

# Équidistribution, comptage et approximation par irrationnels quadratiques

Jouni Parkkonen

Frédéric Paulin

## Résumé

Soit  $M$  une variété hyperbolique de volume fini, nous montrons que les hypersurfaces équidistantes à une sous-variété  $C$  de volume fini totalement géodésique s'équidistribuent dans  $M$ . Nous donnons une asymptotique précise du nombre de segments géodésiques de longueur au plus  $t$ , perpendiculaires communs à  $C$  et au bord d'un voisinage cuspidal de  $M$ . Nous en déduisons des résultats sur le comptage d'irrationnels quadratiques sur  $\mathbb{Q}$  ou sur une extension quadratique imaginaire de  $\mathbb{Q}$ , dans des orbites données des sous-groupes de congruence des groupes modulaires.

## Abstract

Let  $M$  be a finite volume hyperbolic manifold, we show the equidistribution in  $M$  of the equidistant hypersurfaces to a finite volume totally geodesic submanifold  $C$ . We prove a precise asymptotic formula on the number of geodesic arcs of lengths at most  $t$ , that are perpendicular to  $C$  and to the boundary of a cuspidal neighbourhood of  $M$ . We deduce from it counting results of quadratic irrationals over  $\mathbb{Q}$  or over imaginary quadratic extensions of  $\mathbb{Q}$ , in given orbits of congruence subgroups of the modular groups.<sup>1</sup>

## 1 Introduction

Soit  $M$  une variété hyperbolique (c'est-à-dire riemannienne lisse, complète et à courbure sectionnelle constante  $-1$ ) connexe, de volume fini, de dimension  $n$  au moins 2. Soit  $C$  une sous-variété immergée de volume fini de  $M$ , connexe, de dimension  $k < n$ , totalement géodésique (par exemple une géodésique fermée).

Le but principal de cet article est de démontrer un résultat de comptage de rayons géodésiques partant perpendiculairement de  $C$  et convergeant dans un bout de  $M$ . Pour normaliser les longueurs, notons  $\mathcal{H}$  un voisinage cuspidal d'un bout de  $M$ . Pour tout  $t \geq 0$ , notons  $\mathcal{N}(t)$  le nombre (compté avec multiplicité) de segments (localement) géodésiques perpendiculaires commun à  $C$  et à  $\partial\mathcal{H}$ , de longueur au plus  $t$ .

**Théorème 1.1** *Quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , nous avons l'équivalent*

$$\mathcal{N}(t) \sim \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}_{n-k-1}) \text{Vol}(\mathcal{H}) \text{Vol}(C)}{\text{Vol}(\mathbb{S}_{n-1}) \text{Vol}(M)} e^{(n-1)t}.$$

---

<sup>1</sup>**Keywords :** Equidistribution, counting, quadratic irrational, hyperbolic manifold, binary quadratic form, perpendicular geodesic. **AMS codes :** 37A45, 11R11, 53A35, 22F30, 20H10, 11H06, 53C40, 11E16

L'origine de ces résultats de comptage remonte à Huber [Hub] en dimension 2 et à [Herr]. En courbure variable, Margulis [Mar] donne un équivalent du nombre d'arcs (localement) géodésiques entre deux points de  $M$  de longueur au plus  $t$ . Voir par exemple [BHP, Rob, HP] pour les comptages d'arcs perpendiculaires à deux voisinages cuspidaux. L'étude du terme de reste dans le développement asymptotique de  $\mathcal{N}$  et l'extension en courbure variable, nécessitant d'autres outils comme ceux introduits dans [PP5], est traité dans [PP6]. Une version de ce résultat dans les espaces symétriques de rang supérieur est démontré dans [GP]. Les résultats de cet article ont été annoncés dans [PP1], voir aussi le survol [PP7].

L'un des ingrédients de la démonstration du théorème 1.1 est un théorème d'équidistribution de sous-variétés dans le fibré tangent unitaire  $T^1M$  de  $M$ , le théorème 2.2. Plus précisément, notons  $\Sigma$  une composante connexe du fibré normal unitaire de  $C$ . Pour tout  $t > 0$ , notons  $\Sigma(t) = \{\exp tv : v \in \Sigma\}$ , qui est une hypersurface strictement convexe immergée de  $M$ , obtenue en poussant  $C$  le long de rayons géodésiques orthogonaux. Le théorème 2.2 montre l'équidistribution du relevé par la normale sortante de  $\Sigma(t)$  dans  $T^1M$  pour la mesure de Liouville. Ce résultat découle aussi de [EM, Theo. 1.2], voir [PP7] pour la démonstration de cette déduction. Nous donnons ici une preuve courte et directe du théorème 2.2, qui permet d'éviter les techniques d'espaces symétriques affines et le théorème du front d'onde de [EM], et permet son extension en courbure variable, modulo les choix appropriés de mesures, dans [PP5]. Le théorème 2.2 implique un résultat analogue d'équidistribution dans  $M$  : la moyenne riemannienne de  $\Sigma(t)$  s'équidistribue quand  $t$  tend vers  $+\infty$  vers la moyenne riemannienne de  $M$ .

**Théorème 1.2** *Pour toute fonction  $\varphi$  continue à support compact dans  $M$ , nous avons*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \oint_M \varphi(x) d\text{vol}_{\Sigma(t)}(x) = \oint_M \varphi(x) d\text{vol}_M(x).$$

Lorsque  $n = 2$ , ce résultat est dû à [EM, Theo. 2.4], sur des idées remontant à la thèse de Margulis (voir par exemple [Mar]). Dans celle-ci, l'équidistribution de grandes horosphères, que l'on peut voir comme les  $\Sigma(t)$  où  $\Sigma$  est le fibré normal unitaire sortant du bord (non totalement géodésique) d'un voisinage cuspidal d'un bout de  $M$ , est démontrée. Nous renvoyons à [Rob] pour des résultats généraux d'équidistribution d'horosphères, et aux travaux de Benoist, Duke, Einsiedler, Eskin, Gorodnik, Lindenstrauss, Margulis, Mozes, Oh, Ratner, Quint, Rudnick, Sarnak, Shah, Tomanov, Ullmo, Venkatesh, Weiss pour d'autres résultats d'équidistribution dans des espaces homogènes.

Nous donnons dans cette introduction trois exemples d'applications arithmétiques du théorème 1.1 (et de ses variantes, exposées à la fin de la partie 3).

Soit  $Q(X, Y) = AX^2 + BXY + CY^2$  une forme quadratique binaire entière, et  $D = D_Q = B^2 - 4AC$  son discriminant. Notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des éléments de  $\mathbb{Z}^2$  à coordonnées premières entre elles. Une *représentation propre* d'un entier  $n \in \mathbb{Z}$  par  $Q$  est un élément  $x \in \mathcal{P}$  tel que  $Q(x) = n$ . Lorsque  $Q$  est définie positive, Gauss a donné un équivalent quand  $t$  tend vers  $+\infty$  du nombre de représentations propres par  $Q$  d'entiers inférieurs à  $t$  (voir par exemple [Lan], [Coh, Chap. 10]) :

$$\text{Card}(\{x \in \mathcal{P} : Q(x) \leq t\}) \sim \frac{12}{\pi\sqrt{-D_Q}} t.$$

Supposons maintenant que  $Q$  soit primitive ( $A, B, C$  sont premiers entre eux), indéfinie ( $D > 0$ ), et ne soit pas, à multiple rationnel près, un produit de deux formes linéaires

entières ( $D$  n'est pas un carré). Au lieu de compter des points entiers dans des ellipses, il s'agit maintenant de compter des points entiers entre des hyperboles (voir par exemple [Coh] et la partie 4.3 pour des dessins). Notons  $\mathrm{SO}(Q, \mathbb{Z})$  le groupe spécial orthogonal entier de  $Q$  (appelé le *groupe des automorphes* de  $Q$ ), qui est infini. Notons

$$\Psi_Q(t) = \mathrm{Card}(\mathrm{SO}(Q, \mathbb{Z}) \setminus \{x \in \mathcal{P} : |Q(x)| \leq t\})$$

le nombre de classes modulo  $\mathrm{SO}(Q, \mathbb{Z})$  de représentations propres par  $Q$  d'entiers inférieurs à  $t$  en valeur absolue. Soit  $(t_Q, u_Q)$  la solution fondamentale (c'est-à-dire  $t_Q, u_Q > 0$  et  $u_Q$  est minimal) de l'équation de Pell-Fermat  $t^2 - D u^2 = 4$ , notons  $R_Q = \log \frac{t_Q + u_Q \sqrt{D}}{2}$ .

**Corollaire 1.3** *Quand  $s$  tend vers  $+\infty$ , nous avons  $\Psi_Q(t) \sim \frac{12 R_Q}{\pi^2 \sqrt{D_Q}} t$ .*

Ce résultat est connu (voir par exemple [Coh, page 164]), mais notre démonstration permet de nombreuses variations, voir la partie 4.3.

Passons au second exemple d'application arithmétique. Les résultats de comptage, et de comptage asymptotique, de nombres algébriques, de complexité bornée (degré, hauteur, etc), satisfaisant des contraintes algébriques données, sont au coeur de la théorie des nombres. Si  $K$  est un corps de nombres, d'anneau des entiers  $\mathcal{O}_K$ , le groupe  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_K)$  agit sur les irrationnels quadratiques sur  $K$ , mais non transitivement, et il est intéressant de donner une asymptotique précise du nombre d'éléments dans une orbite donnée ayant une complexité bornée. Pour tout irrationnel quadratique  $\alpha$  sur  $K$ , nous noterons  $\alpha^\sigma$  son conjugué de Galois sur  $K$ . Les résultats de ce papier sont motivés par des problèmes, introduits et développés dans [PP2], d'approximation diophantienne d'éléments de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  par des irrationnels quadratiques sur  $\mathbb{Q}$  (ou sur une extension imaginaire quadratique de  $\mathbb{Q}$ ) qui appartiennent à une orbite donnée du groupe modulaire (ou du groupe de Bianchi). Dans ce cadre, l'inverse de la distance entre  $\alpha$  et  $\alpha^\sigma$  est une complexité pertinente, lorsque  $\alpha$  est considéré modulo translations entières (voir la partie 4.1 pour des justifications et diverses interprétations de notre complexité  $\frac{1}{|\alpha - \alpha^\sigma|}$ ). Nous renvoyons par exemple à [Bug, Wal] pour des monographies sur l'approximation diophantienne par des nombres algébriques.

Notre second exemple d'application arithmétique est un résultat de comptage (pour la complexité ci-dessus) d'irrationnels quadratiques sur  $\mathbb{Q}$  dans une orbite du groupe modulaire  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  (étendu par l'automorphisme de Galois). Fixons  $\alpha_0$ , un entier quadratique sur  $\mathbb{Q}$  irrationnel réel. Notons  $\mathcal{O} = \mathbb{Z} + \alpha_0 \mathbb{Z}$  l'ordre qu'il définit dans  $\mathbb{Q}(\alpha_0)$ . Soient  $D = \mathrm{Tr}(\alpha_0)^2 - 4N(\alpha_0)$  le discriminant de  $\mathcal{O}$ ,  $(t_0, u_0)$  la solution fondamentale de l'équation de Pell-Fermat  $t^2 - D u^2 = 4$ ,  $\epsilon_0 = \frac{t_0 + u_0 \sqrt{D}}{2}$  l'unité fondamentale de  $\mathcal{O}$ , et  $R_0 = \log \epsilon_0$  le régulateur de  $\mathcal{O}$ . Notons  $n_0 = 2$  si  $\mathcal{O}$  contient une unité de norme  $-1$ , et  $1$  sinon.

**Corollaire 1.4** *Quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , nous avons*

$$\mathrm{Card}(\{\alpha \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \{\alpha_0, \alpha_0^\sigma\} \bmod \mathbb{Z} : |\alpha - \alpha^\sigma|^{-1} \leq t\}) \sim \frac{24 R_0}{\pi^2 n_0} t.$$

Nous renvoyons aux parties 4.2 et 4.4 pour des résultats plus généraux, et des résultats de comptage d'irrationnels quadratiques sur une extension quadratique imaginaire de  $\mathbb{Q}$  dans des orbites par les groupes de Bianchi  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(i\sqrt{d})})$ , dont un cas très particulier est le suivant.

**Corollaire 1.5** Soient  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  le nombre d'or et  $K$  un corps de nombres quadratique imaginaire, d'anneau des entiers  $\mathcal{O}_K$ , de discriminant  $D_K$  et de fonction zéta  $\zeta_K$ . Quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , nous avons

$$\text{Card}(\{\alpha \in \text{PSL}_2(\mathcal{O}_K) \cdot \phi \bmod \mathcal{O}_K : |\alpha - \alpha^\sigma|^{-1} \leq t\}) \sim \frac{8\pi^2 \log \phi}{|D_K| \zeta_K(2)} t^2$$

si  $D_K \neq -4$ , la moitié sinon.

Nous renvoyons à [PP3] et [PP4] pour d'autres applications arithmétiques, où nous donnons un équivalent précis du nombre de représentations propres non équivalentes d'entiers rationnels de valeur absolue au plus  $t$  par une forme hermitienne (sur le corps des complexes ou des quaternions) binaire entière indéfinie fixée.

Nous démontrons le théorème 1.2 d'équidistribution dans la partie 2 à partir de la propriété de mélange du flot géodésique, ainsi que comment déduire, d'un résultat d'équidistribution au niveau du fibré tangent unitaire, un résultat d'équidistribution dans la variété, y compris en courbure variable : les courbures principales des horosphères n'étant pas forcément constantes, des termes correcteurs remarquables (polynômes symétriques en ces courbures) apparaissent (voir le théorème 2.4). Dans la partie 3, nous démontrons, en utilisant les résultats d'équidistribution précédents, le théorème 1.1 de comptage d'arcs géodésiques, et diverses variantes pour les orbifolds et les variantes utiles pour les applications arithmétiques. En annexe, nous donnons un résultat de comptage en courbure négative (dont le lien avec le théorème 1.1 est plus apparent avec son corollaire 3.9), dont les hypothèses sur l'espace ambiant sont bien plus générales que celles du théorème 1.1, mais qui ne donne qu'un encadrement asymptotique au lieu d'un équivalent (voir le théorème A.1).

*Remerciements* : Nous remercions Pierre Pansu pour son aide dans la preuve des propositions 2.3 et 3.4, K. Belabas pour des discussions fructueuses concernant les applications arithmétiques et les rapporteurs pour leurs suggestions très utiles.

## 2 Équidistribution des hypersurfaces équidistantes

Soit  $M$  une variété riemannienne lisse complète de dimension  $n \geq 2$ . Notons  $\pi : T^1M \rightarrow M$  le fibré tangent unitaire de  $M$  et  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  le flot géodésique sur  $T^1M$ . Pour tout  $v \in T^1M$ , notons  $\gamma_v$  la géodésique de  $M$  telle que  $\dot{\gamma}_v(0) = v$ . Nous noterons  $\mathcal{V}_\epsilon A$  le  $\epsilon$ -voisinage ouvert d'une partie  $A$  de  $M$ .

Notons  $d \text{vol}_M$  la mesure riemannienne de  $M$  et  $\text{Vol}(M)$  son volume total. Si  $\text{Vol}(M)$  est fini, nous appellerons *moyenne riemannienne* sur  $M$  la mesure de probabilité sur  $M$  égale à  $\frac{1}{\text{Vol}(M)} d \text{vol}_M$ . Nous noterons  $\oint \varphi d \text{vol}_M$  la moyenne riemannienne d'une application  $\varphi \in \mathcal{C}_c(M)$  (à valeurs complexes, continue à support compact). Pour toute application mesurable  $f : M \rightarrow [0, +\infty[$ , lorsque l'intégrale  $\int_M f d \text{vol}_M$  est finie non nulle, nous appellerons *f-moyenne* de  $M$  la mesure de probabilité  $\frac{f}{\int_M f d \text{vol}_M} d \text{vol}_M$  sur  $M$ .

Munissons  $T^1M$  de la métrique riemannienne usuelle (dite de Sasaki), qui fait de  $\pi$  une submersion riemannienne. Rappelons que la mesure riemannienne  $d \text{vol}_{T^1M}$ , appelée *mesure de Liouville*, se désintègre par  $\pi$  en

$$d \text{vol}_{T^1M} = \int_{x \in M} d \text{vol}_{T_x^1M} d \text{vol}_M(x),$$

où  $d \text{vol}_{T_x^1 M}$  est la mesure sphérique sur la fibre  $T_x^1 M$  de  $\pi$  au-dessus de  $x \in M$ . En particulier,

$$\text{Vol}(T^1 M) = \text{Vol}(\mathbb{S}_{n-1}) \text{Vol}(M). \quad (-1-)$$

Nous appellerons *moyenne de Liouville* la mesure de Liouville normalisée pour être de probabilité.

Soit  $\iota : M' \rightarrow M$  une immersion lisse d'une variété lisse  $M'$  dans  $M$ . Nous munirons  $M'$  de sa structure de variété riemannienne lisse image réciproque par  $\iota$ . Nous noterons encore par abus  $d \text{vol}_{M'}$  la mesure sur  $M'$  image par l'immersion  $\iota$  de la mesure riemannienne de  $M'$  (et de même pour les moyennes et  $f'$ -moyennes où  $f' : M' \rightarrow [0, +\infty[$  est mesurable).

Nous noterons  $\pi_\perp : \nu^1 M' \rightarrow M'$  le fibré normal unitaire de  $M'$  dans  $M$  (pour tout  $x \in M'$ , nous avons  $\nu_x^1 M' = T_{\iota(x)}^1 M \cap (T\iota(T_x M'))^\perp$ ) et  $\iota_\perp : \nu^1 M' \rightarrow T^1 M$  l'immersion naturelle. Si  $M'$  est connexe, de codimension  $p$  dans la composante connexe de  $M$  contenant  $M'$ , alors  $\nu^1 M'$  est connexe si et seulement si  $p \neq 1$ . De plus, si  $p = 1$ , alors  $\nu^1 M'$  admet exactement deux composantes connexes. Pour tout ouvert  $\Sigma$  de  $\nu^1 M'$  et tout  $f \in \mathbb{R}$ , nous noterons par abus  $g^t \Sigma$  la sous-variété lisse immergée de  $T^1 M$ , poussée, par le flot géodésique au temps  $t$ , de l'image de  $\Sigma$  dans  $T^1 M$  par  $\iota_\perp$ .

Si  $M'$  est une hypersurface immergée lisse strictement convexe de  $M$ , nous noterons  $N_+ : M' \rightarrow T^1 M$  (resp.  $N_- : M' \rightarrow T^1 M$ ) l'application de Gauss sortante (resp. rentrante) de  $M'$ , qui à  $x \in M'$  associe le vecteur normal sortant (respectivement rentrant) à  $M'$  en l'image dans  $M$  de  $x$ , et  $N_+ M'$  (respectivement  $N_- M'$ ) la sous-variété immergée dans  $T^1 M$ , image de l'application de Gauss correspondante.

Nous commençons par un lemme de courbure négative.

