} u(x_n e_n)\|^2 = \sum_{n=N}^{+\infty} |a|^{2n} |x_n|^2 \leq |a|^{2N} \|x\|^2 \ .$$

Donc $\|u - u_N\| \leq |a|^N$, qui tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Donc u, limite d'opérateurs de rang fini donc compacts, est encore compact.

Supposons $|a| = 1$. La suite $(e_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathscr{H}$. La suite de ses images par u est la suite $(a^n e_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Par compacité du cercle, toute sous-suite $(a^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge vers un élément non nul. Donc si $\big(u(e_{2n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, alors $(e_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ aussi. Or il a été vu en cours que ce n'était pas le cas. Donc u n'est pas compact.

(3) Posons $f_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2n} + e_{2n+1})$ et $f_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2n} - e_{2n+1})$. Alors on vérifie facilement que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, et que $u(f_{2n}) = a^n f_{2n}$ et $u(f_{2n+1}) = -a^n f_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans cette base hilbertienne, l'opérateur u est donc un opérateur diagonal. Nous avons vu dans un exercice de cours que $\mathrm{Sp}(u)$ est l'adhérence des coefficients diagonaux, c'est-à-dire de $\{\pm a^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Si $|a| < 1$, nous avons donc

$$\mathrm{Sp}(u) = \{0\} \cup \{\pm a^n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \ .$$

Supposons maintenant que $|a| = 1$. Si a n'est pas une racine de l'unité, alors $\mathrm{Sp}(u) = \mathbb{S}_1$. Enfin, si a est une racine de l'unité, alors $\mathrm{Sp}(u) = \{\pm a^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

Correction de l'exercice E.35. (1) a) Pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous noterons $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les coordonnées hilbertiennes de x dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Par linéarité et continuité, si un tel opérateur u existe, alors pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous avons

$$u(x) = u\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n u(e_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{2n} a^{|2n|} e_{2n+1} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{2n+1} b^{|2n+1|} e_{2n+2} \ ,$$

ce qui montre l'unicité.

Pour tout $x \in \mathscr{H}$, considérons la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $y_{2n} = x_{2n-1} b^{|2n-1|}$ et $y_{2n+1} = x_{2n} a^{|2n|}$. Puisque $|a|, |b| \leq 1$, la somme des carrés des modules de ses termes est

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a|^{2|2n|} |x_{2n}|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} |b|^{2|2n-1|} |x_{2n-1}|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_{2n}|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_{2n-1}|^2 = \|x\|^2 \ ,$$

en utilisant le théorème de Parseval pour la dernière égalité, et elle est donc finie. Par la partie réciproque du théorème de Parseval, il existe donc un élément de $\mathscr{H}$, que nous notons $u(x)$, dont la suite des coordonnées hilbertiennes dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Par conséquent, l'application $u : x \mapsto u(x)$ est bien définie, et clairement linéaire, et est de norme au plus 1 (donc est continue). De plus, $u(e_{2n}) = a^{|2n|}\, e_{2n+1}$ et $u(e_{2n+1}) = b^{|2n+1|}\, e_{2n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc u est l'opérateur cherché.

b) Nous avons vu que $\|u\| \leq 1$ et puisque $\|u(e_0)\| = 1$, nous avons $\|u\| = 1$. Pour tous les $n, p \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$\langle u^*(e_p), e_{2n}\rangle = \langle e_p, u(e_{2n})\rangle = \overline{a}^{\,|2n|} \langle e_p, e_{2n+1}\rangle = \begin{cases} \overline{a}^{\,|2n|} & \text{si } p = 2n+1 \\ 0 & \text{sinon} \ . \end{cases}$$

De même,

$$\langle u^*(e_p), e_{2n+1}\rangle = \langle e_p, u(e_{2n+1})\rangle = \overline{b}^{\,|2n+1|} \langle e_p, e_{2n+2}\rangle = \begin{cases} \overline{b}^{\,|2n+1|} & \text{si } p = 2n+2 \\ 0 & \text{sinon} \ . \end{cases}$$

Comme les coordonnées hilbertiennes de $u^*(e_p)$ sont les $\langle u^*(e_p), e_n\rangle$ pour $n \in \mathbb{Z}$, l'opérateur u^* est donc l'unique opérateur linéaire continu tel que $u^*(e_{2n+1}) = \overline{a}^{\,|2n|} e_{2n}$ et $u^*(e_{2n+2}) = \overline{b}^{\,|2n+1|}\, e_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Comme $u(e_0) = e_1 \neq \overline{b}\, e_{-1} = u^*(e_0)$, l'opérateur u n'est pas auto-adjoint.

(2) Si u est compact, la suite $\big(u(e_{2n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$, formée d'images par u de vecteurs unitaires, doit avoir une sous-suite convergente. Or, pour tous les $n \neq m \in \mathbb{N}$, nous avons $\|u(e_{2n}) - u(e_{2m'})\| = \sqrt{2} > 0$, car $a^{|2n|} e_{2n+1}$ et $a^{|2m|} e_{2m+1}$ sont orthogonaux et unitaires, donc $\big(\|u(e_{2n})\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente. D'où $|a| < 1$. En procédant de même en prenant les indices impairs, nous avons $|b| < 1$.

Réciproquement, supposons que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Soit $c = \max\{|a|, |b|\} < 1$, de sorte que $\|u(e_n)\| \leq c^{|n|}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, notons u_N l'unique opérateur linéaire de $\mathscr{H}$ qui est nul sur l'orthogonal du sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$ engendré par

$e_{-N},\dots,e_N$ et tel que $u_N(e_i)=u(e_i)$ pour $i=-N,\dots,N$. Cet opérateur est continu et de rang fini. De plus, pour tout $x\in\mathscr{H}$,

$$\begin{aligned}\|u(x)-u_N(x)\|^2 &= \Big\|\sum_{|n|>N} x_n u(e_n)\Big\|^2 \le \sum_{|n|>N} |x_n|^2\|u(e_n)\|^2 \le \sum_{|n|>N} |x_n|^2\, c^{2|n|}\\ &\le c^{2N}\|x\|^2\ .\end{aligned}$$

Donc $\|u-u_N\|\le c^N$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. L'opérateur u, limite des opérateurs de rang fini u_N, est donc compact.

(3) Montrons que
$$\mathrm{Sp}(u)=\{0\}\ .$$
Puisque $|a|,|b|<1$, l'opérateur u est compact par ce qui précède, et puisque $\mathscr{H}$ est de dimension infinie, nous avons $\mathrm{Sp}(u)=\{0\}\cup\mathrm{Vp}(u)$. Il suffit donc de montrer que u n'admet pas de valeur propre non nulle. Par l'absurde, si $x\in\mathscr{H}$ est un vecteur propre non nul de u pour la valeur propre $\lambda\in\mathbb{C}-\{0\}$, alors au moins l'une des coordonnées hilbertiennes de x est non nulle, disons par exemple x_{2n_0}. Si les vecteurs $u(x)$ et λx sont égaux, alors ils ont les mêmes coordonnées hilbertiennes, et donc pour tout $n\in\mathbb{Z}$, nous avons $\lambda x_{2n+1}=a^{|2n|}x_{2n}$ et $\lambda x_{2n}=b^{|2n-1|}x_{2n-1}$, d'où $\lambda^2x_{2n}=a^{|2n-2|}b^{|2n-1|}x_{2n-2}$, et pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$x_{2n_0-2k}=\frac{\lambda^{2k}}{a^{|2n_0-2k|}b^{|2n_0-2k+1|}\dots a^{|2n_0-2|}b^{|2n_0-1|}}\ x_{2n_0}\ .$$

Comme le dénominateur tend vers 0 plus rapidement que n'importe quelle puissance, ceci montre que $|x_{2n_0-2k}|$ tend vers $+\infty$ quand $k\to+\infty$. Ceci contredit la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|x_n|^2$.

Correction de l'exercice E.36. Pour tout $x\in\mathscr{H}$, notons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coordonnées hilbertiennes de x dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) a) Par linéarité et continuité, si un tel opérateur u existe, alors pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous avons

$$u(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}x_n\,u(e_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}a^{n+1}x_{2n}e_{2n}+\sum_{n\in\mathbb{N}}(b^{n+1}x_{2n}+c^{n+1}x_{2n+1})e_{2n+1}\ ,$$

ce qui montre l'unicité.

Montrons l'existence. Pour tout $x\in\mathscr{H}$, nous avons, par l'inégalité de Parseval,

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}}|a^{n+1}x_{2n}|^2+\sum_{n\in\mathbb{N}}|b^{n+1}x_{2n}+c^{n+1}x_{2n+1}|^2 &\le \sum_{n\in\mathbb{N}}|x_{2n}|^2+2\sum_{n\in\mathbb{N}}(|x_{2n}|^2+|x_{2n+1}|^2)\\ &\le 3\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|^2=3\,\|x\|^2\ .\end{aligned}$$

Donc par la réciproque du théorème de Parseval, l'élément

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}a^{n+1}x_{2n}e_{2n}+\sum_{n\in\mathbb{N}}(b^{n+1}x_{2n}+c^{n+1}x_{2n+1})e_{2n+1}$$

existe dans $\mathscr{H}$, notons-le $u(x)$. Il est alors immédiat que $u:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ est linéaire et continu de norme au plus 3, et que u convient.

b) Pour tous les $n, p \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\langle u(e_{2n}), e_p\rangle = \langle a^{n+1}\, e_{2n} + b^{n+1} e_{2n+1}, e_p\rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } p \neq 2n, 2n+1 \\ a^{n+1} \text{ si } p = 2n \\ b^{n+1} \text{ si } p = 2n+1 \end{cases} ,$$

$$\langle u(e_{2n+1}), e_p\rangle = \langle c^{n+1} e_{2n+1}, e_p\rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } p \neq 2n+1 \\ c^{n+1} \text{ si } p = 2n+1 \end{cases}$$

Comme les coordonnées hilbertiennes de $u^*(e_p)$ sont les $\langle u^*(e_p), e_n\rangle = \overline{\langle u(e_n), e_p\rangle}$ pour $n \in \mathbb{N}$, nous avons donc $u^*(e_{2n}) = \overline{a}^{\,n+1} e_{2n}$ et $u^*(e_{2n+1}) = \overline{b}^{\,n+1} e_{2n} + \overline{c}^{\,n+1} e_{2n+1}$.

L'opérateur linéaire continu u est auto-adjoint si et seulement si $u = u^*$, donc si et seulement si $u(e_n) = u^*(e_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc si et seulement si $a^{n+1} = \overline{a}^{\,n+1}$, $b^{n+1} = \overline{b}^{\,n+1} = 0$ et $c^{n+1} = \overline{c}^{\,n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire si et seulement si a, c sont réels et $b = 0$.

(2) Supposons tout d'abord que $|a|, |b|, |c| < 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N} - \{0\}$, soit $u_N : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ l'opérateur linéaire qui coïncide avec u sur l'espace vectoriel E_N engendré par $(e_n)_{0 \leq n \leq 2N-1}$, et qui est nul sur son orthogonal. Il est continu, de rang fini. De plus, pour tout $x \in \mathscr{H}$, nous avons par le théorème de Parseval

$$\begin{aligned} \|(u - u_N)(x)\|^2 = \|\sum_{n=2N}^{+\infty} u(x_n e_n)\|^2 &= \sum_{n=N}^{+\infty} |a^{n+1} x_{2n}|^2 + \sum_{n=N}^{+\infty} |b^{n+1} x_{2n} + c^{n+1} x_{2n+1}|^2 \\ &\leq 3 \ \max\{|a|^{N+1}, |b|^{N+1}, |c|^{N+1}\} \ \|x\|^2 \ . \end{aligned}$$

Donc $\|u - u_n\| \leq 3 \max\{|a|^N, |b|^{N+1}, |c|^N\}$, qui tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Donc u, limite d'opérateurs de rang fini donc compacts, est encore compact.

Supposons $|c| = 1$. La suite $(e_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathscr{H}$. La suite de ses images par u est la suite $(c^{n+1} e_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, qui n'a pas de sous-suite convergente car si $p < q$, alors $\|u(e_{2p+1}) - u(e_{2q+1})\| = 2$. Donc u n'est pas compact.

Supposons $|a| = 1$. La suite $(e_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathscr{H}$. La suite de ses images par u est la suite $(a^{n+1} e_{2n} + b^{n+1} e_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, qui n'a pas de sous-suite convergente car si $p < q$, alors $\|u(e_{2p}) - u(e_{2q})\| \geq \|a^{p+1} e_{2p}\| = 1$. Donc u n'est pas compact.

Supposons $|b| = 1$. La suite $(e_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathscr{H}$. La suite de ses images par u est la suite $(a^{n+1} e_{2n} + b^{n+1} e_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, qui n'a pas de sous-suite convergente car si $p < q$, alors $\|u(e_{2p}) - u(e_{2q})\| \geq \|b^{q+1} e_{2q+1}\| = 1$. Donc u n'est pas compact.

(3) Puisque $|a|, |b|, |c| < 1$, l'opérateur u est compact par ce qui précède, et puisque $\mathscr{H}$ est de dimension infinie, nous avons alors $\mathrm{Sp}(u) = \{0\} \cup \mathrm{Vp}(u)$. Montrons que

$$\mathrm{Vp}(u) = \{a^{n+1}, c^{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \ .$$

Il est immédiat que e_{2n+1} est un vecteur propre de u pour la valeur propre c^{n+1}, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $a \neq c$, alors on vérifie que le vecteur $e_{2n} + \frac{b^{n+1}}{a^{n+1} - c^{n+1}} e_{2n+1}$ est un vecteur propre pour la valeur propre a^{n+1}. Donc

$$\{a^{n+1}, c^{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Vp}(u) \ .$$

Réciproquement, soit $\lambda \in \mathrm{Vp}(u)$. Alors il existe $x \in \mathscr{H} - \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Par la question (1) a) et par unicité des coordonnées hilbertiennes, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a^{n+1} x_{2n} = \lambda\, x_{2n} \quad \text{ et } \quad b^{n+1} x_{2n} + c^{n+1} x_{2n+1} = \lambda\, x_{2n+1} \ .$$

S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_{2n} \neq 0$, alors $\lambda = a^{n+1} \in \{a^{n+1}, c^{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Sinon, $x_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et, puisque $x \neq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_{2n+1} \neq 0$. Comme $b^{n+1}x_{2n} + c^{n+1}x_{2n+1} = \lambda\, x_{2n+1}$, nous avons donc $\lambda = c^{n+1} \in \{a^{n+1}, c^{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Ceci montre l'inclusion réciproque

$$\mathrm{Vp}(u) \subset \{a^{n+1}, c^{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\}\ .$$

Correction de l'exercice E.37. (1) a) Pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous noterons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coordonnées hilbertiennes de x dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par linéarité et continuité, si un tel opérateur u existe, alors pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous avons

$$u(x) = u\big(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_{2n}x_{2n}e_{2n} + \sum_{n\in\mathbb{N}}\big(\frac{1}{n+1}\, x_{2n} + \lambda_{2n+1}x_{2n+1}\big)e_{2n+1}\ ,$$

ce qui montre l'unicité.

Posons $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| < +\infty$. Pour tout $x \in \mathscr{H}$, considérons la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}$ où $y_{2n} = \lambda_{2n}x_{2n}$ et $y_{2n+1} = \frac{1}{n+1}\, x_{2n} + \lambda_{2n+1}x_{2n+1}$. La somme des carrés des modules de ses termes est

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_{2n}|^2|x_{2n}|^2 + |\frac{1}{n+1}\, x_{2n} + \lambda_{2n+1}x_{2n+1}|^2 &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}}(M^2+2)|x_{2n}|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2M^2|x_{2n+1}|^2\\ &\leq (2M^2+2)\|x\|^2\ ,\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Parseval pour la dernière inégalité, et elle est donc finie. Par la partie réciproque du théorème de Parseval, il existe donc un élément de $\mathscr{H}$, que nous notons $u(x)$, dont la suite des coordonnées hilbertiennes dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent, l'application $u : x \mapsto u(x)$ est bien définie, et clairement linéaire, et est de norme au plus $\sqrt{2M^2+2}$ (donc est continue). De plus, $u(e_{2n}) = \lambda_{2n}\, e_{2n} + \frac{1}{n+1}\, e_{2n+1}$ et $u(e_{2n+1}) = \lambda_{2n+1}\, e_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc u est l'opérateur cherché.

(2) Pour tous les $n, p \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\langle u^*(e_p), e_{2n}\rangle = \langle e_p, u(e_{2n})\rangle = \overline{\lambda_{2n}}\,\langle e_p, e_{2n}\rangle + \frac{1}{n+1}\,\langle e_p, e_{2n+1}\rangle = \left\{\begin{array}{ll}\overline{\lambda_{2n}} & \text{si } p = 2n\\ \frac{1}{n+1} & \text{si } p = 2n+1\\ 0 & \text{si } p \neq 2n, 2n+1\ .\end{array}\right.$$

De même,

$$\langle u^*(e_p), e_{2n+1}\rangle = \overline{\lambda_{2n+1}}\,\langle e_p, e_{2n+1}\rangle = \left\{\begin{array}{ll}\overline{\lambda_{2n+1}} & \text{si } p = 2n+1\\ 0 & \text{sinon}\ .\end{array}\right.$$

Comme les coordonnées hilbertiennes de $u^*(e_p)$ sont les $\langle u^*(e_p), e_n\rangle$ pour $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur u^* est donc l'unique opérateur linéaire continu tel que $u^*(e_{2n}) = \overline{\lambda_{2n}}\, e_{2n}$ et $u^*(e_{2n+1}) = \frac{1}{n+1}\, e_{2n} + \overline{\lambda_{2n+1}}\, e_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $u(e_0) = \lambda_0 e_0 + e_1 \neq \overline{\lambda_0}\, e_0 = u^*(e_0)$, l'opérateur u n'est pas auto-adjoint.

(3) Supposons que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Pour tout $N \in \mathbb{N} - \{0\}$, posons $u_N : x \mapsto \sum_{n=0}^{2N-1} x_n u(e_n)$. Alors $u_N \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est un opérateur linéaire continu de rang fini (car les coordonnées hilbertiennes sont continues et par sommation finie). Pour tout

$\epsilon > 0$, soit $N \in \mathbb{N} - \{0\}$ assez grand pour que $\frac{1}{N+1} \leq \epsilon$ et $|\lambda_n| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$. Alors pour tous les $x \in \mathscr{H}$, nous avons

$$\begin{aligned}\|u_N(x) - u(x)\|^2 &= \Big\| \sum_{n=N}^{+\infty} \lambda_{2n} x_{2n} e_{2n} + (\frac{1}{n+1}\, x_{2n} + \lambda_{2n+1} x_{2n+1}) e_{2n+1} \Big\|^2 \\ &\leq \sum_{n=N}^{+\infty} (|\lambda_{2n}|^2 + \frac{2}{(n+1)^2}\,)|x_{2n}|^2 + 2|\lambda_{2n+1}|^2 |x_{2n+1}|^2 \\ &\leq (2\epsilon^2 + \frac{2}{(N+1)^2})\, \|x\|^2 \;,\end{aligned}$$

donc $\|u_N - u\| \leq 4\epsilon^2$. Par conséquent, l'opérateur u, comme limite pour la norme d'opérateurs d'une suite d'opérateurs linéaires continus de rang fini, est compact.

Réciproquement, si la suite bornée $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, il existe une sous-suite $(\lambda_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\lambda \neq 0$ dans $\mathbb{C}$. Quitte à extraire, nous pouvons supposer que les n_k pour $k \in \mathbb{N}$ sont tous pairs ou tous impairs. Supposons par exemple qu'ils sont tous pairs, l'autre cas se traitant de manière similaire. La suite $(e_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathscr{H}$, mais la suite de ses images par u, qui est $(\lambda_{n_k}\, e_{n_k} + \frac{1}{\frac{n_k}{2}+1}\, e_{n_k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ n'a pas de sous-suite convergente, car elle converge faiblement vers 0 mais sa norme converge vers $|\lambda| \neq 0$. Donc u n'est pas compact.

(4) Montrons que

$$\mathrm{Vp}(u) = \{\lambda_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}\;.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il est immédiat que λ_{2n+1} est une valeur propre de u, dont un vecteur propre est e_{2n+1}.

Si $\lambda_{2n} \neq \lambda_{2n+1}$, considérons le vecteur $x \in \mathscr{H}$ dont les coordonnées hilbertiennes sont $x_k = 0$ si $k < 2n$ ou $k \geq 2n+2$, et $x_{2n} = 1$, $x_{2n+1} = \frac{1}{(n+1)(\lambda_{2n} - \lambda_{2n+1})}$. Alors

$$\begin{aligned}u(x) &= \lambda_{2n} x_{2n} e_{2n} + (\frac{1}{n+1}\, x_{2n} + \lambda_{2n+1} x_{2n+1}) e_{2n+1} = \lambda_{2n} x_{2n} e_{2n} + \lambda_{2n} x_{2n+1} e_{2n+1} \\ &= \lambda_{2n} x \;.\end{aligned}$$

Comme x est non nul, ceci montre que λ_{2n} est une valeur propre de u, dont un vecteur propre est x. D'où $\{\lambda_n \;:\; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Vp}(u)$.

Montrons l'inclusion inverse. Soit $\lambda \in \mathrm{Vp}(u)$. Il existe donc $x \in \mathscr{H}$ un vecteur non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Alors, par unicité des coordonnées hilbertiennes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\lambda_{2n} x_{2n} = \lambda x_{2n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n+1}\, x_{2n} + \lambda_{2n+1} x_{2n+1} = \lambda x_{2n+1}\;.$$

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{2n_0} \neq 0$, alors $\lambda = \lambda_{2n_0}$ et donc $\lambda \in \{\lambda_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$.

Sinon, $x_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\lambda_{2n+1} x_{2n+1} = \lambda x_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme x est non nul, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{2n_0+1} \neq 0$, et donc $\lambda = \lambda_{2n_0+1} \in \{\lambda_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$, ce qui montre le résultat.

Montrons que

$$\mathrm{Sp}(u) = \overline{\mathrm{Vp}(u)} = \overline{\{\lambda_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}}\;.$$

Puisque $\mathrm{Sp}(u)$ contient $\mathrm{Vp}(u)$ et est fermé, nous avons $\overline{\mathrm{Vp}(u)} \subset \mathrm{Sp}(u)$. Réciproquement, soit $\lambda \notin \overline{\mathrm{Vp}(u)}$. En particulier, $\lambda \notin \mathrm{Vp}(u)$ et donc $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est injective. Montrons que $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est surjective, ce qui montre que $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$ et conclut.

Pour tout $y \in \mathscr{H}$, montrons qu'il existe $x \in \mathscr{H}$ tel que $u(x) - \lambda x = y$, ce qui donne le résultat cherché. Puisque $\overline{\mathrm{Vp}(u)}$ est fermé, la distance de λ à $\overline{\mathrm{Vp}(u)}$ est strictement positive. En particulier, il existe $\epsilon > 0$ tel que $|\lambda_n - \lambda| \geq \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par unicité des coordonnées hilbertiennes, l'égalité $u(x) - \lambda x = y$ est équivalente à $y_{2n} = \lambda_{2n} x_{2n} - \lambda x_{2n}$ et $y_{2n+1} = \frac{1}{n+1}\, x_{2n} + \lambda_{2n+1} x_{2n+1} - \lambda x_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc à

$$x_{2n} = \frac{1}{\lambda_{2n} - \lambda} y_{2n} \quad \text{et} \quad x_{2n+1} = \frac{1}{\lambda_{2n+1} - \lambda}\Big(y_{2n+1} - \frac{1}{(n+1)(\lambda_{2n} - \lambda)} y_{2n}\Big)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définissons $x_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par les formules ci-dessus. Nous avons

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\epsilon^2}\, |y_{2n}|^2 + 2\frac{1}{\epsilon^2}\, |y_{2n+1}|^2 + 2\frac{1}{(n+1)^2\epsilon^4}\, |y_{2n}|^2 \leq \frac{3}{\min\{\epsilon^2, \epsilon^4\}}\, \|y\|^2 \;,$$

qui est fini. Donc par la réciproque du théorème de Parseval, $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ existe dans $\mathscr{H}$ et vérifie $u(x) - \lambda x = y$, ce qui montre le résultat.

(5) Puisque K est un compact non vide de $\mathbb{C}$ qui est séparable, il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans K. Notons S l'ensemble non dénombrable des suites dans $\mathbb{C}$ qui convergent vers 0. Pour tout $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$, notons $u_c \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur linéaire continu tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_c(e_{2n}) = \lambda_{2n}\, e_{2n} + c_n\, e_{2n+1} \quad \text{et} \quad u_c(e_{2n+1}) = \lambda_{2n+1}\, e_{2n+1} \;.$$

Par la même démonstration que ci-dessus, u_c existe et est unique, et son spectre est $\overline{\{\lambda_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}} = K$. Notons que $u_c \neq u_{c'}$ si $c \neq c' \in S$, ce qui montre le résultat.

Correction de l'exercice E.38. 1) Comme E est fermé, E est un espace de Banach pour la restriction de la norme, et une application linéaire continue de E dans E est inversible si et seulement si elle est bijective, par le théorème de Banach.

Si $u_{|E} - \lambda\,\mathrm{id}_E$ n'est pas injective, soit x un vecteur propre non nul de $u_{|E}$ associé à la valeur propre λ. Alors $u(x) - \lambda x = 0$ et $u - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas injectif. Si $u_{|E} - \lambda\,\mathrm{id}_E$ n'est pas surjective, et si E' est son image, alors E' est un sous-espace vectoriel propre de E. L'image de $u - \lambda\,\mathrm{id}$, qui préserve l'orthogonal de E car u est auto-adjoint, est contenue dans $E' \oplus E^\perp \neq \mathscr{H}$, donc $u - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas surjective.

2) a) Si F_i est infini, il existe une suite dans F_i d'éléments deux à deux distincts. Puisque F_i est un fermé du compact $\mathrm{Sp}(u)$, quitte à extraire, cette suite s'accumule vers un élément de $\mathrm{Sp}(u)$, non nul car à distance au moins $\epsilon_i > 0$ de 0, ce qui contredit l'hypothèse.

Puisque u est auto-adjoint, son spectre est réel, donc f_i, dont les valeurs sont contenues dans $\{0\} \cup \mathrm{Sp}(u)$, est à valeurs réelles.

L'application f_i est clairement continue sur les ouverts $\{x \in \mathrm{Sp}(u) \;:\; |x| > \epsilon_i\}$ (où elle vaut l'identité) et $\{x \in \mathrm{Sp}(u) \;:\; |x| < \epsilon_i\}$ (où elle est nulle) de $\mathrm{Sp}(u)$. Comme $\mathrm{Sp}(u)$ ne contient pas d'élément de valeur absolue ϵ_i, ces deux ouverts de $\mathrm{Sp}(u)$ recouvrent $\mathrm{Sp}(u)$, et, par localité de la continuité, l'application f_i est continue partout.

b) Par les propriétés du calcul fonctionnel continu, puisque f_i est continue et à valeurs réelles sur le spectre de u, l'opérateur $f_i(u)$ est auto-adjoint. Puisque l'application $f_i - \mathrm{id}$ est continue sur $\mathrm{Sp}(u)$, nous avons

$$\mathrm{Sp}(f_i(u) - u) = (f_i - \mathrm{id})(\mathrm{Sp}(u)) \subset [-\epsilon_i, +\epsilon_i] \;,$$

car $f_i - \mathrm{id}$ est nulle en dehors de cet intervalle (en fait, nous avons même $\mathrm{Sp}(f_i(u) - u) = \mathrm{Sp}(u) \cap [-\epsilon_i, +\epsilon_i]$).

c) Puisque $f_i(u) - u$ est auto-adjoint, sa norme est égale à son rayon spectral, donc

$$\|f_i(u) - u\| = \rho(f_i(u) - u) \leq \epsilon_i \ ,$$

par ce qui précède. Comme ϵ_i tend vers 0, ceci montre le résultat. [Une autre manière de dire est que puisque le calcul fonctionnel continu est isométrique, nous avons $\|f_i(u) - u\| = \|f_i - \mathrm{id}\,\|_\infty \leq \epsilon_i$ qui tend vers 0 quand i tend vers $+\infty$.]

3) Soit λ une valeur spectrale isolée de u. Notons $g : \mathrm{Sp}(u) \to \mathbb{C}$ l'application valant 1 sur λ et 0 ailleurs. Puisque λ est isolé, g est continue et l'application $(\mathrm{id} - \lambda)g$ est nulle sur $\mathrm{Sp}(u)$. Puisque le calcul fonctionnel continu est un morphisme d'algèbres, nous avons donc $(u - \lambda\,\mathrm{id}) \circ g(u) = 0$. Puisque g n'est pas l'application nulle sur $\mathrm{Sp}(u)$, l'opérateur $g(u)$ n'est pas nul par les propriétés du calcul fonctionnel continu. Donc son image est non nulle, contenue dans $\ker(u - \lambda\,\mathrm{id})$, donc λ est une valeur propre de u.

4) a) Tout d'abord, puisque u est auto-adjoint, les E_λ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) - \{0\}$ sont deux à deux orthogonaux, invariants par u et l'espace métrique séparable $\mathrm{Sp}(u) - \{0\}$, dont tout point est isolé, est dénombrable. Donc la somme hilbertienne $F = \overline{\bigoplus}_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u) - \{0\}} E_\lambda$ est bien définie, et invariante par u, par continuité de u. Puisque u est auto-adjoint, u préserve l'orthogonal E_0 de F.

Soient $v = u_{|E_0}$, qui est auto-adjoint, et λ un élément non nul de $\mathrm{Sp}(v)$. Alors par la question 1), λ est une valeur spectrale de u, donc est isolée dans $\mathrm{Sp}(u)$, donc est isolée dans $\mathrm{Sp}(v)$. Donc λ est une valeur propre de v par la question 3) appliquée à v. Ceci n'est pas possible car tout vecteur propre de v pour la valeur propre λ est aussi un vecteur propre de u pour cette valeur propre, donc est nul puisqu'il appartient à $E_0 \subset E_\lambda^\perp$. Donc le spectre de l'opérateur auto-adjoint v est nul, et donc v est nul. Donc son spectre est vide si $E_0 = \{0\}$ ou égal à $\{0\}$ sinon. En outre, E_0 est contenu dans le noyau de u, donc égal à ce noyau car $F \cap \ker u = \{0\}$. Puisque $\mathscr{H} = F^\perp \oplus F$ car F est fermé, nous avons $\mathscr{H} = \ker(u) \oplus \overline{\bigoplus}_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u) - \{0\}} E_\lambda$.

b) Tout élément x de $\mathscr{H}$ s'écrit donc $x = x_0 + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u) - \{0\}} x_\lambda$ où $x_0 \in E_0$ et $x_\lambda \in E_\lambda$. Nous avons $f_i(u)_{|E_\lambda} = f_i(\lambda)\,\mathrm{id}_{E_\lambda}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, par par les propriétés du calcul fonctionnel continu. Donc par continuité, $f_i(u)(x) = f_i(0)x_0 + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u) - \{0\}} f_i(\lambda) x_\lambda$, qui appartient à $\overline{\bigoplus}_{\lambda \in F_i} E_\lambda$ car $f_i(\lambda) = 0$ si $|\lambda| < \epsilon_i$. Donc l'image de $f_i(u)$ est contenue dans (et en fait égale à) $\bigoplus_{\lambda \in F_i} E_\lambda$. [Autre méthode : par les propriétés du calcul fonctionnel continu, nous avons $f_i(u)_{|E_\lambda} = f_i(\lambda)\,\mathrm{id}_{E_\lambda}$ et $f_i(\lambda) = 0$ si $\lambda \notin F_i$. Donc $\overline{\oplus}_{\lambda \notin F_i} E_\lambda \subset \ker f_i(u)$. D'où, puisque $f_i(u)$ est auto-adjoint,

$$\mathrm{Im}\, f_i(u) = \big(\ker f_i(u)\big)^\perp \subset \big(\overline{\oplus}_{\lambda \notin F_i} E_\lambda\big)^\perp = \overline{\oplus}_{\lambda \in F_i} E_\lambda \ .]$$

5) C'est un théorème du cours que toute valeur spectrale non nulle d'un opérateur compact est une valeur propre isolée de multiplicité finie.

Réciproquement, supposons que toute valeur spectrale non nulle de u est une valeur propre isolée de multiplicité finie. Alors par 4) b), $f_i(u)$ est un opérateur linéaire continu d'image de rang fini, donc un opérateur compact. Par la question 2) c), l'opérateur u, limite d'opérateurs compacts, est encore compact.

Correction de l'exercice E.39. (1) Pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, nous avons

$$\begin{aligned}\|H_0(x)\|_2^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_{n-1}+x_{n+1}|^2/4 \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(|x_{n-1}|^2+|x_{n+1}|^2\big)/2\\ &\le \big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|x_k|^2+\sum_{k\in\mathbb{Z}}|x_k|^2\big)/2 = \|x\|_2^2\ .\end{aligned}$$

Donc H_0 est bien défini, clairement linéaire, et continu (de norme au plus 1). De plus,

$$\begin{aligned}\langle H_0(x),y\rangle_2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{x_{n-1}+x_{n+1}}{2}\,\overline{y_n} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{n-1}\,\overline{y_n}+\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{n+1}\,\overline{y_n}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\,\overline{y_{k+1}}+\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\,\overline{y_{k-1}}\Big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\,\overline{\frac{y_{k-1}+y_{k+1}}{2}} = \langle x, H_0(y)\rangle_2\ ,\end{aligned}$$

pour tous $x,y\in\ell^2(\mathbb{Z})$, donc H_0 est auto-adjoint.

(2) Remarquons que u est clairement continu, auto-adjoint car cos est à valeurs réelles, de norme au plus 1 car $|\cos|$ est à valeurs dans $[0,1]$. Donc son spectre est contenu dans $[-1,1]$. Soient $\epsilon>0$, $t_0\in\,]0,1[$ et $\lambda_0=\cos(2\pi t_0)$. Par continuité, pour tout $\epsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}-\{0\}$ tel que pour tout $t\in[0,1]$ tel que $|t-t_0|\le\frac{1}{2N}$, nous ayons $[t_0-\frac{1}{2N},t_0+\frac{1}{2N}]\subset[0,1]$ et $|\cos(2\pi t)-\lambda_0|\le\epsilon$. Si $n\ge N$, alors

$$\|(u-\lambda_0\,\mathrm{id})f_n\|_2^2 = \int_{t_0-\frac{1}{2n}}^{t_0+\frac{1}{2n}} n\,|\cos(2\pi t)-\lambda_0|^2\,dt \le \epsilon^2\ .$$

Donc $\lim_{n\to+\infty}(u-\cos(2\pi t_0)\,\mathrm{id})f_n=0$. Or $\|f_n\|_2=1$. Donc par le critère de Weyl, et par surjectivité de $\cos : \,]0,2\pi[\,\to[-1,1[$, tout élément de $[-1,1[$ appartient au spectre de u, qui est fermé. Celui-ci est donc égal à $[-1,1]$.

(3) Pour tous $t\in[0,1]$ et $x=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z})$, nous avons

$$\begin{aligned}\Psi\circ H_0(x)(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{x_{n-1}+x_{n+1}}{2}\,e^{2i\pi nt} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{n-1}\,e^{2i\pi nt}+\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{n+1}\,e^{2i\pi nt}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\,e^{2i\pi(k+1)t}+\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\,e^{2i\pi(k-1)t}\Big) = \cos(2\pi t)\,\Psi(x) = u\circ\Psi(x)(t)\ .\end{aligned}$$

Donc $\Psi\circ H_0\circ\Psi^{-1}=u$, et pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$, nous avons $\Psi\circ(H_0-\lambda\,\mathrm{id})\circ\Psi^{-1}=u-\lambda\,\mathrm{id}$. En particulier H_0 et u ont le même spectre et les mêmes valeurs propres. Si λ est une valeur propre de u, alors $\cos(2\pi t)=\lambda$ sur l'ensemble de mesure non nulle de $[0,1]$ sur lequel un vecteur propre associé fixé ne s'annule pas, ce qui est impossible (l'application cos prend exactement deux fois chaque valeur sur $[0,2\pi[$). Le résultat en découle, par la question (2).

Correction de l'exercice E.40. (1) a) Pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous noterons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coordonnées hilbertiennes de x dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par linéarité et continuité, si un tel opérateur u existe, alors pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous avons

$$\begin{aligned}u(x) &= u\big(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_ne_n\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_nu(e_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n(c^ne_n+b^{n+1}e_{n+1})\\ &= c^0x_0e_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(c^nx_n+b^nx_{n-1})e_n\ ,\end{aligned}$$

ce qui montre l'unicité.

