Université Paris-Saclay (Orsay) M2 AAG Mardi 1 décembre 2026, 8h30-11h30

Examen partiel du cours de Groupes et Géométrie

Toutes les variétés sont des variétés réelles C^∞, tous les groupes et algèbres de Lie sont réels, tous les fibrés vectoriels sont des fibrés vectoriels réels C^∞. Seules les notes de cours personnelles manuscrites propres et nettes sont autorisées. Les deux exercices sont indépendants.

Exercice I Soient $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Rappelons que l'espace projectif réel de dimension n est la variété $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times \backslash (\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\})$ des orbites du groupe de Lie multiplicatif $\mathbb{R}^\times = (\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}, \times)$ sur la variété $\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ par l'action $(\lambda, (x_0, \dots, x_n)) \mapsto (\lambda\, x_0, \dots, \lambda\, x_n)$. Considérons l'action du groupe de Lie $\mathbb{R}^\times$ sur la variété $M = (\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ définie par

$$(\lambda, ((x_0, \dots, x_n), x)) \mapsto ((\lambda\, x_0, \dots, \lambda\, x_n), \lambda^k x)) \,.$$

Notons E_k l'espace topologique quotient $\mathbb{R}^\times \backslash M$, et $p_k : E_k \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $[x_0, \dots, x_n; x] = \mathbb{R}^\times((x_0, \dots, x_n), x)) \mapsto [x_0 : \dots : x_n] = \mathbb{R}^\times(x_0, \dots, x_n)$.

(1) Montrer qu'il existe un unique fibré vectoriel ξ_k de rang 1 au-dessus de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, dont la projection est l'application p_k, et tel que pour tout $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $p_k^{-1}([x_0 : \dots : x_n])$ définie par $x \mapsto [x_0, \dots, x_n; x]$ soit un isomorphisme linéaire.

(2) Rappelons que la variété grassmannienne $\mathrm{Gr}_1(\mathbb{R}^{n+1})$ des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$ s'identifie à $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ par l'application qui, pour tout $v \in \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$, associe à la droite vectorielle $\mathbb{R}\, v$ le point projectif $\mathbb{R}^\times v$. Rappelons que la projection du fibré vectoriel tautologique $\eta = \tau_1(\mathbb{R}^{n+1})$ au-dessus de $\mathrm{Gr}_1(\mathbb{R}^{n+1})$ est l'application lisse $p : (\ell, v) \mapsto \ell$ de $F = \{(\ell, v) \in \mathrm{Gr}_1(\mathbb{R}^{n+1}) \times \mathbb{R}^{n+1} : v \in \ell\}$ dans $\mathrm{Gr}_1(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $\phi : E_{-1} \to F$ définie par $[x_0, \dots, x_n; x] \mapsto (\mathbb{R}(x_0, \dots, x_n), x(x_0, \dots, x_n))$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels entre ξ_{-1} et η.

(3) Notons η' le fibré vectoriel somme directe du fibré tangent $T\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ et du fibré vectoriel trivial $\xi_{\mathbb{R}}$ de rang 1 au-dessus de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application qui, pour tout $x = [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, associe à $((X_0, \dots, X_n), t) \in T_x\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ le vecteur $[x_0, \dots, x_n; X_0 + tx_0] \oplus \dots \oplus [x_0, \dots, x_n; X_n + tx_n]$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels entre η' et la somme directe $\bigoplus_{i=0}^n \xi_1$ de $n+1$ copies de ξ_1.

Exercice II Notons $I_{1,3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Notons $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique réelle $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto q(x) = -{x_0}^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$, dont la forme bilinéaire associée est $b : (x, y) \mapsto -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Notons $\mathrm{O}(1,3) = \{a \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}) : {}^t a\, I_{1,3}\, a = I_{1,3}\}$, qui est un sous-groupe de Lie fermé du groupe linéaire $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{o}(1,3) = \{X \in \mathfrak{gl}_4(\mathbb{R}) : {}^t X\, I_{1,3} + I_{1,3} X = 0\}$. Rappelons que l'action linéaire de $\mathrm{O}(1,3)$ sur $\mathbb{R}^4$ préserve la forme quadratique q, c'est-à-dire que pour tout $a \in \mathrm{O}(1,3)$, nous avons $q \circ a = q$ (et donc $b \circ (a \times a) = b$).

(1) Deux éléments $x, y \in \mathbb{R}^4$ sont *orthogonaux pour* q si $b(x, y) = 0$. Une *base de Lorentz* de $(\mathbb{R}^4, q)$ est un quadruplet $(v_0, v_1, v_2, v_3) \in (\mathbb{R}^4)^4$ de vecteurs deux à deux orthogonaux pour q tels que $q(v_0) = -1$, $q(v_1) = 1$, $q(v_2) = 1$ et $q(v_3) = 1$. Montrer que le groupe $\mathrm{O}(1,3)$ agit transitivement sur l'ensemble $\mathscr{B}_{\mathscr{L}}$ des bases de Lorentz de $(\mathbb{R}^4, q)$. En déduire que $\mathscr{B}_{\mathscr{L}}$ est une sous-variété lisse de $(\mathbb{R}^4)^4$ qui est C^∞-difféomorphe à $\mathrm{O}(1,3)$.