**Lemme 2.1** *Soit  $X$  une variété riemannienne lisse complète simplement connexe, à courbure sectionnelle au plus  $-1$ . Soit  $K$  un convexe fermé de  $X$  de bord  $\partial K$  une sous-variété de classe  $C^1$ . Soit  $v$  un vecteur tangent unitaire d'origine un point de  $\partial K$  et d'angle au plus  $\epsilon \in [0, \frac{\pi}{2}[$  avec la normale sortante en ce point. Alors, pour  $t > 0$ , le point  $y \in \partial K$  le plus proche de  $\gamma_v(t)$  est à distance au plus  $\text{argtanh}(\sin \epsilon)$  du point  $x = \gamma_v(0)$ . De plus, si  $t' = d(y, \gamma_v(t))$ , si  $v'$  est le vecteur tangent unitaire normal sortant de  $K$  en  $y$ , alors l'angle  $\alpha$  entre les vecteurs  $\dot{\gamma}_{v'}(t')$  et  $\dot{\gamma}_v(t)$  au point  $\gamma_v(t)$  vérifie  $\sin \alpha \leq \frac{\sinh(\text{argtanh}(\sin \epsilon))}{\sinh t}$ .*

**Démonstration.** Supposons que  $x \neq y$  et notons  $z = \gamma_v(t)$ . Considérons le triangle  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  de comparaison dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  du triangle de  $X$  de sommets  $x, y, z$ , dont l'angle  $\bar{\theta}$  en  $\bar{x}$  est au moins  $\frac{\pi}{2} - \epsilon$  et celui en  $\bar{y}$  au moins  $\frac{\pi}{2}$ . Notons  $L$  la géodésique de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  passant par  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$ . Alors, le point  $\bar{y}' \in L$  le plus proche de  $\bar{z}$  satisfait  $d(x, y) = d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{y}') = \ell$ . Notons  $t' = d(\bar{z}, \bar{y}')$ . Alors par les formules des triangles hyperboliques [Bea, p. 146-148], nous avons  $\cosh t = \cosh t' \cosh \ell$  et

$$\cosh t' = \cosh t \cosh \ell - \sinh t \sinh \ell \cos \bar{\theta} \geq \cosh t (\cosh \ell - \sinh \ell \sin \epsilon).$$

Donc  $\cosh \ell (\cosh \ell - \sinh \ell \sin \epsilon) \leq 1$  et  $\ell \leq \text{argtanh}(\sin \epsilon)$ , d'où le premier résultat. Le second en découle, par comparaison et la formule des sinus hyperboliques [Bea, p. 148].  $\square$

Le résultat suivant fournit, dans le fibré unitaire tangent, un théorème d'équidistribution, quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , de l'image par le flot géodésique au temps  $t$  du fibré normal unitaire d'une sous-variété immergée de volume fini totalement géodésique. Comme dit en introduction, il découle du théorème [EM, Theo. 1.2], mais nous en donnons une démonstration courte et directe. Voir [OS, Theo. 1.9] pour un résultat récent plus général.

**Théorème 2.2** *Soit  $M$  une variété hyperbolique connexe de volume fini, de dimension au moins 2. Soit  $C$  une sous-variété immergée de  $M$ , connexe, totalement géodésique et de volume fini. Soit  $\Sigma$  une union de composantes connexes du fibré normal unitaire de  $C$ . Alors la moyenne riemannienne sur  $g^t\Sigma$  converge vaguement vers la moyenne de Liouville quand  $t \rightarrow +\infty$  :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(T^1M), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \oint \varphi \, d\text{vol}_{g^t\Sigma} = \oint \varphi \, d\text{vol}_{T^1M} .$$

**Démonstration.** Le volume de la sous-variété immergée  $g^t\Sigma$  de  $T^1M$ , pour la métrique riemannienne induite, est fini, car  $C$  est de volume fini et l'application canonique  $g^t\Sigma \rightarrow C$  contracte l'élément de volume d'au plus une constante ne dépendant que de  $t, k, n$ , par homogénéité. Nous pouvons donc considérer la moyenne riemannienne sur  $g^t\Sigma$ .

Soient  $\widetilde{M} \rightarrow M$  et  $\widetilde{C} \rightarrow C$  des revêtements universels riemanniens. Le relevé  $\tilde{\iota} : \widetilde{C} \rightarrow \widetilde{M}$  de l'immersion  $\iota : C \rightarrow M$  est un plongement lisse sur un sous-espace hyperbolique encore noté  $\widetilde{C}$  de l'espace hyperbolique  $\widetilde{M}$ . Notons  $G_{\widetilde{C}}$  le groupe des isométries de  $\widetilde{M}$  préservant  $\widetilde{C}$ . Il agit transitivement sur le fibré normal unitaire  $\nu^1\widetilde{C}$ , et commute avec l'action du flot géodésique sur  $T^1\widetilde{M}$ .

Pour tout  $\eta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , notons  $\widetilde{V}_\eta$  l'ouvert  $G_{\widetilde{C}}$ -invariant de  $T^1\widetilde{M}$  formé des vecteurs  $w \in T^1\widetilde{M}$  tels qu'il existe  $s \in ]0, \eta[$  et  $v \in \nu^1\widetilde{C}$  tels que les vecteurs  $w$  et  $\dot{\gamma}_v(s)$  aient même origine et soient d'angle strictement inférieur à  $\eta$ . L'application  $\widetilde{P} : w \mapsto v$  ainsi définie est une fibration lisse  $G_{\widetilde{C}}$ -équivariante de  $\widetilde{V}_\eta$  sur  $\nu^1\widetilde{C}$ . Notons  $\Gamma_C$  l'intersection de  $G_{\widetilde{C}}$  et du groupe de revêtement de  $\widetilde{M} \rightarrow M$ . Par passage au quotient,  $\widetilde{P}$  induit une fibration  $P$  de  $\Gamma_C \backslash \widetilde{V}_\eta$  sur  $\nu^1C$ . Notons  $\widetilde{U}_\eta$  la réunion de composantes connexes de  $\widetilde{V}_\eta$  telle que  $U_\eta = \Gamma_C \backslash \widetilde{U}_\eta$  soit l'ouvert immergé  $P^{-1}(\Sigma)$  de  $T^1M$ . La mesure riemannienne de  $\widetilde{U}_\eta$  se désintègre par  $\widetilde{P}$  par rapport à la mesure riemannienne de  $\nu^1\widetilde{C}$ , de mesures conditionnelles sur les fibres finies et invariantes par  $G_{\widetilde{C}}$ . Notons  $\chi_{U_\eta} : T^1M \rightarrow \mathbb{N}$  la fonction caractéristique (comptant avec multiplicité) de l'image de  $U_\eta$  dans  $T^1M$ . Puisque  $C$  est de volume fini, l'intégrale  $\int_{T^1M} \chi_{U_\eta}(v) \, d\text{vol}_{T^1M}(v) = \text{vol}(U_\eta)$  est finie.

Montrons que pour tout  $\eta' > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $t > 0$ ,

$$g^tU_\eta \subset \mathcal{V}_{\eta'}g^t\Sigma .$$

En effet, par passage au quotient, il suffit de démontrer que  $g^t\widetilde{U}_\eta \subset \mathcal{V}_{\eta'}g^t\widetilde{\Sigma}$ , où  $\widetilde{\Sigma}$  est la préimage de  $\Sigma$  dans  $\nu^1\widetilde{C}$ . Soient  $w \in \widetilde{U}_\eta$ ,  $s \in ]0, \eta[$  et  $v \in \widetilde{\Sigma}$  tels que  $\angle(w, \dot{\gamma}_v(s)) < \eta$ . Notons  $K$  l'adhérence de  $\mathcal{V}_s\widetilde{C}$ , et  $v' \in \nu^1\widetilde{C}$  le vecteur tangent en l'origine du rayon géodésique normal à  $\widetilde{C}$  passant par  $\gamma_w(t)$ , qui passe à l'instant  $s$  par le point  $y$  de  $\partial K$  le plus proche de  $\gamma_w(t)$ . Remarquons que  $v'$  appartient aussi à  $\widetilde{\Sigma}$ . Par le lemme 2.1, si  $\eta$  est suffisamment petit, alors  $g^tw$  fait un angle petit avec  $g^{t'+s}v'$  où  $|t - t' - s| \leq d(y, \gamma_v(0)) + \eta$  est petit, uniformément en  $t$  et  $w$ , donc est uniformément près de  $g^t\Sigma$ .

Soit  $\varphi$  une fonction continue à support compact sur  $T^1M$ , qui est donc uniformément continue. Si  $\eta$  est assez petit, par homogénéité, la moyenne de  $\varphi$  sur  $g^t\Sigma$  est donc proche de sa moyenne sur l'ouvert immergé  $g^tU_\eta$ , uniformément en  $t > 0$ . Cette dernière moyenne est égale à

$$\frac{\int_{T^1M} \chi_{U_\eta}(v) \varphi(g^{-t}v) \, d\text{vol}_{T^1M}(v)}{\int_{T^1M} \chi_{U_\eta}(v) \, d\text{vol}_{T^1M}(v)}$$

par invariance de la mesure de Liouville par le flot géodésique. Elle converge donc quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , par la propriété de mélange du flot géodésique pour la mesure de Liouville (voir par exemple [Bab]), vers

$$\frac{\int_{T^1M} \varphi(v) d\text{vol}_{T^1M}(v)}{\text{Vol}(T^1M)},$$

qui est la moyenne riemannienne de  $\varphi$  sur  $T^1M$ . □

Le théorème précédent est un résultat d'équidistribution au niveau du fibré unitaire tangent  $T^1M$ . Lorsque l'on veut en déduire des propriétés d'équidistribution dans la variété  $M$  elle-même, des phénomènes surprenants apparaissent lorsque la courbure est variable. Le résultat préliminaire suivant est connu des spécialistes des sous-variétés.

**Proposition 2.3** *Soient  $M$  une variété riemannienne lisse de dimension  $n + 1$ ,  $L$  une hypersurface lisse de  $M$ ,  $N$  un champ de vecteurs unitaires lisse orthogonal le long de  $L$ ,  $\mu$  la mesure riemannienne sur  $L$ , et  $\nu$  la mesure riemannienne sur l'image du plongement lisse de Gauss  $\psi : L \rightarrow T^1M$  (défini par  $\psi(x) = N(x)$  pour tout  $x$  dans  $L$ ). Alors  $\psi_*\mu$  et  $\nu$  sont absolument continues l'une par rapport à l'autre et*

$$\forall x \in L, \quad \frac{d\nu}{d\psi_*\mu}(\psi(x)) = \prod_{i=1}^n (1 + \kappa_i(x)^2)^{1/2},$$

où  $\kappa_1(x), \dots, \kappa_n(x)$  sont les courbures principales de l'hypersurface  $L$  en  $x$ .

Rappelons que les courbures principales sont bien définies à l'ordre près, et qu'elles sont changées en leurs opposés si  $N$  est remplacé par  $-N$ . Le produit ci-dessus est bien invariant par permutation et par changement de signe des  $\kappa_i(x)$ . L'absolue continuité des mesures est immédiate, elles sont dans la classe de Lebesgue de la sous-variété lisse  $\psi(L)$ .

**Démonstration.** Le problème étant local, nous pouvons supposer que  $M$  est un voisinage suffisamment petit d'un point de  $L$ . Le champ de vecteurs unitaires  $N$  le long de  $L$  s'étend donc en un champ de vecteurs unitaires lisse sur  $M$ , que nous noterons encore  $N : M \rightarrow TM$ . Notons  $p : TM \rightarrow M$  la projection canonique et  $\nabla$  la connexion riemannienne de  $M$ . Rappelons que le fibré tangent de  $TM$  est somme directe de deux sous-fibrés vectoriels  $V$  et  $H$ , dits vertical et horizontal, orthogonaux pour la métrique riemannienne de  $TM$ , tels que, si  $\pi_V : TTM \rightarrow V$  est la projection orthogonale sur  $V$ , alors pour tout  $v \in TM$ ,

- $Tp|_{H_v} : H_v \rightarrow T_{p(v)}M$  est un isomorphisme linéaire isométrique,
- $V_v = \text{Ker } T_v p = T_v(T_{p(v)}M) = T_{p(v)}M$ , et le produit scalaire induit sur  $V_v$  par la métrique riemannienne de  $TM$  est égal au produit scalaire sur  $T_{p(v)}M$ ,
- pour tout champ de vecteurs lisse  $X : M \rightarrow TM$ , nous avons  $\nabla_v X = \pi_V \circ TX(v)$ .

Rappelons que l'opérateur de seconde forme fondamentale (pour le choix de la normale  $N$ ) de  $L$  est l'endomorphisme  $S$  du fibré  $TL$  défini (avec des conventions de signes variant suivant les références) par  $S(v) = \nabla_v N$  pour tout  $v \in TL$ . Comme  $\psi$  est la restriction de  $N$  à  $L$ , et  $T\psi$  celle de  $TN$  à  $TL$ , nous avons donc  $\pi_V \circ T\psi = S$ . Comme  $p \circ \psi = \text{id}_L$ , nous avons  $Tp \circ T\psi = \text{id}_{TL}$ . Donc en notant  $g^{TM}$  et  $g^L$  les tenseurs de métriques riemanniennes sur  $TM$  et  $L$ , nous avons la formule bien connue

$$\psi^* g^{TM} = g^L + S^* g^L.$$

Par définition des courbures principales en un point  $x$  de  $L$ , l'endomorphisme symétrique  $S(x)$  est diagonalisable en base orthonormée (pour le produit scalaire  $g_x^L$ ) de valeurs propres égales aux courbures principales. Donc, pour tout  $x$  dans  $L$ ,

$$d \operatorname{vol}_{\psi^* g_{TM}}(x) = \sqrt{\det(\operatorname{id} + S(x)^* S(x))} d \operatorname{vol}_{g^L}(x) = \left( \prod_{i=1}^n (1 + \kappa_i(x)^2) \right)^{1/2} d \operatorname{vol}_{g^L}(x) . \quad \square$$

Soit  $M$  une variété riemannienne lisse de dimension  $n \geq 2$  et à courbure sectionnelle strictement négative. Pour tout  $v \in T^1 M$ , notons  $\mathcal{F}_{su}(v)$  le germe de feuille en  $v$  du feuilletage fortement instable de  $T^1 M$  pour le flot géodésique. Notons  $\kappa_1(v), \dots, \kappa_{n-1}(v)$  les courbures principales en  $\pi(v)$  du germe d'hypersurface  $\pi(\mathcal{F}_{su}(v))$  de  $M$ . Notons  $\kappa = \kappa_M : T^1 M \rightarrow ]0, +\infty[$  l'application définie par

$$\kappa(v) = \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \kappa_i(v)^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Rappelons que si  $\tilde{\pi} : \tilde{M} \rightarrow M$  est un revêtement riemannien universel de  $M$ , alors les feuilles du feuilletage fortement instable de  $T^1 M$  sont les images par  $T\tilde{\pi}$  des sous-variétés  $N_+ H$  de  $T^1 \tilde{M}$  où  $H$  est une horosphère de  $\tilde{M}$ . De plus, si  $X$  est un espace symétrique à courbure strictement négative, pour toute horosphère  $H$  de  $X$ , le groupe des isométries de  $X$  fixant le point à l'infini de  $H$  agit transitivement sur  $H$ . Donc si  $M$  est localement symétrique, alors l'application  $\kappa : T^1 M \rightarrow ]0, +\infty[$  est constante. Il serait d'ailleurs intéressant de savoir si les seules variétés riemanniennes  $M$  lisses compactes à courbure sectionnelle strictement négative, dont la fonction  $\kappa_M$  est constante, sont localement symétriques.

**Théorème 2.4** *Soit  $M$  une variété riemannienne lisse complète, de volume fini, de dimension au moins 2 et de courbure sectionnelle pincée au plus  $-1$ . Soit  $\Sigma'$  une hypersurface lisse proprement immergée strictement convexe de volume fini, telle que la moyenne riemannienne sur  $g^t N_+ \Sigma'$  converge vaguement vers la moyenne de Liouville de  $T^1 M$ . Pour toute fonction  $\varphi$  continue à support compact dans  $M$ , la  $(\kappa \circ N_+)$ -moyenne de  $\varphi$  sur  $\pi(g^t N_+ \Sigma')$  converge vers la moyenne riemannienne de  $\varphi$  sur  $M$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .*

Notons que lorsque  $\kappa$  est constante (par exemple lorsque  $M$  est localement symétrique), la  $(\kappa \circ N_+)$ -moyenne est égale à la moyenne riemannienne; dans ce cas, la conclusion du théorème dit que la moyenne riemannienne de  $\varphi$  sur  $\pi(g^t N_+ \Sigma')$  converge vers la moyenne riemannienne de  $\varphi$  sur  $M$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

Par le théorème 2.2, le théorème 1.2 de l'introduction en découle. En effet, si  $C$  et  $\Sigma$  vérifient les hypothèses du théorème 2.2, posons  $\Sigma' = \pi(g^1 \Sigma)$ , qui est une hypersurface immergée lisse strictement convexe de volume fini. Puisque  $C$  est totalement géodésique, le rayon d'injectivité d'un point de  $C$  dans  $C$  est supérieur ou égal à celui dans  $M$ . Donc l'immersion de  $C$  dans  $M$  est propre. Par conséquent, l'immersion lisse de  $\Sigma'$  dans  $T^1 M$  est propre. Le résultat découle alors du fait que  $g^t \Sigma = g^{t-1} N_+ \Sigma'$  pour tout  $t \geq 1$ .

**Démonstration.** Pour tout  $t > 0$ , notons  $\Sigma(t) = \pi(g^t N_+ \Sigma')$ , qui est une hypersurface lisse proprement immergée strictement convexe de  $M$  de volume fini. En particulier, les moyennes riemanniennes sur  $\Sigma(t)$  et  $g^t N_+ \Sigma'$  sont bien définies. Pour tout  $t > 1$ , notons

$\kappa'_1(x), \dots, \kappa'_{n-1}(x)$  les courbures principales en un point  $x$  de  $\Sigma(t)$  (pour la normale sortante). Posons alors

$$\bar{\kappa}_t(x) = \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \kappa'_i(x)^2)^{1/2}.$$

**Étape 1.** Montrons tout d'abord que, pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_c(M)$ , la  $\bar{\kappa}_t$ -moyenne de  $\varphi$  sur  $\Sigma(t)$  converge vers la moyenne riemannienne de  $\varphi$  sur  $M$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

Soit  $\psi : x \mapsto N_+(x)$  l'application de Gauss de  $\Sigma(t)$  définie par la normale sortante  $N_+$ . Puisque  $\pi \circ \psi = \text{id}_{\Sigma(t)}$ , pour tout  $x$  dans  $\Sigma(t)$ , nous avons, par la proposition 2.3,

$$\frac{d\pi_* \text{vol}_{g^t N_+ \Sigma'}}{d \text{vol}_{\Sigma(t)}}(x) = \frac{d\pi_* \text{vol}_{g^t N_+ \Sigma'}}{d\pi_* \psi_* \text{vol}_{\Sigma(t)}}(\pi \circ \psi(x)) = \frac{d \text{vol}_{g^t N_+ \Sigma'}}{d\psi_* \text{vol}_{\Sigma(t)}}(\psi(x)) = \bar{\kappa}_t(x).$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma(t)} \varphi \bar{\kappa}_t d \text{vol}_{\Sigma(t)} &= \int_{\Sigma(t)} \varphi \frac{d\pi_* \text{vol}_{g^t N_+ \Sigma'}}{d \text{vol}_{\Sigma(t)}} d \text{vol}_{\Sigma(t)} = \int_{\Sigma(t)} \varphi d\pi_* \text{vol}_{g^t N_+ \Sigma'} \\ &= \int_{g^t N_+ \Sigma'} \varphi \circ \pi d \text{vol}_{g^t N_+ \Sigma'}. \end{aligned}$$

En particulier, en prenant une suite exhaustive  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de compacts de  $M$ , et  $\varphi : M \rightarrow [0, 1]$  une application continue constante égale à 1 sur  $K_n$  et nulle sur  ${}^c K_{n+1}$ , et en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , la convergence étant assurée par l'hypothèse de pincement de la courbure, la finitude du volume de  $\Sigma(t)$  et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons

$$\int_{\Sigma(t)} \bar{\kappa}_t d \text{vol}_{\Sigma(t)} = \text{Vol}(g^t N_+ \Sigma').$$

Or par l'hypothèse,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{g^t N_+ \Sigma'} \varphi \circ \pi d \text{vol}_{g^t N_+ \Sigma'} = \int_{T^1 M} \varphi \circ \pi d \text{vol}_{T^1 M} = \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M \varphi d \text{vol}_M,$$

car les mesures conditionnelles de  $d \text{vol}_{T^1 M}$  sur les fibres de  $T^1 M \rightarrow M$  ont une masse totale constante. Ceci conclut la première étape de cette démonstration.