Considérons la série à termes deux à deux orthogonaux $c^0x_0e_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(c^nx_n+b^nx_{n-1})e_n$. La somme des carrés des normes de ses termes est

$$|c^0x_0|^2+\sum_{n=1}^{+\infty}|c^nx_n+b^nx_{n-1}|^2\leq|x_0|^2+\sum_{n=1}^{+\infty}2(|x_n|^2+|x_{n-1}|^2)\leq 4\sum_{n=0}^{+\infty}|x_i|^2=4||x||^2$$

qui est finie. Donc cette série converge par le théorème de Parseval. Par conséquent, l'application $u:x\mapsto c^0x_0e_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(c^nx_n+b^nx_{n-1})e_n$ est bien définie, et clairement linéaire, et est de norme au plus 4 (donc est continue). De plus, $u(e_n)=c^ne_n+b^{n+1}e_{n+1}$, donc u est l'opérateur cherché.

b) Pour tous $n,p\in\mathbb{N}$, nous avons

$$\langle u(e_n),e_p\rangle=\langle c^ne_n+b^{n+1}e_{n+1},e_p\rangle=\begin{cases}0 \text{ si } p\neq n,n+1\\ c^n \text{ si } p=n\\ b^{n+1} \text{ si } p=n+1\end{cases}$$

Comme les coordonnées hilbertiennes de $u^*(e_p)$ sont les $\langle u^*(e_p),e_n\rangle=\overline{\langle u(e_n),e_p\rangle}$ pour $n\in\mathbb{N}$, nous avons donc $u^*(e_p)=\overline{c}^{\,p}e_p+b^{\,p}e_{p-1}$ si $p\neq 0$ et $u^*(e_0)=\overline{c}^{\,0}e_0$. Puisqu'un opérateur linéaire continu est déterminé par les valeurs qu'il prend sur les éléments d'une base hilbertienne, ceci détermine uniquement u^*.

L'opérateur linéaire continu u est auto-adjoint si et seulement si $u=u^*$, donc si et seulement si $u(e_n)=u^*(e_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc si et seulement si $c^0e_0+be_1=\overline{c}^{\,0}e_0$ et $c^ne_n+b^{n+1}e_{n+1}=\overline{c}^{\,n}e_n+b^ne_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}-\{0\}$. Si $c=\overline{c}$ et $b=0$, alors toutes ces conditions sont satisfaites. Réciproquement, si ces équations sont satisfaites, en prenant $n=1$ et en utilisant le fait qu'une base hilbertienne est une famille libre, ceci implique que $c=\overline{c}$ et $b=0$. Le résultat en découle.

(2) Si u est compact, la suite $\big(u(e_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ d'images par u de vecteurs unitaires doit avoir une sous-suite convergente. Or elle converge faiblement vers 0, car son produit scalaire avec tout élément fixé de la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Donc si elle admet une sous-suite convergente, la limite de cette sous-suite ne peut être que 0. Or si $|c|=1$ ou si $b=1$, alors $\|u(e_n)\|=\sqrt{|c|^{2n}+b^{2(n+1)}}$ n'admet pas de sous-suite convergente vers 0. Donc $|c|<1$ et $b<1$.

Réciproquement, supposons que $|c|<1$ et $b<1$. Soit $a=\max\{|c|,b\}<1$, de sorte que $\|u(e_n)\|=\|c^ne_n+b^{n+1}e_{n+1}\|\leq\sqrt{2}\,a^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $N\in\mathbb{N}$, notons u_N l'unique opérateur nul sur l'orthogonal du sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$ engendré par $e_0,\dots,e_N$ et tel que $u_N(e_i)=u(e_i)$ pour $i=0,\dots,N$. Cet opérateur est de rang fini. De plus, pour tout $x\in\mathscr{H}$,

$$\begin{aligned}\|u(x)-u_N(x)\|^2=\Big\|\sum_{n=N+1}^{+\infty}x_nu(e_n)\Big\|^2&\leq\sum_{n=N+1}^{+\infty}|x_n|^2\|u(e_n)\|^2\leq\sum_{n=N+1}^{+\infty}|x_n|^2\,2\,a^{2n}\\&\leq 2\,a^{2N}||x||^2\ .\end{aligned}$$

Donc $\|u-u_N\|\leq\sqrt{2}\,a^N$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. L'opérateur u, limite des opérateurs de rang fini u_N, est donc compact.

(3) Nous effectuerons le calcul des valeurs propres de u sauf si $|c|=1$ et $b\neq 0$, et nous en déduirons le spectre de u si $(|c|,b)\in[0,1[\ ^2$.

Supposons que $b = 0$. Alors u est un opérateur diagonal dans la base hilbertienne choisie. Si $c = 0$, alors $u = 0$, et 0 est la seule valeur propre de u, de multiplicité infinie, et la seule valeur spectrale. Si $c \neq 0$ et si c n'est pas une racine de l'unité, alors $c^n \neq c^m$ si $n \neq m$, donc les valeurs propres sont les c^n pour $n \in \mathbb{N}$, de multiplicités égales à 1. Si $|c| < 1$, alors comme u est compact et $\mathscr{H}$ est de dimension infinie, nous avons

$$\mathrm{Sp}(u) = \{0\} \cup \mathrm{Vp}(u) = \{0\} \cup \{c^n \ : \ n \in \mathbb{N}\} .$$

Si $|c| = 1$, alors u est de norme au plus 1, et u^{-1} est l'opérateur obtenu en remplaçant c par $\overline{c}$, qui est aussi de norme 1. Par les propriétés du rayon spectral, les spectres de u et de u^{-1} sont donc contenus dans le disque unité fermé de $\mathbb{C}$. Comme $\mathrm{Sp}(u^{-1}) = 1/\mathrm{Sp}(u)$, le spectre de u est donc contenu dans le cercle unité. Or $\mathrm{Vp}(u)$, qui est contenu dans le $\mathrm{Sp}(u)$, est dense dans le cercle, car $c = e^{2\pi i\theta}$ avec θ irrationnel. Comme $\mathrm{Sp}(u)$ est fermé, nous déduisons que

$$\mathrm{Sp}(u) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\} .$$

Enfin, si c est une racine de l'unité, si n est le plus petit entier strictement positif tel que $c^n = 1$, alors u a exactement n valeurs propres (les racines n-èmes de l'identité) de multiplicités infinies. Pour $k = 0, \dots, n-1$, notons $\mathscr{H}_k$ la somme hilbertienne des $\mathbb{C}e_{k+in}$ pour $i \in \mathbb{N}$. Alors $\mathscr{H}$ est la somme directe orthogonale (finie) des $\mathscr{H}_k$ pour $k = 0, \dots, n-1$, et u est un multiple de l'identité sur chaque $\mathscr{H}_k$. Donc

$$\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Vp}(u) = \{c^k \ : \ 0 \leq k \leq n-1\} .$$

Supposons que $b \neq 0$ et $|c| < 1$. Calculons tout d'abord les valeurs propres de u. Soit $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ un vecteur propre (non nul) de u associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $u(x) = \lambda x$, c'est-à-dire

$$c^0 x_0 e_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c^n x_n + b^n x_{n-1}) e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda x_n e_n .$$

Par unicité des coordonnées hilbertiennes, ceci équivaut à $c^0 x_0 = \lambda x_0$ et $c^n x_n + b^n x_{n-1} = \lambda x_n$ pour tout $n \geq 1$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \neq 0$ et $x_i = 0$ pour $i = 0, \dots, n_0 - 1$ (qui existe parce que x est non nul). Alors

$$c^{n_0} x_{n_0} = \lambda x_{n_0} \quad \text{et} \quad \forall\, n \geq n_0 + 1, \ \ c^n x_n + b^n x_{n-1} = \lambda x_n . \tag{36}$$

Si $c = 0$, alors la première équation montre que $\lambda = 0$ car $x_{n_0} \neq 0$, et en prenant $n = n_0 + 1$, nous avons $b^n x_{n_0} = 0$, ce qui est impossible (car b et n_{n_0} sont non nuls). Donc

$$\mathrm{Vp}(u) = \emptyset \quad \text{si } \ c = 0 \ \text{ et } \ b \neq 0 .$$

Si $c \neq 0$, alors $c^{n_0} - c^n \neq 0$ pour tout $n \geq n_0 + 1$. Les équations (36) sont donc équivalentes à $\lambda = c^{n_0}$ et $x_n = \frac{b^n}{c^{n_0} - c^n} x_{n-1}$ pour tout $n \geq n_0 + 1$. Si $b = 1$ et $n_0 > 0$, alors comme c^n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et $\frac{1}{c^{n_0}} > 1$, nous avons $\frac{b^n}{c^{n_0} - c^n} \geq 1$ pour n assez grand, donc la série $\sum |x_n|^2$ diverge, ce qui est impossible car $x \in \mathscr{H}$. Si $b = 1$ et $n_0 = 0$, alors $x_n = \frac{1}{1-c^n} x_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Donc $x_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-c^k} x_0$ converge vers un nombre complexe non nul, car quand k tend vers $+\infty$, c^k tend vers 0, donc le nombre complexe $\log(1-c^k)$ est bien défini pour $k \geq n_1$, et équivalent à $-c^k$, donc, par un argument de série géométrique convergente,

$$\prod_{k=n_1}^{+\infty} \frac{1}{1-c^k} = \exp -\Big(\sum_{k=n_1}^{+\infty} \log(1-c^k)\Big) \neq 0 \ .$$

Donc la série $\sum |x_n|^2$ diverge encore, ce qui est impossible. Par conséquent,

$$\mathrm{Vp}(u) = \emptyset \quad \text{si } \ 0 < |c| < 1 \ \text{ et } \ b = 1 \ .$$

Si $b < 1$, notons que $|1 - c^{n-n_0}| \geq 1 - |c|^{n-n_0} \geq 1 - |c| > 0$ pour $n \geq n_0 + 1$. Posons $y = 0, \dots, y_{n_0-1} = 0$, $y_{n_0} = 1$ et par récurrence $y_n = \frac{b^n}{c^{n_0}-c^n} y_{n-1}$ pour tout $n \geq n_0+1$. Soit $N \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $k = \frac{b^N}{|c|^{n_0}(1-|c|)} < 1$. Alors $|y_n| \leq k\,|y_{n-1}|$ pour tout $n \geq N$. La série $\sum |y_n|^2$, majorée (à part ses premiers termes) par une série géométrique de raison strictement inférieure à 1, converge donc. Le vecteur de coordonnées hilbertiennes $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (qui existe par le théorème de Parseval) est donc un vecteur propre de u associé à la valeur propre c^{n_0}, et tout autre vecteur est, par l'analyse faite ci-dessus, colinéaire à celui-ci. Par conséquent

$$\mathrm{Vp}(u) = \{c^n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \quad \text{si } \ 0 < |c| < 1 \ \text{ et } \ 0 < b < 1 \ ,$$

avec multiplicités égales à 1. De plus, comme u est compact si $(|c|, b) \in [0,1[^{\,2}$, et puisque $\mathscr{H}$ est de dimension infinie, nous avons

$$\mathrm{Sp} = \{0\} \cup \mathrm{Vp}(u) = \{0\} \cup \{c^n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \quad \text{si } \ 0 < |c| < 1 \ \text{ et } \ 0 < b < 1 \ .$$

Correction de l'exercice E.41. (1) Tout d'abord, si $m \in \mathscr{L}^\infty(X)$ et $f \in \mathscr{H}$, en posant $c = \|m\|_{\mathbb{L}^\infty(X,\mu)}$, nous avons $\int_{x\in X} |m(x)f(x)|^2 \,d\mu(x) \leq c^2 \|f\|^2$, donc $mf \in \mathscr{H}$. Par conséquent, si $m \in \mathscr{L}^\infty(X)$, l'application $u_m : f \mapsto mf$ est une application bien définie, clairement linéaire, de norme au plus c, donc $u_m \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Montrons qu'en fait

$$\|u_m\| = \|m\|_{\mathbb{L}^\infty(X,\mu;\mathbb{C})} \ .$$

Pour tout $\epsilon > 0$, soit $A = \{x \in X \ : \ |m(x)| \geq c - \epsilon\}$, qui est une partie mesurable de X, de mesure finie strictement positive. Si f est la fonction caractéristique de A, alors $\|f\|_2 = \mu(A)$ et

$$\|u_m f\|_2 = \Big(\int_A |m(x)|^2 \,d\mu(x)\Big)^{\frac12} \geq (c-\epsilon)\,\mu(A) = (c-\epsilon)\,\|f\|_2 \ .$$

Donc $\|u_m\| \geq c - \epsilon$, et ceci pour tout $\epsilon > 0$, ce qui montre le résultat.

L'application $m \mapsto u_m$ de $\mathscr{L}^\infty(X)$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ est donc bien définie, et clairement linéaire. De plus $u_{mm'} = u_m \circ u_{m'}$ et pour tous les f et g dans $\mathscr{H}$, nous avons

$$\begin{aligned}\langle u_{\overline{m}}(f), g\rangle &= \int_{x\in X} \overline{m}(x) f(x)\, \overline{g(x)}\,d\mu(x) = \int_{x\in X} f(x)\,\overline{m(x)g(x)}\,d\mu(x) = \langle f, u_m(g)\rangle \\ &= \langle u_m^*(f), g\rangle \ .\end{aligned}$$

Donc $u_m^* = u_{\overline{m}}$, et $m \mapsto u_m$ est un morphisme d'algèbres involutives.

(2) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ n'appartient pas à l'image essentielle de m, alors il existe $\epsilon > 0$ et Y une partie mesurable de X de μ-mesure nulle tels que $|m(x) - \lambda| > \epsilon$ pour tout $x \in X - Y$. Soit $m' : x \mapsto \frac{1}{m(x)-\lambda}$ si $x \in X - Y$, et $x \mapsto 0$ sinon, qui est mesurable bornée (par $\frac{1}{\epsilon}$). Alors

$$u_{m'} \circ (u_m - \lambda\,\mathrm{id}) = u_{m'} \circ u_{m-\lambda} = u_{m'(m-\lambda)} = u_{m-\lambda} \circ u_{m'}$$

est l'opérateur identité de $\mathscr{H}$ (car si m_1 et m_2 coïncident presque partout pour la mesure μ, alors $u_{m_1} = u_{m_2}$). Donc $u_m - \lambda\,\mathrm{id}$ est inversible, et $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u_m)$.

Réciproquement, si $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient à l'image essentielle de m, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n = \{x \in X \ : \ |m(x) - \lambda| \le \frac{1}{n}\}$, qui vérifie $\mu(A_n) > 0$. L'application $f_n : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\mu(A_n)}}\chi_{A_n}$ est un élément unitaire de $\mathscr{H}$, et

$$\|(u_m - \lambda\,\mathrm{id})f_n\|_2 = \|(m-\lambda)f_n\|_2 = \Big(\int_{A_n} \frac{|m-\lambda|^2}{\mu(A_n)}\,d\mu\Big)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{n}$$

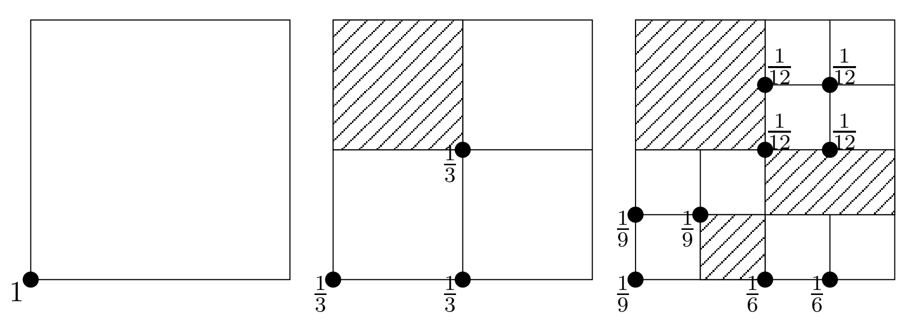
tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc $u_m - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas inversible, par la partie facile du critère de Weyl (sinon $f_n = (u_m - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}(u_m - \lambda\,\mathrm{id})f_n$ tendrait vers 0 par continuité de $(u_m - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$, ce qui contredirait le fait que f_n est de norme 1). Par conséquent $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, ce qui montre le résultat.

(3) Notons A_m l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mu\big(m^{-1}(\{\lambda\})\big) > 0$. Si λ est une valeur propre de u_m, et si f est un vecteur propre non nul de u_m associé à λ, alors $m(x)f(x) = \lambda f(x)$ presque partout et f n'est pas presque partout nulle. Donc m vaut λ sur un ensemble de mesure non nulle, et $\lambda \in A_m$.

Réciproquement, si $\lambda \in A_m$, notons f la fonction caractéristique de l'ensemble mesurable $m^{-1}(\{\lambda\})$ de mesure non nulle. Alors $u_m f = \lambda f$, donc f est un vecteur propre non nul de u_m associé à la valeur propre λ, et $\lambda \in \mathrm{Vp}(u_m)$.

(4) Soit X un compact non vide sans point isolé de $\mathbb{C}$. Notons $m : X \to \mathbb{C}$ l'application $x \mapsto x$. Pour toute mesure borélienne positive finie μ sur X, l'image essentielle de m est exactement le support de μ.

Lemme. *Pour tout compact non vide sans point isolé X de $\mathbb{C}$, il existe une mesure borélienne positive finie de support X, sans atome.*



Démonstration. Quitte à faire une translation et une homothétie, on peut supposer que X est contenu dans le carré $[0,1[^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on construit une mesure de probabilité μ_n. Notons μ_0 la masse de Dirac unité en 0, de sorte que $\mu_0([0,1[^2) = 1$. On subdivise par dichotomie en quatre carrés $[0,\frac{1}{2}[\,\times[0,\frac{1}{2}[$, $[0,\frac{1}{2}[\,\times[\frac{1}{2},1[$, $[\frac{1}{2},1[\times[0,\frac{1}{2}[$ et $[\frac{1}{2},1[\times[\frac{1}{2},1[$ le carré $C_0 = [0,1[^2$, et on note $p_1 \in \{1,2,3,4\}$ le nombre de ces carrés qui contiennent un point de X. On met alors une masse de Dirac de masse $\frac{\mu_0(C_0)}{p_1}$ en chacun des coins en bas à gauche de ces p_1 carrés. On itère : on subdivise en quatre chacun de ces p_1 carrés, et on met au coin en bas à gauche de chacun de ces quatres carrés contenant un point de X une masse de Dirac égale à la mesure du carré avant découpage, divisée par le nombre des carrés découpés contenant un point de X. Voir le dessin ci-dessus, où les carrés hachurés sont ceux qui ne contiennent pas de point de X.

Par compacité, les mesures de probabilité μ_n convergent quittent à extraire vers une mesure de probabilité μ, et il n'est pas difficile de vérifier que cette mesure vérifie les propriétés voulues. $\square$

Soient μ comme dans le lemme, et $\mathscr{H} = \mathbb{L}^2(X, \mu; \mathbb{C})$, qui est un espace de Hilbert complexe séparable. Alors $u_m : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ est un opérateur continu, sans valeur propre par (3), de spectre égal au support de μ, c'est-à-dire à X. Ceci démontre la première assertion.

Si X est contenu dans $\mathbb{R}$, alors m étant à valeurs réelles, l'opérateur u_m est auto-adjoint par la question (1). Réciproquement, si u est un opérateur auto-adjoint, on sait que son spectre est un compact non vide de $\mathbb{C}$, contenu dans $\mathbb{R}$, et que toute valeur spectrale de u isolée dans $\mathrm{Sp}(u)$ est une valeur propre. Donc si u n'a pas de valeur propre, alors son spectre n'a pas de point isolé.

Correction de l'exercice E.42. (1) a) Ceci découle du fait que $(u - z\,\mathrm{id})^* = u^* - \overline{z}\,\mathrm{id}$ et que si $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est inversible, alors v^* aussi et $(v^{-1})^* = (v^*)^{-1}$.

b) La première affirmation découle immédiatement du fait que les opérateurs $u - z\,\mathrm{id}$ et $u - z'\,\mathrm{id}$ commutent, car u commute avec tout polynôme en u. Pour la seconde, en utilisant la première, nous avons

$$R_u(z) - R_u(z') = R_u(z) \circ R_u(z') \circ \big((u - z'\,\mathrm{id}) - (u - z\,\mathrm{id})\big) = (z - z')\, R_u(z) \circ R_u(z')\ .$$

(2) a) Si $\lambda \in \mathrm{Sp}'_{\mathrm{ess}}(u)$, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Weyl pour (u, λ). Si $v = u - \lambda\,\mathrm{id}$ est inversible, alors $x_n = v(u(x_n) - \lambda x_n)$ converge vers $v(0) = 0$, ce qui contredit le fait que $\|x_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

b) Un opérateur auto-adjoint compact est de spectre dénombrable, et comme le spectre d'un opérateur continu est fermé, le résultat en découle par passage au complémentaire.

(3) a) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc son image par l'opérateur compact u admet une sous-suite convergente. Soit $y \in \mathscr{H}$ une valeur d'adhérence de la suite $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Puisque u est linéaire continu, la suite $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $u(x)$, et toute sous-suite aussi. Par unicité des limites faibles, nous avons donc $y = u(x)$. Puisque la seule valeur d'adhérence de $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $u(x)$, ceci montre le résultat.

b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Weyl pour (u, λ). Alors par la question a), puisque $w = u - v$ est compact, la suite $(w(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $w(0) = 0$. Donc $v(x_n) - \lambda x_n = u(x_n) - \lambda x_n - w(x_n)$ converge vers 0. D'où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Weyl pour (v, λ). Par symétrie, le résultat en découle.

c) Si $\lambda \in \mathrm{Sp}'_{\mathrm{ess}}(u)$, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Weyl pour (u, λ). Alors $u(x_n) - \lambda x_n$ converge vers 0. Donc par continuité de $R_u(z)$,

$$R_u(z)(u(x_n) - \lambda x_n) = R_u(z)(u(x_n) - z x_n + (z - \lambda) x_n) = x_n - (z - \lambda) R_u(z) x_n$$

converge vers 0. Comme $z-\lambda \neq 0$ par la question (2) a), ceci implique que $R_u(z)x_n - (z-\lambda)^{-1}x_n$ converge vers 0. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Weyl pour $(R_u(z),(z-\lambda)^{-1})$. La réciproque se montre de même.

d) Par les questions précédentes, nous avons $\lambda \in \mathrm{Sp}'_{\mathrm{ess}}(v)$ si et seulement si $\frac{1}{\lambda-z} \in \mathrm{Sp}'_{\mathrm{ess}}(R_v(z))$ si et seulement si $\frac{1}{\lambda-z} \in \mathrm{Sp}'_{\mathrm{ess}}(R_u(z))$ si et seulement si $\lambda \in \mathrm{Sp}'_{\mathrm{ess}}(u)$.

(4) Puisque u est auto-adjoint, $\mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{H}$ telle que $\|x_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\big(\|u(x_n) - \lambda x_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, quitte à extraire, nous pouvons supposer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in \mathscr{H}$ et que $(\|x_n - x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $c \in [0,+\infty[$. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente, nous avons $c \neq 0$.

Posons $y_n = \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}$, qui converge faiblement vers 0 car $c \neq 0$. Alors $\|y_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et puisque $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est continue, la suite $(u(x_n) - \lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $u(x) - \lambda x$ et converge fortement vers 0. Donc $u(x) = \lambda x$ par unicité de la limite faible. Puisque $c \neq 0$, nous avons aussi que $\|u(y_n) - \lambda y_n\| = \frac{\|u(x_n) - \lambda x_n\|}{\|x_n - x\|}$ converge vers 0.

(5) a) Soit $z \in \rho(u)$ (qui existe car $\mathrm{Sp}(u)$ est borné). Puisque précomposer par un opérateur continu préserve la compacité des opérateurs continus, si v est compact, alors $v \circ R_u(z)$ est compact, donc v est u-compact.

Soient $z, z' \in \rho(u)$ tels que $v \circ R_u(z)$ est compact. Alors par la question (1) b), nous avons
$$v \circ R_u(z') = v \circ R_u(z) - (z - z')\, v \circ R_u(z) \circ R_u(z')\ .$$
Donc $v \circ R_u(z')$ est compact, car l'ensemble des opérateurs compacts est un idéal bilatère de l'algèbre $\mathscr{L}(\mathscr{H})$.

b) Pour tout $z \in \rho(u+v) \cap \rho(u)$, par exemple si $z \in \mathbb{C}$ est de module assez grand, nous avons
$$R_{u+v}(z) - R_u(z) = R_{u+v}(z) \circ \big(\mathrm{id} - (u+v-z\,\mathrm{id}) \circ (u - z\,\mathrm{id})^{-1}\big) = -R_{u+v}(z) \circ v \circ R_u(z)\ .$$
Donc si v est u-compact, alors $R_{u+v}(z) - R_u(z)$ est compact, car l'ensemble des opérateurs compacts est un idéal bilatère de l'algèbre $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Le résultat découle alors des questions (3) et (4).

Correction de l'exercice E.43. $\boxed{\mathrm{I}}$ Pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous noterons $(x_n = \langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ les coordonnées hilbertiennes de x dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1) Par linéarité et continuité, si un tel opérateur u existe, alors pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous avons $u(x) = u(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n x_n f_n$, ce qui montre l'unicité.

Soit $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|$, qui est fini par hypothèse. Notons E le sous-espace vectoriel dense de $\mathscr{H}$ de base vectorielle $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons $u : E \to \mathscr{H}$ l'unique application linéaire prenant pour valeurs sur les éléments de cette base celles données par l'énoncé. Pour tout $x = \sum_{n=0}^{N} x_n e_n \in E$, nous avons, puisque la famille $(f_n)_{0\leq n\leq N}$ est orthonormée, et puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 = \|x\|^2$ par la formule de Parseval
$$\|u(x)\|^2 = \sum_{n=0}^{N} |\lambda_n x_n|^2 \leq C \sum_{n=0}^{N} |x_n|^2 \leq C\|x\|^2\ .$$

Donc u est continu, de norme au plus C. Par le théorème de prolongement (l'espace de départ E est dense dans $\mathscr{H}$ et l'espace d'arrivée $\mathscr{H}$ est complet), l'application linéaire continue u se prolonge donc en une application linéaire continue de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$, de norme au plus C.

[On pouvait aussi dire qu'il existe une unique application linéaire continue w envoyant e_n sur f_n (qui est isométrique) et que si v est l'unique élément de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que $v(e_n) = \lambda_n e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (comme vu en exercice), alors $u = w \circ v$ convient.]

2) Soit $(|\lambda_{n_k}|)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente vers C. Comme $\lim_{k\to+\infty} \|u(e_{n_k})\| = C$, nous avons $\|u\| \geq C$, donc $\|u\| = C$ par ce qui précède. Notons $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ l'unique élément de $\mathscr{H}$ tel que $v(f_k) = \overline{\lambda_k}\, e_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, qui existe par 1). Pour tous les $n, k \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\langle e_n, v(f_k)\rangle = \lambda_n \langle e_n, e_k\rangle = \lambda_n \langle f_n, f_k\rangle = \langle u(e_n), f_k\rangle = \langle e_n, u^*(f_k)\rangle \ .$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, les vecteurs $v(f_k)$ et $u^*(f_k)$, qui ont les mêmes coordonnées hilbertiennes dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sont égaux. Puisque $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne, ceci implique que $u^* = v$.

3) Montrons que u est compact si et seulement si la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors par compacité, il existe une sous-suite $(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\lambda \neq 0$. Donc l'image par u de la suite bornée $(e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente, d'où u n'est pas compact.

Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, notons $u_N : x \mapsto \sum_{0\leq n\leq N} \lambda_n x_n f_n$, qui est un opérateur de rang fini. Pour tout $\epsilon > 0$, soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel $|\lambda_n| \leq \epsilon$ si $n \geq N_0$. Pour tout $x \in \mathscr{H}$ unitaire, pour tout $N \geq N_0$, par la formule de Parseval, nous avons

$$\|u_N(x) - u(x)\|^2 = \sum_{n>N} |\lambda_n x_n|^2 \leq \epsilon^2 \sum_{n>N} |x_n|^2 \leq \epsilon^2 \|x\|^2 = \epsilon^2 \ .$$

Donc $\|u_N - u\| \leq \epsilon$, et u est un opérateur compact, comme limite d'opérateurs de rang fini.

$\boxed{\text{II}}$ (1) Puisque $\langle u(x), f_k\rangle$ est la k-ème coordonnée hilbertienne de $u(x)$ dans la base hilbertienne $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, la première égalité n'est rien d'autre que la formule de Parseval pour $u(x)$. Donc, en utilisant le fait que les séries sont à termes positifs pour permuter les deux signes sommes,

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u(e_n)\|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle u(e_n), f_k\rangle|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle e_n, u^*(f_k)\rangle|^2 \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle u^*(f_k), e_n\rangle|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \|u^*(f_k)\|^2 \ .\end{aligned}$$

(2) La question (1) montre que la définition d'un opérateur de Hilbert-Schmidt est indépendant des choix de bases hilbertiennes. Le fait que $\mathrm{HS}(\mathscr{H})$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ découle de la formule $\|\lambda x + \mu y\|^2 \leq 2|\lambda|^2\|x\|^2 + 2|\mu|^2\|y\|^2$ pour tous les x, y dans $\mathscr{H}$ et λ, μ dans $\mathbb{C}$. Le fait que $\mathrm{HS}(\mathscr{H})$ soit stable par l'adjoint découle de la question (1). Le fait que $\mathrm{HS}(\mathscr{H})$ soit stable par composition à gauche découle du fait que $\|v \circ u(e_n)\|^2 \leq \|v\|^2\|u(e_n)\|^2$. La stabilité par composition à droite découle de la stabilité par l'adjoint et de la stabilité par composition à gauche, car $u \circ w = (w^* \circ u^*)^*$.

(3) Soit u un opérateur de Hilbert-Schmidt. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, posons $u_N : x \mapsto \sum_{n=0}^{N} x_n u(e_n)$. Alors $u_N \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est un opérateur linéaire continu de rang fini (car les coordonnées hilbertiennes sont continues et par sommation finie). Pour tout $\epsilon > 0$, soit $N \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \|u(e_n)\|^2 \leq \epsilon$, qui existe par la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u(e_n)\|^2$. Alors pour tous les $x \in \mathscr{H}$, nous avons

$$\begin{aligned}\|u_N(x) - u(x)\|^2 = \Big\| \sum_{n=N+1}^{+\infty} x_n u(e_n) \Big\|^2 &\leq \Big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n| \, \|u(e_n)\| \Big)^2 \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n|^2 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|u(e_n)\|^2 \leq \epsilon \, \|x\|^2 \ ,\end{aligned}$$

donc $\|u_N - u\| \leq \epsilon$. Par conséquent, l'opérateur u, comme limite pour la norme d'opérateurs d'une suite d'opérateurs linéaires continus de rang fini, est compact.

$\boxed{\text{III}}$ 1) L'opérateur u^*u est auto-adjoint positif, donc son spectre est contenu dans $[0, +\infty[$. L'application $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie, continue et positive sur $\mathrm{Sp}(u)$. Par le calcul fonctionnel continu, l'opérateur $|u| = f(u^*u)$ est donc bien défini et positif. Puisque le calcul fonctionnel continu est un morphisme d'algèbres, et puisque $f^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{Sp}(u)}$, nous avons $|u|^2 = u^*u$.

2) L'opérateur $|u|$ est auto-adjoint, car positif. Remarquons que, pour tout $x \in \mathscr{H}$,

$$\|\,|u|(x)\|^2 = \langle |u|(x), |u|(x)\rangle = \langle x, |u|^2(x)\rangle = \langle x, u^*u(x)\rangle = \langle u(x), u(x)\rangle = \|u(x)\|^2 \ .$$

Cette formule implique que si $u^*u(x) = 0$, alors $u(x) = |u|(x) = 0$, et que $u(x) = 0$ si et seulement si $|u|(x) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}\,|u| = \mathrm{Ker}\,u$ contient $\mathrm{Ker}(u^* \circ u)$. Réciproquement, si $u(x) = 0$, alors $u^*u(x) = 0$, ce qui montre le résultat.

3) Comme $|u|$ est positif, donc auto-adjoint, et par la question précédente, nous avons $\mathrm{Ker}\,u = \mathrm{Ker}\,|u| = \mathrm{Ker}\,|u|^*$. Par les propriétés de l'adjoint, pour tout $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, nous avons $(\mathrm{Ker}\,v^*)^\perp = \big((\mathrm{Im}\,v)^\perp\big)^\perp = \overline{\mathrm{Im}\,v}$. En prenant $v = |u|$, le résultat en découle.

4) Si $y \in \mathrm{Im}\,|u|$, posons $v(y) = u(y')$ où $|u|(y') = y$. La valeur de $v(y)$ ne dépend pas du choix de y', car si $|u|(y'') = y$, alors $y'' - y' \in \mathrm{Ker}\,|u| = \mathrm{Ker}\,u$ par la question 2), donc $u(y'') = u(y')$. Par la question 2) aussi, nous avons $\|v(y)\| = \|u(y')\| = \|\,|u|(y')\| = \|y\|$. Donc l'application $v : \mathrm{Im}\,|u| \to \mathscr{H}$ est isométrique, et clairement linéaire. Puisque $\mathscr{H}$ est complet et par le théorème du prolongement, elle s'étend donc en une application linéaire isométrique $v : \overline{\mathrm{Im}\,|u|} \to \mathscr{H}$.

Pour tout $x \in \mathscr{H}$, puisque $\mathrm{Ker}\,u$ est fermé, nous pouvons écrivons $x = y + z$ où $z \in \mathrm{Ker}\,u$ et $y \in (\mathrm{Ker}\,u)^\perp = \overline{\mathrm{Im}\,|u|}$ par la question 3). Posons alors $v(x) = v(y)$. Par construction, nous avons $u(x) = v \circ |u|(x)$ pour tout $x \in \mathscr{H}$, et puisque v est isométrique sur $(\mathrm{Ker}\,u)^\perp$, son noyau est égal au noyau de u. Le résultat en découle.

5) Soit $x \in (\mathrm{Ker}\,v^*)^\perp$. Puisque $\|v^*\| = \|v\| \leq 1$ (et même $\|v\| = 1$ si v n'est pas l'opérateur nul), nous avons $\|v^*(x) \leq \|x\|$. Notons que $\mathrm{Im}\,v$ est fermé, car complet dans $\mathscr{H}$ complet, car v est une isométrie linéaire du sous-espace fermé donc complet $(\mathrm{Ker}\,v)^\perp$ dans $\mathrm{Im}\,v$. Donc $(\mathrm{Ker}\,v^*)^\perp = \big((\mathrm{Im}\,v)^\perp\big)^\perp = \mathrm{Im}\,v$. Notons x' un élément de $\mathscr{H}$ tel que

$x = v(x')$. Nous pouvons supposer que $x' \in (\operatorname{Ker} v)^\perp$, de sorte que $\|x'\| = \|v(x')\|$. Alors

$$\begin{aligned}\|v^*(x)\| &= \sup_{\|y\|=1} \langle v^*(x), y\rangle = \sup_{\|y\|=1} \langle x, v(y)\rangle = \sup_{\|y\|=1} \langle v(x'), v(y)\rangle \geq \langle v(x'), v(\frac{x'}{\|x'\|})\rangle \\ &= \frac{\|v(x')\|^2}{\|v(x')\|} = \|v(x')\| = \|x\| \ .\end{aligned}$$

Donc v^* est une isométrie partielle.

Pour tout $z \in \mathscr{H}$, nous avons $v^*v(z) \in \operatorname{Im} v^* = (\operatorname{Ker} v)^\perp$ et, puisque $\operatorname{Im} v = (\operatorname{Ker} v^*)^\perp$,

$$\begin{aligned}\langle v^*v(z), z - v^*v(z)\rangle &= \langle v^*v(z), z\rangle - \|v^*v(z)\|^2 = \|v(z)\|^2 - \|v^*v(z)\|^2 \\ &= \|v(z)\|^2 - \|v(z)\|^2 = 0 \ .\end{aligned}$$

Donc v^*v est la projection orthogonale sur $(\operatorname{Ker} v)^\perp$.

$\boxed{\text{IV}}$ (1) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puisque x est unitaire, puisque $|uv|$ est auto-adjoint car positif, puisque $|uv|^2 = (uv)^*(uv) = v^*u^*uv$, puisque $v(x) = \lambda x$, nous avons

$$\begin{aligned}\langle |uv|(x), x\rangle &\leq \|\,|uv|(x)\|\,\|x\| = \langle |uv|(x), |uv|(x)\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle |uv|^2(x), x\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle v^*u^*uv(x), x\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \langle u^*uv(x), v(x)\rangle^{\frac{1}{2}} = \big(\lambda\overline{\lambda}\,\langle u^*u(x), x\rangle\big)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\langle v^*v(x), x\rangle^{\frac{1}{2}} \ .\end{aligned}$$

(2) a) Puisque u est positif, son spectre est contenu dans $[0, +\infty[$. L'application $f : t \mapsto t^\alpha$ est définie, continue et positive sur $\operatorname{Sp}(u)$. Par le théorème du calcul fonctionnel continu, l'opérateur $u^\alpha \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est donc bien défini, et positif donc auto-adjoint. Par le théorème de diagonalisation des opérateurs auto-adjoints positifs compacts, puisque $\mathscr{H}$ est séparable de dimension infinie, il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$ et une suite de réels positifs ou nuls $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u(e_n) = \lambda_n e_n$. Par les propriétés du calcul fonctionnel continu, e_n est un vecteur propre de e_n pour la valeur propre $f(\lambda_n) = \lambda_n^\alpha$, et donc u^α est diagonalisable dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de valeurs propres les λ_n^α pour $n \in \mathbb{N}$. Par la question I, puisque u est compact, les λ_n tendent vers 0, donc les λ_n^α tendent vers 0 (car $\alpha > 0$), donc de nouveau par la question I, l'opérateur u^α est compact. Par un théorème du cours, son spectre est

$$\{0\} \cup \operatorname{Vp}(u^\alpha) = \{0\} \cup \{\lambda_n^\alpha \ : \ n \in \mathbb{N}\} \ .$$

b) En écrivant $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ dans la base hilbertienne précédente, par la convexité de la fonction $t \mapsto t^{\frac{\alpha}{2}}$ car $\alpha \geq 2$ et puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 = 1$, nous avons

$$\langle u^2(x), x\rangle^{\frac{\alpha}{2}} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} {\lambda_n}^2\,|x_n|^2\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} {\lambda_n}^\alpha\,|x_n|^2 = \langle u^\alpha(x), x\rangle \ .$$

(3) a) Si $u = v|u|$ est la décomposition polaire de u, alors $u = v|u|^{\frac{1}{2}}|u|^{\frac{1}{2}}$, et $|u|^{\frac{1}{2}}$ est auto-adjoint. Donc par deux inégalités de Cauchy-Schwarz (une pour le produit scalaire de $\mathscr{H}$, l'autre pour le produit scalaire de $\ell^2(\mathbb{N})$), nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle u(e_n), e_n\rangle| &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle |u|^{\frac{1}{2}}(e_n), |u|^{\frac{1}{2}}v^*(e_n)\rangle| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\,|u|^{\frac{1}{2}}(e_n)\|\,\|\,|u|^{\frac{1}{2}}v^*(e_n)\| \\ &\leq \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\,|u|^{\frac{1}{2}}(e_n)\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\,|u|^{\frac{1}{2}}v^*(e_n)\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \ .\end{aligned}$$

Le premier terme du produit ci-dessus est fini, car $|u|^{\frac{1}{2}}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Par la question II 2), l'opérateur $|u|^{\frac{1}{2}}v^*$ est aussi de Hilbert-Schmidt, donc le second produit est aussi fini.