(2) Montrer que pour tout élément $a = (a_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant 3} \in \mathrm{O}(1,3)$, nous avons $|\det a| = 1$ et $-{a_{0,0}}^2 + {a_{0,1}}^2 + {a_{0,2}}^2 + {a_{0,3}}^2 = -1$. Nous noterons $\mathrm{SO}_0(1,3)$ le sous-groupe de Lie $\{a \in \mathrm{O}(1,3) : \det a = 1, a_{0,0} > 0\}$ de $\mathrm{O}(1,3)$. Montrer que l'application définie par $t \mapsto a_t = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{SO}_0(1,3)$.

(3) Pour tout $\alpha \in \{\pm 1\}$, notons $\mathscr{O}_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^4 : q(x) = \alpha\}$. Identifions $\mathrm{O}(3)$ avec un sous-groupe de $\mathrm{O}(1,3)$ par $c \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)$ et $\mathrm{O}(1,2)$ avec un sous-groupe de $\mathrm{O}(1,3)$ par $c \mapsto \left(\begin{smallmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Montrer que $\mathrm{O}(1,3)$ agit transitivement sur $\mathscr{O}_\alpha$ pour tout $\alpha \in \{\pm 1\}$. Calculer le stabilisateur de $(1,0,0,0)$ et de $(0,0,0,1)$ dans $\mathrm{O}(1,3)$.

(b) Montrer que les espaces homogènes quotients $\mathrm{O}(1,3)/\mathrm{O}(3)$ et $\mathrm{O}(1,3)/\mathrm{O}(1,2)$ sont C^∞-difféomorphes à $\mathbb{R}^3 \times \{-1,+1\}$ et à $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_2$ respectivement.

(c) Montrer que pour tout $g \in \mathrm{SO}_0(1,3)$, il existe $\rho, \rho' \in \mathrm{SO}(3)$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $g = \rho\, a_t\, \rho'$. En déduire que $\mathrm{SO}_0(1,3)$ est connexe.

(4) Considérons l'espace vectoriel réel $\mathrm{Herm}_2 = \{X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) : X^* = X\}$ (où $X^* = {}^t\overline{X}$ est la matrice adjointe de X), de base (appelée *la base de Pauli*)

$$\left(\sigma_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),\quad \sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right),\quad \sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right),\quad \sigma_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\right).$$

(a) Montrer que l'isomorphisme linéaire $\varphi : \mathrm{Herm}_2 \to \mathbb{R}^4$ qui envoie la base de Pauli de Herm_2 sur la base canonique de $\mathbb{R}^4$ vérifie $q \circ \varphi = -\det$.

(b) Montrer que l'application Φ' de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ dans le groupe linéaire $\mathrm{GL}(\mathrm{Herm}_2)$ définie par $A \mapsto (\Phi'(A) : X \mapsto AXA^*)$ est un morphisme de groupes de Lie.

(c) Rappelons que l'application de $\mathrm{SU}(2) \times \{X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) : X^* = X,\ \mathrm{tr}\, X = 0\}$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ définie par $(x, X) \mapsto x \exp(X)$ est un C^∞-difféomorphisme. Montrer que l'image de l'application $\Phi : a \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \mapsto \varphi \circ \Phi'(a) \circ \varphi^{-1} \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^4)$ est contenue dans $\mathrm{SO}_0(1,3)$. Nous admettrons que cette image est égale à $\mathrm{SO}_0(1,3)$. Montrer que $\Phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}_0(1,3)$ est un revêtement universel de groupes de Lie.

(d) Montrer que les algèbres de Lie réelles $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) : \mathrm{tr}\, X = 0\}$ et $\mathfrak{o}(1,3)$ sont isomorphes. Montrer que l'application $\widehat{\Phi} : (a_t)_{t\in\mathbb{R}} \mapsto (\Phi(a_t))_{t\in\mathbb{R}}$ est une bijection de l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ dans celui de $\mathrm{SO}_0(1,3)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, calculer $T_{\mathrm{id}}\Phi\left(\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{smallmatrix}\right)\right)$.

(5) Un sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ou $\mathrm{SO}_0(1,3)$ est dit *semi-simple* s'il est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En admettant que $\widehat{\Phi}$ est une bijection entre les sous-groupes à un paramètre semi-simples, montrer que tout sous-groupe à un paramètre semi-simple de $\mathrm{SO}_0(1,3)$ est, à conjugaison près, de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} \cosh(\lambda t) & \sinh(\lambda t) & 0 & 0 \\ \sinh(\lambda t) & \cosh(\lambda t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\mu t) & -\sin(\mu t) \\ 0 & 0 & \sin(\mu t) & \cos(\mu t) \end{pmatrix}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.