**Étape 2.** Montrons maintenant que, pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_c(M)$ , la  $(\kappa \circ N_+)$ -moyenne de  $\varphi$  sur  $\Sigma(t)$  converge aussi vers la moyenne riemannienne de  $\varphi$  sur  $M$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

Notons qu'il existe  $a \in [1, +\infty[$  tel que  $1 \leq \kappa \leq a$ , car  $M$  est à courbure pincée. Donc la  $(\kappa \circ N_+)$ -moyenne de  $\Sigma(t)$  est bien définie. Quitte à décomposer  $\varphi$  en partie positive et partie négative, nous pouvons supposer que  $\varphi \geq 0$ . Soient  $\epsilon \in ]0, 1[$  et  $K$  un compact de  $M$ , contenant le support de  $\varphi$ , tels que  $\text{Vol}({}^c K) \leq \frac{\epsilon}{4} \text{Vol}(M)$ .

Soit  $\tilde{x}$  un point d'un revêtement riemannien universel  $\widetilde{M}$  de  $M$ . Pour tout  $t > 0$ , soit  $\widetilde{C}_t$  une hypersurface lisse strictement convexe plongée dans  $\widetilde{M}$  telle que  $\tilde{x} \in \partial \mathcal{V}_t(\widetilde{C}_t)$ . Notons  $N(\tilde{x}, t)$  le vecteur unitaire normal sortant de  $\mathcal{V}_t(\widetilde{C}_t)$  en  $\tilde{x}$ . Soit  $H_t$  l'horosphère de  $\widetilde{M}$  passant par  $\tilde{x}$  et de vecteur unitaire normal sortant en  $\tilde{x}$  égal à  $N(\tilde{x}, t)$ . Alors  $H_t$  et  $\partial \mathcal{V}_t(\widetilde{C}_t)$  ont quand  $t$  tend vers  $+\infty$  une tangence à l'ordre deux, uniformément quand  $\tilde{x}$  parcourt un compact de  $\widetilde{M}$ .

Par ce qui précède, si  $t$  est assez grand, alors pour tout  $x$  dans  $K \cap \Sigma(t)$ , nous avons

$$|\kappa \circ N_+(x) - \bar{\kappa}_t(x)| \leq \epsilon . \quad (-2-)$$

En particulier,  $|\kappa \circ N_+(x) - \bar{\kappa}_t(x)| \leq \epsilon \bar{\kappa}_t$  car  $\bar{\kappa}_t \geq 1$ , donc

$$(1 - \epsilon) \int \varphi \bar{\kappa}_t(x) d \text{vol}_{\Sigma(t)} \leq \int \varphi \kappa \circ N_+ d \text{vol}_{\Sigma(t)} \leq (1 + \epsilon) \int \varphi \bar{\kappa}_t(x) d \text{vol}_{\Sigma(t)} . \quad (-3-)$$

Fixons  $\varphi_K$  une fonction de  $M$  dans  $[0, 1]$ , continue à support compact contenu dans  $K$ , telle que  $\int \varphi_K d \text{vol}_M \geq \text{vol}(K) - \frac{\epsilon}{4} \text{Vol}(M)$ . En particulier,

$$\oint \varphi_K d \text{vol}_M \geq \frac{\text{Vol}(K)}{\text{Vol}(M)} - \frac{\epsilon}{4} \geq 1 - \frac{\epsilon}{2} .$$

Par l'étape 1 appliquée à  $\varphi_K$ , pour tout  $t$  assez grand, nous avons

$$\frac{\int \varphi_K \bar{\kappa}_t d \text{vol}_{\Sigma(t)}}{\int \bar{\kappa}_t d \text{vol}_{\Sigma(t)}} \geq \oint \varphi_K d \text{vol}_M - \frac{\epsilon}{2} \geq 1 - \epsilon .$$

Donc

$$\frac{\int_{cK} \bar{\kappa}_t d \text{vol}_{\Sigma(t)}}{\int \bar{\kappa}_t d \text{vol}_{\Sigma(t)}} = 1 - \frac{\int_K \bar{\kappa}_t d \text{vol}_{\Sigma(t)}}{\int \bar{\kappa}_t d \text{vol}_{\Sigma(t)}} \leq 1 - \frac{\int \varphi_K \bar{\kappa}_t d \text{vol}_{\Sigma(t)}}{\int \bar{\kappa}_t d \text{vol}_{\Sigma(t)}} \leq \epsilon . \quad (-4-)$$

Par les inégalités (-4-) et (-2-), et puisque  $\kappa \geq 1$ , nous avons

$$\begin{aligned} (1 - \epsilon) \int \bar{\kappa}_t d \text{vol}_{\Sigma(t)} &\leq \int_K \bar{\kappa}_t d \text{vol}_{\Sigma(t)} \leq \int_K \kappa \circ N_+ d \text{vol}_{\Sigma(t)} + \epsilon \int_K d \text{vol}_{\Sigma(t)} \\ &\leq (1 + \epsilon) \int_K \kappa \circ N_+ d \text{vol}_{\Sigma(t)} \leq (1 + \epsilon) \int \kappa \circ N_+ d \text{vol}_{\Sigma(t)} , \end{aligned}$$

d'où la majoration

$$\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \int \bar{\kappa}_t d \text{vol}_{\Sigma(t)} \leq \int \kappa \circ N_+ d \text{vol}_{\Sigma(t)} . \quad (-5-)$$

Montrons une minoration analogue. Puisque  $\bar{\kappa}_t \geq 1$ , par l'inégalité (-4-), nous avons

$$\frac{\int_{cK} d \text{vol}_{\Sigma(t)}}{\int \bar{\kappa}_t d \text{vol}_{\Sigma(t)}} \leq \frac{\int_{cK} \bar{\kappa}_t d \text{vol}_{\Sigma(t)}}{\int \bar{\kappa}_t d \text{vol}_{\Sigma(t)}} \leq \epsilon . \quad (-6-)$$

D'où, respectivement par la positivité de  $\bar{\kappa}_t$ , par l'encadrement (-2-), puisque  $\kappa \geq 1$ , puisque  $M = K \sqcup cK$ , puisque  $\kappa \leq a$ , et par l'inégalité (-6-), nous avons

$$\begin{aligned} \int \bar{\kappa}_t d \text{vol}_{\Sigma(t)} &\geq \int_K \bar{\kappa}_t d \text{vol}_{\Sigma(t)} \geq \int_K \kappa \circ N_+ d \text{vol}_{\Sigma(t)} - \epsilon \int_K d \text{vol}_{\Sigma(t)} \\ &\geq (1 - \epsilon) \int_K \kappa \circ N_+ d \text{vol}_{\Sigma(t)} \\ &= (1 - \epsilon) \int \kappa \circ N_+ d \text{vol}_{\Sigma(t)} - (1 - \epsilon) \int_{cK} \kappa \circ N_+ d \text{vol}_{\Sigma(t)} \\ &\geq (1 - \epsilon) \int \kappa \circ N_+ d \text{vol}_{\Sigma(t)} - (1 - \epsilon)a \int_{cK} d \text{vol}_{\Sigma(t)} \\ &\geq (1 - \epsilon) \int \kappa \circ N_+ d \text{vol}_{\Sigma(t)} - (1 - \epsilon)a\epsilon \int \bar{\kappa}_t d \text{vol}_{\Sigma(t)} . \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int \kappa \circ N_+ \, d\text{vol}_{\Sigma(t)} \leq \frac{1 + (1 - \epsilon)a\epsilon}{1 - \epsilon} \int \bar{\kappa}_t \, d\text{vol}_{\Sigma(t)} . \quad (-7-)$$

La seconde étape découle alors, par l'étape 1, des inégalités (-3-), (-5-) et (-7-).  $\square$

### 3 Comptage d'arcs perpendiculaires communs

Le but de cette partie est de donner un équivalent précis, quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , du nombre de rayons (localement) géodésiques partant perpendiculairement d'une sous-variété totalement géodésique et convergeant vers une pointe d'une variété hyperbolique de volume fini, de longueur (naturellement normalisée) au plus  $t$ .

Soit  $M$  une variété riemannienne lisse connexe, complète, de volume fini, de dimension  $n$  au moins 2 et de courbure sectionnelle au plus  $-1$ . Nous notons  $\pi : T^1M \rightarrow M$  son fibré unitaire tangent et  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  le flot géodésique sur  $T^1M$ . Nous munissons  $T^1M$  de la métrique riemannienne de Sasaki.

Soit  $C$  une sous-variété immergée lisse de volume fini dans  $M$ , totalement géodésique, de dimension  $k \in [0, n-1]$ . Notons que  $C$  n'est pas supposée connexe. Par exemple,  $C$  peut être une union finie de points ( $k = 0$ ), ou une union finie de géodésiques fermées ( $k = 1$ ), pas forcément simples, et éventuellement parcourues plusieurs fois.

Une manière naturelle de normaliser la longueur d'un rayon géodésique sortant de tout compact de  $M$  est de ne compter sa longueur que jusqu'au dernier instant où il entre dans un petit voisinage prescrit d'un bout de  $M$ . Il existe une manière canonique de définir de tels voisinages (voir par exemple [BK]). Nous aurons besoin de leur définition pour n'importe quelle variété riemannienne lisse  $M'$ , connexe, complète, de dimension  $n$  au moins 2 et de courbure sectionnelle au plus  $-1$ , qui est géométriquement finie (voir par exemple [Bow]). Rappelons qu'une *pointe* (*cusp* en anglais) de  $M'$  est une classe de rayons géodésiques minimisants asymptotes, le long desquels le rayon d'injectivité tend vers 0. Lorsque  $M'$  est de volume fini, l'ensemble des pointes de  $M'$  est en bijection avec l'ensemble des bouts de l'espace topologique localement compact  $M'$ , par l'application qui à une pointe associe le bout vers lequel converge n'importe quel représentant de cette pointe. Soit  $\tilde{\pi} : \tilde{M}' \rightarrow M'$  un revêtement universel riemannien de  $M'$ , de groupe de revêtement  $\Gamma$ . Si  $e$  est une pointe de  $M'$ , si  $\rho_e$  est un représentant de  $e$ , puisque  $M'$  est géométriquement finie, il existe (voir par exemple [Bow]) une horoboule fermée  $H_e$  dans  $\tilde{M}'$ , centrée au point à l'infini  $\xi_e$  d'un relevé de  $\rho_e$  dans  $\tilde{M}'$ , telle que  $H_e$  et  $\gamma H_e$  soient disjointes si  $\gamma \in \Gamma$  ne fixe pas  $\xi_e$ . En particulier, le quotient de  $H_e$  par son stabilisateur dans  $\Gamma$  s'injecte dans  $M'$  par l'application induite par  $\tilde{\pi}|_{H_e}$ . L'image  $V_e$  de  $H_e$  dans  $M'$  par  $\tilde{\pi}$  est appelée un *voisinage cuspidal* (ou *de Margulis*) de la pointe  $e$ .

Notons  $\mathcal{H}$  une union finie non vide de voisinages cuspidaux de pointes de  $M$ , et  $\partial\mathcal{H}$  la réunion correspondante des bords de ces voisinages cuspidaux. Munissons chacun de ces bords de la métrique riemannienne induite. Nous ne supposons pas que ces bords sont deux à deux disjoints, ni qu'ils soient disjoints de  $C$ , ni que toutes les pointes de  $M$  interviennent. Nous noterons  $\text{Vol}(\mathcal{H})$  la somme des volumes riemanniens de ces voisinages cuspidaux et  $\text{Vol}(\partial\mathcal{H})$  celle de leurs bords. Le résultat suivant est bien connu, voir par exemple [Hers, p. 473].

**Lemme 3.1** *Si  $M$  est hyperbolique, alors  $\text{Vol}(\mathcal{H}) = \frac{\text{Vol}(\partial\mathcal{H})}{n-1}$ .* □

Pour tout  $t \geq 0$ , notons  $\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}_{M,C,\mathcal{H}}(t)$  le nombre compté avec multiplicité (voir ci-dessous) de segments (localement) géodésiques  $\delta$  entre un point de  $C$  et un point de  $\partial\mathcal{H}$ , partant perpendiculairement de  $C$  (si  $k > 0$ ) et arrivant perpendiculairement en  $\partial\mathcal{H}$ , de longueur algébrique au plus  $t$ . La longueur de  $\delta$  est comptée positivement si son vecteur tangent rentre dans  $\mathcal{H}$  en son point d'arrivée sur  $\partial\mathcal{H}$ , et négativement sinon (cette convention n'a pas d'influence pour notre équivalent donné dans le théorème 3.2, car il n'y a qu'un nombre fini de tels  $\delta$  de longueur plus petite qu'une valeur donnée). En particulier, si  $C$  et  $\mathcal{H}$  sont disjoints, alors les longueurs algébriques des  $\delta$  sont toutes strictement positives. Un point de tangence entre  $\partial\mathcal{H}$  et  $C$  est un tel segment  $\delta$  (de longueur nulle). Si  $\iota : C \rightarrow M$  est l'immersion considérée de  $C$  dans  $M$ , si  $v$  est le vecteur tangent de  $\delta$  en son origine notée  $x$ , alors la *multiplicité* de  $\delta$  est

$$m(\delta) = \text{Card}\{x' \in C : \iota(x') = x \text{ et } T_{x'}\iota(T_{x'}C) \perp v\}. \quad (-8-)$$

Notons  $\mathbb{S}_m$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^{m+1}$ , munie de sa métrique riemannienne usuelle.

**Théorème 3.2** *Soit  $M$  une variété hyperbolique connexe, de volume fini, de dimension  $n \geq 2$ . Soit  $C$  une sous-variété lisse immergée de volume fini dans  $M$ , totalement géodésique, de dimension  $k < n$ . Soit  $\mathcal{H}$  une union finie non vide de voisinages cuspidaux de  $M$ . Alors quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ,*

$$\mathcal{N}_{M,C,\mathcal{H}}(t) \sim \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}_{n-k-1}) \text{Vol}(\mathcal{H}) \text{Vol}(C)}{\text{Vol}(\mathbb{S}_{n-1}) \text{Vol}(M)} e^{(n-1)t}.$$

Nous renvoyons à la fin de cette partie pour des remarques sur cet énoncé. Nous commençons par montrer trois résultats d'intérêt indépendant en géométrie hyperbolique. La proposition suivante découle facilement de [Herr, Satz 3].

**Proposition 3.3** *Soient  $\widehat{M}$  une variété hyperbolique de dimension  $n \geq 2$ ,  $\widehat{C}$  une sous-variété (plongée) de volume fini totalement géodésique de dimension  $k < n$ , telle que l'inclusion de  $\widehat{C}$  dans  $\widehat{M}$  soit une équivalence d'homotopie. Alors,*

$$\text{Vol}(\mathcal{V}_t\widehat{C}) = \text{Vol}(\mathbb{S}_{n-k-1}) \text{Vol}(\widehat{C}) \int_0^t \tanh^{n-k-1} s \cosh^{n-1} s \, ds.$$

En particulier, quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\text{Vol}(\mathcal{V}_t\widehat{C}) \sim \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}_{n-k-1}) \text{Vol}(\widehat{C})}{(n-1)2^{n-1}} e^{(n-1)t}. \quad \square$$

Pour usage ultérieur, remarquons qu'il découle de ce résultat que, pour tout  $\epsilon \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{Vol}(\mathcal{V}_{t+\epsilon}\widehat{C}) \sim e^{(n-1)\epsilon} \text{Vol}(\mathcal{V}_t\widehat{C}) \quad (-9-)$$

Le second résultat de géométrie hyperbolique est sans doute aussi bien connu, et une preuve nous a été communiquée par P. Pansu. Si  $X = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  est l'espace hyperbolique réel de dimension  $n \geq 2$ , nous appellerons *feuille instable* (resp. *stable*) le relevé, dans le fibré unitaire tangent  $T^1X$ , par la normale sortante (resp. rentrante) d'une horosphère de  $X$ .

**Proposition 3.4** Dans  $T^1\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , une feuille instable et une feuille stable, qui se rencontrent, sont orthogonales en leur point d'intersection pour la métrique de Sasaki.

**Démonstration.** La preuve utilise l'isomorphisme linéaire bien connu, pour tout vecteur tangent unitaire  $v$  d'une variété riemannienne complète  $M$ , entre l'espace vectoriel  $T_vTM$  et celui des champs de Jacobi le long de la géodésique définie par  $v$ .

Notons  $M = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  et  $p : TM \rightarrow M$  la projection canonique dans cette preuve. Rappelons (voir le début de la démonstration de la proposition 2.3) que la métrique de Sasaki sur  $TM$  est définie en posant, pour tous  $v \in T^1M$  et  $X, Y \in T_vTM$ ,

$$\langle X, Y \rangle_{TM} = \langle \nabla_v(Z_X), \nabla_v(Z_Y) \rangle_M + \langle T_v p(X), T_v p(Y) \rangle_M, \quad (-10-)$$

où  $Z_X : M \rightarrow TM$  est un champ de vecteurs lisse tels que  $Z_X(p(v)) = v$  et  $TZ_X(v) = X$ .

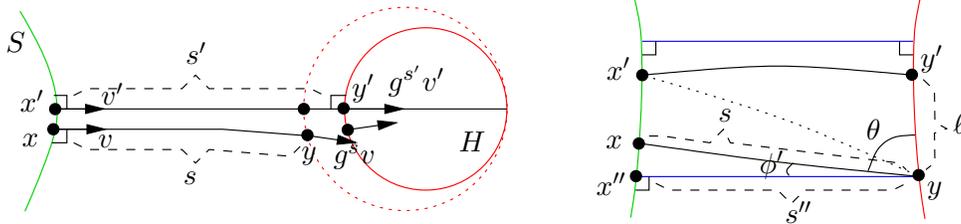
Pour tous  $v \in T^1M$  et  $X \in T_vTM$ , notons  $t \mapsto J_X(t)$  le champ de Jacobi le long de la géodésique  $\gamma_v : t \mapsto p(g^t v)$  tel que  $J_X(0) = T_v p(X)$  et  $\dot{J}_X(0) = \nabla_v Z_X$ . Par transport parallèle le long de  $\gamma_v$ , nous considérons que  $J_X(t) \in T_{p(v)}M$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Remarquons que l'espace tangent à la feuille stable (resp. instable) passant par  $v$  est l'ensemble des  $X \in T_vTM$  tels que  $J_X$  soit orthogonal le long de  $\gamma_v$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} J_X(t) = 0$  (resp.  $\lim_{t \rightarrow -\infty} J_X(t) = 0$ ).

Puisque  $M$  est à courbure constante  $-1$ , l'équation des champs de Jacobi est  $\ddot{J}(t) - J(t) = 0$ . Soit  $X \in T_vTM$  (resp.  $Y \in T_vTM$ ) un vecteur tangent à la feuille stable (resp. instable) passant par  $v$ . Alors  $J_X(t) = e^{-t} J_X(0)$ , donc  $\dot{J}_X(0) = -J_X(0)$ . De même, nous avons  $\dot{J}_Y(0) = J_Y(0)$ . Donc, par la formule (-10-), nous avons  $\langle X, Y \rangle_{TM} = \langle \dot{J}_X(0), \dot{J}_Y(0) \rangle + \langle J_X(0), J_Y(0) \rangle = 0$ , ce qui montre le résultat.  $\square$

Le troisième résultat est en fait valable plus généralement que pour  $X = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ .

**Lemme 3.5** Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour toute hypersurface  $C^1$  strictement convexe  $S$  d'une variété riemannienne  $X$  complète, simplement connexe, de dimension  $n \geq 2$ , à courbure sectionnelle pincée au plus  $-1$ , pour toute horoboule fermée  $H$  disjointe de  $S$ , pour tout vecteur  $v \in N_+S$ , pour tout  $s \geq 1$ , si  $g^s v \in \mathcal{V}_\delta(N_-(\partial H))$ , alors il existe  $v' \in N_+S$  et  $s' \geq 0$  tel que  $g^{s'} v' \in N_-(\partial H) \cap B_{T^1X}(g^s v, \epsilon)$ .