La série définissant $\mathrm{Tr}(u)$ est donc absolument convergente, et par conséquent convergente.

b) Par la question II 2), l'opérateur $t_1w_1 + t_2w_2$ est de Hilbert-Schmidt, donc la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|(t_1w_1 + t_2w_2)(e_n)\|^2$ converge. L'égalité cherchée découle alors de la sesquilinéarité du produit scalaire et de la définition des adjoints. Le terme de gauche de l'égalité est indépendant de la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par la question II 1). Le terme de droite l'est donc aussi, et c'est un polynôme en $t_1, t_2, \overline{t_1}, \overline{t_2}$. Donc le coefficient de $t_1\overline{t_1}$ est aussi indépendant de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En appliquant ceci avec $w_1 = |u|^{\frac{1}{2}}$ et $w_2 = |u|^{\frac{1}{2}}v^*$ où $u = v|u|$ est la décomposition polaire de u, le résultat en découle.

c) Par le théorème de diagonalisation des opérateurs auto-adjoints positifs compacts, puisque $\mathscr{H}$ est séparable de dimension infinie, il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$ et une suite de réels positifs ou nuls $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $v(e_n) = \lambda_n e_n$. Alors par la question IV (1), par la question IV (2) b) avec $\alpha = p$, par l'inégalité de Hölder et par la question IV (2) a), nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\,|uv|^{\frac{1}{2}}(e_n)\|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle |uv|^{\frac{1}{2}}(e_n), |uv|^{\frac{1}{2}}e_n\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle |uv|(e_n), e_n\rangle \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| \langle u^*u(e_n), e_n\rangle^{\frac{1}{2}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n\ \langle u^2(e_n), e_n\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n\ \langle u^p(e_n), e_n\rangle^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} {\lambda_n}^q\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle u^p(e_n), e_n\rangle\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle v^q(e_n), e_n\rangle\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle u^p(e_n), e_n\rangle\Big)^{\frac{1}{p}} = \big(\mathrm{Tr}(u^p)\big)^{\frac{1}{p}} \big(\mathrm{Tr}(v^q)\big)^{\frac{1}{q}} .
\end{aligned}$$

Le résultat en découle, ces inégalités montrant à la fois que $|uv|^{\frac{1}{2}}$ est de Hilbert-Schmidt et donnant la majoration cherchée de la trace de $|uv|$.

Correction de l'exercice E.44. (1) La suite $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est clairement une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, et pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous noterons $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les coordonnées hilbertiennes de x dans cette base. Par linéarité et continuité, si un tel opérateur v existe, alors pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous avons $v(x) = v(\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e_{n+1}$, ce qui montre l'unicité. Réciproquement, pour tout x dans $\mathscr{H}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_{n-1}|^2$, qui est égale à $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 = \|x\|^2$ par l'égalité de Parseval, converge. Par la partie réciproque du théorème de Parseval 1.17, la série $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{n-1}e_n$ converge donc dans $\mathscr{H}$, et nous posons $v(x) = y$. Il est immédiat que v est linéaire, que $\|v\| \leq 1$ (en fait v est isométrique), et que v convient.

(2) Pour tout $f \in \mathscr{H}_0$, l'application $u_0(f)$ appartient à $\mathscr{H}_0$ car $u_0(f)$ est clairement mesurable et $\|u_0(f)\|_2 \leq 2\pi\|f\|_2$, donc u_0 est bien défini, clairement linéaire et continu de norme $\|u_0\| \leq 2\pi$. De plus, u_0 est positif (donc auto-adjoint) car pour tout $f \in \mathscr{H}_0$,

$$\langle u_0(f), f\rangle_2 = \int_0^{2\pi} \theta |f(\theta)|^2\, d\theta \geq 0 .$$

En particulier, son spectre est contenu dans $[0, \|u_0\|]$, donc dans $[0, 2\pi]$. Réciproquement, montrons qu'il contient $]0, 2\pi[$: comme $\mathrm{Sp}(u_0)$ est fermé, ceci montre que $\mathrm{Sp}(u_0) = [0, 2\pi]$.

Soit $\lambda \in \,]0, 2\pi[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ assez grand, nous avons $[\lambda - \frac{1}{2k}, \lambda + \frac{1}{2k}] \subset [0, 2\pi]$, donc f_k, qui est mesurable, vérifie $\|f_k\|_2^2 = \int_{\lambda-\frac{1}{2k}}^{\lambda+\frac{1}{2k}} k \, d\theta = 1$. De plus,

$$\|\, u_0(f_k) - \lambda f_k \,\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |\theta f_k(\theta) - \lambda f_k(\theta)|^2 \, d\theta = \int_{\lambda-\frac{1}{2k}}^{\lambda+\frac{1}{2k}} k \, |\theta - \lambda|^2 \, d\theta$$
$$\leq \int_{\lambda-\frac{1}{2k}}^{\lambda+\frac{1}{2k}} k \, |\frac{1}{2k}|^2 \, d\theta = \frac{1}{(2k)^2} \; .$$

Donc $\lim_{k\to+\infty} u_0(f_k) - \lambda f_k = 0$. Par le critère de Weyl, λ appartient à $\mathrm{Sp}(u_0)$, ce que nous voulions démontrer.

(3) Il est immédiat que $v_0(f)$ est mesurable et vérifie $\|v_0(f)\|_2 \leq \|f\|_2$, donc v_0 est bien défini, clairement linéaire et continu de norme $\|v_0\| \leq 1$. Puisque $\theta \mapsto e^{i\theta} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(i\theta)^n}{n!}$ est une application continue sur $[0, 2\pi]$, puisque u_0 est auto-adjoint et par continuité du calcul fonctionnel continu, nous avons que $v_0 = e^{iu_0}$. Par le théorème spectral et la question précédente,

$$\mathrm{Sp}(v_0) = \{e^{i\lambda} \;:\; \lambda \in \mathrm{Sp}(u_0)\} = \{e^{i\theta} \;:\; \theta \in [0, 2\pi]\} = \mathbb{S}_1 \; .$$

Par définition des coefficients de Fourier, nous avons

$$c_n(v_0(f)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} v_0(f)(\theta) \, e^{-in\theta} \, d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \, e^{-i(n-1)\theta} \, d\theta = c_{n-1}(f) \; .$$

Soit $\varphi : \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}$ l'application $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$, qui par les propriétés de la transformation de Fourier (dont l'égalité de Parseval), est un isomorphisme d'espaces de Hilbert. Par ce qui précéde, nous avons

$$v = \varphi \circ v_0 \circ \varphi^{-1} \; .$$

(4) Soit $x \in \mathscr{H}$ tel que $v(x) = \lambda x$. Par l'unicité des coordonnées dans une base hilbertienne, nous avons $x_n = \lambda x_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Comme par la formule de Parseval, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 = |x_0|^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda|^n$ converge, ceci montre que $x = 0$. Donc

$$\mathrm{Vp}(v) = \emptyset \; .$$

Puisque deux opérateurs linéaires continus conjugués ont le même spectre, nous avons $\mathrm{Sp}(v) = \mathrm{Sp}(v_0) = \mathbb{S}_1$. (Nous retrouvons aussi que $\mathrm{Vp}(v) = \mathrm{Vp}(v_0) = \emptyset$ car si $\lambda \in \mathbb{C}$ et si $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est une fonction mesurable telle que $\theta f(\theta) = \lambda f(\theta)$ pour presque tout $\theta \in [0, 2\pi]$, alors f est presque partout non nulle.)

Enfin soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(v) = \mathbb{S}_1$, montrons que l'image E de $v - \lambda\,\mathrm{id}$ est dense, ce qui montre que le spectre résiduel de u est vide. Pour cela, il suffit de montrer que l'orthogonal $E^\perp$ de E dans $\mathscr{H}$ est réduit à $\{0\}$, par le critère de densité d'un sous-espace vectoriel. Soit donc $y \in E^\perp$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$0 = \langle y, (v - \lambda\,\mathrm{id})(e_n)\rangle = \langle y, e_{n+1} - \lambda e_n\rangle = y_{n+1} - \overline{\lambda} y_n \; .$$

En particulier, comme $|\lambda| = 1$, nous avons $|y_{n+1}| = |y_n|$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Par convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |y_n|^2$ (par la formule de Parseval), nous avons donc $y = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

(5) Par la définition de v et comme dans la question (1), nous avons immédiatement que v^{-1} est l'unique opérateur linéaire continu de $\mathscr{H}$ tel que $v^{-1}(e_n) = e_{n-1}$. Donc $w =$

$-v-v^{-1}+2\,\mathrm{id}$, et en particulier $w : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ est un opérateur linéaire continu. Nous avons $v^{-1} = v^*$ car pour tous les $m, n \in \mathbb{Z}$, nous avons $\langle v^*(e_n), e_m\rangle = \langle e_n, v(e_m)\rangle = \langle e_n, e_{m+1}\rangle$ donc $v^*(e_n) = e_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. [Une autre méthode est d'utiliser le calcul fonctionnel continu, car $\overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}}$, u_0 est auto-adjoint, $v_0 = e^{iu_0}$, $v = \varphi \circ v_0 \circ \varphi^{-1}$ et $\varphi^{-1} = \varphi^*$ par la transformation de Fourier inverse.] Donc $w = -v - v^* + 2\,\mathrm{id}$ est auto-adjoint. L'application $f : z \mapsto -z - z^{-1} + 2$ est continue et positive sur le cercle $\mathbb{S}^1 = \mathrm{Sp}(v)$, et par les propriétés du calcul fonctionnel continu, nous avons

$$w = f(v) = f(\varphi \circ v_0 \circ \varphi^{-1}) = \varphi \circ f(v_0) \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ f(e^{iu_0}) \circ \varphi^{-1} \;,$$

et w est positif car f est positive. Par l'invariance du spectre par conjugaison et par le théorème spectral, nous avons donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}(w) &= \mathrm{Sp}(f(e^{iu_0})) = \{-e^{i\theta} - e^{-i\theta} + 2 \;:\; \theta \in \mathrm{Sp}(u_0)\}\\ &= \{2 - 2\cos\theta \;:\; \theta \in [0, 2\pi]\} = [0, 4] \;.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice E.45. a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la valeur de $\lim_{t\to 0,\, t\neq 0} \frac{f_t(\lambda)-1}{t}$ est la dérivée de $t \mapsto e^{it\lambda} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(it\lambda)^n}{n!}$ en $t = 0$, c'est-à-dire $i\lambda$, et la propriété de convergence uniforme découle des propriétés des séries entières.

b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Notons encore f_t la restriction de f_t au spectre de u, qui est continue. Notons $u_t = f_t(u) \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ l'opérateur linéaire continu obtenu en appliquant le calcul fonctionnel continu (ce qui est possible car u est auto-adjoint).

Puisque f_t ne s'annule pas sur $\mathrm{Sp}(u)$, et par les propriétés du calcul fonctionnel continu, l'opérateur u_t est inversible, d'inverse $u_t^{-1} = \frac{1}{f_t}(u)$. Puisque $\frac{1}{f_t} = \overline{f_t}$ et comme le calcul fonctionnel continu préserve les adjoints, $u_t^{-1} = \overline{f_t}(u) = (f_t(u))^* = {u_t}^*$, donc u_t est unitaire. Puisque $f_{t+s} = f_t f_s$ et puisque le calcul fonctionnel continu est un morphisme d'algèbres, nous avons $f_{t+s}(u) = f_t(u) \circ f_s(u)$, c'est-à-dire $u_{t+s} = u_t \circ u_s$ pour tous les $t, s \in \mathbb{R}$. L'application $t \mapsto f_t$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u))$ muni de la norme uniforme, par les propriétés des séries entières. Puisque le calcul fonctionnel continu est continu de $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u))$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, l'application $t \mapsto f_t(u) = u_t$ est continue. Puisque le calcul fonctionnel continu est continu, puisque qu'il est un morphisme d'algèbres qui envoie l'application $\lambda \mapsto \lambda$ sur u et l'application constante 1 sur id, et par a) en appliquant la compacité de $\mathrm{Sp}(u)$, nous avons

$$\lim_{t\to 0,\, t\neq 0} \frac{u_t - \mathrm{id}}{t} = \lim_{t\to 0,\, t\neq 0} \frac{f_t - 1}{t}(u) = i\,\mathrm{id}(u) = iu \;.$$

c) Soit $t \in \mathbb{R}$. Par le théorème spectral, le spectre de $u_t = f_t(u)$ est l'ensemble des images par f_t des éléments du spectre de u :

$$\mathrm{Sp}(u_t) = \{e^{it\lambda} \;: \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\} \;.$$

Correction de l'exercice E.46. Il est bien connu que, quand $n \to +\infty$, les fonctions polynomiales $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définies par $t \mapsto (1 + \frac{i}{n}t)^n$ convergent uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$ vers la fonction continue $f : t \mapsto e^{it}$. Par la continuité du calcul fonctionnel continu (puisque l'opérateur u est auto-adjoint), la suite $\big(f_n(u) = (1 + i\frac{u}{n})^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc dans $\mathscr{L}(H)$ vers un opérateur $v = f(u)$. Comme f ne s'annule pas sur $\mathrm{Sp}(u)$, l'opérateur v est inversible et par les propriétés du calcul fonctionnel continu, nous avons

$$v^{-1} = \frac{1}{f}(u) = \overline{f}(u) = (f(u))^* = v^* \ .$$

Si v est compact, alors $v \circ v^{-1}$ l'est aussi (par invariance de la compacité par précomposition par un opérateur continu), et donc id est un opérateur compact, ce qui contredit le fait que $\mathscr{H}$ est de dimension infinie (par le théorème de Riesz).

Par le théorème spectral, le spectre de v est l'ensemble des images par f des éléments du spectre de u :

$$\mathrm{Sp}(v) = \{e^{i\lambda} \ : \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\} \ .$$

Si $v = \mathrm{id}$, alors $\mathrm{Sp}(v) = \{1\}$ car $\mathscr{H} \neq \{0\}$, donc par la formule précédente, $e^{i\lambda} = 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, donc $\mathrm{Sp}(u) \subset 2\pi\mathbb{Z}$. Réciproquement, si $\mathrm{Sp}(u) \subset 2\pi\mathbb{Z}$, alors $f_{|\mathrm{Sp}(u)}$ est la fonction constante 1, et donc puisque le calcul fonctionnel continu est un morphisme d'algèbres unitaires, nous avons $v = \mathrm{id}$.

Correction de l'exercice E.47. (1) La suite de polynômes $P_n : z \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{(2k+1)!} \ z^{2k+1}$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$ (et en particulier sur $\mathrm{Sp}(u)$) vers la fonction $z \mapsto \sin z$ continue sur $\mathbb{C}$ (et en particulier sur $\mathrm{Sp}(u)$). Par la continuité du calcul fonctionnel continu, la suite d'opérateurs $P_n(u)$ converge dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ vers un élément v. Par le théorème spectral, $\mathrm{Sp}(v) = \sin\big(\mathrm{Sp}(u)\big)$. Comme u est autoadjoint, son spectre est réel. Donc si $v = 0$, alors $\mathrm{Sp}(v) = \{0\}$ et $\mathrm{Sp}(u)$ est contenu dans l'ensemble des zéros réels de sin, qui est $\pi\mathbb{Z}$.

(2) Puisque u est compact de rang infini, il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C} - \{0\}$ (la suite des valeurs propres non nulles de u, qui doit être infinie, sinon par la finitude de la multiplicité des valeurs propres non nulles de u, l'opérateur u serait de rang fini) qui converge vers 0 et telle que $\mathrm{Sp}(u) = \{0\} \cup \{\lambda_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Puisque u est positif, nous avons $\lambda_n > 0$. Puisque u est de norme au plus 1, nous avons $\lambda_n \leq 1$. Puisque l'application $t \mapsto e^t + e^{it}$ est continue sur $[0,1]$, et par le théorème spectral, nous avons

$$\mathrm{Sp}(\exp(u) + \exp(iu)) = \{e^t + e^{it} \ : \ t \in \mathrm{Sp}(u)\} = \{2\} \cup \{e^{\lambda_n} + \cos\lambda_n + i\sin\lambda_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \ ,$$

ce qui montre le résultat.

(3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons $m = \min_{\|x\|=1} \langle u(x), x\rangle$: l'opérateur u est positif si et seulement si $m \geq 0$, donc si et seulement si

$$\max_{\|x\|=1} \langle (\lambda \,\mathrm{id} - u)(x), x\rangle = \lambda - m \leq \lambda \ .$$

Or nous avons vu en cours que puisque $\lambda\,\mathrm{id} - u$ est auto-adjoint (λ est réel),

$$\|\lambda\,\mathrm{id} - u\| = \max\big\{ \max_{\|x\|=1} \langle (\lambda\,\mathrm{id} - u)(x), x\rangle, - \min_{\|x\|=1} \langle (\lambda\,\mathrm{id} - u)(x), x\rangle \big\} \ .$$

Notons que $\max_{\|x\|=1} \langle (u - \lambda\,\mathrm{id})(x), x\rangle = \max_{\|x\|=1} \langle u(x), x\rangle - \lambda \leq \|u\| - \lambda$ est inférieur à λ dès que $\lambda \geq \frac{\|u\|}{2}$. Le résultat en découle.

Correction de l'exercice E.48. Puisque u est positif et $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe, l'opérateur u est auto-adjoint, ainsi que $u+\mathrm{id}$, et le théorème du calcul fonctionnel continu s'applique à u et à $u+\mathrm{id}$.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $(u+\mathrm{id})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, u^k$, pour tout polynôme P à une indéterminée et à coefficients complexes. Donc si $Q(X) = P(X+1)$, nous avons $Q(u) = P(u+\mathrm{id})$. Par la densité uniforme des fonctions polynomiales dans les fonctions continues sur le spectre (compact) de u, et par la continuité du calcul fonctionnel continu, nous avons donc, pour toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, si $g : x \mapsto f(x+1)$, alors $g(u) = f(u+\mathrm{id})$.

Autre méthode : Si $\varphi_u : \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u)) \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est le calcul fonctionnel continu associé à u, alors l'application de $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u+\mathrm{id})) = \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u)+1)$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ définie par $f \mapsto \varphi_u(f\circ(x+1))$ est un morphisme d'algèbres stellaires qui envoie l'identité sur $u+\mathrm{id}$, donc coïncide avec $\varphi_{u+\mathrm{id}}$. Ceci montre le résultat.

(2) De plus, le spectre de u est positif, et ne contient pas 0 puisque u est inversible, donc est contenu dans le domaine de définition de la fonction Γ. Posons $v = \Gamma(u)$ l'image de la fonction Γ par le calcul fonctionnel continu associé à u. Puisque u commute avec tout polynôme en u, et de nouveau par l'argument ci-dessus de densité et de continuité, u commute donc avec v. Notons $g : x \mapsto x\,\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ par l'équation fonctionnelle bien connue de la fonction Γ.

Puisque le calcul fonctionnel continu est un morphisme d'algèbres pour la première égalité, par le théorème spectral, et par l'équation fonctionnelle pour la dernière égalité, nous avons

$$\mathrm{Sp}(u\circ\Gamma(u)) = \mathrm{Sp}(g(u)) = g(\mathrm{Sp}(u)) = \{\Gamma(x+1) \;:\; x \in \mathrm{Sp}(u)\}\ .$$

Correction de l'exercice E.49. (1) Pour tous les $k, n \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$\langle \sigma^*(e_n), e_k\rangle = \langle e_n, \sigma(e_k)\rangle = \langle e_n, e_{k+1}\rangle = \langle e_{n-1}, e_k\rangle = \langle \sigma^{-1}(e_n), e_k\rangle\ .$$

Puisque $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, nous avons donc $\sigma^{-1} = \sigma^*$ et $u = \frac{\sigma+\sigma^*}{2}$ est auto-adjoint. Comme σ est isométrique, nous avons $\|\sigma\| = \|\sigma^{-1}\| = 1$, donc $\|u\| \leq 1$.

Soit $\lambda \in\ ]-1,1[$. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in \mathscr{H}$ tel que $u(x) - \lambda x = e_0$. Notons $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des coordonnées hilbertiennes de x dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, nous avons $x_{n+1} + x_{n-1} - 2\lambda x_n = 0$. Notons $r_\pm = \lambda \pm i\sqrt{1-\lambda^2} = e^{\pm i\theta}$ où $\theta = \arccos\lambda \in [0,\pi]$ les deux solutions de l'équation $r^2 - 2\lambda r + 1 = 0$. La relation de récurrence $x_{n+1} + x_{n-1} - 2\lambda x_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ implique qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $x_n = a\, r_+^n + b\, r_-^n = a\, e^{in\theta} + b\, e^{-in\theta}$ pour tout $n \geq 0$, car $\lambda \neq \pm 1$. Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2$ converge, nous devons avoir $\lim_{n\to+\infty} |x_n| = 0$, ce qui n'est possible que si $a = b = 0$. En procédant de même avec la relation de récurrence $x_{n+1} + x_{n-1} - 2\lambda x_n = 0$ pour tout $n \leq -1$, nous avons donc $x = 0$, ce qui contredit l'égalité $u(x) - \lambda x = e_0$.

Comme l'opérateur u est auto-adjoint de norme au plus 1, son spectre est contenu dans $\mathbb{R} \cap \overline{B}_{\mathbb{C}}(0,1) = [-1,1]$. Puisque $u - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas surjective pour $\lambda \in\ ]-1,1[$, nous avons donc $]-1,1[\ \subset \mathrm{Sp}(u)$. D'où par fermeture

$$\mathrm{Sp}(u) = [-1,1]\ .$$

Par le théorème spectral, le spectre de $v = \exp(u+2\,\mathrm{id})+\exp((u+2\,\mathrm{id})^{-1})$ est l'ensemble des images par $f : \lambda \mapsto e^{\lambda}+e^{\lambda^{-1}}$ des éléments du spectre de l'opérateur auto-adjoint $u+2\,\mathrm{id}$, qui est $[-1,1]+2=[1,3]$ (et en particulier ne contient pas 0, donc v est bien défini). Un calcul de dérivé montre que f est croissante entre 1 et 3, donc :

$$\mathrm{Sp}(v) = [2e, e^3+e^{1/3}]\ .$$

Correction de l'exercice E.50. Puisque u est positif et $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe, l'opérateur u est auto-adjoint, ainsi que $\mathrm{id}+u$. De plus, le spectre de u est positif et compact, donc le spectre de $\mathrm{id}+u$ est contenu dans $[1,a]$ pour un $a \geq 1$. L'application $f_n : t \mapsto \sqrt[n]{t}$ est continue sur $[1,a]$. En utilisant le calcul fonctionnel continu, posons $v_n = f_n(\mathrm{id}+u)$. Puisque $(f_n)^n = \mathrm{id}$ et puisque le calcul fonctionnel continu est un morphisme d'algèbres, nous avons $(v_n)^n = \mathrm{id}+u$. Puisque f_n est réelle et positive, l'opérateur v_n est positif. Puisque f_n converge uniformément vers 1 sur $[1,a]$ quand n tend vers $+\infty$ et par la continuité du calcul fonctionnel continu (qui envoie la fonction constante 1 sur l'opérateur identité id), nous avons donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = \mathrm{id}$.

Correction de l'exercice E.51. (1) a) Puisque $|2z_n - z_{n-1} - z_{n+1}|^2 \leq 8|z_n|^2 + 2|z_{n-1}|^2 + 2|z_{n+1}|^2$ et par changement d'indice $n \mapsto n\pm 1$ dans des sommes sur $n \in \mathbb{Z}$, la suite $(2z_n - z_{n-1} - z_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient bien à $\mathscr{H}$, donc l'opérateur clairement linéaire Δ est bien défini et continu (de norme au plus $\sqrt{12}$).

Pour tout $z = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathscr{H}$, nous avons

$$\begin{aligned}\langle \Delta z, z\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (2z_n - z_{n-1} - z_{n+1})\,\overline{z_n} = 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} z_n\overline{z_n} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} z_{n-1}\overline{z_n} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} z_{n+1}\overline{z_n}\\ &= 2\|z\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle z, S(z)\rangle\ ,\end{aligned}$$

où $S : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ est l'opérateur défini par $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (z_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$, qui est linéaire, continu, isométrique. Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\mathrm{Re}\langle z, S(z)\rangle| \leq \|z\|\,\|S(z)\| = \|z\|^2$, et Δ est positif (donc auto-adjoint).

b) Soit $f \in \mathbb{L}^2([0,2\pi])$. Nous avons par les propriétés des coefficients de Fourier

$$\begin{aligned}\Delta\circ\mathscr{F}(f) &= \big(2c_n(f) - c_{n-1}(f) - c_{n+1}(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}} = \big(c_n(2f) - c_n(e^{i\theta}f) - c_n(e^{-i\theta}f)\big)_{n\in\mathbb{Z}}\\ &= \big(c_n((2-e^{i\theta}-e^{-i\theta})f)\big)_{n\in\mathbb{Z}}\ .\end{aligned}$$

Donc par l'injectivité de la transformation de Fourier, $\mathscr{F}^{-1}\circ\Delta\circ\mathscr{F}(f)$ est l'application $\theta \mapsto (2-2\cos\theta)f(\theta)$.

c) Si $\lambda \notin \{2-2\cos\theta\ :\ \theta\in[0,2\pi]\}$, alors la fonction continue $\theta \mapsto |2-2\cos\theta-\lambda|$ ne s'annule pas sur $[0,2\pi]$, donc est minorée et majorée par des constantes strictement positives, et l'opérateur $f \mapsto \{\theta \mapsto \frac{1}{2-2\cos\theta-\lambda}\,f(\theta)\}$ est linéaire et continu, et c'est l'inverse de $\mathscr{F}^{-1}\circ\Delta\circ\mathscr{F} - \lambda\,\mathrm{id}$, donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}(\mathscr{F}^{-1}\circ\Delta\circ\mathscr{F})$.

Réciproquement, si $\lambda \in \{2-2\cos\theta\ :\ \theta\in[0,2\pi]\}$, alors l'application constante égale à 1 n'est pas dans l'image de $\mathscr{F}^{-1}\circ\Delta\circ\mathscr{F} - \lambda\,\mathrm{id}$, car $\theta \mapsto \frac{1}{2-2\cos\theta-\lambda}$ n'est pas de carré intégrable. Donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathscr{F}^{-1}\circ\Delta\circ\mathscr{F})$.

d) Donc $\mathrm{Sp}(\Delta) = \mathrm{Sp}(\mathscr{F}^{-1}\circ\Delta\circ\mathscr{F}) = \{2-2\cos\theta\ :\ \theta\in[0,2\pi]\} = [0,4]$.

(2) a) Il est immédiat de vérifier que l'adjoint de S est égal à son inverse, et égal à l'opérateur $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (z_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$. Donc $(\mathrm{id} - S) \circ (\mathrm{id} - S^*) = 2\,\mathrm{id} - S - S^{-1} = (\mathrm{id} - S^*) \circ (\mathrm{id} - S)$, et le résultat en découle immédiatement.

b) Notons u cet opérateur. Sa linéarité vient du fait que chacun des deux facteurs de $(A(z) + B(w), C(z) + D(w))$ est linéaire en (z, w). Nous avons, pour tout $(z, w) \in \mathscr{H}^2$,

$$\begin{aligned}\|u(z,w)\|^2 &= \|A(z) + B(w)\|^2 + \|C(z) + D(w)\|^2 \\ &\leq 2\big(\|A\|^2\|z\|^2 + \|B\|^2\|w\|^2 + \|C\|^2\|z\|^2 + \|D\|^2\|w\|^2\big) \\ &\leq 4 \max\{\|A\|^2, \|B\|^2, \|C\|^2, \|D\|^2\}\ (\|z\|^2 + \|w\|^2)\,.\end{aligned}$$

Donc $\|u\| \leq 2\ \max\{\|A\|, \|B\|, \|C\|, \|D\|\}$ et u est continu.

Pour tous les $(z', w'), (z, w) \in \mathscr{H}^2$, nous avons

$$\begin{aligned}\langle u(z',w'), (z,w)\rangle &= \langle (Az' + Bw', Cz' + Dw'), (z,w)\rangle \\ &= \langle Az', z\rangle + \langle Bw', z\rangle + \langle Cz', w\rangle + \langle Dw', w\rangle \\ &= \langle z', A^*z\rangle + \langle w', B^*z\rangle + \langle z', C^*w\rangle + \langle w', D^*w\rangle \\ &= \langle (z',w'), (A^*z + C^*w, B^*z + D^*w)\rangle\ .\end{aligned}$$

Donc $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^*\end{pmatrix}$.

c) Il est facile de vérifier que si $A, B, C, D, A', B', C', D' \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, alors

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\circ A' + B \circ C' & A \circ B' + B \circ D' \\ C \circ A' + D \circ C' & C \circ B' + D \circ D'\end{pmatrix}\ .$$

Nous avons, par la question a),

$$\begin{aligned}{u_a}^2 &= \begin{pmatrix} a\,\mathrm{id} & \mathrm{id} - S \\ \mathrm{id} - S^* & -a\,\mathrm{id}\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2\,\mathrm{id} + (\mathrm{id} - S)\circ(\mathrm{id} - S^*) & 0 \\ 0 & (\mathrm{id} - S^*)\circ(\mathrm{id} - S) + a^2\,\mathrm{id}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2\,\mathrm{id} + \Delta & 0 \\ 0 & a^2\,\mathrm{id} + \Delta\end{pmatrix}\ .\end{aligned}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur ${u_a}^2 - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathscr{H}^2}$ est donc inversible si et seulement si $a^2\,\mathrm{id}_{\mathscr{H}} + \Delta - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathscr{H}}$ est inversible, donc si et seulement si $\lambda - a^2 \notin \mathrm{Sp}(\Delta) = [0, 4]$. Donc $\mathrm{Sp}({u_a}^2) = [a^2, a^2 + 4]$.

d) Puisque $T \circ T = \mathrm{id}$, l'opérateur v est inversible, d'inverse égal à v. De plus, $T \circ S \circ T = S^*$. Donc par calcul matriciel

$$v \circ u_a \circ v^{-1} = \begin{pmatrix} -a\,\mathrm{id} & -\mathrm{id} + TS^*T \\ -\mathrm{id} + TST & a\,\mathrm{id}\end{pmatrix} = -u_a.$$

Par la question b), l'opérateur u_a est auto-adjoint. Par le théorème spectral, nous avons $\mathrm{Sp}(u_a)^2 = \mathrm{Sp}({u_a}^2) = [a^2, a^2 + 4]$. Puisque u_a est conjugé à $-u_a$, nous avons $\mathrm{Sp}(u_a) = \mathrm{Sp}(v \circ u_a \circ v^{-1}) = \mathrm{Sp}(-u_a) = -\mathrm{Sp}(u_a)$: le spectre de u_a est stable par passage à l'opposé. Donc $\mathrm{Sp}(u_a)$ est l'ensemble des deux racines carrées des éléments de $\mathrm{Sp}({u_a}^2)$. Le résultat en découle.

Correction de l'exercice E.52. (1) a) Puisque u est auto-adjoint compact et $\mathscr{H}$ est séparable, l'opérateur u est diagonalisable en base hilbertienne. Puisque $\mathscr{H}$ de dimension infinie, il existe donc une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$ et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $u(e_n) = \lambda_n e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque u est injectif, les valeurs propres λ_n de u sont non nulles. Elles sont réelles car u est auto-adjoint.

De plus, le spectre de u est de la forme $\{0\} \cup \{\lambda_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ et la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Donc l'application f comme dans l'énoncé est continue sur le spectre de u et l'opérateur $f(u)$ est bien défini par le calcul fonctionnel continu.

Par les propriétés du calcul fonctionnel continu, puisque e_n est un vecteur propre de u de valeur propre λ_n, le vecteur e_n est aussi un vecteur propre de $f(u)$ de valeur propre $f(\lambda_n)$. Donc, par l'écriture en base hilbertienne, et par la continuité et linéarité de f, nous avons, pour tout $x \in \mathscr{H}$ de suite de coordonnées hilbertiennes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$f(u)x = f(u)(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\, e_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\, f(u)e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(\lambda_n)\, x_n\, e_n\ .$$

b) Par la définition de μ_x, par la question précédente et par l'expression du produit scalaire de $\mathscr{H}$ en coordonnées hilbertiennes, nous avons

$$\int_{\mathrm{Sp}(u)} f\ d\mu_x = \langle f(u)x, x\rangle = \big\langle \sum_{n\in\mathbb{N}} f(\lambda_n)x_n e_n, \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n\big\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(\lambda_n)|x_n|^2\ ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

c) Notons Δ_λ la masse de Dirac unité en λ sur $\mathbb{C}$. L'expresssion précédente, le théorème de Fubini pour permuter somme et intégrale, et le fait que deux mesures sont déterminées par les valeurs qu'elles donnent aux fonctions positives ou nulle, montrent que

$$\mu_x = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2\ \Delta_{\lambda_n}\ .$$

La mesure μ_x est donc purement atomique et

$$\mu_x(\{\lambda\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}\,:\ \lambda_n=\lambda} |x_n|^2 = \|\pi_{E_\lambda}(x)\|^2\ ,$$

où $E_\lambda = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id})$ et en utilisant le théorème de Pythagore (E_λ est de dimension finie !).

(2) a) L'application ψ du sous-espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u);\mathbb{C})$ de $\mathbb{L}^2(\mathrm{Sp}(u),\mu_x;\mathbb{C})$ à valeurs dans $\mathscr{H}$, définie par $g \mapsto g(u)x$, est linéaire par la linéarité du calcul fonctionnel continu et celle de l'évaluation en un vecteur donné des opérateurs continus de $\mathscr{H}$. Elle est isométrique, car, par définition de l'adjoint, par le fait que le calcul fonctionnel continu soit un morphisme d'algèbres involutives, et par la définition de la mesure μ_x,

$$\begin{aligned}\|\psi(g)\|^2 &= \|g(u)x\|^2 = \langle g(u)x, g(u)x\rangle = \langle g(u)^*g(u)x, x\rangle = \langle(\overline{g}\,g)(u)x, x\rangle\\ &= \int_{\mathrm{Sp}(u)} |g|^2\ d\mu_x = \|g\|_{\mathbb{L}^2(\mathrm{Sp}(u),\mu_x;\mathbb{C})}{}^2\ .\end{aligned}$$

Par la densité de $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u);\mathbb{C})$ dans $\mathbb{L}^2(\mathrm{Sp}(u),\mu_x;\mathbb{C})$, la complétude de $\mathscr{H}$ et le théorème de prolongement des applications uniformément continues, cette application se prolonge donc de manière unique en une application (linéaire et isométrique par passage à la limite) de $\mathbb{L}^2(\mathrm{Sp}(u), \mu_x; \mathbb{C})$ dans $\mathscr{H}$.

b) Si g_n est l'application continue $\lambda \mapsto \lambda^n$, puisque le calcul fonctionnel continu est un morphisme d'algèbres qui envoie g_1 sur u, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'élément $u^n(x) = \psi(g_n)$ appartient à l'image de ψ. Comme ψ est linéaire, son image contient donc le sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$ engendré par les $u^n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Par l'hypothèse de cette question, cette image est donc dense. Comme ψ est isométrique et $\mathbb{L}^2(\mathrm{Sp}(u), \mu_x; \mathbb{C})$ complet, l'image de ψ est complète, donc fermée. Par densité, elle est donc égale à $\mathscr{H}$. D'où ψ est surjective.

Pour tout $g \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u); \mathbb{C})$, nous avons

$$\psi^{-1} \circ u \circ \psi(g) = \psi^{-1} \circ u(g(u)x) = \psi^{-1}((u \circ g(u))x) = \psi^{-1}((g_1 g)(u)x) = g_1 g \,.$$

puisque le calcul fonctionnel continu est un morphisme d'algèbres. Donc l'opérateur $\psi^{-1} \circ u \circ \psi$ de $\mathbb{L}^2(\mathrm{Sp}(u), \mu_x; \mathbb{C})$ est l'opérateur de multiplication par g_1, par la densité de $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u); \mathbb{C})$ dans $\mathbb{L}^2(\mathrm{Sp}(u), \mu_x; \mathbb{C})$.