**Démonstration.** Soit  $(X, S, H, v, s)$  comme dans l'énoncé. Notons  $s' = d(S, H)$  (qui est strictement positive), et  $v'$  le vecteur tangent à l'origine du segment perpendiculaire commun allant de  $S$  à  $H$ . Nous avons en particulier  $g^{s'} v' \in N_-(\partial H)$ . Nous pouvons supposer que  $v' \neq v$ . Pour  $\pi : T^1X \rightarrow X$  la projection canonique, définissons  $x = \pi(v)$ ,  $y = \pi(g^s v)$ ,  $x' = \pi(v')$ ,  $y' = \pi(g^{s'} v')$  (voir la figure ci-dessous à gauche). Montrons que  $g^{s'} v'$  est proche de  $g^s v$  si  $g^s v$  est suffisamment proche d'un élément de  $N_-(\partial H)$  (avec constantes uniformes).



Soit  $\epsilon' > 0$ . La projection canonique  $\pi$  est 1-lipschitzienne, et isométrique sur chaque orbite du flot géodésique. Donc quitte à remplacer  $H$  par une horoboule fermée concentrique et  $s'$  par  $s' \pm d(y, \partial H)$ , nous pouvons supposer que  $y \in \partial H$ , et que l'angle en  $y$  entre  $g^s v$  et le vecteur unitaire normal rentrant dans  $H$  en  $y$  est au plus  $\epsilon'$ .

Considérons le quadrilatère géodésique  $Q$  de sommets  $x, x', y', y$ . Par convexité, ses angles en  $x, x', y'$  sont au moins  $\frac{\pi}{2}$ , et l'angle en  $y$ , noté  $\theta$ , appartient à  $[\frac{\pi}{2} - \epsilon', \frac{\pi}{2}]$ .

Montrons que  $\ell = d(y, y')$  tend uniformément vers 0 quand  $\epsilon'$  tend vers 0. Ceci implique le résultat, car puisque les horosphères ont des courbures principales bornées par l'hypothèse de pincement de la courbure de  $X$ , les vecteurs unitaires normaux rentrant dans  $H$  en  $y$  et  $y'$  seront uniformément proches.

Par comparaison, nous pouvons supposer que la courbure est constante, égale à  $-1$ . Puisque remplacer le triangle géodésique de sommets  $x', y, y'$  par le triangle géodésique isométrique, de sommets  $x', y, y''$ , contenu dans le plan hyperbolique contenant  $x, y, x'$ , et de l'autre côté de la géodésique passant par  $x', y$ , ne fait qu'augmenter les angles en  $x'$  et  $y$  sans changer les autres angles ni les longueurs des côtés, nous pouvons supposer que  $Q$  est contenu dans un plan hyperbolique. Quitte à remplacer le côté  $[x', y']$  par le segment géodésique perpendiculaire commun aux droites passant par  $x, x'$  et  $y, y'$ , ce qui ne peut qu'augmenter  $\ell = d(y, y')$  et laisse  $s = d(x, y)$  inchangé, nous pouvons supposer que les angles de  $Q$  en  $x'$  et  $y'$  sont égaux à  $\frac{\pi}{2}$ .

Notons  $x''$  la projection orthogonale de  $y$  sur la géodésique passant par  $x, x'$ , notons  $\phi' \in [0, \epsilon']$  l'angle en  $y$  du triangle géodésique de sommets  $x'', y, x$ , et posons  $s'' = d(x'', y)$  (voir la figure ci-dessus à droite). Par la formule 7.11.2 (iii) de [Bea, page 147], nous avons

$$\tanh s'' = \tanh s \cos \phi' \geq \tanh 1 \cos \epsilon',$$

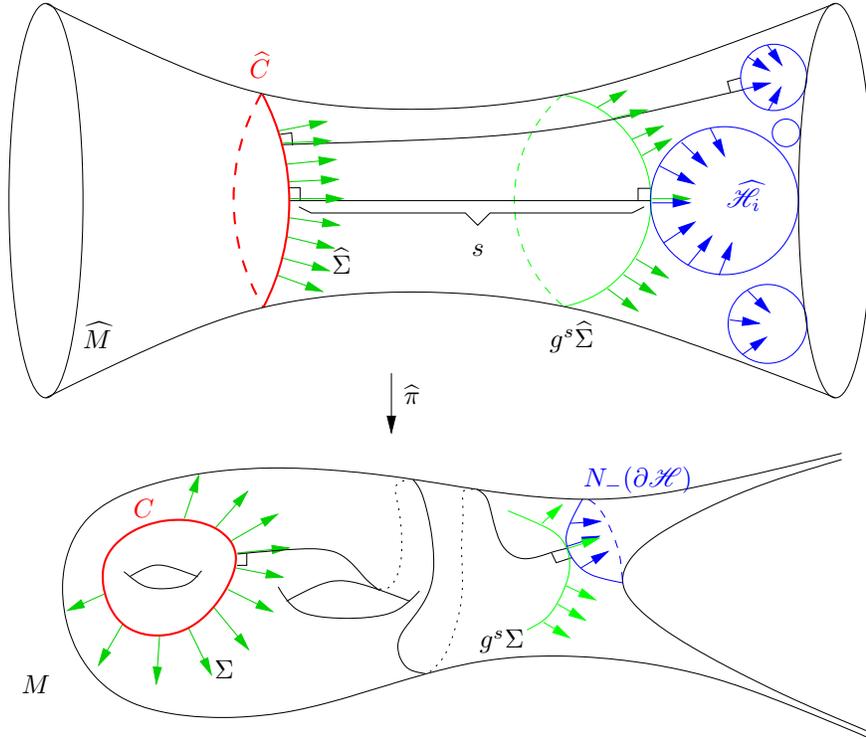
car  $s \geq 1$ . Donc en utilisant les formules de [Bea, page 157] pour le quadrilatère de sommets  $x'', x', y', y$  dont l'angle en  $y$  est au moins  $\theta$  et les autres angles sont droits, nous avons

$$\tanh \ell \leq \frac{\cos \theta}{\tanh s''} \leq \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \epsilon')}{\tanh 1 \cos \epsilon'} = \frac{\tan \epsilon'}{\tanh 1},$$

qui tend uniformément vers 0 quand  $\epsilon'$  tend vers 0. Le résultat en découle.  $\square$

**Démonstration du théorème 3.2.** Fixons  $\epsilon_0 > 0$  suffisamment petit. Nous effectuons tout d'abord quelques réductions. Par additivité des deux membres de l'équivalent du théorème, nous pouvons donc supposer que  $C$  est connexe.

Pour tout  $h > 0$ , soit  $\mathcal{H}_h$  la réunion des voisinages cuspidaux des mêmes bouts que  $\mathcal{H}$ , contenue dans  $\mathcal{H}$ , et telle que  $\partial \mathcal{H}_h$  soit une hypersurface immergée à équidistance  $h$  de  $\partial \mathcal{H}$ . Avec notre convention concernant la longueur algébrique des segments perpendiculaires communs, nous avons  $\mathcal{N}_{M, C, \mathcal{H}_h}(t) = \mathcal{N}_{M, C, \mathcal{H}}(t + h)$  puisque les géodésiques de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  perpendiculaires à une horosphère sont perpendiculaires à toutes les horosphères concentriques. Puisque le flot géodésique contracte par  $e^{-t}$  la distance riemannienne induite des feuilles stables,  $\text{Vol}(\mathcal{H}_h) = e^{-(n-1)h} \text{Vol}(\mathcal{H})$ . Quitte à remplacer  $\mathcal{H}$  par  $\mathcal{H}_h$  avec  $h$  assez grand, nous pouvons donc supposer que les voisinages cuspidaux qui composent  $\mathcal{H}$  sont à distance strictement supérieure à  $2\epsilon_0$  deux à deux, ainsi que de  $C$  privé d'un voisinage cuspidal dans  $C$  de chaque pointe de  $C$  dont un représentant est contenu dans  $\mathcal{H}$ .



Introduisons maintenant divers objets géométriques qui nous seront utiles.

Notons  $\hat{\pi} : \widehat{M} \rightarrow M$  le revêtement riemannien de  $M$  défini par  $C$  : fixons un point base dans  $C$  et prenons pour point base dans  $M$  son image par l'immersion  $\iota$  de  $C$  dans  $M$  ; si  $\iota_* : \pi_1 C \rightarrow \pi_1 M$  est l'application induite sur les groupes fondamentaux par  $\iota$ , alors  $\hat{\pi}$  est le revêtement riemannien connexe de  $M$  défini par le sous-groupe  $\iota_* \pi_1 C$  de  $\pi_1 M$ . Par le théorème du relèvement, l'immersion de  $C$  dans  $M$  se relève en un plongement de  $C$  dans  $\widehat{M}$ , dont nous notons l'image  $\widehat{C}$ . Notons  $\widehat{\Sigma} = \nu^{-1} \widehat{C}$  (voir la figure ci-dessus) et encore  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  le flot géodésique sur  $T^1 \widehat{M}$ . Définissons

$$\widehat{\mathcal{H}} = \hat{\pi}^{-1}(\mathcal{H}) \quad \text{et} \quad \widehat{\Omega}_t = \bigcup_{s \in [0, t]} g^s \widehat{\Sigma} .$$

Les propriétés de ces objets géométriques dont nous aurons besoin sont les suivantes.

- La partie  $\widehat{C}$  est une sous-variété de volume fini, connexe, totalement géodésique, de dimension  $k$ , dans la variété hyperbolique  $\widehat{M}$ , et  $\widehat{\Sigma}$  est une sous-variété de  $T^1 \widehat{M}$ .
- La variété  $\widehat{M}$  est géométriquement finie, et ses pointes correspondent aux pointes de  $\widehat{C}$ . Elle se rétracte par déformation forte sur  $\widehat{C}$  (le long des rayons géodésiques perpendiculaires à  $\widehat{C}$ ), de sorte que chaque voisinage cuspidal de  $\widehat{M}$  soit préservé lors de la déformation et s'envoie sur un voisinage cuspidal de  $\widehat{C}$ .
- L'application  $\hat{\pi}$  envoie  $\widehat{C}$  sur  $C$  en préservant les mesures riemanniennes, donc

$$\text{Vol}(\widehat{C}) = \text{Vol}(C) . \quad (-11-)$$

- L'image de  $\widehat{\Sigma}$  par l'application tangente  $T\hat{\pi}$  est l'image dans  $T^1 M$  du fibré normal unitaire de  $C$ . Puisque  $\hat{\pi}$  est un revêtement riemannien,  $T\hat{\pi}$  envoie  $g^t \widehat{\Sigma}$  sur  $g^t \Sigma$  en préservant les mesures riemanniennes :

$$(T\hat{\pi})_*(d \text{vol}_{g^t \widehat{\Sigma}}) = d \text{vol}_{g^t \Sigma} . \quad (-12-)$$

- La partie  $\widehat{\Omega}_t$  est une sous-variété à bord, lisse, de volume fini, de dimension  $n$  dans la variété  $T^1\widehat{M}$  de dimension  $2n - 1$ , qui est la réunion disjointe des  $g^s\widehat{\Sigma}$  pour  $s \in [0, t]$ .
- L'application de  $\widehat{\Omega}_t$  dans  $[0, t]$ , de fibre  $g^s\widehat{\Sigma}$  au dessus de  $s \in [0, t]$ , est une fibration (différentiablement) triviale; puisque les géodésiques de vecteur origine dans  $\widehat{\Sigma}$  sont perpendiculaires aux hypersurfaces équidistantes à  $\widehat{\Sigma}$ , la mesure riemannienne de  $\widehat{\Omega}_t$  se désintègre par cette fibration en la mesure de Lebesgue sur  $[0, t]$ , de mesure conditionnelle au-dessus du point  $s$  la mesure riemannienne sur  $g^s\widehat{\Sigma}$  :

$$d \text{vol}_{\Omega_t} = \int_0^t d \text{vol}_{g^s\widehat{\Sigma}} ds . \quad (-13-)$$

- Les courbures principales des hypersurfaces  $\partial\mathcal{V}_t\widehat{C}$  convergent uniformément, quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , vers 1 (la courbure principale des horosphères dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ ). Par le point précédent et la proposition 2.3 (appliquée à la variété  $\widehat{M}$  et à l'hypersurface  $\partial\mathcal{V}_t\widehat{C}$ ), nous avons donc, quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , l'équivalent

$$\text{Vol}(\widehat{\Omega}_t) \sim 2^{\frac{n-1}{2}} \text{Vol}(\mathcal{V}_t\widehat{C}) . \quad (-14-)$$

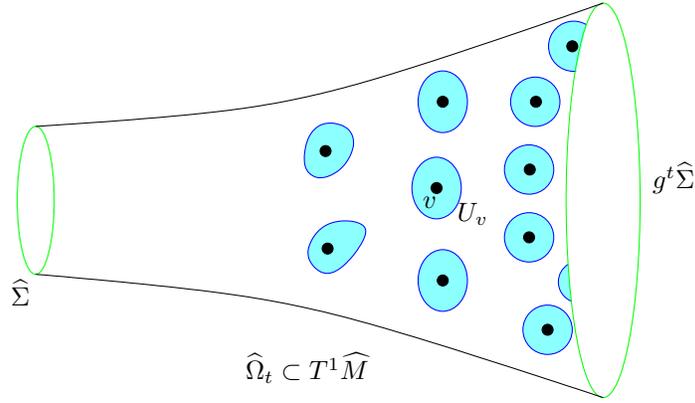
- La partie  $\widehat{\mathcal{H}}$  est réunion d'une union finie  $V$  de voisinages cuspidaux de pointes de  $\widehat{M}$  et d'une union d'horoboules isométriquement plongées dans  $\widehat{M}$ , ces voisinages cuspidaux et horoboules plongées étant à distance strictement supérieure à  $2\epsilon_0$  deux à deux, ainsi que de  $\widehat{C}$  et de  $V$ . De plus,  $\partial^*\widehat{\mathcal{H}} = \partial(\widehat{\mathcal{H}} - V) = \widehat{\pi}^{-1}(\partial\widehat{\mathcal{H}}) - \partial V$  est une sous-variété strictement convexe lisse de dimension  $n - 1$  dans  $\widehat{M}$ , donc  $N_-(\partial^*\widehat{\mathcal{H}})$  est une sous-variété lisse de dimension  $n - 1$  dans  $T^1\widehat{M}$ .

La relation entre ces objets géométriques et notre problème de comptage est la suivante.

**Proposition 3.6** *Pour tout  $t \geq 0$ , l'ensemble  $I_t = \widehat{\Omega}_t \cap N_-(\partial^*\widehat{\mathcal{H}})$  est fini, de cardinal égal à  $\mathcal{N}(t)$ .*

**Démonstration.** Par stricte convexité des horosphères dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  (et additivité des dimensions), chaque composante connexe de  $N_-(\partial^*\widehat{\mathcal{H}})$  rencontre  $\widehat{\Omega}_t$  en au plus un point (et l'intersection est transverse). Comme aucune composante de  $N_-(\partial V)$  ne rencontre  $\widehat{\Omega}_t$ , nous avons  $I_t = \widehat{\Omega}_t \cap N_-(\partial^*\widehat{\mathcal{H}})$ . Pour usage ultérieur, notons que deux éléments de  $I_t$  sont donc à distance strictement supérieure à  $2\epsilon_0$ , car leurs points bases le sont.

Pour tout  $t \geq 0$ , tout segment de géodésique  $\gamma$  de longueur  $s \leq t$ , partant perpendiculairement en un point de  $C$  et arrivant perpendiculairement en un point de  $\partial\widehat{\mathcal{H}}$ , de multiplicité  $m$ , se relève par le revêtement  $\widehat{\pi}$  en exactement  $m$  segments géodésiques de longueurs  $s$  (d'origines deux à deux distinctes), partant perpendiculairement de  $\widehat{C}$ , et arrivant perpendiculairement en des points  $x_{\gamma,1}, \dots, x_{\gamma,m}$  (deux à deux distincts) de  $\partial^*\widehat{\mathcal{H}}$ . Les vecteurs unitaires  $N_-(x_{\gamma,1}), \dots, N_-(x_{\gamma,m})$  rentrants normaux à  $\partial^*\widehat{\mathcal{H}}$  appartiennent à  $g^s\widehat{\Sigma} \cap N_-(\partial^*\widehat{\mathcal{H}})$ , donc à  $I_t$ . Le résultat en découle facilement.  $\square$



Pour continuer la preuve du théorème 3.2, nous introduisons maintenant l'objet analytique qui nous sera utile. Montrons que pour tout  $\eta > 0$  suffisamment petit, il existe une application  $\psi_\eta \in \mathcal{C}_c(T^1 M)$ , à support dans  $\mathcal{V}_\eta(N_-(\partial \mathcal{H}))$ , telle que les mesures  $\psi_\eta d \text{vol}_{T^1 M}$  convergent vaguement vers la mesure riemannienne  $d \text{vol}_{N_-(\partial \mathcal{H})}$  de  $N_-(\partial \mathcal{H})$  quand  $\eta$  tend vers 0. Ce résultat est classique, mais nous en donnons une preuve car nous aurons besoin d'une version assez précise, et de ses notations, par la suite.

Notons  $\nu \mathcal{H}$  le fibré normal de la sous-variété  $N_-(\partial \mathcal{H})$  de la variété riemannienne  $T^1 M$ , muni de la métrique fibrée induite par la métrique de  $T^1 M$ . Par compacité de  $N_-(\partial \mathcal{H})$  et par les propriétés de l'exponentielle riemannienne, il existe  $\eta_0 > 0$  tel que pour tout  $\eta \in ]0, \eta_0]$ , l'application exponentielle normale de  $\nu \mathcal{H}$  dans  $T^1 M$  soit un difféomorphisme lisse du  $\eta$ -voisinage de la section nulle dans  $\nu \mathcal{H}$  sur le  $\eta$ -voisinage de  $N_-(\partial \mathcal{H})$  dans  $T^1 M$ . Pour tout  $v$  dans  $N_-(\partial \mathcal{H})$ , nous noterons  $D_\perp(v, \eta)$  l'image par cette application de la boule de centre 0 et de rayon  $\eta$  dans la fibre de  $\nu \mathcal{H}$  au-dessus de  $v$ . Pour tout  $v$  dans  $N_-(\partial \mathcal{H})$ , prenons sur  $D_\perp(v, \eta_0)$  une fonction continue  $\psi_{v, \eta}$  à support compact contenu dans  $D_\perp(v, \eta)$  telle que  $\psi_{v, \eta} d\lambda$ , où  $d\lambda$  est la mesure riemannienne sur  $D_\perp(v, \eta_0)$ , converge vers la masse de Dirac en  $v$  quand  $\eta \rightarrow 0$ . Par un argument de trivialité locale du fibré  $\nu \mathcal{H}$  et de partition finie de l'unité, nous obtenons donc une application  $\psi_\eta$  cherchée, par orthogonalité en  $v \in N_-(\partial \mathcal{H})$  de  $D_\perp(v, \eta_0)$  et de  $T_v N_-(\partial \mathcal{H})$ .

Le coeur de la preuve du théorème 3.2 est maintenant d'estimer de deux manières différentes l'intégrale  $\int \psi_\eta \circ T\hat{\pi} d \text{vol}_{\hat{\Omega}_t}$ . Fixons  $\epsilon > 0$ .

Donnons tout d'abord des informations sur le support de la mesure  $\psi_\eta \circ T\hat{\pi} d \text{vol}_{\hat{\Omega}_t}$ .

Notons  $\hat{\Omega}_\infty = \bigcup_{t \in [0, +\infty[} \hat{\Omega}_t$  et  $I_\infty = \bigcup_{t \in [0, +\infty[} I_t$ , qui sont des unions croissantes. Remarquons que  $\hat{\Omega}_\infty$  est une sous-variété lisse de  $T^1 \hat{M}$ , et que  $I_\infty$  est un ensemble de points  $(2\epsilon_0)$ -séparés de  $\hat{\Omega}_\infty$ , comme mentionné dans la preuve de la proposition 3.6. Remarquons aussi que si  $\eta$  est assez petit, alors  $\hat{\Omega}_\infty$  ne rencontre pas le  $\eta$ -voisinage de  $N_-(\partial V)$ , car l'angle en un point de  $\partial V$  entre un vecteur unitaire normal rentrant dans  $V$  et le vecteur tangent d'un rayon géodésique perpendiculaire à  $\hat{C}$ , en ce point, est au moins  $\frac{\pi}{2}$ .

Pour tout  $v$  dans  $I_\infty$ , notons  $s_v$  l'unique  $s \in [0, +\infty[$  tel que  $v \in g^s \hat{\Sigma}$ , et  $U_v$  l'intersection triple du support de  $\psi_\eta \circ T\hat{\pi}$ , de la boule de centre  $v$  et de rayon  $\epsilon_0$ , et de  $\hat{\Omega}_\infty$ . Les  $U_v$  sont deux à deux disjoints et vérifient les propriétés suivantes (voir la figure précédente).

**Lemme 3.7** (1) *Pour tout  $\eta > 0$  assez petit, pour tout  $t \geq \epsilon_0$ , l'intersection de  $\hat{\Omega}_{t-\epsilon_0}$  et du support de  $\psi_\eta \circ T\hat{\pi}$  est contenue dans la réunion disjointe des  $U_v$  pour  $v \in I_t$ . De même, l'intersection de  $\hat{\Omega}_{t+\epsilon_0}$  et du support de  $\psi_\eta \circ T\hat{\pi}$  contient la réunion des  $U_v$  pour  $v \in I_t$ .*

(2) Pour tout  $\eta > 0$  assez petit, pour tout  $v \in I_\infty$ , pour tout  $t \geq s_v + \epsilon_0$ ,

$$1 - \epsilon \leq \int_{U_v} \psi_\eta \circ T\widehat{\pi} \, d\text{vol}_{\widehat{\Omega}_t} \leq 1 + \epsilon. \quad (-15-)$$

**Démonstration.** Tout d'abord, par le lemme 3.5, si  $\eta$  est assez petit, tout point de l'intersection du support de  $\psi_\eta \circ T\widehat{\pi}$  et de  $\widehat{\Omega}_\infty$  est contenu dans la boule de centre  $v$  et de rayon  $\min\{\epsilon_0, \eta_0\}$  pour un  $v \in I_\infty$ . La première affirmation en découle.

Pour  $s$  assez grand, la sous-variété  $g^s\widehat{\Sigma}$  de  $T^1\widehat{M}$  est, au voisinage de chacun de ses points, proche d'un germe de feuille instable, donc par la proposition 3.4, est presque perpendiculaire au germe de feuille stable passant par ce point. En tout point de  $T^1M$ , l'orbite du flot géodésique est orthogonale aux feuilles stables et instables. Donc si  $\eta_0$  est suffisamment petit, il existe  $t_0 \geq 0$  tel que si  $v \in I_\infty$  vérifie  $s_v \geq t_0$ , alors  $\widehat{\Omega}_\infty \cap B(v, \eta_0)$  est (différentiablement) proche de  $D_\perp(v, \eta_0)$ . Comme l'intégrale riemannienne de  $\psi_\eta \circ T\widehat{\pi}$  sur  $D_\perp(v, \eta_0)$  est égale à 1 (puisque  $T\widehat{\pi}$  est un revêtement riemannien), ceci montre la seconde affirmation lorsque  $s_v \geq t_0$ . Comme la restriction de  $\psi_\eta$  à  $D_\perp(v, \eta_0)$  converge vers la masse de Dirac unité en  $v$ , quitte à choisir  $\eta$  suffisamment petit, nous pouvons supposer que cette estimation soit aussi vraie pour l'ensemble fini des  $v \in I_\infty$  tels que  $s_v \in [0, t_0]$ .  $\square$

Par le lemme 3.7 (1), par le lemme 3.7 (2), et par la proposition 3.6, nous avons

$$\int \psi_\eta \circ T\widehat{\pi} \, d\text{vol}_{\widehat{\Omega}_{t-\epsilon_0}} \leq \sum_{v \in I_t} \int_{U_v} \psi_\eta \circ T\widehat{\pi} \, d\text{vol}_{\widehat{\Omega}_{t+\epsilon_0}} \leq (1 + \epsilon) \text{Card } I_t = (1 + \epsilon)\mathcal{N}(t).$$

Avec un argument similaire pour la minoration, nous obtenons, pour tout  $t \geq \epsilon_0$ ,

$$\frac{1}{1 + \epsilon} \int \psi_\eta \circ T\widehat{\pi} \, d\text{vol}_{\widehat{\Omega}_{t-\epsilon_0}} \leq \mathcal{N}(t) \leq \frac{1}{1 - \epsilon} \int \psi_\eta \circ T\widehat{\pi} \, d\text{vol}_{\widehat{\Omega}_{t+\epsilon_0}}. \quad (-16-)$$

Nous allons maintenant utiliser un argument d'équidistribution pour donner un équivalent de l'intégrale  $\int \psi_\eta \circ T\widehat{\pi} \, d\text{vol}_{\widehat{\Omega}_t}$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

Par la formule (-12-) et le théorème d'équidistribution 2.2, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \oint \psi_\eta \circ T\widehat{\pi} \, d\text{vol}_{g^t\widehat{\Sigma}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \oint \psi_\eta \, d\text{vol}_{g^t\Sigma} = \oint \psi_\eta \, d\text{vol}_{T^1M}.$$

Par la formule (-13-) et un argument de moyenne de Césaro, nous avons donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \oint \psi_\eta \circ T\widehat{\pi} \, d\text{vol}_{\widehat{\Omega}_t} = \oint \psi_\eta \, d\text{vol}_{T^1M}. \quad (-17-)$$

Or par définition de l'application  $\psi_\eta$  et la compacité de  $\mathcal{V}_\eta(N_-(\partial\mathcal{H}))$ , nous avons

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \oint \psi_\eta \, d\text{vol}_{T^1M} = \frac{\text{Vol}(N_-(\partial\mathcal{H}))}{\text{Vol}(T^1M)} > 0.$$

Fixons  $\eta > 0$  assez petit tel que

$$(1 - \epsilon) \frac{\text{Vol}(N_-(\partial\mathcal{H}))}{\text{Vol}(T^1M)} \leq \oint \psi_\eta \, d\text{vol}_{T^1M} \leq (1 + \epsilon) \frac{\text{Vol}(N_-(\partial\mathcal{H}))}{\text{Vol}(T^1M)}.$$

Par les formules (-16-) et (-17-), pour tout  $t$  assez grand, nous avons donc

$$\frac{(1-\epsilon)^2}{1+\epsilon} \frac{\text{Vol}(N_-(\partial\mathcal{H}))}{\text{Vol}(T^1M)} \text{Vol}(\widehat{\Omega}_{t-\epsilon_0}) \leq \mathcal{N}(t) \leq \frac{(1+\epsilon)^2}{1-\epsilon} \frac{\text{Vol}(N_-(\partial\mathcal{H}))}{\text{Vol}(T^1M)} \text{Vol}(\widehat{\Omega}_{t+\epsilon_0}).$$

Donc, par les formules (-14-) et (-9-), et puisque  $\epsilon$  et  $\epsilon_0$  peuvent être pris arbitrairement petits, nous avons l'équivalent quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\mathcal{N}(t) \sim \frac{2^{\frac{n-1}{2}} \text{Vol}(N_-(\partial\mathcal{H}))}{\text{Vol}(T^1M)} \text{Vol}(\mathcal{V}_t\widehat{C}).$$

Par la proposition 2.3 et par le lemme 3.1, nous avons

$$\text{Vol}(N_-(\partial\mathcal{H})) = 2^{\frac{n-1}{2}} \text{Vol}(\partial\mathcal{H}) = (n-1) 2^{\frac{n-1}{2}} \text{Vol}(\mathcal{H}).$$

Le théorème 3.2 découle alors de la formule (-1-) et de la proposition 3.3.  $\square$

Nous concluons cette partie par diverses remarques sur le théorème 3.2.

**Remarques.** (1) Si  $C$  est de codimension 1 et transversalement orientable, nous pouvons compter les perpendiculaires communes à  $C$  et à  $\partial\mathcal{H}$  qui partent d'un côté donné de  $C$ . Fixons une des deux composantes connexes  $\Sigma$  de  $\nu^1C$ . Si  $\iota_\perp : \nu^1C \rightarrow T^1M$  est l'immersion induite, si  $\alpha$  est un segment perpendiculaire commun à  $C$  et à  $\partial\mathcal{H}$  de vecteur tangent  $v$  en son origine dans  $C$ , appelons *multiplicité positive* de  $\alpha$  l'entier

$$m_+(\alpha) = \text{Card}\{v' \in \nu^1C : \iota_\perp(v') = v\}.$$

Pour tout  $t \geq 0$ , notons  $\mathcal{N}_+(t)$  le nombre compté avec multiplicité positive de perpendiculaires communes entre  $C$  et  $\partial\mathcal{H}$ , de longueur algébrique au plus  $t$ . Comme toute composante connexe de  $\nu^1C$  s'équidistribue quand on la pousse par le flot géodésique, la méthode utilisée dans la preuve du théorème 3.2 s'applique (en remplaçant  $\widehat{\Sigma}$  par la composante connexe de  $\nu^1\widehat{C}$  qui revêt  $\Sigma$ ). Le volume de la partie du  $t$ -voisinage de  $\widehat{C}$  d'un côté donné de  $\widehat{C}$  étant la moitié du volume de tout ce  $t$ -voisinage, nous en déduisons donc le résultat suivant.

**Corollaire 3.8** *Soit  $(M, C, \mathcal{H})$  comme dans l'énoncé du théorème 3.2, avec  $C$  de codimension 1 et transversalement orientable. Alors quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ,*

$$\mathcal{N}_+(t) \sim \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}_{n-k-1}) \text{Vol}(\mathcal{H}) \text{Vol}(C)}{2 \text{Vol}(\mathbb{S}_{n-1}) \text{Vol}(M)} e^{(n-1)t}. \quad \square$$

(2) Soient  $n \geq 2$  et  $\Gamma$  un groupe discret de covolume fini d'isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  (ayant éventuellement de la torsion). Soient  $p \geq 1$  et  $C_1, \dots, C_p$  des sous-espaces hyperboliques de dimension  $k < n$  de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , de stabilisateurs  $\Gamma_{C_1}, \dots, \Gamma_{C_p}$  de covolume fini. Soient  $q \geq 1$  et  $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_q$  des horoboules fermées de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  *précisément invariantes* par  $\Gamma$  (c'est-à-dire qu'en notant  $\Gamma_{\mathcal{H}_j}$  le stabilisateur de  $\mathcal{H}_j$ , si  $\gamma \in \Gamma$  et  $\mathcal{H}_j \cap \gamma\mathcal{H}_j \neq \emptyset$  alors  $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{H}_j}$ ).

Pour tous  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $j \in \{1, \dots, q\}$  et  $\alpha, \beta \in \Gamma$ , notons  $\delta = \delta_{i,j,\alpha,\beta}$  l'arc géodésique de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , perpendiculaire commun entre  $\alpha C_i$  et  $\beta \partial\mathcal{H}_j$  lorsqu'il existe (c'est-à-dire lorsque le point à l'infini de  $\beta\mathcal{H}_j$  n'est pas un point à l'infini de  $\alpha C_i$ ). Le groupe  $\Gamma$  agit naturellement sur l'ensemble des tels arcs. Nous compterons la longueur  $\ell(\delta)$  de  $\delta$  positivement s'il ne rencontre pas l'intérieur de  $\beta\mathcal{H}_j$ , et négativement sinon. Appelons *multiplicité* de  $\delta$  (lorsqu'il existe) l'inverse du cardinal du stabilisateur dans  $\Gamma$  de  $\alpha C_i \cup \beta\mathcal{H}_j$

$$m(\delta) = \frac{1}{\text{Card}(\alpha\Gamma_{C_i}\alpha^{-1} \cap \beta\Gamma_{\mathcal{H}_j}\beta^{-1})}. \quad (-18-)$$

(Cette multiplicité est naturelle : dans tout problème de comptage d'objets ayant d'éventuelles symétries, la bonne fonction de comptage consiste à donner pour multiplicité à un objet l'inverse du cardinal de son groupe de symétries.)

Puisque le stabilisateur dans  $\Gamma$  de  $\alpha C_i \cup \beta \mathcal{H}_j$  fixe point par point  $\delta$ , et par discrétude de  $\Gamma$ , la multiplicité  $m(\delta)$  est bien définie, et invariante par  $\Gamma$ . Par convention, posons  $m(\delta_{i,j,\alpha,\beta}) = 0$  et  $\ell(\delta_{i,j,e,\gamma}) = -\infty$  si  $\alpha C_i$  et  $\beta \mathcal{H}_j$  n'ont pas d'arc perpendiculaire commun. Notons que pour tous  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\alpha_i \in \Gamma_{C_i}$  et  $\beta_j \in \Gamma_{\mathcal{H}_j}$ , l'arc  $\delta_{i,j,\alpha,\beta}$  existe si et seulement si l'arc  $\delta_{i,j,\gamma\alpha_i,\gamma\beta_j}$  existe, et alors  $\gamma\delta_{i,j,\alpha,\beta} = \delta_{i,j,\gamma\alpha_i,\gamma\beta_j}$ .

Pour tout  $t \geq 0$ , notons  $\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}_{\Gamma, (C_i), (\mathcal{H}_j)}(t)$  le nombre, compté avec multiplicité, de classes modulo  $\Gamma$  d'arcs géodésiques  $\delta_{i,j,\alpha,\beta}$  de longueur au plus  $t$ . C'est aussi le nombre, compté avec multiplicité, de classes modulo  $\Gamma_{\mathcal{H}_j}$  de perpendiculaires communes entre  $\partial \mathcal{H}_j$  et les  $\alpha C_i$  de longueur au plus  $t$ , ou encore le nombre, compté avec multiplicité, de classes modulo  $\Gamma_{C_i}$  de perpendiculaires communes entre  $C_i$  et les  $\beta \mathcal{H}_j$  de longueur au plus  $t$  :

$$\mathcal{N}(t) = \sum_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q, [\gamma] \in \Gamma_{\mathcal{H}_j} \backslash \Gamma / \Gamma_{C_i}, \ell(\delta_{i,j,\gamma,e}) \leq t} m(\delta_{i,j,\gamma,e}) .$$

**Corollaire 3.9** *Pour tout  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{N}(t)$  est bien défini, est fini, et quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ,*

$$\mathcal{N}(t) \sim \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}_{n-k-1}) \left( \sum_{j=1}^q \text{Vol}(\Gamma_{\mathcal{H}_j} \backslash \mathcal{H}_j) \right) \left( \sum_{i=1}^p \text{Vol}(\Gamma_{C_i} \backslash C_i) \right)}{\text{Vol}(\mathbb{S}_{n-1}) \text{Vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)} e^{(n-1)t} .$$

**Démonstration.** Par additivité des deux membres de l'équivalent, nous pouvons supposer que  $p = q = 1$ , et nous notons  $\mathcal{H}_{\infty} = \mathcal{H}_1$ ,  $\Gamma_{\infty} = \Gamma_{\mathcal{H}_1}$ ,  $C_0 = C_1$ ,  $\Gamma_0 = \Gamma_{C_1}$ . Par le lemme de Selberg,  $\Gamma$  étant de type fini (et  $\mathbb{R}$  de caractéristique nulle), il existe un sous-groupe  $\Gamma'$  sans torsion, distingué, d'indice fini  $m$  dans  $\Gamma$ .

Notons  $M' = \Gamma' \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , qui est une variété hyperbolique de volume fini de dimension  $n$ , et  $\pi' : \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n \rightarrow M'$  la projection canonique. Puisque le lieu de ramification du revêtement branché  $M' \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  est de mesure nulle, nous avons

$$\text{Vol}(M') = m \text{Vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n) .$$

Notons  $\gamma_1 \mathcal{H}_{\infty}, \dots, \gamma_{m_{\infty}} \mathcal{H}_{\infty}$  un système de représentants modulo  $\Gamma'$  des images par  $\Gamma'$  de  $\mathcal{H}_{\infty}$ . L'image de  $\gamma_j \mathcal{H}_{\infty}$  dans  $M'$  par  $\pi'$  est un voisinage cuspidal d'une pointe  $e_j$  de  $M'$ , car  $\mathcal{H}_{\infty}$  est précisément invariante sous  $\Gamma$ . De plus,  $e_j \neq e_{j'}$  si  $j \neq j'$ , par définition du système de représentants. Notons  $\mathcal{H}'$  l'image dans  $M'$  de la réunion disjointe  $\bigcup_{j=1}^{m_{\infty}} \gamma_j \mathcal{H}_{\infty}$ , qui est ouverte. Par le même argument que précédemment, nous avons

$$\text{Vol}(\mathcal{H}') = m \text{Vol}(\Gamma_{\infty} \backslash \mathcal{H}_{\infty}) .$$

Le groupe  $\Gamma_0$  agit à gauche par translations à droite  $(g, \Gamma' \gamma) \mapsto \Gamma' \gamma g^{-1}$  sur l'ensemble fini  $\Gamma' \backslash \Gamma$  d'ordre  $m$ . Notons  $\{\Gamma' \gamma_1, \dots, \Gamma' \gamma_{m_0}\}$  un système de représentants des orbites : puisque  $\Gamma_0$  est le stabilisateur de  $C_0$  dans  $\Gamma$ ,  $\gamma_1 C_0, \dots, \gamma_{m_0} C_0$  est un système de représentants modulo  $\Gamma'$  des images par  $\Gamma$  de  $C_0$ . Le stabilisateur de  $\Gamma' \gamma_i$  pour cette action de  $\Gamma_0$  est  $\Gamma_0 \cap \gamma_i^{-1} \Gamma' \gamma_i$ . Par la formule des classes, nous avons

$$m = \sum_{i=1}^{m_0} \text{Card}(\Gamma_0 / (\Gamma_0 \cap \gamma_i^{-1} \Gamma' \gamma_i)) .$$

Notons  $C' = \coprod_{i=1}^{m_0} \Gamma'_i \backslash (\gamma_i C_0)$ , où  $\Gamma'_i = \text{Stab}_{\Gamma'}(\gamma_i C_0) = \Gamma' \cap \gamma_i \Gamma_0 \gamma_i^{-1}$ , qui est une variété hyperbolique de volume fini de dimension  $k < n$ . Les inclusions des  $\gamma_i C_0$  dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  pour  $i = 1, \dots, m_0$  induisent une immersion totalement géodésique de  $C'$  dans  $M'$ . De plus

$$\begin{aligned} \text{Vol}(C') &= \sum_{i=1}^{m_0} \text{Vol}(\Gamma'_i \backslash (\gamma_i C_0)) = \sum_{i=1}^{m_0} [\gamma_i \Gamma_0 \gamma_i^{-1} : \Gamma'_i] \text{Vol}((\gamma_i \Gamma_0 \gamma_i^{-1}) \backslash (\gamma_i C_0)) \\ &= m \text{Vol}(\Gamma_0 \backslash C_0) . \end{aligned}$$

Pour toute variété lisse  $N$ , notons  $\mathcal{G}_k(TN) \rightarrow N$  le fibré lisse des sous-espaces vectoriels de dimension  $k$  des espaces tangents aux points de  $N$ . Pour tout  $t \geq 0$ , notons  $\mathcal{E}(t)$  l'ensemble des images dans  $2^{M'} \times \mathcal{G}_k(TM')$ , par l'application induite par  $\pi'$ , des couples  $(\delta, E)$  pour lesquels il existe  $\alpha, \beta \in \Gamma$  tels que  $\delta$  soit la perpendiculaire commune entre  $\alpha C_0$  et  $\beta \partial \mathcal{H}_{\infty}$ , de longueur au plus  $t$ , et  $E$  soit l'espace tangent à  $\alpha C_0$  au point initial de  $\delta$  sur  $\alpha C_0$ . Par définition des multiplicités (voir la formule (-8-)), et puisque deux sous-variétés totalement géodésiques connexes d'une variété hyperbolique, qui ont même espace tangent en un point commun, coïncident, nous avons

$$\text{Card}(\mathcal{E}(t)) = \mathcal{N}_{M', C', \mathcal{H}'}(t) .$$

Le groupe fini  $\Gamma' \backslash \Gamma$  de cardinal  $m$  agit sur  $M'$ , donc sur  $\mathcal{E}(t)$ . Puisque  $\Gamma'$  agit librement sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , le cardinal du stabilisateur dans  $\Gamma' \backslash \Gamma$  de l'image d'un  $(\delta, E)$  comme ci-dessus est égal au cardinal du stabilisateur dans  $\Gamma$  de  $(\delta, E)$ , donc de  $\alpha C_0 \cup \beta \mathcal{H}_{\infty}$ , puisque  $C_0$  est totalement géodésique et que toute géodésique perpendiculaire à une horosphère passe par son point à l'infini. Donc le cardinal de l'orbite par  $\Gamma' \backslash \Gamma$  de l'image de  $(\delta, E)$  est égal à  $\frac{m}{\text{Card}(\alpha \Gamma_{C_i} \alpha^{-1} \cap \beta \Gamma_{\mathcal{H}_j} \beta^{-1})}$ . Par la définition (-18-) des multiplicités, nous avons donc

$$\text{Card}(\mathcal{E}(t)) = m \mathcal{N}_{\Gamma', (C_0), (\mathcal{H}_{\infty})}(t) .$$

Le résultat découle alors du théorème 3.2 appliqué à  $M', C', \mathcal{H}'$ .  $\square$

(4) La dernière remarque est une formule de comptage de points fixes hyperboliques (dans une orbite donnée) d'un groupe discret de covolume fini d'isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , la complexité étant (l'inverse de) la distance entre les deux points fixes de l'isométrie hyperbolique. Nous nous en servirons pour les applications arithmétiques qui suivent. Si  $x$  est l'un des deux points fixes d'une isométrie hyperbolique de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , nous noterons  $x^{\sigma}$  l'autre point fixe.