Correction de l'exercice E.53. (1) Par linéarité et continuité, un opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert est uniquement défini par les valeurs qu'il prend sur les éléments d'une base hilbertienne, ce qui montre l'unicité.

Soit $A \geq 0$ tel que $|a_n| \leq A$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout x dans $\mathscr{H}$, par l'inégalité de Minkowski et par l'égalité de Parseval, nous avons

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |(2+a_n)x_n - x_{n-1} - x_{n+1}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (2+|a_n|)^2 |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_{n-1}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_{n+1}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (4+A)\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = (4+A)\|x\| \,,
\end{aligned}$$

donc la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |(2+a_n)x_n - x_{n-1} - x_{n+1}|^2$ converge. Par la partie réciproque du théorème de Parseval 1.17, la série $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} ((2+a_n)x_n - x_{n-1} - x_{n+1})\, e_n$ converge donc dans $\mathscr{H}$, et nous posons $u(x) = y$. Il est immédiat que u est linéaire, et que $\|u\| \leq 4 + A$. Donc u est continue, ce qui montre l'existence.

Montrons que l'adjoint de u_a est $u_{\overline{a}}$, où $\overline{a} = (\overline{a_n})_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite conjuguée de a. Par linéarité et continuité, il suffit de montrer que pour tous les $p, q \in \mathbb{Z}$, nous avons $\langle u_a(e_p), e_q\rangle = \langle e_p, u_{\overline{a}}(e_q)\rangle$. Or, par sesquilinéarité,

$$\begin{aligned}
\langle u_a(e_p), e_q\rangle - \langle e_p, u_{\overline{a}}(e_q)\rangle &= \langle (2+a_p)e_p - e_{p-1} - e_{p+1}, e_q\rangle - \langle e_p, (2+\overline{a_q})e_q - e_{q-1} - e_{q+1}\rangle \\
&= -\langle e_{p-1} + e_{p+1}, e_q\rangle + \langle e_p, e_{q-1} + e_{q+1}\rangle \,.
\end{aligned}$$

En distinguant les trois cas $q \neq p-1, p+1$, puis $q = p-1$ et enfin $q = p+1$, cette différence est nulle, d'où le résultat.

En particulier, u_0 est auto-adjoint et nous avons vu ci-dessus que sa norme est au plus 4. Pour tout $x \in \mathscr{H}$, nous avons, par linéarité, sesquilinéarité et continuité, et par deux changements d'indices,

$$\begin{aligned}
\langle u_0(x), x\rangle &= \sum_{p,\,q\in\mathbb{Z}} x_p\,\overline{x_q}\,\langle 2e_p - e_{p-1} - e_{p+1}, e_q\rangle = \sum_{q\in\mathbb{Z}} (2x_q - x_{q+1} - x_{q-1})\,\overline{x_q}\\
&= 2\sum_{q\in\mathbb{Z}} |x_q|^2 - \sum_{q\in\mathbb{Z}} x_{q-1}\,\overline{x_q} - \sum_{q\in\mathbb{Z}} x_{q+1}\,\overline{x_q} = \sum_{q\in\mathbb{Z}} |x_q|^2 + |x_{q+1}|^2 - 2\,\mathrm{Re}(x_{q+1}\,\overline{x_q}\,)\\
&= \sum_{q\in\mathbb{Z}} |x_q - x_{q+1}|^2 \geq 0\ .
\end{aligned}$$

Donc u_0 est positif.

(2) a) Par la formule de Parseval dans $\mathscr{H}$, pour tout $x \in \mathscr{H}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2$ converge (elle est égale à $\|x\|^2$). Par les propriétés de la transformation de Fourier et de la transformation de Fourier inverse, la fonction T est donc bien définie dans $\mathbb{L}^2([0, 2\pi])$, elle est bijective, et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite des coefficients de Fourier de $T(x)$. Par la formule de Parseval dans $\mathbb{L}^2([0, 2\pi])$, l'opérateur T est isométrique (donc continu, ainsi que son inverse).

Pour tout $f \in \mathbb{L}^2([0, 2\pi])$, si $(c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite de ses coefficients de Fourier, alors

$$T \circ u_0 \circ T^{-1}(f) = T \circ u_0\big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e_n\big) = T\big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (2\, c_n(f) - c_{n-1}(f) - c_{n+1}(f))\, e_n\big)\ .$$

Comme $c_{n\pm 1}(f) = c_n(t \mapsto e^{\mp it} f(t))$ et par linéarité de la transformation de Fourier, l'application $T \circ u_0 \circ T^{-1}(f)$ est donc l'application

$$t \mapsto 2f(t) - e^{it} f(t) - e^{-it} f(t) = 2(1 - \cos t) f(t)\ .$$

b) Nous avons $1-\cos\theta \in\,]0, 2[$, donc si k est assez grand, alors b_k et c_k sont bien définis et appartiennent à $[0, 2\pi]$. Si $b_k \leq t \leq c_k$, alors $1 - \cos\theta - \frac{1}{k} \leq 2\sin^2 \frac{t}{2} \leq 1 - \cos\theta + \frac{1}{k}$, donc $|2(1 - \cos t) - 2(1 - \cos\theta)| \leq \frac{2}{k}$. Nous avons donc $\|f_k\|_2 = 1$ et

$$\begin{aligned}
\|v_0(f_k) - 2(1 - \cos\theta) f_k\|_2^2 &= \int_0^{2\pi} |2(1 - \cos t) f_k(t) - 2(1 - \cos\theta) f_k(t)|^2\, dt\\
&= \frac{1}{c_k - b_k} \int_{b_k}^{c_k} |2(1 - \cos t) - 2(1 - \cos\theta)|^2\, dt\\
&\leq \frac{4}{k^2}\ ,
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

c) Montrons que $\mathrm{Vp}(v_0) = \emptyset$ et que $\mathrm{Sp}_{ess}(v_0) = \mathrm{Sp}(v_0) = [0, 4]$, le résultat en découle puisque u_0 est conjugué à v_0 par l'isomorphisme isométrique T.

Supposons par l'absurde qu'il existe $f \in \mathbb{L}^2([0, 2\pi]) - \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $v_0(f) = \lambda f$. Alors pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$, nous avons $2(1 - \cos t) f(t) = \lambda f(t)$. Pour t dans un ensemble de mesure non nulle dans $[0, 2\pi]$, nous avons donc $2(1-\cos t) = \lambda$, ce qui contredit le fait que $t \mapsto 2(1 - \cos t)$ prend au plus deux fois une valeur donnée sur $[0, 2\pi]$. Donc $\mathrm{Vp}(v_0) = \emptyset$.

Puisque T est isométrique, nous avons $\|v_0\| \leq 4$, et v_0 est un opérateur auto-adjoint positif (car $2(1 - \cos t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$). Donc $\mathrm{Sp}(v_0) \subset [0, 4]$ et $\mathrm{Sp}(v_0) = \mathrm{Sp}_{ess}(v_0) \cup \mathrm{Vp}(v_0) = \mathrm{Sp}_{ess}(v_0)$, par la proposition 1.48.

Soit $\theta \in \,]0,\pi[$. La suite $(f_k)_{k\geq k_0}$ de la question b) est unitaire, et n'admet pas de sous-suite convergente (sinon, le support de la limite d'une sous-suite convergente dans $\mathbb{L}^2([0,2\pi])$ serait contenu dans le singleton $\big\{2\arcsin\sqrt{(1-\cos\theta)/2}\,\big\}$). Donc tout élément de la forme $2(1-\cos t)$ où $t \in \,]0,\pi[$ appartient au spectre essentiel de v_0. D'où $]0,4[\,\subset \mathrm{Sp}_{ess}(v_0)$. Comme $\mathrm{Sp}(v_0) = \mathrm{Sp}_{ess}(v_0)$ est fermé, le résultat en découle.

(3) a) Notons w l'opérateur compact $v-u$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{ess}(u)$. Il existe donc $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs unitaires dans $\mathscr{H}$, n'admettant pas de sous-suite qui converge, telle que $\lim_{k\to+\infty} u(x_k) - \lambda x_k = 0$. Quitte à extraire, la suite $(w(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $y \in \mathscr{H}$, puisque l'opérateur w est compact. Donc $v(x_k)-\lambda x_k = (u(x_k)-\lambda x_k)+w(x_k)$ converge vers y. Si par l'absurde $\lambda \notin \mathrm{Sp}(v)$, alors $v-\lambda\,\mathrm{id}$ est inversible, donc $x_k = (v-\lambda\,\mathrm{id})^{-1}(v(x_k)-\lambda x_k)$ converge vers $(v-\lambda\,\mathrm{id})^{-1}(y)$, ce qui a été exclut.

b) Par un exercice vu en cours, un opérateur qui est diagonal dans une base hilbertienne, dont les coefficients diagonaux tendent vers 0, est compact. Donc l'opérateur $u_a - u_0$ est compact. Par a), nous avons donc $\mathrm{Sp}_{ess}(u_a) \subset \mathrm{Sp}(u_0) = [0,4]$ et $[0,4] = \mathrm{Sp}_{ess}(u_0) \subset \mathrm{Sp}(u_a)$. Comme la suite a est réelle, l'opérateur u_a est auto-adjoint. Par la proposition 1.48, $\mathrm{Sp}(u_a)$ est donc réunion de $\mathrm{Sp}_{ess}(u_a)$ et de points isolés. Donc $\mathrm{Sp}_{ess}(u_a)$ contient $[0,4]$ (qui n'a pas de point isolé), et $\mathrm{Sp}_{ess}(u_a)$ est donc égal à $[0,4]$.

(4) a) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$\begin{aligned}
U\circ u_a\circ U^{-1}(e_n) &= (-1)^n U\circ u_a(e_n) = (-1)^n U(2e_n - e_{n+1} - e_{n-1} + a_n e_n)\\
&= (-1)^n\big(2(-1)^n e_n - (-1)^{n+1}e_{n+1} - (-1)^{n-1}e_{n-1} + a_n(-1)^n e_n\big)\\
&= -(2e_n - e_{n+1} - e_{n-1} - a_n e_n) + 4e_n = (-u_{-a} + 4\,\mathrm{id})(e_n)\ .
\end{aligned}$$

Comme deux opérateur linéaires continus qui coïncident sur tous les éléments d'une base hilbertienne sont égaux, nous avons $U\circ u_a\circ U^{-1} = -u_{-a} + 4\,\mathrm{id}$.

Par l'invariance du spectre par conjugaison et par le théorème du calcul fonctionnel continu, nous avons

$$\mathrm{Sp}(u_a) = \mathrm{Sp}(U\circ u_a\circ U^{-1}) = \mathrm{Sp}(-u_{-a}+4\,\mathrm{id}) = -\,\mathrm{Sp}(u_{-a}) + 4\ .$$

D'où

$$M_a = \sup \mathrm{Sp}(u_a) = 4 - \inf \mathrm{Sp}(u_{-a}) = 4 - m_{-a}\ .$$

b) Il est immédiat que pour tout $n\in\mathbb{Z}$ fixé, $1-\frac{|n|}{p}$ converge vers 1 quand $p\to+\infty$. Par la question (1), nous avons

$$\begin{aligned}
\langle u_0(\phi_p),\phi_p\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |(\phi_p)_{n+1} - (\phi_p)_n|^2\\
&= \sum_{n=0}^{p-1}\Big|(1-\frac{n+1}{p}) - (1-\frac{n}{p})\Big|^2 + \sum_{n=-p}^{-1}\Big|(1+\frac{n+1}{p}) - (1+\frac{n}{p})\Big|^2\\
&= \sum_{n=0}^{p-1}\frac{1}{p^2} + \sum_{n=-p}^{-1}\frac{1}{p^2} = \frac{2}{p}\ ,
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand $p\to+\infty$.

c) Si $\liminf_{p\to+\infty} f_a(\phi_p) < 0$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $p_N \geq N$ tel que $f_a(\phi_{p_N}) \leq -2\epsilon$. Par la question précédente, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $q \geq N_0$, alors $\langle u_0(\phi_q), \phi_q\rangle < \epsilon$. Donc en posant $p = p_{N_0} \geq N_0$, nous avons

$$\langle u_a(\phi_p), \phi_p\rangle = \langle u_0(\phi_p), \phi_p\rangle + f_a(\phi_p) \leq \epsilon - 2\epsilon = -\epsilon < 0 \ .$$

Puisque u_a est auto-adjoint, nous avons par le principe de Rayleigh

$$m_a = \inf_{x\in\mathscr{H},\ \|x\|=1} \langle u_a(x), x\rangle \leq \frac{\langle u_a(\phi_p), \phi_p\rangle}{\|\phi_p\|^2} < 0 \ .$$

d) Remarquons que $f_{-a} = -f_a$. Par conséquent, si $\limsup_{p\to+\infty} f_a(\phi_p) > 0$, alors $\liminf_{p\to+\infty} f_{-a}(\phi_p) < 0$, donc $m_{-a} < 0$ par la question précédente, donc $M_a = 4 - m_{-a} > 4$ par la question (4) a).

e) L'application $h_a : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}$, définie par $(x, y) \mapsto \langle u_a(x), y\rangle$, est une forme sesquilinéaire, car le produit scalaire en est une et u_a est linéaire. Comme u_a est auto-adjoint et $\mathrm{Sp}(u_a) = [0, 4]$, nous avons donc $m_a = 0$, et par le principe de Rayleigh, $\langle u_a(x), x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathscr{H}$. Donc h_a est positive. Puisque $h_a(\phi_p, \phi_p) = f_a(\phi_p) + \langle u_0(\phi_p), \phi_p\rangle$, par l'hypothèse et la question (4) b), nous avons donc $\lim_{p\to+\infty} h_a(\phi_p, \phi_p) = 0$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (seul le cas d'égalité demande l'hypothèse définie), pour tout $x \in \mathscr{H}$, nous avons

$$|h_a(\phi_p, x)|^2 \leq h_a(\phi_p, \phi_p)\ h_a(x, x) \ ,$$

qui tend donc vers 0 quand $p \to +\infty$. De même, $h_0(\phi_p, x)$ tend vers 0 quand $p \to +\infty$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Par la question (4) b), nous avons donc

$$a_k = \lim_{p\to+\infty} a_k\ (\phi_p)_k = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\ (\phi_p)_n (e_k)_n = \lim_{p\to+\infty} h_a(\phi_p, e_k) - h_0(\phi_p, e_k) = 0 \ .$$

Correction de l'exercice E.54. (1) a) La forme linéaire $f \mapsto \int_0^1 f(t)\,dt$ est bien définie et continue, car par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\int_0^1 1 \cdot f(t)\,dt \leq \|1\|_2 \|f\|_2$. Donc son noyau F est fermé.

b) Nous savons (voir l'exercice corrigé E.14) que l'opérateur V est bien défini, continu et compact, car c'est l'opérateur de type Hilbert-Schmidt de noyau

$$N(x, y) = \mathbb{1}_{\{(x,y)\in[0,1]^2\ :\ y\leq x\}} \ ,$$

et que Vf est continue sur $[0, 1]$ car si $0 \leq x \leq y \leq 1$, alors

$$|Vf(x) - Vf(y)| = \Big|\int_0^1 \mathbb{1}_{[x,y]}(t)\ f(t)\,dt\Big| \leq \sqrt{y - x}\ \|f\|_2 \ .$$

Nous savons aussi que V est injectif, car si $f \in \mathscr{H}$ et $Vf = 0$, alors $Vf(x) = \langle f, \mathbb{1}_{[0,x]}\rangle_2 = 0$ pour presque tout $x \in [0, 1]$. Comme l'application de $[0, 1]$ dans $\mathscr{H}$ définie par $x \mapsto \mathbb{1}_{[0,x]}$ est continue, nous avons $\langle f, \mathbb{1}_{[0,x]}\rangle_2 = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Donc par différence, $\langle f, \mathbb{1}_{[x,y]}\rangle_2 = 0$ pour tous les $x, y \in [0, 1]$. Donc par sommation, $\langle f, g\rangle_2 = 0$ pour toute fonction étagée g. Par densité des fonctions étagées dans $\mathscr{H}$, nous avons donc $\langle f, f\rangle_2 = 0$, donc $f = 0$ presque partout.

c) Puisque P est auto-adjoint et idempotent, nous avons

$$T = A^* A = V^* P^* P V = V^* P P V = V^* P V \ .$$

Puisque l'opérateur T est de la forme $A^* A$, il est auto-adjoint positif. Puisque la composée d'un opérateur compact avec un opérateur quelconque est encore un opérateur compact, et puisque V est compact, l'opérateur T est compact.

Soit $f \in \mathscr{H}$ tel que $Tf = 0$ presque partout. Montrons que $f = 0$ presque partout, ce qui montrera que $0 \notin \mathrm{Vp}(T)$. Nous avons $\|Af\|_2^2 = \langle f, A^* Af\rangle_2 = \langle f, Tf\rangle_2 = 0$, donc $Af = 0$ presque partout. Donc Vf est constante presque partout, et comme Vf est continue et vaut 0 en 0, nous avons $Vf = 0$. Comme V est injective, le résultat en découle.

(2) Notons que V^* est l'opérateur de type Hilbert-Schmidt de noyau $(x, y) \mapsto \overline{N(y, x)}$, c'est-à-dire que $V^*f(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$ pour tout $f \in \mathscr{H}$ et presque tout $x \in [0, 1]$. Si f est continue, alors Vf est la primitive de f valant 0 en 0, et V^*f est l'opposé de la primitive de f valant 0 en 1, donc Af est la primitive de f d'intégrale nulle, et $Tf = V^*Af$ est l'opposé de la primitive de la primitive de f, valant 0 en 1 et aussi en 0 car $Tf(1) - Tf(0) = -\int_0^1 Af = 0$. En particulier, Tf est de classe C^2 et $(Tf)'' = -f$.

Puisque T est compact et $\mathscr{H}$ de dimension infinie, nous avons

$$\mathrm{Sp}(T) = \{0\} \cup \mathrm{Vp}(T) \ .$$

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathscr{H}$ tels que $Tf = \lambda f$ presque partout et f ne soit pas presque partout nulle. Alors $\lambda \neq 0$ par la question (1) c), et $\lambda \geq 0$ car f est auto-adjoint positif donc de spectre contenu dans $[0, +\infty[$. Par conséquent, $\lambda > 0$. Notons que Tf est continue, car Vf est continue, donc PVf, qui diffère de VF seulement par une constante additive, est continue et Tf est l'opposé d'une primitive de PVf. Donc nous pouvons supposer que f, qui vaut presque partout $\frac{1}{\lambda}Tf$, est continue. Par ce qui précède, f est donc de classe C^2 et vérifie l'équation différentielle $\lambda f'' = -f$ avec les conditions au bord $f''(0) = f''(1) = 0$. Les solutions de l'équation différentielle $\lambda f'' = -f$ sont les applications de la forme $x \mapsto a\sin(\lambda^{-\frac{1}{2}}\, x) + b\cos(\lambda^{-\frac{1}{2}}\, x)$. Puisque $f''(0) = 0$ et $f \neq 0$, nous avons $b = 0$ et $a \neq 0$. Puisque $f''(1) = 0$, nous avons donc $\sin \lambda^{-\frac{1}{2}} = 0$, d'où $\lambda^{-\frac{1}{2}} \in \pi\mathbb{Z}$. Par conséquent,

$$\mathrm{Vp}(T) \subset \{\lambda_n = \frac{1}{\pi^2(n+1)^2} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \ .$$

L'inclusion inverse est immédiate, et de plus λ_n est de multiplicité 1. Puisque T est auto-adjoint, sa norme $\|T\|$ est égale au rayon spectral de T. Donc par la propriété d'algèbre stellaire,

$$\|A\| = \sqrt{\|A^* A\|} = \sqrt{\|T\|} = \frac{1}{\pi} \ .$$

(3) Posons $\varphi_n : x \mapsto \sqrt{2}\,\sin((n+1)\pi x)$, qui est de classe C^∞. Alors φ_n est un vecteur propre unitaire de T associé à la valeur propre λ_n, qui est de multiplicité 1. Puisque l'opérateur T est auto-adjoint compact, il est diagonalisable en base hilbertienne, donc $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathscr{H}$.

(4) L'opérateur $K_N \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ de type Hilbert-Schmidt de noyau $N : (x, y) \mapsto \max\{x, y\} - xy$ vérifie, pour tout $f \in \mathscr{H}$ et presque tout $x \in [0, 1]$,

$$K_N f(x) = \int_0^x t f(t)\; dt + x \int_x^1 f(t)\; dt - x \int_0^1 t f(t)\; dt \ .$$

Le second membre est nul en $x = 0$ et en $x = 1$. Si f est continue, alors $K_N f$ est C^1 et pour tout $x \in [0, 1]$

$$(K_N f)'(x) = xf(x) + \int_x^1 f(t)\,dt - xf(x) - \int_0^1 tf(t)\,dt\ .$$

Donc $K_N f$ est C^2 et $(K_N f)'' = -f$. Donc $K_N f$ et Tf vérifient la même équation différentielle linéaire du second ordre $y'' = -f$, et coïncident en 0 et en 1, donc sont égales.

Donc les opérateurs continus K_N et T, qui coïcident sur le sous-espace dense $\mathscr{C}([0, 1]; \mathbb{C})$ de $\mathscr{H}$, sont égaux.

(5) Par convergence absolue uniforme, l'application $M : [0, 1]^2 \to \mathbb{C}$ définie par

$$M : (x, y) \mapsto \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(\pi(n+1)x)\sin(\pi(n+1)y)}{(n+1)^2}$$

est continue sur $[0, 1]^2$, donc appartient à $\mathbb{L}^2([0, 1]^2)$. Notons $K_M \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ l'opérateur de type Hilbert-Schmidt de noyau M. Alors par le théorème de Fubini et puisque $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormée à valeurs réelles, nous avons, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
K_M\varphi_k(x) &= \int_0^1 M(x, y)\varphi_k(y)\,dy = \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{(n+1)^2}\,\varphi_k(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi_n(x)}{(n+1)^2}\int_0^1 \varphi_n(y)\varphi_k(y)\,dy = \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi_n(x)}{(n+1)^2}\,\langle\varphi_n, \varphi_k\rangle_2 \\
&= \frac{1}{\pi^2(k+1)^2}\,\varphi_k(x) = \lambda_k\,\varphi_k(x) = (T\varphi_k)(x)\ .
\end{aligned}$$

Les opérateurs linéaires continus K_M et T, qui coïncident sur une base hilbertienne, sont donc égaux. Comme $T = K_N$, les deux opérateurs de type Hilbert-Schmidt de noyau M et N sont égaux, et ceci entraîne que leurs noyaux sont égaux presque partout. Comme M et N sont en fait continus, ils coïncident partout, ce qui montre le résultat.

Analyse harmonique.

Correction de l'exercice E.55. (1) Si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est harmonique, le théorème de la valeur moyenne implique que pour tout $r \in [0,1[$, nous avons $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}_1} f(r\zeta)\, d\sigma(\zeta) = f(0)$. Donc si f est positive, alors $\rho(f) = \sup_{0\le r<1}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} f(r\zeta)\, d\sigma(\zeta) = 2\pi f(0) < \infty$.

(2) Soit μ une mesure borélienne positive finie sur $\mathbb{S}_1$. Nous avons vu en cours que l'application $P\mu$ est alors harmonique positive. Donc par la question précédente, $\rho(P\mu)$ est finie.

Voici une preuve directe. Par une propriété connue du noyau de Poisson, nous avons, pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} P_z(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = 2\pi$$

(ce qui se retrouve aussi en disant que $z \mapsto P_z(\zeta) = \operatorname{Re}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}$ est harmonique et en utilisant le théorème de la moyenne). Pour tout $r \in [0,1[$, nous avons donc, en utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} P\mu(r\zeta)\, d\sigma(\zeta) &= \int_{\zeta\in\mathbb{S}_1}\int_{\zeta'\in\mathbb{S}_1} P_{r\zeta}(\zeta')\, d\mu(\zeta')\, d\sigma(\zeta) = \int_{\zeta'\in\mathbb{S}_1}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} P_{r\zeta}(\zeta')\, d\sigma(\zeta)\, d\mu(\zeta')\\ &= \int_{\zeta'\in\mathbb{S}_1}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} P_{r\zeta'}(\zeta)\, d\sigma(\zeta)\, d\mu(\zeta') = \int_{\zeta'\in\mathbb{S}_1} 2\pi\, d\mu(\zeta') = 2\pi\|\mu\|\ .\end{aligned}$$

Le résultat en découle, en prenant la borne supérieure sur r.

(3) Comme $1-z$ ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$, l'application h, partie imaginaire d'une application holomorphe, est harmonique. Il est facile de voir que $h(\frac{i}{2})$ est non nul. Si r tend vers 1^- et si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\frac{1+r\,e^{i\theta}}{1-r\,e^{i\theta}}$ est équivalent à $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}} = -i\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}$. Donc la partie imaginaire de son carré est nulle. Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\frac{1+r\,e^{i\theta}}{1-r\,e^{i\theta}}$ est réel, donc la partie imaginaire de son carré est nulle. Ainsi, les limites radiales de h sont toutes nulles.

(4) Supposons que $h = h_1 - h_2$ où h_i est une application harmonique positive. Alors par l'inégalité triangulaire, $\rho(h) \le \rho(h_1) + \rho(h_2)$, qui est fini par (1). Par la démonstration du théorème 2.15 qui n'utilise que le fait que h vérifie la condition (24), nous avons $h = P[\phi_h]$ où $\phi_h : \zeta \mapsto \lim_{r\to 1^-} h(r\,\zeta)$ est la limite radiale de h. Or par (3), nous avons $\phi_h = 0$, donc $h = 0$, ce qui contredit la définition de h.

Correction de l'exercice E.56. (1) Notons $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$. Pour montrer que h_0 est harmonique, il suffit de montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{\|x\|^{n-1}} = (\sum x_i^2)^{-\frac{n-1}{2}}$ l'est. Or $\frac{\partial f}{\partial x_i} = -(n-1)x_i(\sum x_i^2)^{-\frac{n+1}{2}}$ et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = -(n-1)\Big(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2\Big)^{-\frac{n+1}{2}} + (n-1)(n+1)x_i^2\Big(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2\Big)^{-\frac{n+3}{2}}\ ,$$

d'où le résultat par sommation des $n+1$ termes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Si $f : t \mapsto \frac{1}{(n-1)t^{n-1}}$ et $g : x \mapsto \|x\|$, alors, si $X = (X_1, \dots, X_{n+1})$,

$$d_x(f\circ g)(X) = f'(g(x))\, d_x g(X) = -\frac{1}{\|x\|^n}\sum (2x_i)(X_i)\frac{1}{2\|x\|}\ ,$$

donc $d_x(f\circ g)(\frac{x}{\|x\|}) = -\frac{1}{\|x\|^n}$, ce qui montre la seconde assertion. Une autre manière est de dire que nous avons calculé le gradient $\nabla h_0(x)$ ci-dessus, qui vaut $-\frac{x}{\|x\|^{n+1}}$, et donc

$$d_x h_0(\frac{x}{\|x\|}) = \langle \nabla h_0(x), \frac{x}{\|x\|}\rangle = -\frac{1}{\|x\|^n}\ .$$

(2) Quitte à faire une translation, nous pouvons supposer que $x_0 = 0$. Appliquons la formule de Green avec $u = h$ et $v = h_0$. Notons que $\zeta \mapsto h_0(R\zeta)$ est l'application nulle. Soit $\epsilon > 0$. Comme u et v sont harmoniques sur un voisinage de $A(\epsilon, R)$, nous avons, pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit,

$$\int_{\mathbb{S}_n} h(R\zeta)\frac{\partial h_0}{\partial\nu}(R\zeta)\ R^n\ d\sigma_n(\zeta) - \int_{\mathbb{S}_n}\big(h(\epsilon\zeta)\frac{\partial h_0}{\partial\nu}(\epsilon\zeta) - h_0(\epsilon\zeta)\frac{\partial h}{\partial\nu}(\epsilon\zeta)\big)\ \epsilon^n\ d\sigma_n(\zeta) = 0\ .$$

Puisque $h_0(\epsilon\zeta)$ est équivalent à $\frac{1}{(n-1)\epsilon^{n-1}}$ quand ϵ tend vers 0, et puisque la dérivée radiale de h est bornée sur $\overline{B}(0,R)$, le dernier terme ci-dessus $\int_{\mathbb{S}_n} h_0(\epsilon\zeta)\frac{\partial h}{\partial\nu}(\epsilon\zeta)\ \epsilon^n\ d\sigma_n(\zeta)$ converge vers 0 quand ϵ tend vers 0. En remplaçant la dérivée radiale de h_0 par sa valeur calculée en (1), et en remarquant que $\int_{\mathbb{S}_n} h(\epsilon\zeta)\ d\sigma_n(\zeta)$ tend vers $h(0)$ quand ϵ tend vers 0 par continuité de h et puisque σ_n est une mesure de probabilité, nous avons donc

$$\int_{\mathbb{S}_n} h(R\zeta)\ d\sigma_n(\zeta) = h(0)\ .$$

(3) Puisque $\overline{\Omega}$ est compact, l'application continue $|h|$ atteint son maximum en un point x_0 de $\overline{\Omega}$. Si $x_0 \in \Omega$, soit $R > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, R) \subset \Omega$. Alors, pour tout $r \in\ ]0, R]$,

$$|h(x_0)| = \Big|\int_{\mathbb{S}_n} h(x_0+r\zeta)\ d\sigma_n(\zeta)\Big| \le \int_{\mathbb{S}_n} |h(x_0+r\zeta)|\ d\sigma_n(\zeta) \le \int_{\mathbb{S}_n} |h(x_0)|\ d\sigma_n(\zeta) = |h(x_0)|\ .$$

Par le cas d'égalité, nous avons donc que h est constante sur un voisinage de x_0, et donc constante dans la composante connexe de x_0 dans Ω, ce qui montre le résultat.

Correction de l'exercice E.57. (1) L'application $g - h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est continue, harmonique sur Ω, et négative ou nulle sur $\partial\Omega$. Puisque Ω est borné et par le principe du maximum, elle atteint son maximum sur $\partial\Omega$, donc est négative ou nulle sur $\overline{\Omega}$.

(2) Remarquons que v est nécessairement positive ou nulle. Pour tout $r \in\ ]0, 1[$, par la formule de la moyenne pour v,

$$\|u_r\|_p^p = \int_{\zeta\in\mathbb{S}^1} |u_r(\zeta)|^p\ d\sigma(\zeta) = \int_{\zeta\in\mathbb{S}^1} |u(r\zeta)|^p\ d\sigma(\zeta) \le \int_{\zeta\in\mathbb{S}^1} v(r\zeta)\ d\sigma(\zeta) = 2\pi v(0)\ .$$

Donc $\|u\|_{h^p} \le \sqrt[p]{2\pi v(0)} < +\infty$, et $u \in h^p(\mathbb{D})$.

(3) Puisque la multiplication par r est holomorphe, l'application $w \mapsto u(rw)$ est harmonique sur $\mathbb{D}$, et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. Par la formule de Poisson, nous avons donc, pour tout $w \in \mathbb{D}$,

$$u(rw) = \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta\in\mathbb{S}^1} P_w(\zeta)u(r\zeta)\ d\sigma(\zeta)\ .$$

En posant $w = z/r$, le résultat en découle.

(4) a) Par la question (2), par l'inégalité de Jensen (que nous pouvons appliquer, car $d\mu(\zeta) = \frac{1}{2\pi} P_{z/r}(\zeta)\, d\sigma(\zeta)$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{S}_1$ et $u_r : \mathbb{S}_1 \to \mathbb{C}$ est continue), puisque $v_{(r)}$ coïncide avec $|u|^p$ sur $\partial B(0,r)$, et par la formule de Poisson pour l'application $z \mapsto v_{(r)}(rz) : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, qui est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et harmonique sur $\mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} |u(z)|^p &= \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} P_{z/r}(\zeta)\; u_r(\zeta)\; d\sigma(\zeta)\Big|^p \le \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} P_{z/r}(\zeta)\; |u(r\zeta)|^p\; d\sigma(\zeta) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} P_{z/r}(\zeta)\; v_{(r)}(r\zeta)\; d\sigma(\zeta) = v_{(r)}\big(r(z/r)\big) = v_{(r)}(z)\;. \end{aligned}$$

b) Si $|z| = r_1$, alors $v_{(r_1)}(z) = |u(z)|^p \le v_{(r_2)}(z)$ par la question a). Donc $v_{(r_1)}$ et $v_{(r_2)}$ sont des applications continues de $\overline{B(0,r_1)}$ dans $\mathbb{R}$, harmoniques sur $B(0,r_1)$, telles que $v_{(r_1)} \le v_{(r_2)}$ sur $\partial B(0,r_1)$. Par la question (1), le résultat en découle.

c) Pour tout $r \in\,]0,1[$, si n_0 est assez grand, la suite $(v_{(r_n)})_{n\ge n_0}$ est une suite croissante de fonctions harmoniques de l'ouvert connexe $B(0,r)$ dans $\mathbb{R}$. Par le théorème d'Harnack, elle converge donc (uniformément sur les compacts) vers une application harmonique $v : B(0,r) \to \mathbb{R}$ si $v_{(r_n)}(0)$ ne converge pas vers $+\infty$. Or par la formule de la moyenne, pour tout $r \in\,]0,1[$,

$$v_{(r)}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} v_{(r)}(r\zeta)\; d\sigma(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} |u(r\zeta)|^p\; d\sigma(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\|u_r\|_p^p \le \frac{1}{2\pi}\|u\|_{h^p}^p\;.$$

Nous avons supposé que $u \in h^p(\mathbb{D})$, donc $v_{(r_n)}(0)$ est borné indépendamment de n, et la convergence s'en déduit.

Les applications $v : B(0,r) \to \mathbb{R}$, lorsque $r \in\,]0,1[$, se recollent pour donner une application harmonique $v : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$. Comme $|u(z)|^p \le v_{(r)}(z)$ si $|z| \le r$, et par croissance, nous avons donc bien $|u(z)|^p \le v(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(5) Si $\|u\|_{h^p} = 0$, alors pour tout $r \in\,]0,1[$, nous avons $u_r = 0$ presque partout, donc partout par continuité de u. Donc $u(x) = 0$ si $0 < \|x\| < 1$, et encore par continuité, $u = 0$. L'homogénéité de la norme $\|\cdot\|_{h^p}$ et son inégalité triangulaire sont immédiates.

Montrons que $h^p(\mathbb{D})$ est complet. Soit $(v^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $h^p(\mathbb{D})$. Comme $|u(0)| \le \|u\|_{h^p}$ pour tout $u \in h^p(\mathbb{D})$, l'application $u \mapsto u(0)$ est une forme linéaire continue (de norme au plus 1). Donc la suite complexe $(v^{(n)}(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et converge vers $w(0)$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $r \in\,]0,1[$, l'application $v \mapsto v_r$ de $h^p(\mathbb{D})$ dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{S}_1, \sigma; \mathbb{C})$ est linéaire continue (de norme au plus 1). Par conséquent, la suite $(v_r^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathbb{L}^p(\mathbb{S}_1, \sigma; \mathbb{C})$, donc converge vers $w^{(r)} \in \mathbb{L}^p(\mathbb{S}_1, \sigma; \mathbb{C})$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous les $r \in\,]0,1[$ et $n, m \ge n_0$, nous avons

$$\|v_r^{(n)} - v_r^{(m)}\|_p < \epsilon\;. \tag{37}$$

En faisant tendre m vers $+\infty$ dans la formule (37), nous avons $\|v_r^{(n)} - w^{(r)}\|_p < \epsilon$ pour tous les $r \in\,]0,1[$ et $n \ge n_0$. Considérons l'application $v : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ définie par $v(0) = w(0)$ et $v(z) = w^{(|z|)}(z)$ si $0 < |z| < 1$. Pour tous les $n \ge n_0$ et $r \in\,]0,1[$, nous avons $\|v_r^{(n)} - v_r\|_p < \epsilon$, donc $\|v^{(m)} - v\|_{h^p} < \epsilon$ pour tout $n \ge n_0$. Nous laissons au lecteur le soin de montrer que v est harmonique. Donc $v \in h^p(\mathbb{D})$ et $(v^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v dans $h^p(\mathbb{D})$.

Correction de l'exercice E.58. (1) Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Nous avons

$$\Delta(uv) = \Delta u + 2\langle\nabla u, \nabla v\rangle + \Delta v\;.$$

a) Si $\Delta u = \Delta(u^2) = 0$, alors $\big(\frac{\partial u}{\partial x}\big)^2 + \big(\frac{\partial u}{\partial y}\big)^2 = 0$, donc $df = 0$, d'où f est constante puisque Ω est connexe. Le résultat en découle.

b) Si $\Delta u = \Delta v = 0$, alors $\Delta(uv) = 0$ si et seulement si ∇v et ∇u sont orthogonaux en tout point de Ω, donc si et seulement si ∇v et $i\nabla u$ sont colinéaires en tout point de Ω, donc, puisque ∇u ne s'annule pas, si et seulement s'il existe une application $c : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -c\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = c\frac{\partial u}{\partial x} \ . \tag{38}$$

D'où, en dérivant par rapport à x et à y chacune de ces deux équations, nous avons

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - c\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ ,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \ .$$

En ajoutant la première et la quatrième équation, nous avons (par le lemme de Schwarz et puisque u est harmonique)

$$\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} \ . \tag{39}$$

En soustrayant la seconde de la troisième équation, nous avons de même

$$\frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} \ . \tag{40}$$

En multipliant par $\frac{\partial u}{\partial y}$ l'égalité (39), par $\frac{\partial u}{\partial x}$ l'égalité (40) et en les ajoutant, nous avons donc

$$\frac{\partial c}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}^2 + \frac{\partial u}{\partial y}^2\Big) = 0 \ .$$

Donc, en tout point de Ω, nous avons $\frac{\partial c}{\partial x} = 0$ et de même $\frac{\partial c}{\partial y} = 0$. Donc l'application c est constante, par connexité de Ω.