**Corollaire 3.10** *Soit  $n \geq 2$ , et soit  $G$  un groupe discret de covolume fini d'isométries du modèle du demi-espace supérieur de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  ayant  $\infty$  comme point fixe parabolique. Soit  $\gamma_0$  un élément hyperbolique de  $G$ , notons  $x_0 \in \partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  un de ses deux points fixes,  $\ell_0$  sa distance de translation, et  $n_{G,0}$  l'indice de  $\gamma_0^{\mathbb{Z}}$  dans le stabilisateur dans  $G$  de son axe de translation. Notons  $\mathcal{A}_{\infty}$  le volume euclidien d'un domaine fondamental mesurable de l'hyperplan affine de hauteur 1 sous l'action du stabilisateur  $G_{\infty}$  du point  $\infty$  dans  $G$ , et  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne sur  $\partial_{\infty} \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n - \{\infty\} = \mathbb{R}^{n-1}$ . Alors quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ,*

$$\sum_{x \in G_{\infty} \backslash G \{x_0, x_0^{\sigma}\}, \|x - x^{\sigma}\| \geq \frac{1}{t}} \frac{1}{\text{Card}(G_{\infty} \cap \text{Stab}_G x)} \sim \frac{2^n \ell_0 \text{Vol}(\mathbb{S}_{n-2}) \mathcal{A}_{\infty}}{(n-1) n_{G,0} \text{Vol}(\mathbb{S}_{n-1}) \text{Vol}(G \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)} t^{n-1} .$$

**Démonstration.** Appliquons le corollaire 3.9 avec  $k = 1$ ,  $\Gamma = G$ , une seule horoboule  $\mathcal{H}_\infty$  constituée des points de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  dont la dernière coordonnée est supérieure ou égale à  $h$ , où  $h$  est choisi assez grand pour que  $\mathcal{H}_\infty$  soit précisément invariante, et une seule géodésique  $C_0$  égale à l'axe de translation de  $\gamma_0$ . Nous avons

$$\text{Vol}(G_\infty \backslash \mathcal{H}_\infty) = \frac{\mathcal{A}_\infty}{(n-1)h^{n-1}},$$

par le calcul du lemme 3.1. En notant  $G_0$  le stabilisateur de  $C_0$ , nous avons  $\text{Vol}(G_0 \backslash C_0) = \frac{\ell_0}{n_{G,0}}$ . Si  $x$  et  $y$  sont les extrémités, différentes du point  $\infty$ , d'une géodésique  $C_*$ , alors par un calcul immédiat de distance hyperbolique, toujours en comptant algébriquement les distances à  $\partial\mathcal{H}_\infty$ , nous avons  $d(\partial\mathcal{H}_\infty, C_*) = \log \frac{2h}{\|y-x\|}$ . En particulier,  $\|y-x\| \geq 1/t$  si et seulement si  $d(\partial\mathcal{H}_\infty, C_*) \leq \log(2ht)$ .

Pour tout  $\gamma \in G$ , en notant  $x$  et  $x^\sigma$  les points à l'infini de  $\gamma C_0$ , nous avons  $\text{Card}(G_\infty \cap \text{Stab}_G(x)) = \frac{1}{2} \text{Card}(G_\infty \cap \gamma G_0 \gamma^{-1})$  s'il existe un élément de  $G_\infty$  échangeant  $x$  et  $x^\sigma$ , et  $\text{Card}(G_\infty \cap \text{Stab}_\Gamma(x)) = \text{Card}(G_\infty \cap \gamma G_0 \gamma^{-1})$  sinon, auquel cas  $x$  et  $x^\sigma$  définissent deux éléments distincts de  $G_\infty \backslash G\{x_0, x_0^\sigma\}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in G_\infty \backslash G\{x_0, x_0^\sigma\}, \|x-x^\sigma\| \geq \frac{1}{t}} \frac{1}{\text{Card}(G_\infty \cap \text{Stab}_G(x))} \\ &= 2 \sum_{[\gamma] \in G_\infty \backslash G/G_0, d(\partial\mathcal{H}_\infty, \gamma C_0) \leq \log(2ht)} \frac{1}{\text{Card}(G_\infty \cap \gamma G_0 \gamma^{-1})} \end{aligned}$$

Le résultat découle alors du corollaire 3.9. □

## 4 Applications arithmétiques

Nous renvoyons par exemple à [Sam, Nar] pour les prérequis sur les corps de nombres, et à [Lan, Bue, BV] pour ceux sur les formes quadratiques binaires.

### 4.1 Irrationnels quadratiques et formes quadratiques binaires

Nous rappelons dans cette partie la bijection bien connue entre l'ensemble des réels irrationnels quadratiques  $\alpha$  et l'ensemble des formes quadratiques binaires  $Q$  entières primitives indéfinies ne représentant pas 0 sur  $\mathbb{Q}$ . Comme promis dans [PP2], nous donnons des interprétations algébriques de la complexité  $h(\alpha) = \frac{2}{|\alpha - \alpha^\sigma|}$ , en l'exprimant en fonction du discriminant de sa forme quadratique binaire associée, et, lorsque  $\alpha$  est un entier algébrique, en fonction de sa trace et de sa norme.

Notons  $K$  le corps des rationnels  $\mathbb{Q}$  (respectivement une extension quadratique imaginaire de  $\mathbb{Q}$ ), et  $\widehat{K} = \mathbb{R}$  (respectivement  $\widehat{K} = \mathbb{C}$ ). Soit  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$ . Pour tout  $\alpha \in \widehat{K}$  irrationnel quadratique sur  $K$ , notons  $\alpha^\sigma$  son conjugué de Galois sur  $K$ ,  $\text{Tr}(\alpha) = \alpha + \alpha^\sigma$  sa trace (relative),  $N(\alpha) = \alpha\alpha^\sigma$  sa norme (relative), et

$$h(\alpha) = \frac{2}{|\alpha - \alpha^\sigma|}.$$

Le groupe  $\mathrm{PSL}_2(\widehat{K})$  agit sur  $\mathbb{P}^1(\widehat{K}) = \widehat{K} \cup \{\infty\}$  par homographies. Son sous-groupe  $\Gamma_K = \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_K)$  préserve l'ensemble des éléments de  $\widehat{K}$  irrationnels quadratiques sur  $K$ , et son action commute avec l'action de l'automorphisme de Galois.

Remarquons que  $h(\alpha)$  est fini, non nul, et que  $h(\alpha^\sigma) = h(\alpha)$ . Nous avons montré dans [PP2] que pour tout  $\beta$  appartenant au stabilisateur  $\Gamma_{K,\infty}$  du point  $\infty$  dans  $\Gamma_K$ , nous avons  $h(\beta\alpha) = h(\alpha)$ , et qu'il n'existe qu'un nombre fini d'orbites modulo  $\Gamma_{K,\infty}$  d'éléments  $\alpha$  de  $\widehat{K}$  irrationnels quadratiques sur  $K$  tels que  $h(\alpha) \leq c$ , pour toute constante  $c > 0$ .

Pour tout  $\alpha$  dans  $\widehat{K}$ , il est bien connu (voir par exemple [PP2, Lem. 6.2]) que  $\alpha$  est irrationnel quadratique sur  $K$  si et seulement s'il existe un élément hyperbolique du réseau  $\Gamma_K$  de  $\mathrm{PSL}_2(\widehat{K})$  ayant  $\alpha$  pour point fixe, l'autre point fixe étant alors  $\alpha^\sigma$ .

Soit  $Q(X, Y) = AX^2 + BXY + CY^2$  une forme quadratique binaire entière (sur  $\mathbb{Q}$ ). Nous noterons  $A = A_Q$  si préciser  $Q$  est nécessaire. La forme  $Q$  est dite *primitive* si ses coefficients  $A, B, C$  sont premiers entre eux. Notons  $D = D_Q = B^2 - 4AC$  le *discriminant* de  $Q$ , qui est congru à 0 ou 1 modulo 4. La forme quadratique réelle  $Q$  est indéfinie si et seulement si  $D > 0$ . La forme  $Q$  est dite *irréductible* si elle ne vérifie pas l'une des assertions équivalentes suivantes :  $Q$  est, à multiple rationnel près, le produit de deux formes linéaires entières ;  $Q$  représente 0 sur  $\mathbb{Q}$ ;  $D$  est un carré. Remarquons que  $A \neq 0$  si  $D$  n'est pas un carré. Le groupe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  agit à droite sur l'ensemble des formes quadratiques binaires entières par  $(\gamma, Q) \mapsto Q \circ \gamma$ , en préservant le discriminant :  $\forall \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), D_{Q \circ \gamma} = D_Q$ . Deux formes quadratiques binaires entières sont dites *équivalentes* si elles sont dans la même orbite sous  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

Le résultat suivant est bien connu (voir par exemple [BV, Theo. 4.5.8 (2)]), sa preuve est un prétexte pour introduire des objets qui nous serviront ultérieurement. Posons

$$\alpha_Q = \frac{-B + \sqrt{D}}{2A}.$$

**Proposition 4.1** *L'application  $Q \mapsto \alpha_Q$  est une bijection de l'ensemble des formes quadratiques binaires entières primitives indéfinies irréductibles dans l'ensemble des réels irrationnels quadratiques, telle que, pour tout  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ,*

$$\alpha_{-Q} = (\alpha_Q)^\sigma \quad \text{et} \quad \alpha_{Q \circ \gamma} = \gamma \alpha_Q.$$

**Démonstration.** Puisque  $Q$  est primitive, le sous-groupe  $\mathrm{SO}(Q, \mathbb{Z})$  de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  des éléments fixant  $Q(X, Y) = AX^2 + BXY + CY^2$  est (voir par exemple [Lan, Theo. 202])

$$\mathrm{SO}(Q, \mathbb{Z}) = \left\{ \gamma_{Q,t,u} = \begin{pmatrix} \frac{t - Bu}{2} & -Cu \\ Au & \frac{t + Bu}{2} \end{pmatrix} : t, u \in \mathbb{Z}, t^2 - Du^2 = 4 \right\}.$$

Notons  $(t_Q, u_Q)$  la solution fondamentale de l'équation de Pell-Fermat  $t^2 - Du^2 = 4$ .

L'image  $\mathrm{PSO}(Q, \mathbb{Z}) = \mathrm{SO}(Q, \mathbb{Z}) / \{\pm \mathrm{id}\}$  de  $\mathrm{SO}(Q, \mathbb{Z})$  dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  est infinie cyclique, engendrée par  $\pm \gamma_Q = \pm \gamma_{Q,t_Q,u_Q}$ . L'application  $Q \mapsto \pm \gamma_Q$  est une bijection de l'ensemble des formes quadratiques binaires entières primitives indéfinies irréductibles dans l'ensemble des éléments hyperboliques primitifs de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  (voir [Sar1, Prop. 1.4]), telle que, pour tout  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ,

$$\gamma_{-Q} = (\gamma_Q)^{-1} \quad \text{et} \quad \gamma_{Q \circ \gamma} = \gamma \gamma_Q \gamma^{-1}.$$

Il est immédiat de montrer que l'irrationnel quadratique  $\alpha_Q$  est le point fixe attractif de  $\pm\gamma_Q$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , l'autre point fixe étant le conjugué de Galois  $\alpha_Q^\sigma$ . Remarquons que  $\text{PSO}(Q, \mathbb{Z})$  est le stabilisateur de  $\alpha_Q$  dans  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ .

Comme l'application de l'ensemble des éléments hyperboliques primitifs  $\gamma$  de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  dans l'ensemble des réels irrationnels quadratiques, qui à  $\gamma$  associe son point fixe attractif, est une bijection, le résultat en découle.  $\square$

La complexité  $h(\alpha)$  d'un réel irrationnel quadratique  $\alpha$  vérifie les propriétés suivantes.

**Lemme 4.2** *Soit  $Q$  une forme quadratique binaire entière indéfinie irréductible.*

(1) *Nous avons  $h(\alpha_Q) = \frac{2|A_Q|}{\sqrt{D_Q}}$ .*

(2) *Pour tout  $\gamma = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dans  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , nous avons*

$$h(\gamma\alpha_Q) = \frac{|Q(d, -c)|}{|A_Q|} h(\alpha_Q) = \frac{2}{\sqrt{D_Q}} |Q(d, -c)|.$$

(3) *Si  $\alpha$  est un entier quadratique réel, alors  $h(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\text{Tr}(\alpha)^2 - 4N(\alpha)}}$ .*

**Démonstration.** (1) La première assertion est immédiate par définition de  $h$  et de  $\alpha_Q$ .

(2) Notons pour simplifier  $\alpha = \alpha_Q$ . Nous avons  $N(\alpha) = C/A$ , et  $\text{Tr}(\alpha) = -B/A$ , donc

$$Q(X, Y) = A(X^2 - \text{Tr}(\alpha)XY + N(\alpha)Y^2). \quad (-19-)$$

Or

$$\gamma\alpha - \gamma\alpha^\sigma = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} - \frac{a\alpha^\sigma + b}{c\alpha^\sigma + d} = \frac{\alpha - \alpha^\sigma}{c^2N(\alpha) + cd\text{Tr}(\alpha) + d^2}. \quad (-20-)$$

Par (1), l'assertion (2) en découle.

(3) La forme quadratique binaire  $Q_\alpha(X, Y) = X^2 - \text{Tr}(\alpha)XY + N(\alpha)Y^2$  (qui vérifie  $Q_\alpha = Q_{\alpha^\sigma}$ ) est entière, primitive, irréductible, car  $Q_\alpha(X, Y) = N(X - \alpha Y)$  sur  $\mathbb{Z}^2$  et  $\alpha$  est irrationnel. Nous avons  $D_{Q_\alpha} = \text{Tr}(\alpha)^2 - 4N(\alpha) > 0$ , car  $\alpha$  est réel irrationnel. Il est immédiat que  $\alpha_{Q_\alpha}$  est égal à  $\alpha$  ou à  $\alpha^\sigma$ . Le résultat découle donc de (1).  $\square$

Nous dirons indifféremment qu'une forme quadratique binaire entière  $Q$ , qu'un réel irrationnel quadratique  $\alpha$ , un élément hyperbolique  $\gamma$  de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  est *réciproque* s'il est, respectivement, équivalent à  $-Q$ , dans la même orbite que son conjugué de Galois sous  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , conjugué à son inverse dans  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ .

**Proposition 4.3** *Soit  $Q$  une forme quadratique binaire entière primitive indéfinie de discriminant non carré. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $Q$  est réciproque ;
- (2)  $\alpha_Q$  est réciproque ;
- (3) la période du développement en fraction continue de  $\alpha_Q$  est un palindrome à permutation cyclique près ;
- (4)  $\pm\gamma_Q$  est réciproque ;
- (5)  $\gamma_Q$  est conjugué à une matrice symétrique.

Lorsque  $\alpha_Q$  est un entier algébrique, la condition (2) est équivalente à demander que l'ordre  $\mathbb{Z} + \alpha_Q \mathbb{Z}$  contienne une unité de norme  $-1$ .

Voir aussi [PR, Lon, Bur, Sar2] pour d'autres caractérisations.

**Démonstration.** L'équivalence entre (1), (2) et (4) découle de la proposition 4.1 et de sa preuve, le point fixe attractif de l'inverse d'un élément hyperbolique étant son point fixe répulsif. Pour l'équivalence entre (2) et (3), comme démontré par exemple dans [Per, §23], la partie périodique du développement en fraction continue de  $\alpha^\sigma$  est, à permutation cyclique près, obtenue en renversant l'ordre de la partie périodique du développement en fraction continue de  $\alpha$ ; de plus, deux nombres réels sont dans la même orbite par homographies entières si et seulement si les queues de leur développement en fraction continue coïncident. Pour l'équivalence entre (4) et (5), voir [Sar2].

Montrons la dernière assertion. D'une part, si  $\alpha$  est un réel quadratique irrationnel, si  $\gamma = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  envoie  $\alpha$  sur  $\alpha^\sigma$ , alors par l'équation (-20-), nous avons  $N(d + \alpha_Q c) = -1$ . Réciproquement, si  $\alpha$  est un entier quadratique irrationnel, supposons que  $\mathbb{Z} + \alpha \mathbb{Z}$  contienne un élément de norme  $-1$ . Soient  $a$  et  $c$  dans  $\mathbb{Z}$  tels que  $N(c\alpha - a) = -1$ , c'est-à-dire  $c^2 N(\alpha) - ac \mathrm{Tr}(\alpha) + a^2 = -1$ . En particulier,  $\alpha$  étant un entier quadratique,  $c$  divise  $a^2 + 1$ . Posons  $d = -a$  et  $b = -\frac{a^2+1}{c}$ . Nous avons alors  $ad - bc = 1$  et  $cN(\alpha) - a \mathrm{Tr}(\alpha) - b = 0$ , c'est-à-dire  $\alpha^\sigma(c\alpha + d) = a\alpha + b$ . Donc  $\alpha$  est réciproque.  $\square$

## 4.2 Comptage d'irrationnels quadratiques réels dans une orbite de sous-groupes de congruences du groupe modulaire

Nous donnons dans cette partie un théorème de comptage d'irrationnels quadratiques dans une orbite par homographies d'un sous-groupe d'indice fini du groupe modulaire (étendu par l'automorphisme de Galois).