Puisque u et v sont à valeurs réelles, les équations (38) impliquent que $c \in \mathbb{R}$, et que $c \neq 0$, car v n'est pas constante sur l'ouvert connexe Ω.

Pour conclure, pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'application $v - ic\,u$ est holomorphe si et seulement si $\overline{\partial}(v - ic\,u) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\Big(\frac{\partial v}{\partial x} - ic\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + i\Big(\frac{\partial v}{\partial y} - ic\frac{\partial u}{\partial y}\Big) = 0 \ ,$$

et donc si et seulement si les égalités (38) sont vérifiées.

(2) a) Puisque u est harmonique positive sur $\mathbb{D}$, par l'inégalité de Harnack, nous avons, pour tout $r \in \,]0,1[$ et $\zeta \in \mathbb{S}_1$,

$$\frac{1-r}{1+r}\,u(0) \leq u(r\zeta) \leq \frac{1+r}{1-r}\,u(0) \ .$$

Donc

$$\frac{-2r}{1+r}\,u(0) \leq u(r\zeta) - u(0) \leq \frac{2r}{1-r}\,u(0) \ .$$

Comme $\frac{2r}{1+r} \leq \frac{2r}{1-r}$, la première affirmation en découle.

En divisant par r, et en faisant tendre r vers 0, nous obtenons $|du_0(\zeta)| \leq 2\,u(0)$. Comme

$$|\nabla u(0)| = \sup_{\xi \in \mathbb{S}_1} |\langle \nabla u(0), \zeta \rangle| = \sup_{\xi \in \mathbb{S}_1} |du_0(\zeta)| \ ,$$

le résultat en découle.

b) Pour tout $a \in \mathbb{D}$, l'application $\phi : z \mapsto \frac{z+a}{1+\overline{a}z}$ est une application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ envoyant 0 sur a (car bien définie puisque $|\frac{-1}{\overline{a}}| > 1 > |z|$, bijective d'inverse l'application $z \mapsto \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$, et envoyant $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{S}_1$, donc $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ par connexité). Sa dérivée est $z \mapsto \frac{1-|a|^2}{(1+\overline{a}z)^2}$, qui vaut $1-|a|^2$ en $z=0$.

c) Si $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ est harmonique positive, alors $u \circ \phi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ est aussi harmonique positive. Par a), nous avons donc

$$|\nabla(u \circ \phi)(0)| \leq 2\,u \circ \phi(0) = 2\,u(a) \ .$$

Comme $\nabla(u \circ \phi) = (\nabla u) \circ \phi\ \phi'$ par le théorème de dérivation des fonctions composées, le résultat s'en déduit.

Correction de l'exercice E.59. (1) a) Le fait que l'application f est bien définie et holomorphe a été vu en cours. Rappelons que le noyau de Poisson est

$$P_z(\zeta) = \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} = \operatorname{Re}\Big(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\Big) \ ,$$

où $\zeta \in \mathbb{S}_1$ et $z \in \mathbb{D}$. Par linéarité de l'intégrale, nous avons donc, pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} P_z(\zeta)\ u(\zeta)\ d\sigma(\zeta) = u(z) \ ,$$

en utilisant la formule de Poisson pour la dernière égalité. Nous avons

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} u(\zeta)\ d\sigma(\zeta) \in \mathbb{R} \ ,$$

donc $\operatorname{Im} f(0) = 0$. Enfin, si $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est une autre telle application, alors $f - g$ est une application holomorphe sur $\mathbb{D}$, de partie réelle nulle, donc est une constante imaginaire, qui est nulle car $\operatorname{Im} f(0) = \operatorname{Im} g(0) = 0$.

b) Notons tout d'abord que

$$\operatorname{Im}\big(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\zeta+z}{\zeta-z} - \frac{\overline{\zeta}+\overline{z}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}\Big) = \frac{\overline{\zeta}z - \zeta\overline{z}}{|\zeta-z|^2} = \frac{2\operatorname{Im}(z\overline{\zeta})}{|1-z\overline{\zeta}|^2} \ .$$

Maintenant, l'application $u = \operatorname{Re}(f)$ est harmonique, car f est holomorphe. Par l'unicité dans la question précédente, puisque $\operatorname{Im} f(0) = 0$, nous avons, pour tout $z = re^{i\theta_0} \in \mathbb{D}$

où $r = |z|$,

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Im} f(z)| &= \frac{1}{2\pi}\Big|\operatorname{Im}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,u(\zeta)\,d\sigma(\zeta)\Big| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1}\frac{2\,|\operatorname{Im}(z\overline{\zeta})|}{|1-z\overline{\zeta}|^2}\,|u(\zeta)|\,d\sigma(\zeta)\\
&\le \frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r|\sin(\theta_0-\theta)|}{|1-2r\cos(\theta_0-\theta)+r^2|}\,d\theta = \frac{2A}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{r|\sin\theta|}{|1-2r\cos\theta+r^2|}\,d\theta\\
&= \frac{A}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{2}{|\frac{1+r^2}{r}-2t|}\,dt = \frac{A}{\pi}\Big[-\ln\big(\frac{1+r^2}{r}-2t\big)\Big]_{t=-1}^{t=1}\\
&= \frac{A}{\pi}\big(\ln\big((1+r)^2\big)-\ln\big((1-r)^2\big)\big) = \frac{2A}{\pi}\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}\,.
\end{aligned}$$

(2) a) Remarquons que par la formule de Poisson, $u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} P_z(\zeta)\,u(\zeta)\,d\sigma(\zeta)$ appartient à $\mathbb{R}$ pour tout $z\in\mathbb{D}$, car le noyau de Poisson est réel.

Notons $w_1 = v-u$, qui est une application continue de $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{S}_1$ et sous-harmonique sur $\mathbb{D}$ (car $-\Delta w_1 = -\Delta v \le 0$). Montrons que $w_1 \le 0$. Par l'absurde, supposons qu'il existe un point $z_1 \in \mathbb{D}$ tel que $w_1(z_1) > 0$. Posons $\epsilon = \frac{w_1(z_1)}{8} > 0$. L'application $w_2 : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ définie par

$$w_2(z) = w_1(z) + \epsilon\,(\operatorname{Re}(z-z_1))^2 - 4\epsilon$$

est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, négative ou nulle sur $\mathbb{S}_1$ (car $|z-z_1| \le |z|+|z_1| \le 2$), et strictement positive en z_1, par définition de ϵ. Elle atteint donc son maximum sur le compact $\overline{\mathbb{D}}$ en un point z_2 de $\mathbb{D}$. En particulier, les dérivées $\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}$ sont négatives ou nulles en z_2. Donc $\Delta w_2(z_2) \le 0$. Mais puisque $\Delta w_1 \ge 0$ sur $\mathbb{D}$, nous avons $\Delta w_2(z_2) \ge \epsilon\,\Delta\big((\operatorname{Re}(z-z_1))^2\big) = 2\epsilon > 0$, une contradiction.

Nous avons donc, par la formule de la moyenne,

$$\int_0^{2\pi} v(z_0+re^{i\theta})\,d\theta \le \int_0^{2\pi} u(z_0+re^{i\theta})\,d\theta = 2\pi\,u(z_0)\,.$$

b) Par la formule de Poisson, puisque $P_z(\zeta) \le \frac{1+|z|}{1-|z|}$ et $u = v \ge 0$ sur $\mathbb{S}_1$, nous avons donc

$$\int_0^{2\pi} v(z_0+r\,e^{i\theta})\,d\theta \le 2\pi\,u(z_0) = \int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} P_{z_0}(\zeta)\,u(\zeta)\,d\sigma(\zeta) \le \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} v(\zeta)\,d\sigma(\zeta)\,.$$

(3) Nous avons, en tout point $z\in\mathbb{D}$ tel que $|f(z)| \ne 0$, donc partout par le principe des zéros isolés et par continuité,

$$\begin{aligned}
\Delta(|f|^p) &= 4\partial\overline{\partial}((f\overline{f})^{p/2}) = 2p\,\partial\big(f\overline{f'}(f\overline{f})^{p/2-1}\big)\\
&= 2p(p/2-1)\big(f\overline{f'}f'\overline{f}(f\overline{f})^{p/2-2}\big) + 2p\,\partial\big(f'\overline{f'}(f\overline{f})^{p/2-1}\big)\\
&= p^2|f'|^2|f|^{p-1/2} \ge 0\,,
\end{aligned}$$

donc $-\Delta(|f|^p) \le 0$. Notons $v : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ l'unique application continue qui est harmonique sur $\mathbb{D}$ et égale à $|f|^p$ sur $\mathbb{S}_1$. Par passage en coordonnées polaires et par la question (2) b) appliquée à $v = |f|^p{}_{|\overline{\mathbb{D}}}$ (qui est bien continue, positive et sous-harmonique sur $\mathbb{D}$) et $z_0 = 0$, nous avons donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f|^p \, d\lambda &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(0 + re^{i\theta})|^p \; r \; d\theta \, dr \\ &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^1 \int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} |f(\zeta)|^p \; d\sigma(\zeta) \; r \; dr = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p \; d\theta \; .\end{aligned}$$

Correction de l'exercice E.60. (1) Supposons par l'absurde que $m > 0$. Par la continuité de h et la compacité de son domaine, son maximum m est atteint, l'ensemble K est un fermé borné non vide de $\mathbb{C}$, et donc z_0 existe bien. Puisque h vaut 0 sur $S(a, R)$, le point z_0 appartient à $B(a, R)$. Puisque h vérifie la propriété de la moyenne faible, il existe $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $]0, +\infty[$ telle que $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$, $\overline{B}(z_0, r_n) \subset B(a, R)$ et

$$m = h(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z_0 + r_n \, e^{i\theta}) \; d\theta \; .$$

Donc $\int_0^{2\pi} h(z_0) - h(z_0 + r_n \, e^{i\theta}) \; d\theta = 0$, et comme $h(z_0) - h(z_0 + r_n \, e^{i\theta})$ est une fonction positive ou nulle, elle est nulle. Mais ceci contredit le fait que z_0 étant à distance maximale de a, il y a des points sur le cercle $S(a, r_n)$ qui ne sont pas dans K.

(2) Si f est harmonique, alors elle vérifie la propriété de la moyenne, par le théorème 2.4, donc la propriété de la moyenne faible.

Réciproquement, supposons que f vérifie la propriété de la moyenne faible, et montrons que f est harmonique. Soient $a \in \Omega$ et $R > 0$ tels que $\overline{B}(a, R) \subset \Omega$, montrons que f coïncide avec une application harmonique sur $B(a, R)$, ce qui conclut.

Comme une application est harmonique ou vérifie la propriété de la moyenne faible si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont, nous pouvons supposer que f est à valeurs réelles.

Soit $g : \overline{B}(a, R) \to \mathbb{R}$ la solution du problème de Dirichlet sur $\overline{B}(a, R)$ de donnée au bord $f_{|S(a,\,R)}$. Posons $h = f - g$. Alors h et $-h$ vérifient les hypothèses de la question (1), et donc

$$0 \leq -\sup_{z\in\overline{B}(a,\,R)} -h(z) \; = \inf_{z\in\overline{B}(a,\,R)} h(z) \leq \sup_{z\in\overline{B}(a,\,R)} h(z) \leq 0 \, ,$$

ce qui montre le résultat.

Correction de l'exercice E.61. (1) a) Quitte à ajouter à u la constante $-u(\zeta)$, ce qui ne change pas le résultat, nous pouvons supposer que $u(\zeta) = 0$. Comme ζ est un point sur lequel u atteint son maximum, nous avons donc $-u \geq 0$ sur $\mathbb{D}$.

Par la minoration dans l'inégalité de Harnack appliquée à la fonction harmonique positive $-u$ sur $\mathbb{D}$, nous avons

$$-u(r\zeta) \geq \frac{1 - r}{1 + r}(-u(0)) \geq \frac{-u(0)}{2}(1 - r)$$

D'où le résultat, en prenant $c = \frac{-u(0)}{2}$. Notons que c n'est pas nul, sinon u atteindrait son maximum en un point intérieur du disque, donc serait constante par le principe du maximum et la connexité de $\mathbb{D}$.

b) Supposons par contraposition que u est non constante. Puisque u est harmonique sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, ses dérivées radiales sur le bord de $\mathbb{D}$ sont bien définies. Par le principe du maximum, la restriction à $\overline{\mathbb{D}}$ de u atteint son maximum en au moins un point ζ du cercle $\mathbb{S}_1$. Par la question a), nous avons donc

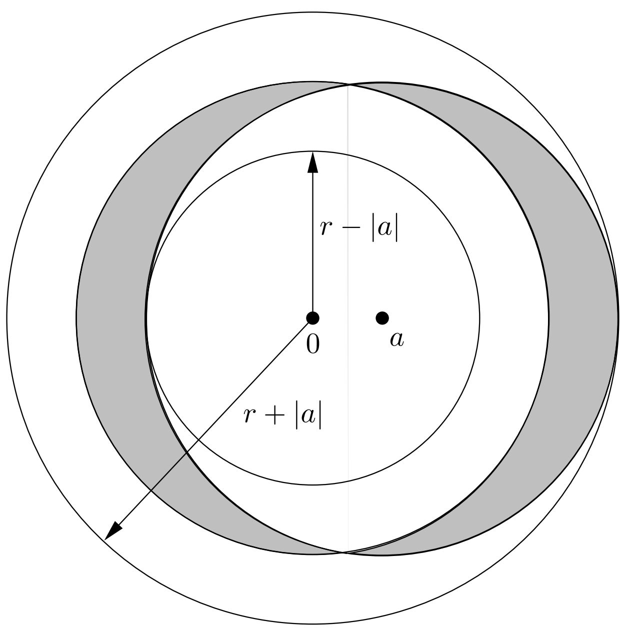
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{r\to 1^-} \frac{u(r\zeta) - u(\zeta)}{r-1} \geq c > 0 \ .$$

donc $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ ne s'annule pas en au moins un point du bord, ce qui montre le résultat.

(2) a) En utilisant l'expression en coordonnées polaires de la mesure de Lebesgue, comme $\mathbb{S}_1$ est de mesure de Lebesgue nulle, par la formule de la moyenne (appliquée à tout cercle de centre a et de rayon $\rho < r$) et par le théorème de Fubini, nous avons

$$\frac{1}{\pi r^2}\int_{B(a,r)} u \, dm = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r \int_0^{2\pi} u(a+\rho e^{i\theta})\, \rho \, d\theta \, d\rho = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi\, u(a)\, \rho\, d\rho = u(a) \ .$$

b) En étudiant les 4 cas $x \in {}^cA \cap {}^cB$, $x \in A \cap {}^cB$ $x \in {}^cA \cap B$ et $x \in A \cap B$, où les deux termes de l'égalité $|\chi_A(x) - \chi_B(x)| = \chi_{A\,\Delta\, B}(x)$ valent respectivement 0, 1, 1, 0, la première égalité est immédiate. L'inclusion de $\overline{B}(a,r)\,\Delta\,\overline{B}(0,r)$ dans $\overline{A}(r-|a|, r+|a|)$ se montre par le dessin suivant (auquel on se ramène par rotation éventuelle).



Enfin, en utilisant de nouveau l'expression en coordonnées polaires de la mesure de Lebesgue, ou en utilisant le fait que

$$m\big(\overline{A}(r-|a|, r+|a|)\big) = m\big(\overline{B}(0, r+|a|)\big) - m\big(\overline{B}(0, r-|a|)\big) \ ,$$

nous avons $m\big(\overline{A}(r-|a|, r+|a|)\big) = 4\pi r|a|$, ce qui montre la dernière affirmation.

c) Soit $M > 0$ tel que $|u(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Par les questions (2) a) et b), nous avons, pour tout $a \in \mathbb{C}$ et pour tout $r > |a|$,

$$\begin{aligned}
|u(a) - u(0)| &= \frac{1}{\pi r^2} \Big| \int_{B(a,r)} u \, dm - \int_{B(0,r)} u \, dm \Big| = \frac{1}{\pi r^2} \Big| \int_{\mathbb{C}} (\chi_{\overline{B}(a,r)} - \chi_{\overline{B}(0,r)}) \, u \, dm \Big| \\
&\leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{C}} |u| \, |\chi_{\overline{B}(a,r)} - \chi_{\overline{B}(0,r)}| \, dm = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{C}} |u| \, \chi_{\overline{B}(a,r) \, \Delta \, \overline{B}(0,r)} \, dm \\
&\leq \frac{M}{\pi r^2} \, m(\, \overline{B}(a,r) \, \Delta \, \overline{B}(0,r)) \leq \frac{M}{\pi r^2} \, m(\, \overline{A}(r - |a|, r + |a|)) \ ,
\end{aligned}$$

qui converge vers 0 quand r tend vers l'infini par la question (2) b). Donc u est constante (égale à $u(0)$).

Correction de l'exercice E.62. (1) a) Pour tout $t \in \,]0,1]$, l'application $\psi : z \mapsto \varphi(tz) - t^m \varphi(z)$ est bien définie sur $B(0,\epsilon)$, holomorphe, de partie réelle nulle, donc est une constante imaginaire pure $i\lambda_t$ où $\lambda_t \in \mathbb{R}$.[25] En développant en série entière $\varphi(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ sur $B(0,\epsilon)$, nous avons donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^n z^n = i\lambda_t + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^m z^n$ pour tous les $z \in B(0,\epsilon)$ et $t \in \,]0,1]$. Par unicité du développement en série entière, nous avons donc $a_n t^n = a_n t^m$ pour tous les $n \geq 1$ et $t \in \,]0,1]$, ce qui implique que $a_n = 0$ si $n \neq 0, m$ et alors $\varphi = a_m z^m + a_0$. Comme de plus $a_0 = a_0 t^m + i\lambda_t$ pour tout $t \in \,]0,1]$, nous avons $a_0 \in i\mathbb{R}$.

b) Notons $\mathscr{P}$ le plan vectoriel complexe $\mathbb{C} z^m + \mathbb{C}\, \overline{z}^m$, et notons qu'une application $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire y appartiennent. Il est immédiat que $z \mapsto z^m$ et $z \mapsto \overline{z}^m$ sont polynomiales homogènes de degré m en les deux variables réelles x, y, et sont respectivement holomorphe et anti-holomorphe, donc harmoniques. D'où $\mathscr{P} \subset \mathscr{H}_m$.

Réciproquement, soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ un élément de $\mathscr{H}_m$, montrons que $p \in \mathscr{P}$. Il suffit pour cela de montrer que les parties réelles et imaginaires de p sont dans $\mathscr{P}$, car être polynomiale homogène de degré m et être harmonique sont des conditions stables par passage aux parties réelle et imaginaire. Puisque les applications harmoniques réelles sont localement les parties réelles de fonctions holomorphes, il existe $\epsilon > 0$ et $\varphi : B(0,\epsilon) \to \mathbb{R}$ une application holomorphe tels que pour tout $z \in B(0,\epsilon)$, nous ayons $p(z) = \operatorname{Re} \varphi(z)$. Par la question a), nous avons donc $p(z) = \operatorname{Re}(\lambda\, z^m) = \frac{1}{2}(\lambda\, z^m + \overline{\lambda}\, \overline{z}^m)$, d'où $p \in \mathscr{P}$.

(2) a) Nous pouvons supposer que $m \geq 1$. Pour tous les $z \in \mathbb{C}$ et $\zeta = e^{i\theta}, \zeta' = e^{i\theta'} \in \mathbb{S}_1$, nous avons, en utilisant la formule d'Euler $2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix}$,

$$Z_m(\zeta, \zeta') = e^{im(\theta - \theta')} + e^{-im(\theta - \theta')} = \zeta^m \, (\overline{\zeta'})^m + \overline{\zeta}^{\,m} \, (\zeta')^m \ ,$$

donc

$$\widetilde{Z}_m(z, \zeta') = z^m \, (\overline{\zeta'})^m + \overline{z}^{\,m} \, (\zeta')^m \ . \tag{41}$$

Par la question (1) b), l'application $z \mapsto \widetilde{Z}_m(z, \zeta)$ appartient à $\mathscr{H}_m$.

b) Si $m \neq m'$, puisque $\zeta' \mapsto Z_m(\zeta, \zeta') = Z_m(\zeta', \zeta)$ appartient à $\mathscr{H}\mathscr{S}_m$ par la question précédente, puisque $\mathscr{H}\mathscr{S}_m$ est orthogonal à $\mathscr{H}\mathscr{S}_{m'}$ pour le produit scalaire $\mathbb{L}^2(\frac{\sigma}{2\pi})$ par le théorème 2.29, et puisque Z_m est à valeurs réelles, nous avons

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\zeta' \in \mathbb{S}_1} f(\zeta') \, Z_m(\zeta, \zeta') \, d\sigma(\zeta') = \langle f, Z_m(\zeta, .) \rangle_{\mathbb{L}^2} = 0 \ .$$

25. En effet, nous avons $\overline{\partial} \psi = 0$ et $\partial(\psi + \overline{\psi}) = 2\partial(\operatorname{Re} \psi) = 0$, donc $\partial \psi = -\partial(\overline{\psi}) = -\overline{\overline{\partial} \psi} = 0$. D'où ψ est constante, de partie réelle nulle, donc une constante imaginaire pure.

Supposons donc $m = m'$. Le résultat est évident si $m = 0$, car $Z_0 = 1$ et $\mathscr{H}\mathscr{S}_0$ est constitué d'applications constantes. Supposons donc $m \geq 1$. Par linéarité, par passage au conjugué puisque Z_m est réelle, et par la question (1) b), il suffit de montrer le résultat pour $f : e^{i\theta} \mapsto e^{im\theta}$. Puisque $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta'}\, d\theta' = 0$ si $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, nous avons, si $\zeta = e^{i\theta}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\zeta' \in \mathbb{S}_1} f(\zeta')\, Z_m(\zeta, \zeta')\, d\sigma(\zeta') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{im\theta'}(e^{im(\theta-\theta')} + e^{-im(\theta-\theta')})\, d\theta' = e^{im\theta}\ .$$

(3) a) Puisque $\widetilde{Z}_0 = 1$, puisque les applications constantes et $z \mapsto \ln|z|$ sont harmoniques sur $\mathbb{C} - \{0\}$ et par linéarité, le résultat est vrai si $m = 0$. Supposons $m \geq 1$.

Puisque $b_m^\pm(z)$ est somme d'une constante et d'un multiple constant de $\frac{1}{|z|^{2m}}$, puisque $z \mapsto \widetilde{Z}_m(z, \zeta)$ est harmonique d'après la question (2) a), puisque $\widetilde{Z}_m(z, \zeta)$ est une combinaison linéaire de z^m et $\overline{z}^m$ comme vu dans la formule (41), il suffit de montrer que les applications $z \mapsto \frac{z^m}{|z|^{2m}} = \frac{1}{\overline{z}^m}$ et $z \mapsto \frac{\overline{z}^m}{|z|^{2m}} = \frac{1}{z^m}$ sont harmoniques sur Ω, ce qui est le cas, car elles sont respectivement anti-holomorphe et holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0\}$ (qui contient Ω).

b) Nous avons $0 \leq b_m^+ \leq 1$ et $|\widetilde{Z}_m(z, \zeta)| \leq 2\,|z|^m$ par la formule (41), donc

$$|b_m^+(z)\ \widetilde{Z}_m(z, \zeta)| \leq 2\,|z|^m\ .$$

Nous avons $|b_m^-(z)| \leq \frac{a^m}{|z|^{2m}}$ et toujours $|\widetilde{Z}_m(z, \zeta)| \leq 2\,|z|^m$, donc

$$|b_m^-(z)\ \widetilde{Z}_m(z, \zeta)| \leq \Big(\frac{a}{|z|}\Big)^m\ .$$

Donc les séries $Z^\pm(z, \zeta)$ convergent absolument et uniformément sur les compacts de $\Omega \times \mathbb{S}_1$. Par le théorème de Harnack, les valeurs de ces séries, qui sont limites uniformes sur les compacts d'applications harmoniques (comme somme d'applications harmoniques par la question a)) sont harmoniques en $z \in \Omega$.

c) La première affirmation est immédiate. Montrons que $Z^+(\frac{a}{\overline{z}}, \zeta) = Z^-(z, \zeta)$. Il suffit par sommation de montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous avons

$$b_m^+\big(\frac{a}{\overline{z}}\big)\ \widetilde{Z}_m\big(\frac{a}{\overline{z}}, \zeta\big) = b_m^-(z)\ \widetilde{Z}_m(z, \zeta)\ .$$

Le résultat est immédiat si $m = 0$. Supposons $m \geq 1$. Alors, en écrivant $\frac{a}{\overline{z}} = \frac{a}{|z|^2}\, z$, nous avons par homogénéité d'ordre m

$$b_m^+\big(\frac{a}{\overline{z}}\big)\ \widetilde{Z}_m\big(\frac{a}{\overline{z}}, \zeta\big) = \frac{1 - |z|^{2m}}{1 - a^{2m}}\big(\frac{a}{|z|^2}\big)^m\ \widetilde{Z}_m(z, \zeta) = b_m^-(z)\ \widetilde{Z}_m(z, \zeta)\ .$$

(4) a) Pour tout $z_0 \in \Omega'$, soit $r_0 > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r_0) \subset \Omega'$. L'application $(x, z) \mapsto F(x, z)$ est continue sur l'espace métrique compact $K \times \overline{B}(z_0, r_0)$, donc uniformément continue. Par conséquent, l'application $z \mapsto \int_{x \in K} F(x, z)\, d\mu(x)$ est bien définie et continue. De plus, pour tout $r \in [0, r_0[$, l'application $(x, e^{i\theta}) \mapsto F(x, z_0 + r\, e^{i\theta})$ est continue sur le compact $K \times \mathbb{S}_1$, donc bornée. Par le théorème de Fubini et le théorème de la moyenne, nous avons alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{x \in K} F(x, z_0 + r\, e^{i\theta})\, d\mu(x) d\theta &= \int_{x \in K}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x, z_0 + r\, e^{i\theta})\, d\theta\, d\mu(x)\\ &= \int_{x \in K} F(x, z_0)\, d\mu(x)\ .\end{aligned}$$

Donc par la réciproque du théorème de la moyenne, l'application $z \mapsto \int_{x\in K} F(x,z)\,d\mu(x)$ est harmonique.

b) L'application $z \mapsto P_\Omega[f](z)$ est bien définie et harmonique comme somme de deux applications bien définies et harmoniques par les questions (3) b) et (4) a) (en utilisant les mesures $d\mu(\zeta) = f(\zeta)\,d\sigma(\zeta)$ et $d\mu(\zeta) = f(a\zeta)\,d\sigma(\zeta)$ sur l'espace métrique compact $K = \mathbb{S}_1$).

Rappelons que $\iota : \Omega \to \Omega$ est l'homéomorphisme involutif $z \mapsto \frac{a}{\overline{z}}$, qui échange $S(0,a)$ et $\mathbb{S}_1$. Pour montrer que u_f est continue, comme toute application continue $f : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $f = f_1 + f_2 \circ \iota$ avec $f_1, f_2 : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ deux applications continues et nulles sur $S(0,a)$, puisque

$$\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} f(a\zeta)\,Z^-(z,\zeta)\,d\sigma(\zeta) = \int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} f_2\circ\iota(\zeta)\,Z^+(\iota(z),\zeta)\,d\sigma(\zeta)$$

par la question (3) c), il suffit donc de montrer le résultat lorsque f est nulle sur $S(0,a)$ et

$$u_f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} f(\zeta)\;Z^+(z,\zeta)\,d\sigma(\zeta)$$

pour tout $z \in \Omega$. Par le théorème de Stone-Weierstrass, toute application continue $f : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ nulle sur $S(0,a)$ est limite uniforme d'une suite de sommes finies d'harmoniques sphériques $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{S}_1$ prolongées par 0 sur $S(0,a)$. Nous avons $\frac{1}{2\pi}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} Z^+(z,\zeta)\,d\sigma(\zeta) = 1$ par permutation (autorisée par convergence uniforme) de l'intégrale et de la somme définissant Z^+, et par la question (2) b) avec $m' = 0$. Comme $Z^+(z,\zeta)$ est réel, nous avons

$$|u_f(z) - u_{f_i}(z)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} |f(\zeta) - f_i(\zeta)|\;Z^+(z,\zeta)\,d\sigma(\zeta) \le \|f - f_i\|_\infty$$

pour tout $z \in \Omega$. Par conséquent, la suite $(u_{f_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers u_f sur Ω. Il suffit donc par linéarité de montrer le résultat lorsque $f_{|S(0,a)}$ est nulle et $f_{|\mathbb{S}_1}$ appartient à $\mathscr{H}\mathscr{S}_{m'}$.

Mézalor, en permutant intégrale et somme par convergence uniforme, par homogénéité et par la question (2) b), nous avons, pour tout $z \in \Omega$,

$$\begin{aligned} u_f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} \sum_{m\in\mathbb{N}} f(\zeta)\;b_m^+(z)\;\widetilde{Z}_m(z,\zeta)\,d\sigma(\zeta)\\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}} b_m^+(z)\;|z|^m\;\frac{1}{2\pi}\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} f(\zeta)\;Z_m(\frac{z}{|z|},\zeta)\,d\sigma(\zeta)\\ &= b_{m'}^+(z)|z|^{m'} f(\frac{z}{|z|})\;. \end{aligned}$$

Si $|z|$ tend vers a, alors cette fonction tend vers 0 (car f est bornée) et si z tend vers $\zeta \in \mathbb{S}_1$, alors cette fonction tend vers $f(\zeta)$, ce qu'il fallait démontrer.

c) Comme Ω' est un ouvert borné, l'unicité découle du principe du maximum (voir l'exercice E.29 (1)). Pour l'existence, comme l'application $z \mapsto \frac{z}{b'}$ est holomorphe et envoie Ω' sur l'anneau Ω avec $a = \frac{a'}{b'}$, le résultat découle de la question ci-dessus (voir la démonstration du corollaire 2.2).

Correction de l'exercice E.63. (1) a) Quitte à ajouter à u la constante $-u(x_0)$, ce qui ne change pas le résultat, nous pouvons supposer que $u(x_0) = 0$. Comme x_0 est un point sur lequel u atteint son maximum, nous avons donc $-u \geq 0$ sur $\mathbb{H}$.

Par la minoration dans l'inégalité de Harnack appliquée à la fonction harmonique positive $-u$ sur le disque ouvert de centre $x_0 + i$ et de rayon 1 (qui est contenu dans $\mathbb{H}$), nous avons, pour tous les $r \in \,]0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$-u(x_0 + i + re^{i\theta}) \geq \frac{1-r}{1+r}(-u(x_0+i)) \geq \frac{-u(x_0+i)}{2}(1-r)\ .$$

D'où le résultat, en prenant $c = \frac{-u(x_0+i)}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$. Notons que c n'est pas nul, sinon u atteindrait son maximum en un point intérieur de $\mathbb{H}$, donc serait constante par le principe du maximum et la connexité de $\mathbb{H}$.

b) Supposons par contraposition que u est non constante sur $\overline{\mathbb{H}}$ (donc sur $\mathbb{H}$ par continuité). Quitte à remplacer u par $-u$, et puisque u n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{H}$, il existe $z_0 \in \mathbb{H}$ tel que $u(z_0) > 0$. Puisque u est nulle à l'infini, il existe $R > 0$ tel que si $z \in \overline{\mathbb{H}} - (B(0,R) \cap \overline{\mathbb{H}})$, alors $|u(z)| < \frac{1}{2}\, u(z_0)$. Puisque u est harmonique sur un voisinage de $\overline{\mathbb{H}}$, ses dérivées verticales sur le bord de $\overline{\mathbb{H}}$ sont bien définies. Par le principe du maximum, la restriction à $\mathbb{H} \cap B(0,R)$ de u atteint son maximum en au moins un point x_0 du bord de $\mathbb{H} \cap B(0,R)$, donc dans $[-R, R]$, et ce maximum est un maximum sur tout $\overline{\mathbb{H}}$. Par la question a), nous avons donc

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0) = -\lim_{r \to 1^-} \frac{u(x_0 + i(1-r)) - u(x_0)}{1-r} \leq -c < 0\ .$$

Donc $\frac{\partial u}{\partial y}$ ne s'annule pas en au moins un point de $\mathbb{R}$, ce qui montre le résultat.

(2) a) Puisque l'application $t \mapsto Q_z(t)$ est continue et bornée par $\frac{1}{\operatorname{Im}(z)}$ sur $\mathbb{R}$, et puisque μ est une mesure finie, l'application $P_{\mathbb{H}}\mu$ est bien définie. Puisque l'application

$$z \mapsto \int_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{t-z}\, \frac{1}{1+t^2}\; d\mu(t) + z \int_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{t-z}\, \frac{t}{1+t^2}\; d\mu(t)$$

est holomorphe sur $\mathbb{H}$ (voir la proposition B.1 de l'appendice B), l'application $P_{\mathbb{H}}\mu$, partie imaginaire de cette application sur $\mathbb{H}$ par linéarité de l'intégrale, est harmonique.

Pour tous les $t, t' \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, puique $|t + ir - t'| = |t - ir - t'| = |t' + ir - t|$, le noyau de Poisson de $\mathbb{H}$ vérifie $Q_{t+ir}(t') = Q_{t'+ir}(t)$. Puisque $\int_{t \in \mathbb{R}} Q_z(t)\; dt = \pi$ pour tout $z \in \mathbb{H}$, nous avons par le théorème de Fubini pour les fonctions positives,

$$\begin{aligned}\int_{t \in \mathbb{R}} P_{\mathbb{H}}\mu(t + ir)\; dt &= \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{t' \in \mathbb{R}} Q_{t+ir}(t')\; d\mu(t')\; dt = \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{t' \in \mathbb{R}} Q_{t'+ir}(t)\; d\mu(t')\; dt \\ &= \int_{t' \in \mathbb{R}} \int_{t \in \mathbb{R}} Q_{t'+ir}(t)\; dt\; d\mu(t') = \pi\mu(\mathbb{R})\ .\end{aligned}$$

Donc la borne supérieure sur $r \in \,]0, 1]$ du membre de gauche est finie.

b) Pour tout $f \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, nous avons, par la propriété de continuité rappelée dans l'énoncé, par la convergence uniforme sur les compacts, et puisque $P_{\mathbb{H}}f$ (étendue par f sur

$\mathbb{R}$) est nulle à l'infini, donc plus petite en module qu'un $\epsilon > 0$ quelconque en dehors d'un grand compact de $\overline{\mathbb{H}}$, et par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu &= \lim_{r\to 0^+} \int_{t\in\mathbb{R}} P_{\mathbb{H}} f(t+ir)\, d\mu(t) = \lim_{r\to 0^+} \int_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \int_{t'\in\mathbb{R}} Q_{t+ir}(t')\, f(t')\, dt'\, d\mu(t) \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{r\to 0^+} \int_{t\in\mathbb{R}} \int_{t'\in\mathbb{R}} Q_{t'+ir}(t)\, f(t')\, dt'\, d\mu(t) \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{r\to 0^+} \int_{t'\in\mathbb{R}} f(t') \int_{t\in\mathbb{R}} Q_{t'+ir}(t)\, d\mu(t)\, dt' \\
&= \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{t'\in\mathbb{R}} f(t')\, P_{\mathbb{H}}\mu(t'+ir)\, dt' \;.
\end{aligned}$$

c) Notons $\mathscr{C}_0^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ nulles à l'infini (pour la norme uniforme). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\ell_n : \mathscr{C}_0^0(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$\ell_n(f) = \int_{t\in\mathbb{R}} h\big(t + i\frac{1}{n+1}\big) f(t)\, dt \;.$$

Alors ℓ_n est une forme linéaire sur $\mathscr{C}_0^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$, qui est positive car h est positive, et continue de norme au plus $M(h)$. Par le théorème de Banach-Alaoglu de compacité des boules du dual topologique de $\mathscr{C}_0^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ pour la convergence faible-étoile (voir par exemple [Bre]), il existe donc une sous-suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une forme linéaire continue ℓ sur $\mathscr{C}_0^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ telle que pour tout $f \in \mathscr{C}_0^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$, nous ayons $\ell(f) = \lim_{k\to+\infty} \ell_{n_k}(f)$. En particulier, ℓ est positive. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe donc une (unique) mesure borélienne positive finie sur les compacts et régulière μ sur l'espace localement compact $\mathbb{R}$ telle que $\ell(f) = \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu$ pour tout $f \in \mathscr{C}_0^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Elle est de plus finie, car de masse totale égale à la norme duale de ℓ. Donc pour tout $f \in \mathscr{C}_0^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu = \lim_{k\to+\infty} \ell_{n_k}(f) = \lim_{k\to+\infty} \int_{t'\in\mathbb{R}} h(t' + \frac{i}{n_k+1})\, f(t')\, dt' \;.$$

d) La question a) montre que cette application est bien définie. La question b) montre qu'elle est injective, car une mesure dans $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ est uniquement déterminée par ses intégrales de toutes les fonctions continues à suport compact. Montrons qu'elle est surjective.

Soit $h : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ une fonction harmonique positive telle que $M(h) < +\infty$, et soient $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ et $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$ comme dans la question c). Pour tout $z \in \mathbb{H}$, nous avons la suite d'égalités suivantes, la deuxième par la question c) puisque $t \mapsto Q_z(t)$ est nulle à l'infini, la troisième par la formule de Poisson de $\mathbb{H}$ appliquée à la fonction continue de $\overline{\mathbb{H}}$ dans $\mathbb{C}$, harmonique sur $\mathbb{H}$, définie par $w \mapsto h(w + \frac{i}{n_k+1})$, la dernière par la continuité de h en z :

$$\begin{aligned}
P\big[\frac{\mu}{\pi}\big](z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} Q_z(t)\, d\mu(t) = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} Q_z(t) h(t + \frac{i}{n_k+1})\, dt \\
&= \lim_{k\to+\infty} h(z + \frac{i}{n_k+1}) = h(z) \;.
\end{aligned}$$

D'où $h = P\big[\frac{\mu}{\pi}\big]$.

Théorie spectrale et analyse harmonique.

Correction de l'exercice E.64. (1) a) Montrons que $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie contenant $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

Notons tout d'abord que pour tout $u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, une application $u' \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ telle que $\langle u', \varphi\rangle_2 = -\langle u, \varphi'\rangle_2$ pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, si elle existe, est unique, car si $\widetilde{u'} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ est une autre telle application, alors $\langle u' - \widetilde{u'}, \varphi\rangle_2 = 0$ pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, et par densité de $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, nous avons $u' = \widetilde{u'}$. Nous appellerons u' la *dérivée au sens des distributions* de u.

La première affirmation se démontre comme dans la démonstration de la proposition 2.18, en montrant que l'application de $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ dans l'espace de Hilbert produit $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ définie par $u \mapsto (\sqrt{t^2+1}\, u, u')$ est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens sur un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. En particulier, $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ est séparable.

En prenant pour dérivée au sens des distributions u', si $u \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, la dérivée usuelle, qui convient par intégration par partie, nous avons $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ (et comme le premier est un sous-espace vectoriel de dimension infinie, il en est de même du second).

b) Montrons la densité de $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$.

En première étape, montrons que les éléments de $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ à support compact sont denses dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$. Soit $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ de fonctions plateaux telle qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

- $\eta_n(t) \in [0,1]$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,
- $\eta_n(t) = 1$ si $t \in [-n, n]$,
- $\eta_n(t) = 0$ si $t \notin [-n-1, n+1]$,
- $|\eta_n'(t)| \leq M$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Pour tous les $f \in \mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$, l'application $\sqrt{1+t^2}\, f\eta_n$ est dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ (de norme dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ inférieure ou égale à celle de $\sqrt{1+t^2}\, f$), et il est immédiat de vérifier que $f'\eta_n + f\eta_n'$ est dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, et est une dérivée au sens des distributions de $f\eta_n$. De plus

$$\begin{aligned}\|f\eta_n - f\|^2_{\mathscr{H}^1} &= \|\sqrt{1+t^2} f(\eta_n - 1)\|_2^2 + \|f'(\eta_n - 1) + f\eta_n'\|_2^2 \\ &\leq (1+M)\int_{|t|\geq n} |f(t)|^2(1+t^2)\, dt + \int_{|t|\geq n} |f'(t)|^2\, dt\end{aligned}$$

qui converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui montre la première étape.

Pour la seconde étape, montrons que $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans le sous-espace de $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ des éléments à support compact. Soit donc $f \in \mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ à support contenu dans $[-N, N]$. Soit $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ une application à valeurs dans $[0,1]$, à support dans $[-1,1]$, d'intégrale 1 pour la mesure de Lebesgue. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, posons $\varphi_i : x \mapsto 2^i\, \varphi(2^i x)$, qui est un élément de $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, encore d'intégrale 1. Nous admettrons que pour tout $g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, la convolution $g * \varphi_i$ converge vers g dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

La convolution $f * \varphi_i$ de f par φ_i est à support dans $[-N-1, N+1]$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Puisque f est dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, elle est de classe C^∞ (voir la formule (31)), donc $f * \varphi_i \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Il est facile de voir que

$$(f * \varphi_i)' = (f') * \varphi_i\ .$$

Donc par le résultat de convergence admis, $(f * \varphi_i)'$ converge vers f' dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Puisque $f * \varphi_i$ et f sont nulles en dehors de $[-N-1, N+1]$, nous avons

$$\|\sqrt{1+t^2}\,(f * \varphi_i - f)\|_2 \leq \sqrt{1+(N+1)^2}\,\|f * \varphi_i - f\|_2\ ,$$

qui tend vers 0 quand i tend vers $+\infty$, toujours par le résultat de convergence admis (mais voir aussi la formule (32)). Donc $\sqrt{1+t^2}\ f*\varphi_i$ converge vers $\sqrt{1+t^2}\ f$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, et donc $f*\varphi_i$ converge vers f dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$.

c) Montrons que l'inclusion de $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ est compacte. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$, et notons $V:\mathbb{R}\to[1,+\infty[$ l'application $t\mapsto\sqrt{t^2+1}$. En particulier, les suites $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V\,u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

La notation u' coïncide avec la dérivée au sens des distributions $\frac{\partial u}{\partial t}$ introduite dans la partie 2.4. Une fonction $\mathbb{L}^2$ sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée au sens des distributions est nulle, est constante presque partout.[26] Quitte à remplacer u_n par $\int_0^x u'_n(t)dt+c_n$ où $c_n\in\mathbb{R}$, ce qui ne change pas sa classe $\mathbb{L}^2$, nous pouvons donc supposer que u_n est continue et même 1/2-höldérienne : si $x\le y$, alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\Big|\int_0^x u'_n(t)\,dt-\int_0^y u'_n(t)\,dt\Big|=\Big|\int_{\mathbb{R}}\chi_{[x,y]}\,u'_n(t)\,dt\Big|\le\sqrt{y-x}\,\|u'_n\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})}\ .$$

Pour tout $N\in\mathbb{N}$, notons $\Omega_N=\{t\in\mathbb{R}\ :\ V(t)<N\}$, qui est un ouvert borné. Par le théorème d'Arzela-Ascoli 1.32, pour tout N, la suite $(u_{n|\Omega_N})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $\mathscr{C}(\Omega_N;\mathbb{C})$ vers $v_N\in\mathscr{C}(\Omega_N;\mathbb{C})$. Par extraction diagonale, nous pouvons supposer que $(u_{n|\Omega_N})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v_N dans $\mathscr{C}(\Omega_N;\mathbb{C})$ pour tout N. Il est immédiat que $v_{M|\Omega_N}=v_N$ si $M\ge N$, et on note $v\in\mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ l'application telle que $v_{|\Omega_N}=v_N$ pour tout $N\in\mathbb{N}$. En dehors de Ω_N, nous avons $u_n\le\frac{1}{N}V\,u_n$, qui tend vers 0 dans $\mathbb{L}^2$ quand N tend vers $+\infty$, uniformément en n. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

[Autre méthode : on pouvait penser, si on le connaissait, à utiliser la variante $\mathbb{L}^2$ du théorème d'Arzela-Ascoli.

Théorème 3.1 (Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov) *Soit $\mathscr{A}$ une partie bornée de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ telle que*

(i) $\int_{|x|\ge R}|f(x)|^2\,dx$ converge vers 0 quand R tend vers $+\infty$ uniformément en $f\in\mathscr{A}$.

(ii) $\|f(x+a)-f(x)\|_2$ converge vers 0 quand a tend vers 0 uniformément en $f\in\mathscr{A}$.

Alors $\mathscr{A}$ est d'adhérence compacte dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. □

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$, montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Par densité de $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$, nous pouvons supposer que $u_n\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Utilisons le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov avec $\mathscr{A}=\{u_n\ :\ n\in\mathbb{N}\}$. Puisque $\|u_n\|_2\le\|u_n\|_{\mathscr{H}^1}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Par le théorème des accroissements finis et puisque la suite $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, la condition (ii) est vérifiée. Enfin, puisque

$$\int_{|x|\ge R}|f(x)|^2\,dx\le\frac{1}{1+R^2}\int_{|x|\ge R}(1+x^2)|f(x)|^2\,dx\le\frac{1}{1+R^2}\|u_n\|_{\mathscr{H}^1}\ ,$$

26. Rappelons que

$$\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})'=\{\varphi\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})\ :\ \int_{\mathbb{R}}\varphi=0\}\ .$$

Soit $f\in\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ de dérivée au sens des distribution nulle. Fixons $\psi\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}}\psi=1$ et considérons la constante $c=\langle f,\psi\rangle_{\mathbb{L}^2}$. Alors pour tout $\varphi\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, l'application $\varphi-(\int_{\mathbb{R}}\varphi)\psi$ est d'intégrale nulle, donc

$$\langle f-c,\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2}=\int_{\mathbb{R}}f\,\overline{\varphi}-\int_{\mathbb{R}}f\,\overline{\psi}\int_{\mathbb{R}}\overline{\varphi}=\langle f,\varphi-(\int_{\mathbb{R}}\varphi)\psi\rangle_{\mathbb{L}^2}=0\ .$$

Par densité de $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, nous avons donc que $f-c$ est presque partout nulle.

la condition (i) est vérifiée.]

(2) a) Puisque $t^2+1\geq 1$, remarquons que si $u\in\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$, alors $\|u\|_2\leq\|\sqrt{t^2+1}\;u\|_2\leq\|u\|_{\mathscr{H}^1}$, et en particulier, u appartient à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ et l'inclusion de $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ est linéaire, de norme au plus 1.

b) L'application Q_f est donc bien définie, continue (par continuité de la norme dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ et du produit scalaire dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$), et elle est à valeurs réelles.

Montrons que Q_f est strictement convexe. Par sequilinéarité du produit scalaire et linéarité des applications $u\mapsto u'$ et $u\mapsto\sqrt{t^2+1}\;u$, il suffit de montrer que dans tout espace de Hilbert, l'application $x\mapsto\|x\|^2$ est strictement convexe, ce qui a été vu en cours.

Montrons que Q_f est propre. Pour tout $u\in\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$, nous avons par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la question (1) a)

$$Q_f(u)\geq\frac{1}{2}\|u\|^2_{\mathscr{H}^1}-\|f\|_{\mathbb{L}^2}\|u\|_{\mathbb{L}^2}\geq\frac{1}{2}\|u\|^2_{\mathscr{H}^1}-\|f\|_{\mathbb{L}^2}\|u\|_{\mathscr{H}^1}\;,$$

qui tend évidemment vers $+\infty$ quand $\|u\|_{\mathscr{H}^1}$ tend vers $+\infty$.

Montrons l'unicité d'un minimum. La démonstration est la même que celle vue dans le cours : si u et v étaient deux minima distincts de Q_f, de valeur minimale $a=Q_f(u)=Q_f(v)$, alors par stricte convexité de Q_f, nous aurions $Q_f(\frac{u+v}{2})<\frac{Q_f(u)+Q_f(v)}{2}=a$, une contradiction.

Montrons enfin l'existence d'un minimum : la démonstration est la même que celle vue dans le cours. Puisque Q_f est propre, soit $R>0$ tel que $Q_f(u)\geq 0$ si $||u||_{\mathscr{H}^1}\geq R$. Pour montrer l'existence d'un minimum, puisque $Q_f(0)=0$, il suffit de montrer que Q_f admet un minimum dans la boule fermée $\overline{B}(0,R)$: ce sera un minimum de Q_f sur $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\overline{B}(0,R)$ telle que $\lim_{n\to+\infty}Q_f(x_n)=\inf_{y\in\overline{B}(0,R)}Q_f(y)$. Quitte à extraire, nous pouvons supposer qu'elle converge faiblement vers x, par compacité faible des boules fermées des espaces de Hilbert. L'application Q_f est continue et convexe, donc faiblement semi-continue inférieurement. D'où $Q_f(x)\leq\lim_{n\to+\infty}Q_f(x_n)=\inf_{y\in\overline{B}(0,R)}Q_f(y)$, et x est un minimum de Q_f.

[Les assertions b) et c) découlent aussi du théorème de Lax-Milgram : le produit scalaire $\mathbb{L}^2$ avec f est une forme anti-linéaire continue[27] $\varphi : v\mapsto\langle f,v\rangle_{\mathbb{L}^2}$ sur $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$, et l'application $a:(u,v)\mapsto\langle u,v\rangle_{\mathscr{H}^1}$ est une forme sesquilinéaire continue coercive hermitienne sur $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$, donc le théorème de Lax-Milgram dit qu'il existe un unique élément $u\in\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ tel que pour tout $v\in\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$, nous ayons $\langle u,v\rangle_{\mathscr{H}^1}=\langle f,v\rangle_{\mathbb{L}^2}$ et que cet élément u est l'unique élément de $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ qui minimise Q_f. Ceci montre b). Pour c), le sens direct découle de l'inclusion de $\mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$. Pour le sens réciproque, utiliser la densité de $\mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ et le fait que la convergence forte dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ implique la convergence faible dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ et dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.]

(c) Pour tout $u\in\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ et pour tout $\varphi\in\mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R})$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}_{|t=0}Q_f(u+t\varphi)&=\frac{d}{dt}_{|t=0}\Big(\frac{1}{2}\langle u+t\varphi,u+t\varphi\rangle_{\mathscr{H}^1}-\mathrm{Re}\,\langle f,u+t\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2}\Big)\\&=\mathrm{Re}\,\langle u,\varphi\rangle_{\mathscr{H}^1}-\mathrm{Re}\,\langle f,\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2}\;.\end{aligned}$$

Donc en remplaçant φ par $i\varphi$ pour obtenir les parties imaginaires, si u est un minimum de Q_f, alors u vérifie $\langle u,\varphi\rangle_{\mathscr{H}^1}=\langle f,\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2}$ pour tout $\varphi\in\mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R})$.

27. car l'inclusion de $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ est continue par a)

Réciproquement, si u vérifie cette condition, alors pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, la valeur $t = 0$ est le minimum (qui est le seul extremum) de la fonction strictement convexe et propre $t \mapsto Q_f(u + t\varphi)$. Par densité de $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$, ceci implique que u est un minimum de Q_f.

(3) La linéarité de G découle de l'unicité et de la linéarité en (u, f) des équations dans c).

Montrons que G est continu. Si $G(f) = u$, alors u minimisant Q_f, nous avons

$$0 = \frac{d}{dt}_{|t=1} Q_f(tu) = \|u\|^2_{\mathscr{H}^1} - \mathrm{Re}\ \langle f, u\rangle_{\mathbb{L}^2}\ .$$

Donc par la question (2) a) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|u\|^2_{\mathbb{L}^2} \leq \|u\|^2_{\mathscr{H}^1} \leq \|f\|_{\mathbb{L}^2}\|u\|_{\mathbb{L}^2}\ .$$

D'où G est continu (de norme $\|G\|$ au plus 1).

Montrons que G est auto-adjoint (même si les espaces de Hilbert étant complexes, le fait que G est auto-adjoint découle du fait qu'il est positif, qui sera démontré ci-dessous). Soient $f, g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Par la question (2) c), nous avons $\langle G(f), \varphi\rangle_{\mathscr{H}^1} = \langle f, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2}$ pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, donc par densité de $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$, qui contient $G(g)$, nous avons $\langle G(f), G(g)\rangle_{\mathscr{H}^1} = \langle f, G(g)\rangle_{\mathbb{L}^2}$. En utilisant (la conjuguaison complexe de) cette formule et cette formule où nous avons échangé f et g, nous avons donc

$$\langle G(g), f\rangle_{\mathbb{L}^2} = \langle G(g), G(f)\rangle_{\mathscr{H}^1} = \langle g, G(f)\rangle_{\mathbb{L}^2}\ .$$

Montrons que G est positif, et même strictement positif, c'est-à-dire que $\langle G(f), f\rangle_{\mathbb{L}^2} > 0$ pour tout élément non nul f de $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Comme vu ci-dessus,

$$\langle G(f), f\rangle_{\mathbb{L}^2} = \big\|G(f)\big\|^2_{\mathscr{H}^1}\ ,$$

qui est positif, et nul si et seulement si $G(f)$ est nul. Or si $f = 0$, alors $G(f) = 0$ par linéarité de G. De plus, si $G(f) = 0$, alors par la question (2) c), f est orthogonale à tout élément de $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, qui est dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, donc f est nulle.

Montrons enfin que G est un opérateur compact. Notons que G est d'image contenue dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$, et continue de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ car

$$\|G(f)\|^2_{\mathscr{H}^1} = \langle G(f), f\rangle_{\mathbb{L}^2} \leq \|G\|\ \|f\|^2_{\mathbb{L}^2}\ .$$

Comme la postcomposition d'un opérateur compact par un opérateur continu est encore compact, le résultat découle de la question (1), qui dit que l'inclusion de $\mathscr{H}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ est un opérateur compact.

(4) Puisque l'opérateur $G : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ est auto-adjoint, strictement positif, compact (et $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ est de dimension infinie), il est diagonalisable en base hilbertienne, à valeurs propres strictement positives décroissantes tendant vers 0 : il existe une suite $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, décroissante, convergente vers 0, et une base hilbertienne $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ telle que $G(f_i) = \epsilon_i f_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Posons $\lambda_i = \frac{1}{\epsilon_i}$. Alors par la question (2) c), pour tout $i \in \mathbb{N}$, pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, nous avons $\langle G(f_i), \varphi\rangle_{\mathscr{H}^1} = \langle f_i, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2}$, ce qui équivaut au résultat cherché par la définition de f_i' : puisque $f_i = \frac{1}{\epsilon_i} G(f_i) \in \mathscr{H}^1(\mathbb{R})$,

$$\langle f_i, \varphi\rangle_{\mathscr{H}^1} = \langle f_i', \varphi'\rangle_{\mathbb{L}^2} + \langle f_i, (t^2+1)\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2} = -\langle f_i, \varphi''\rangle_{\mathbb{L}^2} + \langle f_i, (t^2+1)\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2}\ .$$

Correction de l'exercice E.65. (1) Par définition si $f \in W^{2,2}(\Omega)$, alors f est $\mathbb{L}^2$ et admet des dérivées partielles au sens des distributions dans $\mathbb{L}^2$, donc $f \in W^{1,2}(\Omega)$, et

$$\|f\|_{W^{2,2}}^2 = \|f\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \sum_{i,j=1}^n \|f_{i,j}\|_{\mathbb{L}^2}^2 = \|f\|_{W^{1,2}}^2 + \sum_{i,j=1}^n \|f_{i,j}\|_{\mathbb{L}^2}^2 .$$

D'où $\|f\|_{W^{2,2}} \geq \|f\|_{W^{1,2}} \geq \|f\|_{\mathbb{L}^2}$. En particulier, si f est limite dans $W^{2,2}(\Omega)$ d'une suite dans $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$, alors f est aussi limite dans $W^{1,2}(\Omega)$ de cette suite, et la seconde assertion en découle.

(2) a) Puisque Ω est un ouvert borné, par l'inégalité de Poincaré, il existe $c > 0$ tel que pour tout $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, nous avons $\|u\|_{\mathbb{L}^2} \leq c\,\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}$. Si $f \in W_0^{2,2}(\Omega)$, nous avons $f_i \in W_0^{1,2}(\Omega)$ pour $1 \leq i \leq n$ et les dérivées partielles au sens des distributions de f_i sont les $f_{i,j}$ pour $1 \leq j \leq n$, donc

$$\|f\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq c^2 \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq c^4 \sum_{i,j=1}^n \|f_{i,j}\|_{\mathbb{L}^2}^2 .$$

b) Puisque Ω est borné, par le théorème de Rellich-Kondrachov, toute suite bornée dans $W_0^{2,2}(\Omega)$, qui est aussi bornée dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ par la question (1), admet une sous-suite convergente dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

(3) a) Pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$, nous avons par définition

$$\langle -\Delta f, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2} = \langle \sum_{i=1}^n -f_{ii}, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2} = \sum_{i=1}^n \langle f_i, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle_{\mathbb{L}^2} = \langle f, -\Delta\varphi\rangle_{\mathbb{L}^2} .$$

Soit $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ qui converge vers g dans $W^{2,2}(\Omega)$, donc dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ par la question (1). Alors $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$ converge vers f_i dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ pour $1 \leq i \leq n$, et en prenant $g = f$, ceci montre la seconde assertion. De plus, $-\Delta\varphi_k$ converge vers $-\Delta f$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, donc ceci montre la première assertion, par continuité du produit scalaire. De même,

$$\langle -\Delta f, f\rangle_{\mathbb{L}^2} = \sum_{i=1}^n \langle f_i, f_i\rangle_{\mathbb{L}^2} \geq 0 ,$$

ce qui montre la seconde assertion.

b) Notons $G : \mathbb{L}^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$ l'opérateur de Green. Par définition de G, si $f \in W_0^{2,2}(\Omega)$ vérifie $-\Delta f = u$, alors $f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ vérifie l'équation $-\Delta f = u$ au sens des distributions, donc $G(u) = f$.

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in W_0^{2,2}(\Omega) - \{0\}$ tels que $-\Delta f = \lambda f$. Alors $\lambda\langle f, f\rangle_{\mathbb{L}^2} \geq 0$ par la question précédente, donc $\lambda \geq 0$. Si $\lambda \neq 0$, alors $G(f) = \frac{1}{\lambda} f$, donc puisque f est non nul, $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de G. Or on sait que G est un opérateur auto-adjoint compact de l'espace de Hilbert $\mathbb{L}^2(\Omega)$, donc n'a qu'un nombre dénombrable de valeurs propres, ce qui conclut.

Correction de l'exercice E.66. (1) Si f' et $\widetilde{f'}$ sont deux solutions au problème, alors $f' - \widetilde{f'}$ est orthogonal dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_1)$ à toutes les $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}_1)$. Puisque $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}_1)$ est dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_1)$, nous avons donc $f' = \widetilde{f'}$.

L'application $f \mapsto f'$ de $\mathscr{H}^1(\mathbb{S}_1)$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_1)$ est linéaire, par unicité et par la linéarité de la condition définissant f'. Par construction, l'application ψ de $\mathscr{H}^1(\mathbb{S}_1)$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_1) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{S}_1)$ définie par $f \mapsto (f, f')$ est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens sur son image. Pour montrer que $\mathscr{H}^1(\mathbb{S}_1)$ est complet, il suffit donc de montrer que son image est fermée : elle sera alors complète. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{S}_1)$ telle que (f_k, f'_k) converge vers un élément noté (f, g) dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_1) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{S}_1)$ quand $k \to +\infty$. Pour tout $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}_1)$, nous avons, par convergence faible et par la condition définissant les f'_k,

$$\langle g, \varphi\rangle_2 + \langle f, \varphi'\rangle_2 = \lim_{k\to+\infty} \langle f'_k, \varphi\rangle_2 + \langle f_k, \varphi'\rangle_2 = 0 \; .$$

Ceci montre que $f \in \mathscr{H}^1(\mathbb{S}_1)$ et que $g = f'$ par unicité. Le résultat en découle, car tout sous-espace d'un espace métrique séparable est séparable.

(2) En utilisant les notations de l'exercice I, nous savons que l'application $\mathscr{F} : \mathbb{L}^2(\mathbb{S}_1) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ définie par $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert, qui induit un isomorphisme linéaire de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}_1)$ sur le sous-espace $\mathscr{S}(\mathbb{Z})$ de $\ell^2(\mathbb{Z})$ des suites à décroissance rapide, tel que si $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}_1)$, alors $c_n(\varphi') = inc_n(\varphi)$ et $c_n(\varphi'') = -n^2 c_n(\varphi)$. Notons $\ell^{1,2}(\mathbb{Z})$ le sous-espace vectoriel des $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tels que la suite $u_0(x) = (|n|x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ appartienne à $\ell^2(\mathbb{Z})$. Munissons-le du produit scalaire $\langle x, y\rangle_{1,2} = \langle x, y\rangle_2 + \langle u_0(x), u_0(y)\rangle_2$. La transformation de Fourier induit par restriction un isomorphisme d'espaces de Hilbert de $\mathscr{H}^1(\mathbb{S}_1)$ dans $\ell^{1,2}(\mathbb{Z})$. Par un argument usuel de troncature, le sous-espace des suites de support fini est dense dans $\ell^{1,2}(\mathbb{Z})$. Donc par la transformation de Fourier, le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques est dense dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{S}_1)$, donc $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}_1)$ est dense dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{S}_1)$. Notons que $u_0 : \ell^{1,2}(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ est un opérateur linéaire continu (de norme au plus 1).

Posons $u = \mathscr{F}^{-1} \circ u_0 \circ \mathscr{F}$, qui est bien un opérateur linéaire continu (de norme au plus 1) de $\mathscr{H}^1(\mathbb{S}_1)$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_1)$. Notons que si $x \in \mathscr{S}(\mathbb{Z})$, alors $u_0(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{Z})$, donc u préserve $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}_1)$. Nous avons $u^2 = \mathscr{F}^{-1} \circ u_0^2 \circ \mathscr{F}$, et donc si $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}_1)$, alors

$$\begin{aligned} u^2(\varphi) &= \mathscr{F}^{-1} \circ u_0^2((c_n(\varphi))_{n\in\mathbb{Z}}) = \mathscr{F}^{-1} \circ ((n^2 c_n(\varphi))_{n\in\mathbb{Z}}) \\ &= \mathscr{F}^{-1} \circ ((c_n(-\varphi''))_{n\in\mathbb{Z}}) = -\varphi'' \; . \end{aligned}$$

Pour tout $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}_1)$, nous avons

$$\langle u(\varphi), \varphi\rangle_2 = \langle u_0(\mathscr{F}\varphi), \mathscr{F}\varphi\rangle_2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|\, |c_n(\varphi)|^2 \geq 0 \; .$$

Soit v un autre tel opérateur. Posons $v_0 = \mathscr{F} \circ v \circ \mathscr{F}^{-1}$. Par l'hypothèse, nous avons $v_0^2 = u_0^2 : (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (n^2 x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sur le sous-espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathrm{C}^\infty(\mathbb{S}_1)) = \mathscr{S}(\mathbb{Z})$, qui est préservé par v_0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace propre de $\mathscr{S}(\mathbb{Z})$ pour la valeur propre n^2 de v_0^2 est $\mathbb{C}e_n + \mathbb{C}e_{-n}$, en notant $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la base canonique de $\ell^2(\mathbb{Z})$. Puisque v_0 commute avec v_0^2, il préserve donc cet espace propre. Les seules transformations linéaires du plan réel euclidien de carré l'homothétie de rapport n^2 sont $\pm n\,\mathrm{id}$ et $\pm\begin{pmatrix} 0 & n \\ n & 0 \end{pmatrix}$ (dans une base orthonormée). La seule de ces transformations qui vérifie la condition de positivité voulue est $n\,\mathrm{id}$. Donc $v_0 = u_0$ sur $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, qui est, convenablement normalisée, une base hilbertienne de $\ell^{1,2}(\mathbb{Z})$. D'où $v_0 = u_0$ par continuité.

(3) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, notons $f_n : \theta \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi(1+n^2)}} \cos(n\theta)$ si $n \geq 0$ et $f_n : \theta \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi(1+n^2)}} \sin(n\theta)$ si $n < 0$. Il est facile de voir que ces vecteurs sont orthonormés dans

$\mathscr{H}^1(\mathbb{S}_1)$. L'espace vectoriel qu'ils engendrent contient les polynômes trigonométriques, donc est dense dans $\mathscr{H}^1(\mathbb{S}_1)$. De plus, en notant $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la base canonique de $\ell^2(\mathbb{Z})$, nous avons $\mathscr{F}(f_n) = \frac{e_n+e_{-n}}{2\sqrt{\pi(1+n^2)}}$ si $n \geq 0$ et $\mathscr{F}(f_n) = \frac{e_n-e_{-n}}{2i\sqrt{\pi(1+n^2)}}$ sinon. Donc $u_0(\mathscr{F}(f_n)) = |n|\mathscr{F}(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Par transformation de Fourier, nous avons donc que $u(f_n) = \lambda_n f_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, où $\lambda_n = |n|$.

Correction de l'exercice E.67. (1) C'est immédiat par récurrence : nous avons tout d'abord $e^{-x^2} = (-1)^0 H_0\, e^{-x^2}$ car $H_0 = 1$ et si le résultat est vrai au rang n, alors par la définition

$$0 = \frac{d}{dx}\Big(\big(\frac{d}{dx}\big)^n(e^{-x^2}) - (-1)^n H_n\, e^{-x^2}\Big) = \big(\frac{d}{dx}\big)^{n+1}(e^{-x^2}) - (-1)^n\big(\frac{dH_n}{dx} - 2xH_n\big)\, e^{-x^2}$$
$$= \big(\frac{d}{dx}\big)^{n+1}(e^{-x^2}) - (-1)^{n+1} H_{n+1}\, e^{-x^2}\ .$$

Le fait que H_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^n s'obtient aussi par une récurrence immédiate.

(2) a) Soient $p \leq q$ dans $\mathbb{N}$. Nous avons

$$\langle \psi_p, \psi_q\rangle_{\mathbb{L}^2} = c_p c_q \int_{\mathbb{R}} H_p H_q\, e^{-x^2}\ dx = (-1)^q c_p c_q \int_{\mathbb{R}} H_p \big(\frac{d}{dx}\big)^q (e^{-x^2})\, dx\ .$$

En intégrant par partie q fois (pour tout polynôme P, l'application $P(x)\, e^{-x^2}$ converge vers 0 en $\pm\infty$, donc les termes d'intégration s'annulent), et comme H_p est un polynôme de degré p, le terme de droite est nul si $p < q$. Si $p = q$, puisque H_p est de degré p et de coefficient dominant 2^p (donc $\big(\frac{d}{dx}\big)^p H_p = 2^p p!$), par le rappel de la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ et la définition de c_p, le terme de droite vaut

$$(-1)^q c_p\, c_q\, (-1)^p\, 2^p\, p! \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\ dx = c_p^2\, 2^p\, p!\, \sqrt{\pi} = 1\ .$$

Donc les applications ψ_n sont unitaires et deux à deux orthogonales. Comme H_n est un polynôme de degré n, l'espace vectoriel complexe engendré par les ψ_n est $\mathbb{C}[x]\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, qui est dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ par la propriété admise.

b) Nous avons

$$\big(\frac{d}{dx} + x\big)\psi_0 = \pi^{-\frac{1}{4}}\big(\frac{d}{dx} + x\big)e^{-\frac{x^2}{2}} = \pi^{-\frac{1}{4}}\big(-\frac{2x}{2} + x\big)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0\ .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la relation de récurrence vérifiée par les H_n,

$$\big(-\frac{d}{dx} + x\big)\psi_n = c_n\big(-\frac{d}{dx} + x\big)(H_n\, e^{-\frac{x^2}{2}})$$
$$= c_n\Big(\big(-\frac{d}{dx} + 2x\big)H_n\Big)e^{-\frac{x^2}{2}} - c_n\big(x - \frac{2x}{2}\big)H_n\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$= \frac{c_n}{c_{n+1}}\, c_{n+1}\, H_{n+1}\, e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2(n+1)}\ \psi_{n+1}\ .$$

c) En notant $\mathscr{F}(f) = \widehat{f}$, rappelons que $\widehat{f'} = ix\,\widehat{f}$ et $\widehat{xf} = i\widehat{f}\,'$ si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Par la formule de transformation de Fourier inverse, $\mathscr{F}$ est unitaire.

Posons $f = \mathscr{F}(\psi_0)$. Alors $0 = \mathscr{F}\big((\frac{d}{dx} + x)\psi_0\big) = ixf + if'$. Donc f vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre $f' + xf = 0$, avec condition initiale

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi_0(t)\, dt = \frac{c_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = c_0\ .$$

Donc $f = c_0\, e^{-\frac{x^2}{2}} = \psi_0$. Par récurrence,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(\psi_{n+1}) &= \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}\, \mathscr{F}\big((-\frac{d}{dx} + x)\psi_n\big) = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}\big(-ix + i\frac{d}{dx}\big)\mathscr{F}(\psi_n) \\ &= \frac{(-i)^{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}}\big(-\frac{d}{dx} + x\big)\psi_n = (-i)^{n+1}\psi_{n+1}\ .\end{aligned}$$

L'opérateur $\mathscr{F}$ est donc diagonal dans la base hilbertienne $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Par un exercice vu en cours, les valeurs propres de $\mathscr{F}$ sont donc les coefficients diagonaux, son spectre résiduel est vide, et son spectre est l'adhérence de l'ensemble des coefficients diagonaux. Donc

$$\mathrm{Vp}(\mathscr{F}) = \mathrm{Sp}(\mathscr{F}) = \{1, -1, i, -i\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(\mathscr{F}) = \emptyset\ .$$

(3) a) Par la question (2) b), nous avons $\frac{d\psi_0}{dx} = -x\psi_0$, donc $\frac{d^2\psi_0}{dx^2} = -\psi_0 + x^2\psi_0$, d'où $H(\psi_0) = \psi_0$. Par récurrence,

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_{n+1}}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}\frac{d}{dx}\big(-\frac{d\psi_n}{dx} + x\psi_n\big) = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}\big(-\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + x\frac{d\psi_n}{dx} + \psi_n\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}\big((2n+2-x^2)\psi_n + x\frac{d\psi_n}{dx}\big)\ .\end{aligned}$$

En dérivant une seconde fois, et toujours par récurrence,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi_{n+1}}{dx^2} &= \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}\big(-2x\psi_n + (2n+2-x^2+1)\frac{d\psi_n}{dx} + x\frac{d^2\psi_n}{dx^2}\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}\big(-2x\psi_n + (2n+3-x^2)\frac{d\psi_n}{dx} + x(x^2\psi_n - (2n+1)\psi_n)\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}\big(x^2(-\frac{d\psi_n}{dx} + x\psi_n) + (2n+3)(\frac{d\psi_n}{dx} - x\psi_n)\big) \\ &= x^2\psi_{n+1} - (2n+3)\psi_{n+1}\ .\end{aligned}$$

Donc $H(\psi_{n+1}) = (2n+3)\psi_{n+1}$, ce qu'il fallait démontrer.

b) Notons $G : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ l'unique opérateur linéaire continu tel que $G(\psi_n) = \frac{1}{2n+1}\psi_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, dont l'existence et l'unicité ont été vues en exercice, car la suite $\big(\frac{1}{2n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Comme cette suite converge vers 0, nous avons vu dans un autre exercice de cours que cet opérateur est compact. En écrivant $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ dans la base hilbertienne $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\psi_n$ et $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n\psi_n$, il est immédiat de vérifier, par la linéarité et la continuité de H et de G sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, que $H(f) = g$ si et seulement si $g_n = (2n+1)f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si et seulement si $f_n = \frac{1}{2n+1}\, g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si et seulement si $f = G(g)$.

(4) Le calcul fonctionnel continu admet une extension aux opérateurs unitaires (et même normaux), et le résultat pouvait être obtenu en posant $u_t = f_t(\mathscr{F})$ où $f_t : \lambda \mapsto \lambda^t$ (qui est bien défini et continu sur le spectre discret $\mathrm{Sp}(\mathscr{F})$). Mais comme le calcul fonctionnel continu n'a été vu en cours que pour les opérateurs auto-adjoints, et puisque $\mathscr{F}$ est unitaire, mais pas auto-adjoint, il fallait travailler à la main.

a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, notons $u_t : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ l'unique opérateur linéaire continu tel que

$$u_t(\psi_n) = e^{-itn\frac{\pi}{2}}\,\psi_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, dont l'existence et l'unicité ont été vues en exercice, car la suite $\big(e^{-itn\frac{\pi}{2}}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Notons que $u_1(\psi_n) = (-i)^n\psi_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc les opérateurs linéaires continus u_1 et $\mathscr{F}$, qui coïncident sur la base hilbertienne $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sont égaux. De même, pour tous les $s, t \in \mathbb{R}$, les opérateurs linéaires continus u_{t+s} et $u_t \circ u_s$ coïncident sur cette base hilbertienne, donc sont égaux.