**Théorème 4.4** *Soit  $\alpha_0$  un nombre réel, irrationnel quadratique sur  $\mathbb{Q}$ . Soient  $G$  un sous-groupe d'indice fini du groupe modulaire  $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , et  $\cdot$  son action par homographies sur  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Alors quand  $s$  tend vers  $+\infty$ ,*

$$\mathrm{Card}\{\alpha \in G \cdot \{\alpha_0, \alpha_0^\sigma\} \bmod q_G : h(\alpha) \leq s\} \sim \frac{12 q_G \log\left(\frac{|\mathrm{tr} \gamma_0| + \sqrt{\mathrm{tr} \gamma_0^2 - 4}}{2}\right)}{\pi^2 [\Gamma : G] n_0} s,$$

où  $q_G$  est le plus petit entier strictement positif  $q$  tel que l'homographie  $z \mapsto z+q$  appartienne à  $G$ ;  $\gamma_0$  est un élément non trivial de  $G$  fixant  $\alpha_0$ ; et  $n_0$  est l'indice de  $\gamma_0^{\mathbb{Z}}$  dans le stabilisateur de  $\{\alpha_0, \alpha_0^\sigma\}$  dans  $G$ .

Voici quelques valeurs possibles pour  $q_G$  et  $[\Gamma : G]$ . Soit  $p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ . Si  $G = \Gamma(p)$  est le noyau du morphisme  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  de réduction modulo  $p$  des coefficients, alors (voir par exemple [Kat, Theo. 5.5.4], [Shi, p. 22])

$$(q_G, [\Gamma : G]) = \begin{cases} (2, 6) & \text{si } p = 2, \\ \left(p, \frac{p^3}{2} \prod_{\substack{\mathfrak{p} \text{ premier, } \mathfrak{p}|p}} \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{p}^2}\right)\right) & \text{si } p > 2. \end{cases} \quad (-21-)$$

Et si  $G = \Gamma_0(p) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{p} \right\}$ , alors (voir [Shi, p. 24])

$$(q_G, [\Gamma : G]) = \left( 1, p \prod_{\mathfrak{p} \text{ premier, } \mathfrak{p}|p} \left( 1 + \frac{1}{\mathfrak{p}} \right) \right). \quad (-22-)$$

**Démonstration.** Remarquons tout d'abord que  $q_G$  existe, car  $z \mapsto z+1$  appartient à  $\Gamma$  et  $G$  est d'indice fini dans  $\Gamma$ . De même,  $\gamma_0$  existe et est hyperbolique (donc vérifie  $|\mathrm{tr} \gamma_0| > 2$ ), par la démonstration de la proposition 4.1 ou [PP2, Lem. 6.2], et  $n_0$  est donc bien défini.

Nous appliquons le corollaire 3.10 avec  $n = 2$ ,  $\mathcal{A}_\infty = q_G$  (tout segment de longueur euclidienne  $q_G$  dans la droite horizontale à hauteur 1 étant un domaine fondamental de cette droite sous l'action du stabilisateur  $G_\infty$  du point  $\infty$  dans  $G$ ), et

$$\mathrm{Vol}(G \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2) = [\Gamma : G] \mathrm{Vol}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2) = \frac{\pi [\Gamma : G]}{3}.$$

Rappelons la formule bien connue (voir par exemple [Bea, page 173])

$$\cosh \frac{\ell_0}{2} = \frac{|\mathrm{tr} \gamma_0|}{2} \quad (-23-)$$

de la distance de translation  $\ell_0$  d'un élément hyperbolique  $\gamma_0$  de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ .

Notons que  $h(\alpha) \leq t$  si et seulement si  $|\alpha - \alpha^\sigma| \geq \frac{2}{t}$ , et que  $G_\infty$  étant sans torsion, toutes les multiplicités valent 1. Le résultat découle donc du corollaire 3.10.  $\square$

Remarquons que si  $\alpha_0$  est réciproque, si  $\gamma_0$  est primitif, et si  $G = \Gamma$ , alors  $q_G = 1$  et  $n_0 = 2$ . Donc quand  $s$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\mathrm{Card}\{\alpha \in \Gamma \cdot \alpha_0 \pmod{\mathbb{Z}} : h(\alpha) \leq s\} \sim \frac{6 \log \left( \frac{|\mathrm{tr} \gamma_0| + \sqrt{\mathrm{tr} \gamma_0^2 - 4}}{2} \right)}{\pi^2} s.$$

Par exemple, le nombre d'or  $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$  est un point fixe de l'élément hyperbolique primitif symétrique  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  de  $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ . Donc, quand  $s$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\mathrm{Card}\{\alpha \in \Gamma \cdot \phi \pmod{\mathbb{Z}} : h(\alpha) \leq t\} \sim \frac{12 \log \phi}{\pi^2} t.$$

Pour conclure cette partie, montrons le corollaire 1.4 de l'introduction.

**Démonstration du corollaire 1.4.** Si  $\alpha_0$  est un entier quadratique irrationnel réel, la forme quadratique binaire  $Q_{\alpha_0}(X, Y) = X^2 - \mathrm{Tr}(\alpha_0)XY + N(\alpha_0)Y^2$  est, comme vu dans la preuve du lemme 4.2 (3), entière, primitive, irréductible, de discriminant  $D_Q$  égal au discriminant  $D = \mathrm{Tr}(\alpha_0)^2 - 4N(\alpha_0)$  de  $\mathcal{O} = \mathbb{Z} + \alpha_0\mathbb{Z}$ . Par la preuve de la proposition 4.1, la valeur absolue de la trace de l'élément hyperbolique primitif  $\gamma_0 = \pm \gamma_{Q_{\alpha_0}}$  de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  fixant  $\alpha_0$  est  $t_0$ , où, comme défini dans l'introduction,  $(t_0, u_0)$  est la solution fondamentale de l'équation de Pell-Fermat  $t^2 - Du^2 = 4$ . Par la dernière assertion de la proposition 4.3, l'indice  $n_0$  de  $\gamma_0^{\mathbb{Z}}$  dans le stabilisateur de  $\{\alpha_0, \alpha_0^\sigma\}$ , qui vaut 2 si  $\alpha_0$  est réciproque, et 1 sinon, est égal au  $n_0$  défini en introduction. Le résultat découle alors du théorème 4.4.  $\square$

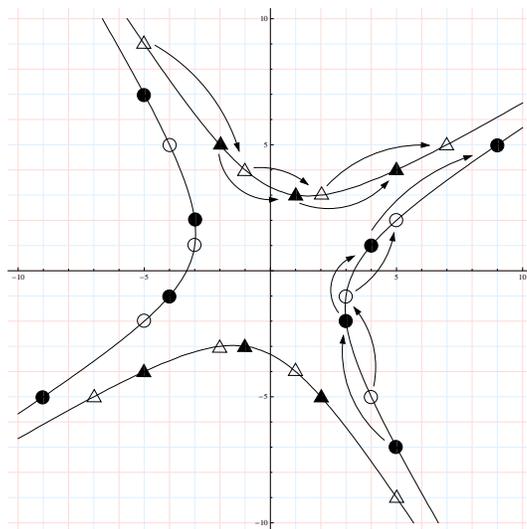
D'autres résultats de comptage peuvent être obtenus en variant le sous-groupe arithmétique. Par exemple, en renvoyant à [Kat, MR] pour toute information sur les constructions par les quaternions de groupes fuchsien, soient

- $A$  une algèbre de quaternion non ramifiée sur  $\mathbb{Q}$ , de norme  $N$  et de trace  $\text{Tr}$ , comme  $\left(\frac{p, -1}{\mathbb{Q}}\right)$  où  $p \in \mathbb{N} - \{0\}$  vérifie  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , de base standard  $1, i, j, k$  (voir par exemple [MR, page 88]),
- $\mathcal{O}$  un ordre de  $A$ , comme  $\mathcal{O} = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z} + j\mathbb{Z} + k\mathbb{Z}$  dans l'exemple ci-dessus,
- $\rho : A \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  un isomorphisme d'algèbres de quaternions sur  $\mathbb{R}$ , comme  $a+ib+cj+dk \mapsto \begin{pmatrix} a + b\sqrt{p} & c + d\sqrt{p} \\ -c + d\sqrt{p} & a - b\sqrt{p} \end{pmatrix}$  dans l'exemple ci-dessus (voir par exemple [Kat, page 114]).

Posons  $\Gamma(A, \mathcal{O}) = \rho(\{x \in \mathcal{O} : N(x) = 1\})/\{\pm \text{id}\}$ , qui est un réseau non uniforme de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Comme  $\rho$  préserve norme et trace, les éléments hyperboliques de  $\Gamma(A, \mathcal{O})$  sont les  $\pm\rho(x)$  pour les  $x \in \mathcal{O}$  tels que  $|\text{Tr } x| > 2$  et  $N(x) = 1$ , ceux paraboliques (ou l'identité) les  $\pm\rho(x)$  pour les  $x \in \mathcal{O}$  tels que  $|\text{Tr } x| = 2$  et  $N(x) = 1$ . Le corollaire 3.10 s'applique encore pour donner des résultats de comptage asymptotique de points fixes hyperboliques dans une orbite donnée de  $\Gamma(A, \mathcal{O})$ .

Dans notre exemple, si  $(x, y)$  est une solution de l'équation de Pell-Fermat  $x^2 - py^2 = 1$  et si  $(x', y')$  est une solution de l'équation de Pell-Fermat  $x'^2 - py'^2 = -1$  (qui existe car  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ), alors soient  $\alpha_p = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-y'\sqrt{p}}{x'} & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\gamma_0 = \pm \alpha_p \begin{pmatrix} x + y\sqrt{p} & 0 \\ 0 & x - y\sqrt{p} \end{pmatrix} \alpha_p^{-1}$  et  $G = \alpha_p \Gamma(A, \mathcal{O}) \alpha_p^{-1}$ . En appliquant le corollaire 3.10, nous obtenons un résultat de comptage d'éléments quadratiques sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ .

### 4.3 Comptage de représentations de formes quadratiques binaires entières



Soit  $\mathcal{P}$  le sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^2$  des éléments de coordonnées premières entre elles. Il est invariant par l'action linéaire de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Pour toute forme quadratique binaire entière indéfinie irréductible  $Q$ , notons

$$\Psi_Q(s) = \text{Card}(\text{SO}(Q, \mathbb{Z}) \setminus \{x \in \mathcal{P} : |Q(x)| \leq s\})$$

le nombre des représentations propres non équivalentes par  $Q$  des entiers de valeur absolue au plus  $s$ . Le dessin ci-dessus décrit, lorsque  $Q(X, Y) = X^2 - XY - Y^2$  et  $s = 11$  les orbites

de  $\mathrm{SO}(Q, \mathbb{Z})$  sur les hyperboles d'équation  $|Q(x)| = s$ .

Notons  $D'$  le quotient du discriminant  $D_Q$  de  $Q$  par le carré du plus grand diviseur commun des coefficients de  $Q$ . Notons  $(t_Q, u_Q)$  la solution fondamentale de l'équation de Pell-Fermat  $t^2 - D' u^2 = 4$ , et  $R_Q = \log \frac{t_Q + u_Q \sqrt{D'}}{2}$ . Le corollaire 1.3 de l'introduction découle du résultat suivant.

**Théorème 4.5** *Soit  $Q$  une forme quadratique binaire entière indéfinie de discriminant non carré. Alors quand  $s$  tend vers  $+\infty$ ,*

$$\Psi_Q(s) \sim \frac{12 R_Q}{\pi^2 \sqrt{D_Q}} s.$$

**Démonstration.** Puisque  $\Psi_{kQ}(s) = \Psi_Q(\frac{s}{k})$ ,  $D_{kQ} = k^2 D_Q$ , et  $R_Q = R_{kQ}$ , nous pouvons supposer que  $Q$  est primitive.

Nous appliquons le corollaire 3.9 avec  $n = 2$ ,  $k = 1$ ,  $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , une seule horoboule  $\mathcal{H}_\infty$  (de stabilisateur noté  $\Gamma_\infty$ ) constituée des points du demi-plan supérieur de coordonnée verticale au moins 1, et une seule géodésique  $C_0$  égale à l'axe de translation de  $\pm\gamma_Q$ . Il est immédiat que

$$\mathrm{Vol}(\Gamma_\infty \backslash \mathcal{H}_\infty) = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2) = \frac{\pi}{3}.$$

Notons  $i_Q$  l'indice de  $\mathrm{PSO}(Q, \mathbb{Z})$  dans  $\Gamma_0 = \mathrm{Stab}_\Gamma C_0$  (qui vaut 2 ou 1 suivant que  $Q$  est réciproque ou pas). Puisque  $\pm\gamma_Q$  engendrent  $\mathrm{PSO}(Q, \mathbb{Z})$ , et comme la trace de  $\gamma_Q$  est  $t_Q$ , nous avons, par la formule (-23-) et un petit calcul,

$$\mathrm{Vol}(\Gamma_0 \backslash C_0) = \frac{2 \operatorname{argcosh}(\frac{t_Q}{2})}{i_Q} = \frac{2R_Q}{i_Q}.$$

Le groupe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  agit à droite sur  $\mathbb{Z}^2$  par  $(\gamma, x) \mapsto \gamma^{-1}x$ , l'orbite de  $(1, 0)$  est exactement l'ensemble des couples  $(d, -c)$  d'entiers premiers entre eux, et le stabilisateur de  $(1, 0)$  est le sous-groupe unipotent triangulaire supérieur  $U$ . Par le lemme 4.2 (2),  $\Psi_Q(s)$  est donc le nombre de doubles classes dans  $U \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \mathrm{SO}(Q, \mathbb{Z})$  des éléments  $\gamma$  de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  tels que  $h(\gamma\alpha_Q) \leq \frac{2}{\sqrt{D_Q}} s$ . Puisque  $-\mathrm{id}$  appartient à  $\mathrm{SO}(Q, \mathbb{Z})$ , l'application canonique de  $U \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \mathrm{SO}(Q, \mathbb{Z})$  dans  $\Gamma_\infty \backslash \Gamma / \Gamma_0$  est surjective, chaque préimage est d'ordre  $i_Q$ , et la valeur de  $h(\gamma\alpha_Q)$  est constante sur chaque préimage. Comme déjà vu dans la preuve du corollaire 3.10, nous avons  $d(\mathcal{H}_\infty, \gamma C_0) = \log h(\gamma\alpha_Q)$ . Donc, en utilisant le corollaire 3.9,

$$\begin{aligned} \Psi_Q(s) &= i_Q \operatorname{Card} \left\{ [\gamma] \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma / \Gamma_0 : d(\mathcal{H}_\infty, \gamma C_0) \leq \log \left( \frac{2}{\sqrt{D_Q}} s \right) \right\} \\ &\sim i_Q \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}_0) \mathrm{Vol}(\Gamma_\infty \backslash \mathcal{H}_\infty) \mathrm{Vol}(\Gamma_0 \backslash C_0)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}_1) \mathrm{Vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)} \left( \frac{2}{\sqrt{D_Q}} s \right) = \frac{12 R_Q}{\pi^2 \sqrt{D_Q}} s. \quad \square \end{aligned}$$

**Remarque.** Soient  $p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$  et  $Q(X, Y) = AX^2 + BXY + CY^2$  une forme quadratique binaire entière indéfinie irréductible. Considérons les sous-groupes de congruence  $\Gamma(p)$  et  $\Gamma_0(p)$  définis dans la partie 4.2. En reprenant les notations de la preuve de la proposition 4.1, la preuve de [Sar1, Prop. 3.3] montre, lorsque  $Q$  est primitive, que  $\gamma_{Q,t,u}$  appartient à  $\Gamma(p)$  si et seulement si  $p$  divise  $u$ . De même, si  $A \equiv 1 \pmod{p}$ , alors  $\gamma_{Q,t,u}$  appartient à  $\Gamma_0(p)$  si et seulement si  $p$  divise  $u$ . Notons encore  $D'$  le quotient du discriminant  $D_Q$  de

$Q$  par le carré du plus grand diviseur commun des coefficients de  $Q$ . Notons  $(t_{Q,p}, u_{Q,p})$  la solution de l'équation de Pell-Fermat  $t^2 - D' u^2 = 4$  telle que  $t_{Q,p} > 0, u_{Q,p} > 0$ ,  $p$  divise  $u_{Q,p}$  et  $u_{Q,p}$  est minimale. Notons  $R_{Q,p} = \log \frac{t_{Q,p} + u_{Q,p} \sqrt{D'}}{2}$ ,  $\mathcal{P}(p)$  l'ensemble des  $(X, Y)$  dans  $\mathcal{P}$  tels que  $X \equiv 1 \pmod{p}$  et  $Y \equiv 0 \pmod{p}$ , qui est invariant par  $\Gamma(p)$ , et  $\mathcal{P}_0(p)$  l'ensemble des  $(X, Y)$  dans  $\mathcal{P}$  tels que  $Y \equiv 0 \pmod{p}$ , qui est invariant par  $\Gamma_0(p)$ . Notons

$$\Psi_{Q,p}(s) = \text{Card} \left( (\text{SO}(Q, \mathbb{Z}) \cap \Gamma(p)) \setminus \{(X, Y) \in \mathcal{P}(p) : |Q(X, Y)| \leq s\} \right)$$

et

$$\Psi_{Q,p,0}(s) = \text{Card} \left( (\text{SO}(Q, \mathbb{Z}) \cap \Gamma_0(p)) \setminus \{(X, Y) \in \mathcal{P}_0(p) : |Q(X, Y)| \leq s\} \right).$$

En appliquant le même raisonnement que dans la preuve du théorème 4.5 en remplaçant le groupe  $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  par  $\Gamma(p)$  et  $\Gamma_0(p)$  et en utilisant les formules (-21-) et (-22-), nous avons, quand  $s$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\Psi_{Q,p}(s) \sim \begin{cases} \frac{4 R_{Q,p}}{\pi^2 \sqrt{D_Q}} s & \text{si } p = 2, \\ \frac{24 R_{Q,p}}{\pi^2 p^2 \sqrt{D_Q}} \prod_{\mathfrak{p} \text{ premier, } \mathfrak{p}|p} \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{p}^2}\right)^{-1} s & \text{si } p > 2, \end{cases}$$

et, si  $A \equiv 1 \pmod{p}$ ,

$$\Psi_{Q,p,0}(s) \sim \frac{12 R_{Q,p}}{\pi^2 p \sqrt{D_Q}} \prod_{\mathfrak{p} \text{ premier, } \mathfrak{p}|p} \left(1 + \frac{1}{\mathfrak{p}}\right)^{-1} s.$$

#### 4.4 Comptage d'irrationnels quadratiques imaginaires dans une orbite de sous-groupes de congruences du groupe de Bianchi

Étant donné un corps de nombres quadratique imaginaire  $K$ , le but de cette partie est de donner un équivalent quand  $s$  tend vers  $+\infty$  du nombre modulo translations entières sur  $K$  d'irrationnels quadratiques sur  $K$ , appartenant à une orbite donnée par homographies et anti-homographies entières sur  $K$ , de complexité au plus  $s$ , où la complexité d'un irrationnel quadratique sur  $K$  est mesurée par l'inverse de sa distance à son conjugué de Galois.

Si  $K$  est un corps de nombres, rappelons que la fonction zéta (de Dedekind) de  $K$ , définie sur  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } s > 1\}$ , est

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s},$$

où  $\mathfrak{a}$  parcourt les idéaux non nuls de l'anneau  $\mathcal{O}$  des entiers de  $K$  et  $N(\mathfrak{a}) = \text{Card}(\mathcal{O}/\mathfrak{a})$ .

**Théorème 4.6** *Soit  $D$  un entier strictement négatif, congru à 0 ou à 1 modulo 4, sans facteur carré. Soit  $\mathcal{O}_D$  l'anneau des entiers du corps de nombres quadratique imaginaire  $K_D$  de discriminant  $D$ . Soit  $\alpha_0$  un nombre complexe, irrationnel quadratique sur  $K_D$ . Soient*

$G$  un sous-groupe d'indice fini de  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_D)$ ,  $\cdot$  son action par homographies sur  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , et  $\Lambda$  le réseau des  $\lambda \in \mathcal{O}_D$  tels que  $\pm \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ . Alors quand  $s$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\mathrm{Card}\{\alpha \in G \cdot \{\alpha_0, \alpha_0^\sigma\} \bmod \Lambda : h(\alpha) \leq s\} \sim \frac{4\pi^2 n_{G,\infty} \left| \log \left| \frac{\mathrm{tr} \gamma_0 + \sqrt{\mathrm{tr} \gamma_0^2 - 4}}{2} \right| \right|}{n_G n_{G,0} \omega_D |D| \zeta_{K_D}(2)} s^2,$$

où  $\omega_D$  est le nombre de racines de l'unité dans  $\mathcal{O}_D$ ;  $n_G$  est l'indice de  $G$  dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_D)$ ;  $n_{G,\infty}$  est l'indice de  $\Lambda$  dans le stabilisateur de  $[1 : 0]$  dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_D)$ ;  $\gamma_0$  est un élément de  $G$  fixant  $\alpha_0$  et de modules de valeurs propres différents de 1; et  $n_{G,0}$  est l'indice de  $\gamma_0^{\mathbb{Z}}$  dans le stabilisateur de  $\{\alpha_0, \alpha_0^\sigma\}$  dans  $G$ .