Soient $\epsilon > 0$ et $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Soient $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\psi_n$ l'écriture de f dans la base hilbertienne $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par l'égalité de Parseval, il existe $C > 0$ tel que $|f_n| \le C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand, et si $N \in \mathbb{N} - \{0\}$ est assez grand, alors $\sum_{n=N}^{+\infty} |f_n|^2 < \frac{\epsilon^2}{8}$. Si t est assez proche de t_0, alors pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$, nous avons $\big|e^{-itn\frac{\pi}{2}} - e^{-it_0n\frac{\pi}{2}}\big| \le \frac{\epsilon}{C\sqrt{2N}}$ par continuité. Par conséquent, par l'égalité de Parseval,

$$\begin{aligned}\|u_t(f) - u_{t_0}(f)\|_2^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \big|e^{-itn\frac{\pi}{2}} - e^{-it_0n\frac{\pi}{2}}\big|^2\,|f_n|^2\\ &\le C^2\sum_{n=0}^{N-1} \big|e^{-itn\frac{\pi}{2}} - e^{-it_0n\frac{\pi}{2}}\big|^2 + 2^2\sum_{n=N}^{+\infty} |f_n|^2\\ &\le NC^2\Big(\frac{\epsilon}{C\sqrt{2N}}\Big)^2 + 2^2\frac{\epsilon^2}{8} = \epsilon^2\ .\end{aligned}$$

Donc $\|u_t(f) - u_{t_0}(f)\|_2 \le \epsilon$ et le résultat en découle.

b) L'opérateur u_t étant diagonal dans la base hilbertienne $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ de suite des coefficients diagonaux $(e^{-itn\frac{\pi}{2}})_{n\in\mathbb{N}}$, par un exercice vu en cours, les valeurs propres de $\mathscr{F}$ sont donc ces coefficients diagonaux, son spectre résiduel est vide, et son spectre est l'adhérence de l'ensemble des coefficients diagonaux. Donc

$$\mathrm{Vp}(u_t) = \{e^{-itn\frac{\pi}{2}}\ :\ n \in \mathbb{N}\}\quad\text{et}\quad \mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u_t) = \emptyset\ .$$

Si t est irrationnel, alors la suite $(e^{-itn\frac{\pi}{2}})_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans le cercle $\mathbb{S}_1$, sinon, elle est finie. Donc $\mathrm{Sp}(u_t) = \mathbb{S}_1$ si t est irrationnel, et $\mathrm{Sp}(u_{\frac{p}{q}}) = \{e^{-in\frac{\pi p}{2q}}\ :\ n = 0, \dots, 4q-1\}$ si $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Correction de l'exercice E.68. (1) a) L'application de $\mathscr{H}_1$ dans $\mathbb{L}^2([0, +\infty[)$ définie par $f \mapsto \sqrt{t}\,e^{-t/2}f$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert, qui envoie $\mathrm{C}_c^\infty([0, +\infty[)$ sur lui-même. Donc le sous-espace vectoriel $\mathrm{C}_c^\infty([0, +\infty[)$ est dense dans $\mathscr{H}_1$. L'unicité de u' pour tout $u \in \mathscr{H}_2$ découle alors du fait que le produit scalaire de $\mathscr{H}_1$ est continu et non dégénéré.

Pour tous les $u, \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty([0, +\infty[)$, nous avons par intégration par partie

$$\begin{aligned}\langle u', \varphi\rangle_{\mathscr{H}_1} &= \int_0^{+\infty} u'\,(\overline{\varphi}\;t\,e^{-t})\,dt = -\int_0^{+\infty} u\,\overline{(\varphi'\,t\,e^{-t} + \varphi\,e^{-t} - \varphi\,t\,e^{-t})}\,dt\\ &= \langle u, -t\varphi' - (1-t)\varphi\rangle_{\mathscr{H}_0}\ ,\end{aligned}$$

et la seconde affirmation découle de l'unicité.

b) L'application $u \mapsto u'$ de $\mathscr{H}_2$ dans $\mathscr{H}_1$ est linéaire, par unicité et par la linéarité de la condition définissant u'. Notons que si $\|u\|_{\mathscr{H}_2} = 0$, alors $\|u\|_{\mathscr{H}_0} = 0$ (donc $u = 0$ dans $\mathscr{H}_0$ donc dans $\mathscr{H}_2$). Par construction, l'application ψ de $\mathscr{H}_2$ dans $\mathscr{H}_0 \times \mathscr{H}_1$ définie par $u \mapsto (u, u')$ est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens sur son image. Pour montrer que $\mathscr{H}_2$ est complet, il suffit donc de montrer que son image est fermée : elle sera alors complète. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{H}_2$ telle que (f_k, f_k') converge vers un élément noté (f, g) dans $\mathscr{H}_0 \times \mathscr{H}_1$ quand $k \to +\infty$. Pour tous les $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty([0, +\infty[)$, nous avons, par la continuité des produits scalaires (en la première variable),

$$\langle g, \varphi\rangle_{\mathscr{H}_1} - \langle f, -t\varphi' - (1-t)\varphi\rangle_{\mathscr{H}_0} = \lim_{k\to+\infty} \langle f_k', \varphi\rangle_{\mathscr{H}_1} - \langle f_k, -t\varphi' - (1-t)\varphi\rangle_{\mathscr{H}_0} = 0 \ .$$

Ceci montre que $f \in \mathscr{H}_2$ avec $f' = g$. Le résultat en découle, car tout sous-espace d'un espace métrique séparable est séparable, et $C_c^\infty([0, +\infty[)$ est de dimension infinie.

(2) a) Nous avons $\|v\|^2_{\mathscr{H}_2} = \| \, v' \, \|^2_{\mathscr{H}_1} + \|v\|^2_{\mathscr{H}_0} \leq \|v\|^2_{\mathscr{H}_0}$ pour tout $v \in \mathscr{H}_2$.

b) L'application $v \mapsto \langle f, v\rangle_{\mathscr{H}_0}$ est une forme anti-linéaire continue sur $\mathscr{H}_2$, car par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathscr{H}_0$, pour tout $v \in \mathscr{H}_2$,

$$|\langle f, v\rangle_{\mathscr{H}_0}| \leq \|f\|_{\mathscr{H}_0} \|v\|_{\mathscr{H}_0} \leq \|f\|_{\mathscr{H}_0} \|v\|_{\mathscr{H}_2} \, .$$

Le produit scalaire $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle_{\mathscr{H}_2}$ de $\mathscr{H}_2$ est une forme sesquilinéaire continue coercive hermitienne sur $\mathscr{H}_2$, donc le théorème de Lax-Milgram dit d'une part qu'il existe un unique élément $u \in \mathscr{H}_2$ tel que pour tout $v \in \mathscr{H}_2$, nous ayons $\langle u, v\rangle_{\mathscr{H}_2} = \langle f, v\rangle_{\mathscr{H}_0}$ et d'autre part que cet élément u est l'unique élément de $\mathscr{H}_2$ qui minimise Q_f.

(3) La linéarité de G découle de l'unicité et de la linéarité en (u, f) des équations $\langle u, v\rangle_{\mathscr{H}_2} = \langle f, v\rangle_{\mathscr{H}_0}$ pour tout $v \in \mathscr{H}_2$.

Montrons que G est continu. Si $G(f) = u$, alors u minimisant Q_f, nous avons

$$0 = \frac{d}{dt}_{|t=1} Q_f(tu) = \|u\|^2_{\mathscr{H}_2} - \mathrm{Re}\, \langle f, u\rangle_{\mathscr{H}_0} \ .$$

Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la question (2) a),

$$\|u\|^2_{\mathscr{H}_2} \leq \|f\|_{\mathscr{H}_0} \|u\|_{\mathscr{H}_0} \leq \|f\|_{\mathscr{H}_0} \|u\|_{\mathscr{H}_2} \ .$$

D'où G est continu (de norme au plus 1).

Pour tout $f \in \mathscr{H}_0$, en utilisant la question (2) b) pour la seconde égalité, nous avons

$$\langle G(f), f\rangle_{\mathscr{H}_0} = \overline{\langle f, G(f)\rangle_{\mathscr{H}_0}} = \overline{\langle G(f), G(f)\rangle_{\mathscr{H}_2}} = \big\|G(f)\big\|^2_{\mathscr{H}_2} \ ,$$

qui est positif, et nul si et seulement si $G(f)$ est nul dans $\mathscr{H}_2$. Or si $f = 0$, alors $G(f) = 0$ par linéarité de G. De plus, si $G(f) = 0$, alors par la question (2) b), f est orthogonale à tout élément de $\mathscr{H}_0$, donc f est nulle.

Comme $G : \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}_0$ est continue et à valeurs dans $\mathscr{H}_2$, dont l'injection dans $\mathscr{H}_0$ est compacte, et puisque la composition d'un opérateur compact et d'un opérateur continu est compact, G est un opérateur compact.

(4) Puisque G est un opérateur linéaire continu compact auto-adjoint (car positif), et puisque 0 n'est pas une valeur propre de G par ce qui précède, G est diagonalisable en

base hilbertienne, à valeurs propres strictement positives décroissantes tendant vers 0 : il existe une suite $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, décroissante, convergente vers 0, et une base hilbertienne $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}_0$ telle que $G(f_i) = \epsilon_i f_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Posons $\lambda_i = \frac{1}{\epsilon_i}$. Alors par la question (2) b), pour tout $i \in \mathbb{N}$, pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty([0, +\infty[\,)$, nous avons $\langle G(f_i), \varphi\rangle_{\mathscr{H}_2} = \langle f_i, \varphi\rangle_{\mathscr{H}_0}$, donc $\langle f_i, \varphi\rangle_{\mathscr{H}_2} = \lambda_i \langle f_i, \varphi\rangle_{\mathscr{H}_0}$. Ceci équivaut au résultat cherché par la définition de f_i' :

$$\langle f_i, \varphi\rangle_{\mathscr{H}_2} = \langle f_i', \varphi'\rangle_{\mathscr{H}_1} + \langle f_i, \varphi\rangle_{\mathscr{H}_0} = \langle f_i, -t\varphi'' - (1-t)\varphi'\rangle_{\mathscr{H}_0} + \langle f_i, \varphi\rangle_{\mathscr{H}_0} \ .$$

(5) a) Il est immédiat par récurrence que L_n est de degré n. Puisque

$$L_{n+1} = \frac{-1}{n+1}\big((x - 2n - 1)L_n + nL_{n-1}\big) \ ,$$

le coefficient dominant a_n de L_n vérifie $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{-1}{n+1}\, a_n$, donc $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$. Les deux formules se montrent simultanément par récurrence.

Correction de l'exercice E.69. (1) a) L'unicité de δ vient du fait qu'un élément de $\mathscr{H}$ est uniquement déterminé par ses coordonnées hilbertiennes dans $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $z \in \mathscr{S}$, il existe $c > 0$ tel que $n^2|z_n| \le c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} |nz_n|^2 \le \sum_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} \frac{c^2}{n^2} < +\infty$. Par la partie réciproque du théorème de Parseval, $\delta(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} nz_n$ est donc bien défini dans $\mathscr{H}$, et il est immédiat que $\delta(z) \in \mathscr{S}$ et que δ est linéaire sur $\mathscr{S}$. Comme $\mathrm{Vect}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, qui est dense dans $\mathscr{H}$ par les propriétés des bases hilbertiennes, est contenu dans $\mathscr{S}$, le sous-espace $\mathscr{S}$ est dense dans $\mathscr{H}$.

b) Si $x'' \in \mathscr{H}$ vérifie $\langle x'', z\rangle_{\mathscr{H}} = \langle x, \delta(z)\rangle_{\mathscr{H}}$ pour tout $z \in \mathscr{S}$, alors $\langle x'' - x', z\rangle_{\mathscr{H}} = 0$ pour tout $z \in \mathscr{S}$, et par la densité de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{H}$ et par la continuité du produit scalaire, nous avons $\langle x'' - x', x'' - x'\rangle_{\mathscr{H}} = 0$, donc $x'' = x'$.

Pour tous les $w, z \in \mathscr{S}$, nous avons

$$\langle \delta(w), z\rangle_{\mathscr{H}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} nw_n\, \overline{z_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} w_n\, \overline{nz_n} = \langle w, \delta(z)\rangle_{\mathscr{H}} \ ,$$

donc $\mathscr{S}$ est contenu dans $\mathscr{H}_1$ et les notations δ coïncident sur $\mathscr{S}$.

Considérons l'application $\psi : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H} \times \mathscr{H} \times \mathscr{H}$ définie par $x \mapsto (\delta(x), u(x), x)$. Par l'unicité et la linéarité des équations définissant δ, l'espace $\mathscr{H}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$, et les applications δ et donc ψ sont linéaires sur $\mathscr{H}_1$. L'application ψ est injective, en regardant la troisième composante. L'application $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathscr{H}_1}$ est clairement sesquilinéaire, hermitienne et définie positive, et par construction, ψ est une application isométrique. Pour montrer que $\mathscr{H}_1$ est un espace de Hilbert, il suffit donc de montrer que l'image de ψ est fermée.

Soit $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{H}_1$ telle que $(\delta(x^{(k)}), u(x^{(k)}), x^{(k)})$ converge vers (a, b, c) dans $\mathscr{H} \times \mathscr{H} \times \mathscr{H}$. Alors par continuité de u, la suite des $u(x^{(k)})$ converge vers b et vers $u(c)$, donc $b = u(c)$. Pour tout $z \in \mathscr{S}$, nous avons, par la continuité du produit scalaire

$$\langle a, z\rangle = \lim_{k\to+\infty} \langle \delta(x^{(k)}), z\rangle = \lim_{k\to+\infty} \langle x^{(k)}, \delta(z)\rangle = \langle c, \delta(z)\rangle \ .$$

Donc $c \in \mathscr{H}_1$ et $a = \delta(c)$. D'où (a, b, c) appartient à l'image de ψ, et cette image est fermée.

c) Puisque $\|x\|_{\mathscr{H}_1} = \sqrt{\|\delta(x)\|^2_{\mathscr{H}} + \|u(x)\|^2_{\mathscr{H}} + \|x\|^2_{\mathscr{H}}} \geq \|x\|_{\mathscr{H}}$, l'inclusion de $\mathscr{H}_1$ dans $\mathscr{H}$ est continue (de norme au plus 1). Pour tout $N \in \mathbb{N}$, notons φ_N la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel (de dimension finie, donc fermé) $\operatorname{Vect}\{e_k\ :\ -N \leq k \leq N\}$. Pour tout $x \in \mathscr{H}_1$, nous avons, par l'égalité de Parseval,

$$\begin{aligned}\|\varphi(x) - \varphi_N(x)\|^2_{\mathscr{H}} = \|\sum_{n>N} x_n e_n\|^2_{\mathscr{H}} = \sum_{n>N} |x_n|^2 \leq \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{n>N} |n x_n|^2 \\ \leq \frac{1}{(N+1)^2}\ \|\delta(x)\|^2_{\mathscr{H}} \leq \frac{1}{(N+1)^2}\ \|x\|^2_{\mathscr{H}_1}\ .\end{aligned}$$

Donc $\|\varphi - \varphi_N\| \leq \frac{1}{N+1}$ tend vers 0 quand $N \to +\infty$. Par conséquent, l'inclusion φ, limite des opérateurs compacts (car de rang fini) φ_N, est un opérateur compact.

(2) Le produit scalaire dans $\mathscr{H}$ avec x est une forme anti-linéaire continue $y \mapsto \langle x, y\rangle_{\mathscr{H}}$ sur $\mathscr{H}_1$ par la linéarité et la continuité de l'inclusion de $\mathscr{H}_1$ dans $\mathscr{H}$ et la continuité du produit scalaire dans $\mathscr{H}$. L'application $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle_{\mathscr{H}_1}$ est une forme sesquilinéaire continue coercive hermitienne sur $\mathscr{H}_1$. Donc le théorème de Lax-Milgram dit qu'il existe un unique élément $x'' \in \mathscr{H}_1$ tel que pour tout $y \in \mathscr{H}_1$, nous ayons $\langle x'', y\rangle_{\mathscr{H}_1} = \langle x, y\rangle_{\mathscr{H}}$ et que cet élément x'' est l'unique élément de $\mathscr{H}_1$ qui minimise Q_x.

(3) La linéarité de G découle de l'unicité et de la linéarité en (x'', x) des équations dans (2).

Montrons que G est auto-adjoint (même si les espaces de Hilbert étant complexes, le fait que G est auto-adjoint découle du fait qu'il est positif, qui sera démontré ci-dessous). Soient $x, y \in \mathscr{H}$. Par la question (2), nous avons $\langle G(x), G(y)\rangle_{\mathscr{H}_1} = \langle x, G(y)\rangle_{\mathscr{H}}$. En utilisant (la conjuguaison complexe de) cette formule et cette formule où nous avons échangé x et y, nous avons donc

$$\langle G(y), x\rangle_{\mathscr{H}} = \langle G(y), G(x)\rangle_{\mathscr{H}_1} = \langle y, G(x)\rangle_{\mathscr{H}}\ .$$

Montrons que G est continu. Puisque $G(x) \in \mathscr{H}_1$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\|G(x)\|^2_{\mathscr{H}} \leq \|G(x)\|^2_{\mathscr{H}_1} = \langle G(x), G(x)\rangle_{\mathscr{H}_1} = \langle x, G(x)\rangle_{\mathscr{H}} \leq \|x\|_{\mathscr{H}} \|G(x)\|_{\mathscr{H}}\ . \tag{42}$$

D'où G est continu (de norme au plus 1).

Montrons que G est positif, et même strictement positif, c'est-à-dire que $\langle G(x), x\rangle_{\mathscr{H}} > 0$ pour tout élément non nul x de $\mathscr{H}$. Comme vu ci-dessus,

$$\langle G(x), x\rangle_{\mathscr{H}} = \big\|G(x)\big\|^2_{\mathscr{H}_1}\ ,$$

qui est positif, et nul si et seulement si $G(x)$ est nul. Or si $x = 0$, alors $G(x) = 0$ par linéarité de G. De plus, si $G(x) = 0$, puisque $\langle G(x), y\rangle_{\mathscr{H}_1} = \langle x, y\rangle_{\mathscr{H}}$ pour tout $y \in \mathscr{H}_1$ par la question (2), l'élément x est orthogonal à tout élément de $\mathscr{H}_1$, qui contient $\mathscr{S}$ donc est dense dans $\mathscr{H}$, d'où x est nul.

Montrons enfin que G est un opérateur compact. Comme G est linéaire continue, d'image contenue dans $\mathscr{H}_1$, nous avons $G = \varphi \circ G_1$ où $\varphi : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}$ est l'inclusion et $G_1 : \mathscr{H} \to \mathscr{H}_1$ est continu, car la formule (42) et la question (1) c) montrent que

$$\big\|G(x)\big\|^2_{\mathscr{H}_1} \leq \|x\|_{\mathscr{H}} \|G(x)\|_{\mathscr{H}} \leq \|x\|_{\mathscr{H}} \|G(x)\|_{\mathscr{H}_1}$$

donc que $\|G(x)\|_{\mathscr{H}_1} \leq \|x\|_{\mathscr{H}}$ pour tout $x \in \mathscr{H}$. Le résultat découle donc de la question (1) c) et de l'invariance de la propriété d'être un opérateur compact par postcomposition par un opérateur linéaire continu.

(4) Puisque G est positif et $\|G\| \leq 1$, son spectre est contenu dans $[0,1]$. Soit $f : t \to \operatorname{arctanh} t$, qui est bien définie et continue sur $[0, \frac{1}{2}]$. Puisque $\frac{1}{2}G$ est auto-adjoint de spectre contenu dans $[0, \frac{1}{2}]$, posons $u = \varphi(f)$ l'opérateur linéaire continu de l'espace de Hilbert non nul $\mathscr{H}$ associé à f par le calcul fonctionnel continu φ de $\frac{1}{2}G$. Puisque f est réelle sur $[0, \frac{1}{2}]$, l'opérateur u est auto-adjoint. Par le théorème spectral, son spectre est contenu dans $f([0, \frac{1}{2}]) = [0, \operatorname{arctanh} \frac{1}{2}]$.

On rappelle que $\operatorname{arctanh} t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i$ est une série de terme constant nul, uniformément convergente sur le compact $[0, \frac{1}{2}]$. Donc par la continuité du calcul fonctionnel continu φ,

$$u = \varphi(f) = \lim_{n \to +\infty} \varphi\big(\sum_{i=1}^{n} a_i t^i\big) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i}\, G^i$$

est un opérateur compact, comme limite d'opérateurs compacts, leur ensemble étant stable par combinaisons linéaires et par précompositions par des opérateurs continus.

Écrivons $\tanh t = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$, qui est une série uniformément convergente sur le compact $[0, \operatorname{arctanh} \frac{1}{2}]$. Notons P_n le polynome $\sum_{i=0}^{n} b_i X^i$. Par le calcul fonctionnel continu associé à u et sa continuité, l'opérateur $\exp(2u) + 1$ est inversible (son spectre ne contient pas 0 car la fonction $e^{2t} + 1$ est strictement positive sur le spectre de u), et

$$(\exp(2u) - 1) \circ (\exp(2u) + 1)^{-1} = \tanh u = \lim_{n \to +\infty} P_n(u)\ .$$

Puisque φ est un morphisme d'algèbres et puisqu'il est continu, nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{n \to +\infty} P_n(u) &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} b_i \varphi(f)^n = \lim_{n \to +\infty} \varphi\big(\sum_{i=0}^{n} b_i f^n\big) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \varphi(P_n \circ f) = \varphi(\tanh \circ f) = \varphi(\mathrm{id}) = \frac{1}{2}\, G\ ,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait montrer.

(5) Puisque l'opérateur $G : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ est auto-adjoint, strictement positif, compact (et $\mathscr{H}$ est de dimension infinie), il est diagonalisable en base hilbertienne, à valeurs propres strictement positives décroissantes tendant vers 0 : il existe une suite $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, décroissante, convergente vers 0, et une base hilbertienne $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$ telle que $G(f_i) = \epsilon_i f_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Posons $\lambda_i = \frac{1}{\epsilon_i} > 0$. Alors par la question (2) et la définition de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{H}_1}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in \mathscr{S}$ (rappelons que $\mathscr{S}$ est contenu dans $\mathscr{H}_1$), nous avons

$$\begin{aligned}\lambda_i \langle f_i, z \rangle_{\mathscr{H}} &= \lambda_i \langle G(f_i), z \rangle_{\mathscr{H}_1} = \lambda_i \epsilon_i \langle f_i, z \rangle_{\mathscr{H}_1} = \langle f_i, z \rangle_{\mathscr{H}_1} \\ &= \langle \delta(f_i), \delta(z) \rangle_{\mathscr{H}} + \langle u(f_i), u(z) \rangle_{\mathscr{H}} + \langle f_i, z \rangle_{\mathscr{H}} \\ &= \langle f_i, \delta^2(z) \rangle_{\mathscr{H}} + \langle f_i, u^* u(z) \rangle_{\mathscr{H}} + \langle f_i, z \rangle_{\mathscr{H}}\ .\end{aligned}$$

Correction de l'exercice E.70. (1) Considérons l'application $\Psi : \mathscr{H}_{a,b} \to \mathscr{H} \times \mathscr{H}$ définie par $x \mapsto (dx, Vx)$, qui est bien définie par la construction de $\mathscr{H}_{a,b}$, linéaire par linéarité terme à terme des séries dx et Vx, et isométrique par construction. Montrons que son image est fermée, ce qui montrera que $\mathscr{H}_{a,b}$ est complet comme isométrique à un fermé d'un espace complet, et séparable comme partie d'un espace métrique séparable.

Soit $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{H}_{a,b}$, telle que la suite $(du^k, Vu^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers (v,w) dans $\mathscr{H}\times\mathscr{H}$. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, posons $u_n = \frac{w_n}{b_n}$. Nous avons par l'égalité de Parseval

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{b_n^2}\,|w_n|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |w_n|^2 = \|w\|^2_{\mathscr{H}} < +\infty\ ,$$

puisque $b_n \geq 1$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$. Donc $u=\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e_n$ appartient à $\mathscr{H}$, par la réciproque du théorème de Parseval.

Soit $M>0$ telle que la suite de réels strictement positifs $\big(\frac{a_n}{\min\{b_{n+1},b_n\}}\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit bornée par M. Alors

$$\begin{aligned}\|du^k-du\|^2_{\mathscr{H}} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n(u^k_{n+1}-u^k_n)-a_n(u_{n+1}-u_n)|^2\\ &\leq 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^2\,|u^k_{n+1}-u_{n+1}|^2 + a_n^2\,|u^k_n-u_n|^2\\ &= 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a_n^2}{b_{n+1}^2}\,|b_{n+1}u^k_{n+1}-w_{n+1}|^2 + 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a_n^2}{b_n^2}\,|b_nu^k_n-w_n|^2\\ &\leq 4M^2\,\|Vu^k-w\|^2_{\mathscr{H}}\ ,\end{aligned}$$

qui converge vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Donc, par unicité de la limite, $du=v\in\mathscr{H}$ et comme $w=Vu$ par construction de u, ceci montre que (v,w) appartient à l'image de Ψ, qui est donc fermée.

Pour tout $x\in\mathscr{H}_{a,b}$, nous avons immédiatement par l'égalité de Parseval $\|x\|_{\mathscr{H}}\leq\|Vx\|_{\mathscr{H}}$ puisque $b_n\geq 1$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, donc

$$\|x\|^2_{\mathscr{H}_{a,b}} = \|dx\|^2_{\mathscr{H}} + \|Vx\|^2_{\mathscr{H}} \geq \|x\|^2_{\mathscr{H}}\ ,$$

d'où $\|x\|_{\mathscr{H}}\leq\|x\|_{\mathscr{H}_{a,b}}$.

Le sous-espace vectoriel $\mathscr{F}$ est contenu dans $\mathscr{H}_{a,b}$ car si $x\in\mathscr{F}$, les séries dx et Vx n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls.

Notons $\iota:\mathscr{H}_{a,b}\to\mathscr{H}$ l'inclusion (qui est linéaire et continue car $\|\cdot\|_{\mathscr{H}}\leq\|\cdot\|_{\mathscr{H}_{a,b}}$). Notons $P_N:\mathscr{H}_{a,b}\to\mathscr{H}$ l'application définie par $x\mapsto\sum_{n=-N}^{N} x_n\,e_n$, qui est continue (de norme au plus 1) et de rang fini (égal à $2N+1$). Pour tout $\epsilon>0$, soit $N\in\mathbb{N}$ tel que $b_n\geq\frac{1}{\epsilon}$ pour tout $n\geq N$. Alors pour tout $x\in\mathscr{H}_{a,b}$, nous avons

$$\begin{aligned}\|\iota(x)-P_N(x)\|^2_{\mathscr{H}} &= \sum_{|n|>N}|x_n|^2 = \sum_{|n|>N}\frac{1}{b_n^2}|b_nx_n|^2 \leq \epsilon^2\sum_{|n|>N}|b_nx_n|^2 \leq \epsilon^2\|Vx\|^2_{\mathscr{H}}\\ &\leq \epsilon^2\|x\|^2_{\mathscr{H}_{a,b}}\ ,\end{aligned}$$

donc $\|\iota-P_N\|\leq\epsilon$, et ι est la limite (pour la norme d'opérateur) de P_N quand N tend vers $+\infty$. D'où ι est compact, comme limite d'opérateurs de rang fini, donc compacts.

(2) L'application $A:\mathscr{H}_{a,b}\times\mathscr{H}_{a,b}\to\mathbb{C}$ définie par $(z,y)\mapsto\langle z,y\rangle_{\mathscr{H}_{a,b}}$ est, par le théorème de Cauchy-Schwarz, une forme sesquilinéaire hermitienne continue coercice sur

$\mathscr{H}_{a,b}$. L'application $\varphi : \mathscr{H}_{a,b} \to \mathbb{C}$ définie par $y \mapsto \langle x, y\rangle_{\mathscr{H}}$ est une forme anti-linéaire (par l'anti-linéarité en la seconde variable d'un produit scalaire), et continue de norme au plus $\|x\|_{\mathscr{H}}$ car par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$|\langle x, y\rangle_{\mathscr{H}}| \leq \|x\|_{\mathscr{H}} \|y\|_{\mathscr{H}} \leq \|x\|_{\mathscr{H}} \|y\|_{\mathscr{H}_{a,b}} .$$

Donc par le théorème de Lax-Milgram, nous avons existence et unicité du minimum de $y \mapsto \frac{1}{2} A(y, y) - \operatorname{Re} \varphi(y) = \mathscr{Q}_x(y)$.

Toujours par ce théorème, $y \in \mathscr{H}_{a,b}$ est le minimum de $\mathscr{Q}_x$ si et seulement si, pour tout $z \in \mathscr{H}_{a,b}$, nous avons $A(y, z) = \varphi(z)$, c'est-à-dire $\langle y, z\rangle_{\mathscr{H}_{a,b}} = \langle x, z\rangle_{\mathscr{H}}$.

(3) L'application G est bien définie car à valeurs dans $\mathscr{H}_{a,b} \subset \mathscr{H}$. La linéarité de G découle de l'unicité et de la linéarité en (y, x) des égalités finales dans la question (2).

Montrons que G est continue. Par la question (1) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $x \in \mathscr{H}$,

$$\begin{aligned} \|G(x)\|^2_{\mathscr{H}} \leq \|G(x)\|^2_{\mathscr{H}_{a,b}} &= \langle G(x), G(x)\rangle_{\mathscr{H}_{a,b}} = \langle x, G(x)\rangle_{\mathscr{H}} \\ &\leq \|x\|_{\mathscr{H}} \|G(x)\|_{\mathscr{H}} \leq \|x\|_{\mathscr{H}} \|G(x)\|_{\mathscr{H}_{a,b}} . \end{aligned} \tag{43}$$

D'où en simplifiant par $\|G(x)\|_{\mathscr{H}}$ dans le premier et avant-dernier terme, l'opérateur $G : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ est continu (de norme au plus 1).

Montrons que G est positif (ce qui implique qu'il est auto-adjoint car $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert complexe), et même strictement positif, c'est-à-dire que $\langle G(x), x\rangle_{\mathscr{H}} > 0$ pour tout élément non nul x de $\mathscr{H}$. Pour tout $x \in \mathscr{H}$,

$$\langle x, G(x)\rangle_{\mathscr{H}} = \big\|G(x)\big\|^2_{\mathscr{H}_{a,b}} ,$$

qui est positif, et nul si et seulement si $G(x)$ est nul. Or si $x = 0$, alors $G(x) = 0$ par linéarité de G. De plus, si $G(x) = 0$, alors par la question (2), x est orthogonal à tout élément de $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}_{a,b}$, qui est dense dans $\mathscr{H}$, donc x est nul.

Montrons enfin que l'opérateur G est compact. Si $G' : \mathscr{H} \to \mathscr{H}_{a,b}$ est l'application $x \mapsto G(x)$, alors G' est continue car de norme au plus 1 (voir les formules (43) en simplifiant par $\|G(x)\|_{\mathscr{H}_{a,b}}$ dans le second et dernier terme). Donc $G = \iota \circ G'$ est un opérateur compact, comme composition d'un opérateur compact et d'un opérateur continu.

(4) Pour tout $z \in \mathscr{F}$, posons $d^* z = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (a_{n-1} y_{n-1} - a_n y_n) e_n$, qui existe dans $\mathscr{H}$ car cette somme n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. Un petit calcul immédiat montre que pour tout $x \in \mathscr{H}_{a,b}$,

$$\langle dx, z\rangle_{\mathscr{H}} = \langle x, d^* z\rangle_{\mathscr{H}} .$$

L'opérateur d préserve clairement $\mathscr{F}$, et un calcul immédiat montre que $d^* \circ d(z) = \Delta(z)$ pour tout $z \in \mathscr{F}$. Un calcul immédiat utilisant la positivité de la suite b donne que pour tout $x \in \mathscr{H}_{a,b}$, nous avons $\langle Vx, Vz\rangle_{\mathscr{H}} = \langle x, V \circ Vz\rangle_{\mathscr{H}}$.

Puisque l'opérateur $G : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ est auto-adjoint, strictement positif, compact (et comme $\mathscr{H}$ est de dimension infinie), il est diagonalisable en base hilbertienne, à valeurs propres strictement positives décroissantes tendant vers 0 : il existe une suite $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, décroissante, qui convergen vers 0, et une base hilbertienne $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$ telles que $G(f_i) = \epsilon_i f_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Puisque la norme de G (et donc le rayon spectral de G) est au plus 1, nous avons $\epsilon_i \leq 1$. En particulier, $f_i = \frac{1}{\epsilon_i} G(f_i) \in \mathscr{H}_{a,b}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Posons $\lambda_i = \frac{1}{\epsilon_i} \geq 1$, de sorte que la suite $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $+\infty$.

Alors par la question (2), pour tout $i \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in \mathscr{F} \subset \mathscr{H}_{a,b}$, nous avons

$$\begin{aligned}\lambda_i \langle f_i, z\rangle_{\mathscr{H}} &= \lambda_i \langle G(f_i), z\rangle_{\mathscr{H}_{a,b}} = \lambda_i \langle \epsilon_i f_i, z\rangle_{\mathscr{H}_{a,b}} = \langle f_i, z\rangle_{\mathscr{H}_{a,b}} \\ &= \langle df_i, dz\rangle_{\mathscr{H}} + \langle V f_i, V z\rangle_{\mathscr{H}} = \langle f_i, d^* \circ d(z)\rangle_{\mathscr{H}} + \langle f_i, V \circ V(z)\rangle_{\mathscr{H}} \\ &= \langle f_i, (\Delta + V \circ V)(z)\rangle_{\mathscr{H}} \ .\end{aligned}$$

Annexes

A Démonstrations des rappels sur les espaces de Hilbert

A.1 Démonstration de la proposition 1.9 (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient u et v dans $\mathscr{H}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz (ainsi que son cas d'égalité) est immédiate si $\langle u, v\rangle = 0$. Sinon, pour tout X dans $\mathbb{R}$, posons $\lambda = X\frac{\langle u,v\rangle}{|\langle u,v\rangle|}$. Alors

$$\|u+\lambda v\|^2 = \|u\|^2 + |\lambda|^2\,\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\big(\overline{\lambda}\,\langle u,v\rangle\big) = \|u\|^2 + X^2\,\|v\|^2 + 2\,X|\,\langle u,v\rangle\,|\;.$$

Ce polynôme quadratique réel en X, étant positif, est de discriminant (réduit) négatif, donc $|\langle u,v\rangle|^2 - \|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$, ce qui montre l'inégalité de Cauchy-Schwarz. S'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, alors ce polynôme a une racine double, donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\|u+\lambda v\|^2 = 0$, ce qui implique que u et v sont colinéaires.

Il est immédiat que $\|\lambda u\|^2 = |\lambda|^2\,\|u\|^2$, et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle u,v\rangle \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,|\,\langle u,v\rangle\,| \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\|u\|\,\|v\| = \big(\|u\| + \|v\|\big)^2\;.\end{aligned}$$

Comme le produit scalaire est défini positif, ceci montre que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathscr{H}$. □

A.2 Démonstration du théorème 1.10 (complétion d'un espace préhilbertien)

Faisons tout d'abord quelques rappels. Soient X et Y deux espaces métriques. Rappelons qu'une application f de X dans Y est *uniformément continue* si

$$\forall\,\epsilon > 0,\ \exists\,\eta > 0,\ \forall\,x,y \in X,\quad d(x,y) < \eta \implies d(f(x),f(y)) < \epsilon\;,$$

qu'on peut remplacer toute inégalité stricte par une inégalité large dans cette définition, qu'une application uniformément continue est en particulier continue et qu'une application uniformément continue envoie toute suite de Cauchy sur une suite de Cauchy. Rappelons qu'une *injection isométrique* d'un espace métrique dans un autre est une application $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques telle que

$$\forall\,x,y \in X,\quad d(f(x),f(y)) = d(x,y)\;.$$

Elle est injective et uniformément continue.

Théorème A.1 (Théorème de prolongement) *Soient X et Y deux espaces métriques, tels que Y soit complet, et soit A une partie dense de X. Toute application uniformément continue f de A dans Y se prolonge, de manière unique, en une application continue g de X dans Y. De plus, g est uniformément continue sur X.*

Pour mémoire, dire que g *prolonge* f signifie que $g(x) = f(x)$ pour tout x dans A. On note souvent encore f le prolongement obtenu. Par passage à la limite, si $f : A \to Y$ est une injection isométrique, alors $g : X \to Y$ est aussi une injection isométrique.

Démonstration. Supposons que g_1 et g_2 soient deux prolongements continus de f. Pour tout x dans X, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans A qui converge vers x. Alors la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g_1(x)$ et vers $g_2(x)$ par continuité de g_1 et de g_2, donc $g_1(x) = g_2(x)$ par unicité des limites. Ceci montre l'unicité de g.

Montrons l'existence d'un prolongement uniformément continu. Pour tout x dans X, fixons une suite $(a_{x,n})_{n\in\mathbb{N}}$ dans A qui converge vers x. La suite $(f(a_{x,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans Y, par l'uniforme continuité de f sur A. Elle converge donc vers un point $g(x)$ de Y, car Y est complet, avec $g(x) = f(x)$ si $x \in A$, par continuité de f sur A. Montrons que l'application g convient.

Puisque f est uniformément continue, pour tout $\epsilon > 0$, soit $\eta > 0$ tels que pour tous les $x, y \in A$, si $d(x,y) < \eta$ alors $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$. Pour tous les x, y dans X, si $d(x,y) < \eta$, par continuité de la distance, pour n assez grand, nous avons $d(a_{x,n}, a_{y,n}) < \eta$, donc $d(f(a_{x,n}), f(a_{y,n})) \leq \epsilon$, et par passage à la limite des inégalités larges, $d(g(x), g(y)) \leq \epsilon$. Donc g est uniformément continue, donc continue. □

Théorème A.2 *Soit X un espace métrique. Il existe un espace métrique complet $\widehat{X}$ et une injection isométrique $i : X \to \widehat{X}$ d'image dense. Si $\widehat{X}'$ est un autre espace métrique complet muni d'une injection isométrique $i' : X \to \widehat{X}'$ d'image dense, alors il existe une unique isométrie $j : \widehat{X} \to \widehat{X}'$ telle que $j \circ i = i'$, ou autrement dit telle que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \widehat{X} \\ & {\scriptstyle i'}\searrow & \downarrow{\scriptstyle j} \\ & & \widehat{X}' \,. \end{array}$$

Tout tel couple $(i, \widehat{X})$ (et par abus $\widehat{X}$) est appelé un *complété* de X. On identifie X avec son image dans $\widehat{X}$ par i. La propriété d'unicité modulo unique isomorphisme des complétés fait que l'on peut parler « du » complété au lieu d'un complété : on identifie deux complétés de X par l'unique telle isométrie j.

Démonstration. La propriété d'unicité est immédiate par le théorème de prolongement A.1 : l'application de $i(X)$ dans $i'(X)$ définie par $i(x) \mapsto i'(x)$ pour tout x dans X est une isométrie, donc se prolonge de manière unique en une application continue j de $\widehat{X}$ dans $\widehat{X}'$, qui est une application isométrique par passage à la limite. En appliquant le même raisonnement en échangeant i et i', et comme la seule application continue de $\widehat{X}$ dans $\widehat{X}$ (resp. de $\widehat{X}'$ dans $\widehat{X}'$) étendant l'identité de $i(X)$ (resp. $i'(X)$) est l'identité de $\widehat{X}$ (resp. $\widehat{X}'$), on en déduit que j est bijective, donc une isométrie.

Pour montrer l'existence de $(i, \widehat{X})$, nous pouvons supposer que X est non vide. Notons d la distance de X. Munissons l'espace vectoriel réel $\mathscr{C}_b(X;\mathbb{R})$ des applications continues bornées de X dans $\mathbb{R}$ de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Il n'est pas difficile de montrer qu'elle est complète. Notons $\phi : X \to \mathscr{C}_b(X;\mathbb{R})$ l'application définie par

$$x \mapsto \phi_x : z \mapsto d(z,x) - d(z,x_0) \,.$$

Remarquons que ϕ_x est continue, par continuité de la distance à un point, et bornée, car de valeur absolue majorée par $d(x,x_0)$, par l'inégalité triangulaire inverse. Pour tous les x, y dans X, nous avons

$$\|\phi_x - \phi_y\|_\infty = \sup_{z\in X} |\phi_x(z) - \phi_y(z)| = \sup_{z\in X} |d(z,x) - d(z,y)| \leq d(x,y)$$

par l'inégalité triangulaire inverse. En prenant $z = x$, la dernière inégalité est en fait une égalité. Donc ϕ est une injection isométrique. Posons $\widehat{X} = \overline{\phi(X)}$, qui est complet, car fermé dans l'espace de Banach $\mathscr{C}_b(X;\mathbb{R})$. En prenant pour $i : X \to \widehat{X}$ la restriction de ϕ, le résultat en découle. $\square$

Passons à la démonstration proprement dite du théorème 1.10. Par le théorème A.2, soit $\widehat{\mathscr{H}}$ un complété de l'espace métrique $\mathscr{H}$ pour la distance définie par sa norme, avec $\mathscr{H}$ une partie dense de $\widehat{\mathscr{H}}$. Les applications $(x, y) \mapsto x + y$ de $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$, $x \mapsto -x$ de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{C} \times \mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$, et $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle_{\mathscr{H}}$ de $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ dans $\mathbb{C}$ sont uniformément continues sur tous les bornés : en effet, pour tous les x, y, x', y' dans $\mathscr{H}$, par les propriétés des normes,

$$\|(x + y) - (x' + y')\| \leq \|x - x'\| + \|y - y'\| \;, \quad \|(-x) - (-x')\| = \|x - x'\| \;,$$

$$\|\lambda x - \lambda' x'\| \leq |\lambda - \lambda'|\, \|x\| + |\lambda'|\, \|x - x'\| \;,$$

$$|\langle x, y\rangle - \langle x', y'\rangle| = |\langle x - x', y\rangle + \langle x', y - y'\rangle| \leq \|x - x'\|\, \|y\| + \|x'\|\, \|y - y'\| \;.$$

Notons que $\widehat{\mathscr{H}}, \widehat{\mathscr{H}}, \widehat{\mathscr{H}}, \mathbb{C}$ sont complets et que $\mathscr{H} \times \mathscr{H}, \mathscr{H}, \mathbb{C} \times \mathscr{H}, \mathscr{H} \times \mathscr{H}$ sont denses dans $\widehat{\mathscr{H}} \times \widehat{\mathscr{H}}, \widehat{\mathscr{H}}, \mathbb{C} \times \widehat{\mathscr{H}}, \widehat{\mathscr{H}} \times \widehat{\mathscr{H}}$ respectivement. Donc par le théorème du prolongement A.1, ces applications se prolongent (de manière unique sur tout borné, donc globalement) en des applications continues $+ : \widehat{\mathscr{H}} \times \widehat{\mathscr{H}} \to \widehat{\mathscr{H}}$, $- : \widehat{\mathscr{H}} \to \widehat{\mathscr{H}}$, $\cdot : \mathbb{C} \times \widehat{\mathscr{H}} \to \widehat{\mathscr{H}}$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle : \widehat{\mathscr{H}} \times \widehat{\mathscr{H}} \to \mathbb{C}$, respectivement. Par passage à la limite des identités, ceci munit l'espace métrique $\widehat{\mathscr{H}}$ d'une structure d'espace préhilbertien dont la distance (complète) est associée à la norme associée au produit scalaire. Le résultat en découle facilement. $\square$

A.3 Démonstration du théorème 1.11 (projection sur un convexe fermé)

Soit $x \in \mathscr{H}$. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans C telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \inf_{z\in C} \|x - z\| = d(x, C) \;.$$

Comme $\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4 \operatorname{Re} \langle u, v\rangle$, il vient

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\|^2 &= \|y_m - x\|^2 + \|y_n - x\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle y_m - x, y_n - x\rangle \\ &= \|y_m - x\|^2 + \|y_n - x\|^2 - \frac{1}{2}\|2x - y_m - y_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_m - y_n\|^2 \;.\end{aligned}$$

Comme $\frac{y_n+y_m}{2}$ appartient à C par convexité, on a $\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\| \geq d(x, C)$. Donc

$$\frac{1}{2}\|y_m - y_n\|^2 \leq \|y_m - x\|^2 + \|y_n - x\|^2 - 2\, d(x, C)^2 \;.$$

Comme le membre de droite tend vers 0 quand $n \to +\infty$ et $m \geq n$, et puisque le membre de gauche est positif, on en déduit donc que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans C. Puisque $\mathscr{H}$ est complet, elle converge vers un point $y \in \mathscr{H}$. Celui-ci appartient à C, car C est fermé, et il vérifie $\|x - y\| = \inf_{z\in C} \|x - z\|$ par passage à la limite ; en particulier cette borne inférieure est atteinte, en au moins un point, que nous noterons $p_C(x)$.

Pour tout $y \in C$, par convexité de C, en raisonnant par équivalence, nous avons

$$\forall\, z \in C, \quad \|x - z\|^2 \geq \|x - y\|^2$$

si et seulement si

$$\forall\, z \in C,\ \forall\, t \in [0,1] \quad \|x - \big(tz + (1-t)y\big)\|^2 \geq \|x-y\|^2$$

si et seulement si

$$\forall\, z \in C,\ \forall\, t \in [0,1] \quad \|x - y - t(z-y)\|^2 \geq \|x-y\|^2$$

si et seulement si

$$\forall\, z \in C,\ \forall\, t \in [0,1] \quad -2t\,\mathrm{Re}\,\langle x-y, z-y\rangle + t^2\|z-y\|^2 \geq 0$$

si et seulement si

$$\forall\, z \in C,\ \forall\, t \in [0,1] \quad \mathrm{Re}\,\langle x-y, z-y\rangle \leq \frac{t}{2}\|z-y\|^2$$

si et seulement si

$$\forall\, z \in C, \quad \mathrm{Re}\,\langle x-y, z-y\rangle \leq 0\ .$$

Montrons que, pour tous les $x, x' \in \mathscr{H}$, si $y = p_C(x)$ et $y' = p_C(x')$, alors $\|y - y'\| \leq \|x - x'\|$ (ce qui en particulier montrera l'unicité de la projection de x sur C). En effet, par ce qui précède, on a

$$\mathrm{Re}\,\langle x-y, y'-y\rangle \leq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}\,\langle x'-y', y-y'\rangle \leq 0\ .$$

Donc en additionnant, on a

$$\mathrm{Re}\,\langle (x-y)-(x'-y'), y'-y\rangle \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,\langle x-x', y'-y\rangle + \|y'-y\|^2 \leq 0\ ,$$

ce qui implique par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\|y'-y\|^2 \leq -\,\mathrm{Re}\,\langle x-x', y'-y\rangle \leq \|x-x'\|\ \|y'-y\|\ .$$

On en déduit que p_C est 1-lipschitzienne.

Supposons que C soit un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}$. C'est donc un convexe fermé non vide, et la différence de deux éléments de C appartient encore à C. Donc la projection $y = p_C(x)$ d'un point x de $\mathscr{H}$ est l'unique élément y de C tel que pour tout $z \in C$, nous ayons $\mathrm{Re}\,\langle x-y, z\rangle \leq 0$. Comme C est stable par passage à l'opposé et par multiplication par i, le point y est l'unique élément de C tel que pour tout $z \in C$, nous ayons $\langle x-y, z\rangle = 0$.

La linéarité de p_C découle alors de cette unicité : si $x, x' \in \mathscr{H}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $p_C(x) + \lambda\, p_C(x')$ appartient à C et pour tout $z \in C$, nous avons

$$\langle (x+\lambda x') - \big(p_C(x) + \lambda\, p_C(x')\big), z\rangle = \langle x - p_C(x), z\rangle + \lambda\,\langle x' - p_C(x'), z\rangle = 0\ ,$$

donc par unicité $p_C(x+\lambda x') = p_C(x) + \lambda\, p_C(x')$. $\square$

A.4 Démonstration du théorème de dualité de Riesz-Fréchet 1.13

Il est immédiat que, pour tout x dans $\mathscr{H}$, l'application $\ell_x : y \mapsto \langle x, y\rangle$ est une forme linéaire sur $\overline{\mathscr{H}}$. Elle est continue car $\|\ell_x\| \leq \|x\|$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. L'application $x \mapsto \ell_x$ est clairement linéaire, et isométrique car $\ell_x(x) = \|x\|^2$, donc injective. Montrons qu'elle est surjective, ce qui conclura.

Soit $\varphi \in \overline{\mathscr{H}}^{\,*}$, que nous pouvons supposer non nulle, et $N = \varphi^{-1}(0)$ son noyau, qui est un hyperplan vectoriel fermé de $\mathscr{H}$. Par le corollaire 1.12 (1), le sous-espace vectoriel $N^{\perp}$ est donc une droite vectorielle supplémentaire à N. Soit z un vecteur de $N^{\perp}$ de norme 1. Pour tout u dans $\mathscr{H}$, nous pouvons donc écrire $u = v + \lambda z$ où $v \in N$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Nous avons

$$\varphi(u) = \overline{\lambda}\,\varphi(z) \quad \text{et} \quad \langle z, u\rangle = \overline{\lambda}\,\|z\|^2 = \overline{\lambda}\,.$$

Donc $\varphi = \varphi(z)\,\ell_z = \ell_{\varphi(z)\,z}$, ce qu'il fallait démontrer. □

A.5 Démonstration des théorèmes de Lax-Milgram 1.15 et de Stampacchia 1.16

Nous avons déjà signalé que le théorème de Lax-Milgram est une conséquence du théorème de Stampacchia, donc nous montrons ce dernier.

Soit $\varphi \in (\overline{\mathscr{H}})^*$. Puisque φ et $v \mapsto a(u, v)$, pour tout u dans $\mathscr{H}$, sont des formes linéaires continues sur $\overline{\mathscr{H}}$, par le théorème de Riesz-Fréchet 1.13, il existe un unique w dans $\mathscr{H}$ et, pour tout u dans $\mathscr{H}$, un unique $A(u)$ dans $\mathscr{H}$ tels que, pour tous les u, v dans $\mathscr{H}$, nous ayons

$$\varphi(v) = \langle w, v\rangle \quad \text{et} \quad a(u, v) = \langle A(u), v\rangle\ .$$

Soit $c \geq 1$ tel que, pour tous les u, v dans $\mathscr{H}$, on ait

$$|a(u, v)| \leq c\,\|u\|\,\|v\| \quad \text{et} \quad a(u, u) \geq \frac{1}{c}\,\|u\|^2\ .$$

Il est immédiat que $A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ est linéaire, par unicité. Pour tout u dans $\mathscr{H}$, puisque $A(u)$ et $v \mapsto a(u, v)$ ont la même norme par le théorème de Riesz-Fréchet, et par la coercivité de a, nous avons, pour tout $u \in \mathscr{H}$,

$$\|A(u)\| \leq c\,\|u\| \quad \text{et} \quad \langle A(u), u\rangle \geq \frac{1}{c}\,\|u\|^2\ .$$

Si $r > 0$ est fixé assez petit (par exemple $r = \frac{1}{c^3}$), alors $k = \sqrt{1 - \frac{2r}{c} + c^2 r^2} \in [0, 1[$. Notons $S : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ l'application $u \mapsto p_C(u - rA(u) + rw)$. Alors, comme p_C est 1-lipschitzienne,

$$\begin{aligned}\|S(u) - S(v)\|^2 &\leq \|u - v - rA(u - v)\|^2 \\ &= \|u - v\|^2 - 2r\,\mathrm{Re}\,\langle u - v, A(u - v)\rangle + r^2\|A(u - v)\|^2 \leq k^2\|u - v\|^2\ .\end{aligned}$$

Donc S est strictement contractante. Par le théorème du point fixe de Banach, puisque $\mathscr{H}$ est complet, l'application S admet un unique point fixe u. Par définition de p_C, nous avons $u = p_C(u - rA(u) + rw)$ si et seulement si $u \in C$ et

$$\forall\, v \in C, \quad \mathrm{Re}\,\langle (u - rA(u) + rw) - u, v - u\rangle \leq 0\ ,$$

et cette inégalité est équivalente à $\mathrm{Re}\,\langle A(u), v - u\rangle \geq\ \mathrm{Re}\,\langle w, v - u\rangle$. La première assertion du théorème 1.16 en découle donc, par définition de w et de $A(u)$.

Supposons maintenant que la forme sesquilinéaire a soit hermitienne. Alors a est un produit scalaire sur l'espace vectoriel complexe $\mathscr{H}$, et, puisque a est continue et coercive, sa norme associée $u \mapsto \sqrt{a(u,u)}$ est équivalente à la norme de $\mathscr{H}$. Donc $\mathscr{H}$, muni du produit scalaire a, est encore un espace de Hilbert, et φ est encore une forme linéaire continue sur $\overline{\mathscr{H}}$ pour ce produit scalaire. Par le théorème de Riesz-Fréchet 1.13, il existe donc un unique w' dans $\mathscr{H}$ tel que, pour tout v dans $\mathscr{H}$, on ait $\varphi(v) = a(w', v)$.

Donc $u \in C$ vérifie

$$\forall\, v \in C, \quad \mathrm{Re}\, a(u, v-u) \geq \ \mathrm{Re}\, \varphi(v-u)$$

si et seulement si $u \in C$ vérifie

$$\forall\, v \in C, \quad \mathrm{Re}\, a(w'-u, v-u) \leq 0\ ,$$

donc si et seulement si $u \in C$ est la projection de w' sur C pour le produit scalaire a par le théorème 1.11. Par les propriétés de cette projection, u est donc l'unique point de C tel que

$$\sqrt{a(w'-u, w'-u)} = \min_{v \in C} \sqrt{a(w'-v, w'-v)}\ .$$

En prenant les carrés, en développant et en simplifiant par $a(w', w')$, le point u est donc l'unique point de C tel que

$$a(u,u) - 2\,\mathrm{Re}\, a(w', u) = \min_{v \in C} \big(a(v,v) - 2\,\mathrm{Re}\, a(w', v)\big)\ .$$

En divisant par 2 et en utilisant la définition de w', le résultat en découle. □

A.6 Démonstration du théorème 1.17 (égalité de Parseval)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $S_k = \sum_{i=0}^{k} p_{E_i}$, qui est une application linéaire de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$. Par orthogonalité deux à deux des E_n et par l'égalité de Pythagore, nous avons, pour tout $x \in \mathscr{H}$,

$$\|S_k(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{k} \|x_i\|^2\ . \quad (*)$$

Comme $x - x_i$ est orthogonal à x_i (par les propriétés de la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé), nous avons $\langle x, x_i\rangle = \|x_i\|^2$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, donc par sommation

$$\langle x, S_k(x)\rangle = \|S_k(x)\|^2\ .$$

D'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $x \in \mathscr{H}$, nous avons $\|S_k(x)\| \leq \|x\|$.

Soit $x \in \mathscr{H}$. Par densité du sous-espace vectoriel F engendré par les E_k, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $y \in F$ tel que $\|x - y\| < \frac{\epsilon}{2}$. Pour k assez grand, $y \in E_0 + \cdots + E_k$, donc $S_k(y) = y$. Par conséquent,

$$\|S_k(x) - x\| = \|S_k(x) - S_k(y) + y - x\| \leq \|S_k(x-y)\| + \|y - x\| \leq 2\|y - x\| < \epsilon\ .$$

Donc $S_k(x)$ converge vers x. Ceci montre la première égalité.

La seconde découle par passage à la limite de (*).

Pour montrer la partie réciproque du théorème de Parseval, soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{H}$ telle que $x_k \in E_k$ pour tout k et telle que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \|x_k\|^2$ converge. Posons $y_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$, qui vérifie par l'orthogonalité des E_n et l'égalité de Pythagore,

$$\|y_{n+p} - y_n\|^2 = \Big\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \Big\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|^2 \ .$$

Donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{H}$ est de Cauchy, donc est convergente vers un élément x de $\mathscr{H}$, car $\mathscr{H}$ est complet. La série $\sum x_k$ est donc convergente, de somme x. Puisque p_{E_n} est continue (car 1-lipschitzienne), par passage à la limite, on a bien $p_{E_n}(x) = x_n$. $\square$

A.7 Démonstration du théorème 1.21 de compacité faible de la boule unité fermée des espaces de Hilbert

Il suffit de montrer que toute suite dans la boule unité fermée $\overline{B}_{\mathscr{H}}$ de $\mathscr{H}$ admet une sous-suite qui converge faiblement.

Fixons donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{B}_{\mathscr{H}}$, et montrons qu'elle admet une sous-suite faiblement convergente. Quitte à remplacer $\mathscr{H}$ par l'adhérence $\mathscr{H}_0$ du sous-espace vectoriel engendré par les x_n, (qui est séparable, car les combinaisons linéaires (finies) à coefficients dans $\mathbb{Q}[i]$ des x_n sont denses dans $\mathscr{H}_0$), nous pouvons supposer que $\mathscr{H}$ est séparable.

Soit donc $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable dense dans $\mathscr{H}$; nous pouvons supposer, pour tous les $i, j \in \mathbb{N}$, que $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$, et que $y_i \neq 0$. Considérons l'espace métrique produit

$$X = \prod_{i\in\mathbb{N}} \{s \in \mathbb{C} \ : \ |s| \leq \|y_i\|\} \ ,$$

muni de la distance produit dénombrable usuelle

$$d((s_i)_{i\in\mathbb{N}}, (s'_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \ 2^{-i} \ \max\{1, |s_i - s'_i|\} \ .$$

Comme produit dénombrable d'espaces métriques compacts, l'espace X est compact, par le procédé d'extraction diagonal.

Considérons l'application $\Theta : \overline{B}_{\mathscr{H}} \to X$ définie par $x \mapsto (\langle x, y_i\rangle)_{i\in\mathbb{N}}$. Elle est bien à valeurs dans X, par le théorème de Cauchy-Schwarz.

Lemme A.3 *(1) Si une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{B}_{\mathscr{H}}$ converge faiblement vers z, alors z appartient à $\overline{B}_{\mathscr{H}}$.*

(2) Une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{B}_{\mathscr{H}}$ converge faiblement vers z si et seulement si la suite $\big(\Theta(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\Theta(z)$ dans X.

(3) L'image de Θ est fermée.

Démonstration. (1) Puisque $\|z\| = \langle z, \frac{z}{\|z\|}\rangle = \lim_{n\to+\infty} \ |\langle z_n, \frac{z}{\|z\|}\rangle|$ si $z \neq 0$, le résultat découle du théorème de Cauchy-Schwarz.

(2) Remarquons qu'une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{B}_{\mathscr{H}}$ converge faiblement vers $z \in \mathscr{H}$ si et seulement si, pour tout i dans $\mathbb{N}$, la suite $(\langle z_n, y_i\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\langle z, y_i\rangle$ dans $\mathbb{C}$. En effet, la première condition implique la seconde immédiatement. Et si la seconde est vérifiée, alors pour tout $y \in \mathscr{H}$, pour tout $\epsilon > 0$, soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $\|y_i - y\| \leq \frac{\epsilon}{2(1+\|z\|)}$. Soit

$N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, nous ayons $|\langle z_n, y_i\rangle - \langle z, y_i\rangle| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Alors par l'inégalité triangulaire et le théorème de Cauchy-Schwarz, et puisque $\|z_n\| \leq 1$, pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned}|\langle z_n, y\rangle - \langle z, y\rangle| &\leq |\langle z_n, y_i\rangle - \langle z, y_i\rangle| + |\langle z_n, y_i - y\rangle| + |\langle z, y_i - y\rangle| \\ &\leq |\langle z_n, y_i\rangle - \langle z, y_i\rangle| + \|z_n\|\;\|y_i - y\| + \|z\|\;\|y_i - y\| \leq \epsilon\ .\end{aligned}$$

Ceci montre que $\langle z_n, y\rangle$ converge vers $\langle z, y\rangle$ quand n tend vers $+\infty$, pour tout $y \in \mathscr{H}$. Donc $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers z.

Rappelons que si $\mathrm{pr}_i : X \to \{s \in \mathbb{C} \;:\; |s| \leq \|y_i\|\}$ est la projection sur le i-ème facteur (définie par $(s_j)_{j\in\mathbb{N}} \mapsto s_i$), alors une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X converge vers un élément z de X si et seulement si pour tout i dans $\mathbb{N}$, la suite $\big(\mathrm{pr}_i(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{pr}_i(z)$ dans $\mathbb{C}$.

[En effet, supposons la seconde condition vérifiée. Alors pour tout $\epsilon > 0$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{i=N+1}^{+\infty} 2^{-i} \leq \frac{\epsilon}{2}$. Pour tout $i = 0, \dots, N$, soit $N_i \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_i$, nous ayons $|\,\mathrm{pr}_i(z_n) - \mathrm{pr}_i(z)| \leq \frac{\epsilon}{2(N+1)}$. Alors, pour tout $n \geq \max_{1\leq i\leq N} N_i$,

$$d(z_n, z) \leq \sum_{i=0}^{N} 2^{-i}\,|\,\mathrm{pr}_i(z_n) - \mathrm{pr}_i(z)| + \sum_{i=N+1}^{+\infty} 2^{-i} \leq \sum_{i=0}^{N} \frac{\epsilon}{2(N+1)} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\ .$$

Donc la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers z, pour la distance d. Réciproquement, supposons que la suite $\big(d(z_n, z)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Fixons $i \in \mathbb{N}$. Pour tout $\epsilon \in \,]0, 1]$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(z_n, z) < 2^{-i}\epsilon$ pour tout $n \geq N$. Alors, pour tout $n \geq N$, nous avons $2^{-i}\max\{1, |\,\mathrm{pr}_i(z_n) - \mathrm{pr}_i(z)|\} \leq d(z_n, z) < 2^{-i}\epsilon$, donc $|\,\mathrm{pr}_i(z_n) - \mathrm{pr}_i(z)| < \epsilon$.]

L'assertion (2) en découle.

(3) Soit $s = (s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un élément de X tel qu'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{B}_{\mathscr{H}}$ telle que $\Theta(z_n) = (\langle z_n, y_i\rangle)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers s quand n tend vers $+\infty$. Montrons qu'il existe $z \in \overline{B}_{\mathscr{H}}$ tel que $\Theta(z) = s$. Puisque $\epsilon = \|y_i - y_j\| > 0$ si $i \neq j$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand, nous avons (la dernière inégalité découlant du théorème de Cauchy-Schwarz, car $\|z_n\| \leq 1$)

$$|\,s_i - s_j| \leq |\langle z_n, y_i\rangle - \langle z_n, y_j\rangle| + \epsilon \leq \|y_i - y_j\| + \epsilon = 2\|y_i - y_j\|\ .$$

Donc l'application $y_i \mapsto s_i$ est une application 2-lipschitzienne définie sur la partie $\{y_i \;:\; i \in \mathbb{N}\}$ de $\mathscr{H}$, qui est dense dans $\mathscr{H}$, à valeurs dans l'espace métrique complet $\mathbb{C}$. Par le théorème du prolongement A.1, elle se prolonge donc en une application 2-lipschitzienne $\varphi : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$. Soient $y, y' \in \mathscr{H}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Par densité, pour tout $\epsilon > 0$, il existe des éléments i, j, k dans $\mathbb{N}$ tels que $\|y - y_i\|$, $\|y' - y_j\|$ et $\|(y + \lambda y') - y_k\|$ soient inférieurs ou égaux à ϵ. En particulier,

$$\|y_k - (y_i + \lambda y_j)\| \leq \|y_k - (y + \lambda y')\| + \|y - y_i\| + |\lambda|\|y' - y_j\| \leq (2 + |\lambda|)\epsilon\ .$$

Alors puisque φ est 2-lipschitzienne et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puisque $\|z_n\| \leq 1$,

$$\begin{aligned}|\varphi(y + \lambda y') - \varphi(y) - \overline{\lambda}\varphi(y')| &\leq |\varphi(y_k) - \varphi(y_i) - \overline{\lambda}\varphi(y_j)| + 2(\epsilon + \epsilon + |\lambda|\epsilon) \\ &= |\,s_k - s_i - \overline{\lambda}\,s_j\,| + 2(2 + |\lambda|)\epsilon \\ &= \lim_{n\to+\infty} |\langle z_n, y_k\rangle - \langle z_n, y_i\rangle - \overline{\lambda}\langle z_n, y_j\rangle| + 2(2 + |\lambda|)\epsilon \\ &= \lim_{n\to+\infty} |\langle z_n, y_k - y_i - \lambda y_j\rangle| + 2(2 + |\lambda|)\epsilon \\ &\leq \|y_k - y_i - \lambda y_j\| + 2(2 + |\lambda|)\epsilon \leq 3(2 + |\lambda|)\epsilon\ .\end{aligned}$$

En faisant tendre ϵ vers 0, en notant $\overline{\mathscr{H}}$ l'espace de Hilbert conjugué de $\mathscr{H}$, l'application $\varphi : \overline{\mathscr{H}} \to \mathbb{C}$ est donc une forme linéaire continue. Par le théorème de Riesz-Fréchet 1.13, il existe donc $z \in \mathscr{H}$ tel que $\varphi(y) = \langle z, y\rangle$ pour tout $y \in \mathscr{H}$. En particulier, $\langle z, y_i\rangle = \varphi(y_i) = s_i$. Par densité et puisque $|s_i| = \lim_{n\to+\infty} |\langle z_n, y_i\rangle| \leq \|y_i\|$ (toujours par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\|z_n\| \leq 1$), nous avons

$$\|z\| = \sup_{y\in\mathscr{H}-\{0\}} |\langle z, \frac{y}{\|y\|}\rangle| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\langle z, \frac{y_i}{\|y_i\|}\rangle| = \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{|s_i|}{\|y_i\|} \leq 1\ .$$

Donc $z \in \overline{B}_{\mathscr{H}}$ et $\Theta(z) = s$, ce qu'il fallait démontrer. □

Terminons maintenant la démonstration du théorème 1.21 de compacité faible. Par compacité de l'espace métrique X, quitte à extraire, la suite $\big(\Theta(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans X. Par le lemme A.3 (3), il existe $x \in \overline{B}_{\mathscr{H}}$ tel que la limite soit de la forme $\Theta(x)$. Par le lemme A.3 (2), la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc faiblement vers x, ce qui montre le résultat. □

B Rappels sur les fonctions holomorphes

Nous renvoyons par exemple à [Rud1, Die1] pour les démonstrations de ces rappels et d'autres résultats. Nous fixons un espace de Banach complexe E dans tout cet appendice. Pour tous les $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, nous noterons $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - a| < r\}$ la boule ouverte de centre a et de rayon r dans $\mathbb{C}$.

Définitions.

Rappelons les opérateurs

$$\partial = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big) \quad \text{et} \quad \overline{\partial} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)\;,$$

agissant sur les fonctions différentiables définies sur les ouverts de $\mathbb{C}$ à valeurs dans E. Ce sont des *dérivations* (c'est-à-dire des applications linéaires D vérifiant la règle de Leibniz $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$) de l'algèbre $\mathscr{D}^1(U; E)$ des fonctions différentiables d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ dans E, à valeurs dans l'algèbre des fonctions de U dans E. Pour tous les $f, g \in \mathscr{D}^1(U; E)$, nous avons $\partial\, \overline{f} = \overline{\overline{\partial} f}$ et $\overline{\partial}\, \overline{f} = \overline{\partial f}$, ainsi que

$$\partial(f \circ g) = \partial f\, \circ g\ \partial g + \overline{\partial} f\, \circ g\ \partial \overline{g} \quad \text{et} \quad \overline{\partial}(f \circ g) = \partial f\, \circ g\ \overline{\partial} g + \overline{\partial} f\, \circ g\ \overline{\partial g}\;.$$

Les condition suivantes, portant sur une application $f : \Omega \to E$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, sont équivalentes :

- f est *holomorphe*, c'est-à-dire que pour tout $a \in \Omega$, la limite
$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$
existe dans E ;
- f est *analytique complexe* sur Ω, c'est-à-dire que pour tout $a \in \Omega$, il existe $r > 0$ et une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E tels que $B(a, r) \subset \Omega$ et la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} (z - a)^n c_n$ converge normalement sur $B(a, r)$, de somme égale à $f(z)$, pour tout $z \in B(a, r)$;
- f est différentiable en tout point de Ω et vérifie l'*équation de Cauchy-Riemann*
$$\overline{\partial} f = 0\;.$$

Une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme dans l'assertion (2) est alors unique. Nous avons alors $f' = \partial f$.

Applications analytiques réelles.

Soient $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, F un espace de Banach réel et Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^m$. Pour tout $n = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ et tout $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, notons

$$|n| = n_1 + \dots + n_m\;, \quad n! = n_1! \dots n_m!\;, \quad x^n = x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m} \quad \text{et} \quad \partial^n = \frac{\partial^{|n|}}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial\, x_m^{n_m}}\;.$$

Une application $f : \Omega \to F$ est dite *analytique réelle* (à m variables) si pour tout a dans Ω, il existe un voisinage U de a dans Ω et une famille $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^m} \in F^{\mathbb{N}^m}$ d'éléments de F indexée par $\mathbb{N}^m$ telle que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^m} (x - a)^n c_n$ converge normalement dans F pour tout x dans U, de somme égale à f sur U. On montre que l'application f est alors de classe C^∞ dans Ω et que pour tout $n \in \mathbb{N}^m$,

$$\partial^n f\,(a) = n!\, c_n\ .$$

En particulier, une famille $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^m}$ comme ci-dessus est unique, et f vérifie le principe du *prolongement analytique* : si Ω est connexe, et si f et toutes ses dérivées partielles s'annulent en un point fixé a de Ω, alors f est l'application nulle.

Si F est de dimension finie, alors une application de Ω dans F est analytique réelle si et seulement si ses coordonnées dans une base fixée de F sont analytiques réelles.

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, alors toute application analytique complexe de Ω dans E est analytique réelle (à deux variables) lorsque l'on considère Ω contenu dans $\mathbb{R}^2$ et E muni de sa structure d'espace de Banach réel induite.

Quelques propriétés des fonctions holomorphes.

Le résultat suivant (voir par exemple [Rud1, Theo. 10.7]), dont nous aurons besoin en lui-même, est en fait l'une des étapes pour montrer qu'une application holomorphe est analytique complexe. Nous renvoyons à la partie 1.1 pour les rappels sur les mesures complexes.

Proposition B.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $(X,\mathscr{A})$ un espace mesurable, μ une mesure complexe sur $(X,\mathscr{A})$, $f \in \mathbb{L}^1(X,\mathscr{A},\mu;E)$ une fonction intégrable de X dans E pour la mesure μ, et $\varphi : X \to \mathbb{C}$ une application mesurable dont l'image ne rencontre pas Ω. Alors l'application $u : \Omega \to E$ définie par*

$$u(z) = \int_{\zeta\in X} \frac{f(\zeta)}{\varphi(\zeta) - z}\, d\mu(\zeta)$$

est analytique complexe sur Ω.

En particulier, si μ est une mesure complexe sur le cercle, alors l'application du disque ouvert $B(0,1)$ dans $\mathbb{C}$, définie par

$$z \mapsto \int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu(\zeta) = \int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} \frac{\zeta}{\zeta-z}\, d\mu(\zeta) + z\int_{\zeta\in\mathbb{S}_1} \frac{1}{\zeta-z}\, d\mu(\zeta)\ ,$$

est analytique complexe sur $B(0,1)$.

Nous renvoyons par exemple à [Rud1, Theo. 13.18] pour les définitions équivalentes suivantes d'un ouvert simplement connexe.

Proposition B.2 *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Ω est simplement connexe (voir la partie 2.3),

(2) Ω est homéomorphe au disque $\mathbb{D}$,

(3) le complémentaire $\mathbb{C} - \Omega$ de Ω dans $\mathbb{C}$ est connexe,

(4) toute application holomorphe f de Ω dans $\mathbb{C}$ admet une primitive (c'est-à-dire une application holomorphe $F : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $F' = f$),

(5) *toute application holomorphe f de Ω dans $\mathbb{C}$ ne s'annulant pas admet un logarithme (c'est-à-dire une application holomorphe $F : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $\exp F = f$),*

(6) *toute application holomorphe f de Ω dans $\mathbb{C}$ ne s'annulant pas admet une racine carrée (c'est-à-dire une application holomorphe $F : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $F^2 = f$),*

Nous concluons cet appendice par le rappel du résultat suivant, pour lequel nous renvoyons aussi à [Rud1].

Théorème B.3 (Théorème de l'image ouverte) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application holomorphe non constante. Alors $f(\Omega)$ est ouvert.*

Index

Références

[Ako] S. Akkouche, *The spectral bounds of the discrete Schrödinger operator*, J. Funct. Anal. **259** (2010) 1443–1465.

[Bou] N. Bourbaki, *Théorie spectrale*, Hermann, 1967.

[Bre] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983.

[Cia] P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod, 1998.

[Coh] D. Cohn, *Measure theory*, Birkhäuser, 1980.

[Con] A. Connes, *Géométrie non commutative*, InterEditions, 1990 ; *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1994.

[Cou] Y. Coudène, *Pictures of hyperbolic dynamical systems*, Notices Amer. Math. Soc. **53** (2006).

[DHKS] D. Damanik, D. Hundertmark, R. Killip, B. Simon, *Variational estimates for discrete Schrödinger operators with potentials of indefinite sign*, Comm. Math. Phys. **238** (2003) 545–562.

[Die1] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse t. 1 : fondements de l'analyse moderne*, Gauthier-Villars, 1971.

[Die2] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse t. 2 : chapitres XII à XV*, Gauthier-Villars, 1974.

[Dix] J. Dixmier, *Topologie générale*, PUF, 1981.

[Doo] J. L. Doob, *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*, Classics in Math. Springer Verlag, 2001.

[Dug] J. Dugundji, *Topology*, Wm. C. Brown, 1989.

[Eva] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd ed. Grad. Stud. Math **19**, Amer. Math. Soc. 2010.

[Far] J. Faraut, *Analyse sur les groupes de Lie*, Calvage & Mounet, 2006.

[Hal] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Grad. Texts Math. **19**, 2nd ed., Springer-Verlag, 1982.

[KR] R. Kadison, J. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebra*, I Elementary theory, Academic Press, 1983 ; II Advanced theory, Academic Press, 1986 ; III Special topics, Birkhäuser, 1991 ; IV Special topics, Birkhäuser, 1992.

[KS] R. Killip, B. Simon, *Sum rules for Jacobi matrices and their applications to spectral theory*, Ann. of Math. **158** (2003) 253–321.

[Laf] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Press. Univ. Grenoble, 1996.

[Lev] P. Lévy-Bruhl, *Introduction à la théorie spectrale*, Dunod, 2003.

[LT1] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *On the complemented subspace theorem*, Israel J. Math. **9** (1971) 263-269.

[LT2] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*, I Sequence spaces, Ergeb. Math. **92**, Springer-Verlag, 1977 ; II Function spaces, Ergeb. Math. **97**, Springer-Verlag, 1979.

[Neh] Z. Nehary, *Conformal mappings*, Dover, 1975.

[Oht] M. Ohtsuka, *Dirichlet problem, extremal length and prime ends*, Van Nostrand, 1967.

[Pau] F. Paulin, *Topologie, analyse, calcul différentiel*, notes de cours de troisième année de licence, Ecole Normale Supérieure, 2009, voir http ://www.math.u-psud.fr/∼paulin/ notescours/cours_analyseI.pdf .

[Rud1] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3rd ed., Mc Graw-Hill (1990) (NDLR : une traduction française existe).

[Rud2] W. Rudin, *Functional analysis*, 2nd ed., Mc Graw-Hill (1991).

[Sze] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, 4th ed. Colloquium Publ. **23**, Amer. Math. Soc. (1975).

[ST] H. Stahl, V. Totik, *General Orthogonal Polynomials*, Encyc. Math. Appl. **43**, Cambridge Univ. Press (1992).

[Tak] M. Takesaki, *Theory of operator algebras*, Encyc. Math. Sciences **124, 125, 127**, Springer Verlag, 2001-2002

[Yos] K. Yosida, *Functional analysis*, 6th Ed., Springer Verlag, 1980.