**Démonstration.** Le groupe  $G$ , d'indice fini dans le sous-groupe arithmétique  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_D)$  de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ , est un groupe discret de covolume fini d'isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ . Par une formule due à Humbert (voir par exemple les parties 8.8 and 9.6 de [EGM]), nous avons

$$\mathrm{Vol}(G \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3) = n_G \mathrm{Vol}(\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_D) \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3) = \frac{n_G}{4\pi^2} |D|^{3/2} \zeta_{K_D}(2).$$

Le point  $\infty$  de  $\partial_\infty \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  est le point fixe d'un élément parabolique (par exemple  $z \mapsto z + 1$ ) de  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_D)$ , donc d'un élément parabolique de son sous-groupe d'indice fini  $G$ . Notons  $G_\infty$  le stabilisateur de  $\infty$  dans  $G$ . Il contient  $\Lambda$  avec indice fini  $n'_{G,\infty}$ , et il est contenu dans le stabilisateur de  $\infty$  dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_D)$  avec indice fini  $n''_{G,\infty}$ . Nous avons donc  $n_{G,\infty} = n'_{G,\infty} n''_{G,\infty}$ . Un domaine fondamental pour l'action sur  $\mathbb{C}$  du stabilisateur de  $\infty$  dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_D)$  est le rectangle  $[0, 1] \times [0, \frac{\sqrt{|D|}}{2}]$  si  $D \neq -3, -4$ , le rectangle  $[0, 1] \times [0, \frac{1}{2}]$  si  $D = -4$ , et le parallélogramme de sommets  $0, \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}$  si  $D = -3$ , voir par exemple [EGM, page 318]. Notons que  $\omega_D$  vaut respectivement 2, 4, 6 dans ces trois cas. Donc l'aire d'un domaine fondamental mesurable pour l'action de  $G_\infty$  sur l'horosphère de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  formé des points de hauteur euclidienne 1 est

$$\mathcal{A}_\infty = \frac{n''_{G,\infty} \sqrt{|D|}}{\omega_D}.$$

Remarquons que  $\gamma_0$  existe bien, et est hyperbolique, voir par exemple [PP2, Lem. 6.2], et  $n_{G,0}$  est donc bien défini. Par un calcul classique, la distance de translation  $\ell_0$  d'un élément  $\gamma_0$  de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  vérifie

$$\ell_0 = 2 \left| \log \left| \frac{\mathrm{tr} \gamma_0 + \sqrt{\mathrm{tr} \gamma_0^2 - 4}}{2} \right| \right|,$$

qui ne dépend pas du choix de la racine carrée du nombre complexe  $\mathrm{tr} \gamma_0^2 - 4$ , ni du choix du représentant de  $\gamma_0$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  modulo  $\{\pm \mathrm{id}\}$ .

Nous pouvons donc appliquer le corollaire 3.10, avec  $n = 3$ ,  $G = G$  et  $t = \frac{s}{2}$ , en remarquant que nous avons  $\mathrm{Card}(G_\infty \cap \mathrm{Stab}_G \alpha) > 1$  seulement pour un nombre fini d'orbites modulo  $G_\infty$  d'éléments  $\alpha$  de  $G \cdot \{\alpha_0, \alpha_0^\sigma\}$ , et que pour passer d'un comptage modulo  $G_\infty$  à un comptage modulo  $\Lambda$ , il faut multiplier le premier nombre par  $n'_{G,\infty}$ .  $\square$

Voici un exemple d'application de ce théorème 4.6, dont le corollaire 1.5 de l'introduction découle (voir la remarque suivant la démonstration).

**Corollaire 4.7** Soit  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  le nombre d'or, soit  $\mathfrak{a}$  un idéal non nul de  $\mathcal{O}_D$ , et soit  $\Gamma_0(\mathfrak{a})$  le sous-groupe de congruence  $\left\{ \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_D) : c \in \mathfrak{a} \right\}$ . Alors quand  $s$  tend vers  $+\infty$ , le cardinal de  $\{\alpha \in \Gamma_0(\mathfrak{a}) \cdot \{\phi, \phi^\sigma\} \bmod \mathcal{O}_D : h(\alpha) \leq s\}$  est équivalent à

$$\frac{4\pi^2 k_{\mathfrak{a}} \log \phi}{|D| \zeta_{K_D}(2) N(\mathfrak{a}) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} \left(1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)} s^2,$$

où  $k_{\mathfrak{a}}$  est le plus petit entier  $k \in \mathbb{N} - \{0\}$  tel que le  $2k$ -ème terme de la suite de Fibonacci appartienne à  $\mathfrak{a}$ , si  $D \neq -4$  et si  $\phi^\sigma$  n'est pas dans la même orbite que  $\phi$  par  $\Gamma_0(\mathfrak{a})$ .

**Démonstration.** Appliquons le théorème 4.6 ci-dessus avec  $\alpha_0 = \phi$  et  $G = \Gamma_0(\mathfrak{a})$ . Alors  $\Lambda = \mathcal{O}_D$ ,  $n_G = N(\mathfrak{a}) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} \left(1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)$  par [New, page 117] (où comme d'habitude, le produit est pris sur les idéaux premiers divisant  $\mathfrak{a}$ ), et  $n_{G,\infty} = \frac{\omega_D}{2}$ .

Soit  $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  si  $D \neq -4$  et  $\gamma_1 = \begin{pmatrix} i & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  sinon. Alors  $\pm\gamma_1$  appartient à  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_D)$  et fixe  $\phi$  (donc  $\phi^\sigma$ ). Notons  $k'_{\mathfrak{a}}$  le plus petit entier strictement positif  $k$  tel que  $\pm\gamma_1^k$  appartienne à  $\Gamma_0(\mathfrak{a})$ , qui existe car  $\Gamma_0(\mathfrak{a})$  est d'indice fini dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_D)$ . Posons  $\gamma_0 = \pm\gamma_1^{k'_{\mathfrak{a}}}$ , qui appartient à  $\Gamma_0(\mathfrak{a})$ . Remarquons que la distance de translation de  $\gamma_0$  vaut  $k'_{\mathfrak{a}}$  fois celle de  $\pm\gamma_1$ , donc

$$\left| \log \left| \frac{\mathrm{tr} \gamma_0 + \sqrt{\mathrm{tr} \gamma_0^2 - 4}}{2} \right| \right| = \begin{cases} 2k'_{\mathfrak{a}} \log \phi & \text{si } D \neq -4 \\ k'_{\mathfrak{a}} \log \phi & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons  $c(\gamma)$  le coefficient 2-1 d'un élément  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . Si  $P = \begin{pmatrix} \phi & \phi^\sigma \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , alors  $\gamma_1 = P \begin{pmatrix} \phi^2 & 0 \\ 0 & \phi^{-2} \end{pmatrix} P^{-1}$  si  $D \neq -4$  et  $\gamma_1 = P \begin{pmatrix} i\phi & 0 \\ 0 & -i\phi^{-1} \end{pmatrix} P^{-1}$  sinon. Si  $D \neq -4$ , pour tout  $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ , nous avons donc  $c(\gamma_1^k) = \frac{\phi^{2k} - \phi^{-2k}}{\sqrt{5}}$ . Ce nombre est le  $2k$ -ème terme  $x_{2k}$  de la suite de Fibonacci  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définie par la relation de récurrence  $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ , de valeurs initiales  $x_0 = 0$  et  $x_1 = 1$ . L'entier  $k_{\mathfrak{a}}$  défini ci-dessus est donc égal à  $k'_{\mathfrak{a}}$  si  $D \neq -4$ .

Calculons maintenant  $n_{G,0}$ . Notons  $F_G$  (respectivement  $F_\Gamma$ ) le fixateur de  $\{\phi, \phi^\sigma\}$  dans  $\Gamma_0(\mathfrak{a})$  (respectivement  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_D)$ ). Soit  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  tel que  $\pm\gamma \in F_\Gamma$ . Montrons que  $\pm\gamma \in (\pm\gamma_1)^{\mathbb{Z}}$ . Puisque  $\gamma$  fixe  $\phi$  et  $\phi^\sigma$ , il existe  $\rho = \rho(\gamma) > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  tel que  $\gamma = P \begin{pmatrix} \rho e^{i\theta} & 0 \\ 0 & \rho^{-1} e^{-i\theta} \end{pmatrix} P^{-1}$ . Quitte à remplacer  $\gamma$  par son inverse, nous pouvons supposer que  $\rho \geq 1$ . Quitte à remplacer  $\gamma$  par  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-k} \gamma$  pour un  $k \in \mathbb{N}$ , nous pouvons supposer que  $1 \leq \rho \leq \phi^2$ . Quitte à remplacer  $\gamma$  par  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \gamma^{-1}$ , nous pouvons supposer que  $1 \leq \rho \leq \phi$ . Rappelons que la norme d'un élément de  $\mathcal{O}_D$ , égale au carré du module de cet élément, est entière. Donc si  $\rho \neq \phi$ , alors  $|c(\gamma)|^2 = \frac{\rho^2 + \rho^{-2} - 2\cos(2\theta)}{5} < 1$ , donc  $c(\gamma) = 0$  et par conséquent,  $\pm\gamma$ , qui fixe  $\infty, \phi, \phi^\sigma$ , vaut l'identité, ce qui conclut. Si  $\rho = \phi$ , alors  $|c(\gamma)|^2 \leq 1$ , avec égalité si et seulement si  $\theta = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$ . L'élément  $\gamma$  est alors égal à  $\pm \begin{pmatrix} i & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ , qui appartient à  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_D)$  si et seulement si  $D = -4$ , auquel cas  $\gamma = \pm\gamma_1$ , ce

qui conclut. Donc  $F_\Gamma$  est égal à  $(\pm\gamma_1)^{\mathbb{Z}}$ . Par définition de  $k'_a$ , nous en déduisons que  $F_G$  est égal à  $\gamma_0^{\mathbb{Z}}$ . L'indice  $n_{G,0}$  de  $\gamma_0^{\mathbb{Z}}$  dans le stabilisateur de  $\{\phi, \phi^\sigma\}$  dans  $\Gamma_0(\mathfrak{a})$  vaut donc 2 s'il existe un élément de  $\Gamma_0(\mathfrak{a})$  envoyant  $\phi$  sur  $\phi^\sigma$ , et 1 sinon.

Le résultat découle alors du théorème 4.6.  $\square$

En notant  $\delta_{\xi,\eta}$  le symbole de Kronecker (qui vaut 1 si  $\xi = \eta$  et 0 sinon), la démonstration ci-dessus montre que le corollaire 4.7 reste valable dans tous les cas, en divisant l'asymptotique par  $(2 - \delta_{D,-4})(1 + \delta_{\Gamma_0(\mathfrak{a})\cdot\phi, \Gamma_0(\mathfrak{a})\cdot\phi^\sigma})$  et en y remplaçant  $k_a$  par l'entier  $k'_a$  défini dans la démonstration ci-dessus. Puisque  $c(P \begin{pmatrix} i\phi & 0 \\ 0 & -i\phi^{-1} \end{pmatrix} P^{-1}) = i^n \frac{\phi^n - (\phi^\sigma)^n}{\sqrt{5}}$ , cet entier  $k'_a$  est le plus petit entier  $k$  tel que le  $k$ -ème terme de la suite de Fibonacci appartienne à  $\mathfrak{a}$ .

**Remarque.** Soient  $K$  un corps de nombres quadratique imaginaire,  $\mathfrak{a}$  un idéal non nul de l'anneau  $\mathcal{O}_K$  de ses entiers, et  $G$  un sous-groupe d'indice fini de  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_K)$ . Un irrationnel quadratique  $\alpha$  sur  $K$  est dit *G-réciproque* si  $\alpha$  et son conjugué de Galois  $\alpha^\sigma$  sur  $K$  sont dans la même orbite par homographies de  $G$ . Par exemple, les seuls éléments de  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_K)$  envoyant  $\phi$  sur  $\phi^\sigma$  sont les  $\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma_1^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ , où  $\gamma_1$  est défini dans la preuve ci-dessus. Si  $D \neq -4$ , le coefficient 2-1 de  $\alpha_k$  est, au signe près, le  $(2k+1)$ -ème terme de la suite de Fibonacci. Il est facile de vérifier que celui-ci vaut 2 si  $k = 1$ , et n'est pas congru à 0 modulo 3. Si  $D \neq -4$ , nous en déduisons donc que  $\phi$  est  $\Gamma_0(2)$ -réciproque, mais n'est pas  $\Gamma_0(3)$ -réciproque.

## A Sur le comptage des classes à droite d'un sous-groupe convexe-cocompact

Nous renvoyons par exemple à [BH] pour tout rappel concernant les espaces  $\mathrm{CAT}(-1)$  et leurs groupes d'isométries. Nous reprenons pour le théorème A.1 le cadre de travail de [PP2, Sect. 3], en modifiant quelques hypothèses, et en nous inspirant de [BHP, Theo. 1.1] et [HP, Theo. 3.4] pour les preuves. Si  $f$  et  $g$  sont deux applications d'un ensemble  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , alors nous noterons  $f \asymp g$  s'il existe une constante  $c \geq 1$  telle que  $\frac{1}{c} f(t) \leq g(t) \leq c f(t)$  pour tout  $t$  dans  $E$ .

Soient  $X$  un espace métrique géodésique  $\mathrm{CAT}(-1)$  propre, de bord à l'infini  $\partial_\infty X$ , et  $\Gamma$  un groupe discret d'isométries de  $X$ , d'exposant critique noté  $\delta = \delta_\Gamma$ . Rappelons que, pour tous les  $x, y$  fixés dans  $X$ , si  $f_{\Gamma, x, y}(t) = \mathrm{Card}\{\gamma \in \Gamma : d(x, \gamma y) \leq t\}$ , alors

$$\delta_\Gamma = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log f_{\Gamma, x, y}(t).$$

Notons  $\Lambda\Gamma \subset \partial_\infty X$  l'ensemble limite de  $\Gamma$ . Lorsque  $\Lambda\Gamma$  contient au moins deux points, notons  $\mathcal{C}\Gamma \subset X$  l'enveloppe convexe de  $\Lambda\Gamma$ . Soit  $\Gamma_0$  un sous-groupe *convexe-cocompact* (c'est-à-dire tel que  $\Lambda\Gamma_0$  contienne au moins deux points et  $\Gamma_0 \backslash \mathcal{C}\Gamma_0$  soit compact), d'indice infini dans  $\Gamma$ . Notons  $\delta_0 = \delta_{\Gamma_0} < \delta$  (voir par exemple [DOP, page 116]) et  $C_0 = \mathcal{C}\Gamma_0$ . Soient  $C_\infty$  un convexe fermé non vide de  $X$ ,  $\Gamma_\infty$  son stabilisateur dans  $\Gamma$  et  $\delta_\infty = \delta_{\Gamma_\infty}$ .

Supposons que  $\delta_\infty < \delta$ , que  $f_{\Gamma, x, y}(t) \asymp e^{\delta t}$ , que  $C_\infty$  ne contienne pas  $\mathcal{C}\Gamma$ , que  $\Gamma_\infty \backslash \partial C_\infty$  soit compact, et que l'intersection de  $C_\infty$  et de  $\gamma C_0$  soit non vide seulement pour un ensemble fini de classes  $[\gamma]$  dans  $\Gamma_\infty \backslash \Gamma/\Gamma_0$ . Pour toute classe  $[\gamma]$  dans  $\Gamma_\infty \backslash \Gamma/\Gamma_0$ , notons

$$D([\gamma]) = d(C_\infty, \gamma C_0),$$

ce qui ne dépend pas du représentant choisi.

Pour un exemple de tel quadruplet  $(X, \Gamma, \Gamma_0, C_\infty)$ , on pourra prendre pour  $X$  un espace symétrique de courbure sectionnelle au plus  $-1$ , pour  $\Gamma$  un sous-groupe discret d'isométries de  $X$  de covolume fini, pour  $\Gamma_0$  le stabilisateur dans  $\Gamma$  de l'axe de translation dans  $X$  d'un élément hyperbolique de  $\Gamma$ , et pour  $C_\infty$  un point de  $X$  ou une horoboule de  $X$  centrée en un point fixe parabolique de  $\Gamma$ .

**Théorème A.1** *Soient  $(X, \Gamma, \Gamma_0, C_\infty)$  comme ci-dessus, nous avons*

$$\text{Card}\{r \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma / \Gamma_0 : D(r) \leq t\} \asymp e^{\delta t} .$$

**Démonstration.** Soient  $x_\infty \in \partial C_\infty$ ,  $x_0 \in C_0$ ,  $F$  le sous-ensemble fini des  $[\gamma]$  dans  $\Gamma_\infty \backslash \Gamma / \Gamma_0$  tels que  $C_\infty \cap \gamma C_0$  soit non vide, et  $\mathcal{R} = \Gamma_\infty \backslash \Gamma / \Gamma_0 - F$ . Pour tout  $r$  dans  $\mathcal{R}$ , soit  $\gamma_r$  un représentant de la double classe  $r$  tel que

$$d(x_\infty, \gamma_r x_0) = \min_{\alpha \in \Gamma_\infty, \beta \in \Gamma_0} d(x_\infty, \alpha \gamma_r \beta x_0) .$$

Ce minimum existe, ainsi que  $\eta = \min_{r \in \mathcal{R}} d(x_\infty, \gamma_r x_0) > 0$ , car l'action de  $\Gamma$  sur l'espace propre  $X$  est proprement discontinue. Le lemme suivant est démontré dans [HP, §4] lorsque  $C_\infty = C_0$  est une horoboule, mais la démonstration est similaire.

**Lemme A.2** *Il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $r \in \mathcal{R}$ , si  $[u_r, v_r]$  est le segment perpendiculaire commun entre  $C_\infty$  et  $\gamma_r C_0$ , alors  $d(x_\infty, u_r) \leq c$  et  $d(\gamma_r x_0, v_r) \leq c$ .  $\square$*

Par l'inégalité triangulaire, il découle de ce lemme que

$$D(r) = d(C_\infty, \gamma_r C_0) = d(u_r, v_r) \geq d(x_\infty, \gamma_r x_0) - 2c \quad (-24-)$$

pour tout  $r \in \mathcal{R}$ . Puisque  $f_{\Gamma, x_\infty, x_0}(n) \asymp e^{\delta n}$ , il existe donc une constante  $c_+ > 0$  telle que

$$\text{Card}\{r \in \mathcal{R} : D(r) \leq n\} \leq c_+ e^{\delta n}$$

pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . Montrons pour conclure qu'il existe  $c_- > 0$  tel que

$$\text{Card}\{r \in \mathcal{R} : D(r) \leq n\} \geq c_- e^{\delta n}$$

pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . Soit  $\delta' > 0$  tel que  $\max\{\delta_\infty, \delta_0\} < \delta' < \delta$ . En particulier,

$$b_n = \text{Card}\{\alpha \in \Gamma_\infty : n \leq d(x_\infty, \alpha x_\infty) < n + 1\}$$

et

$$c_n = \text{Card}\{\beta \in \Gamma_0 : n \leq d(x_0, \beta x_0) < n + 1\}$$

sont des  $o(e^{\delta' n})$ , par définition d'un exposant critique.

Puisque  $f_{\Gamma, x_\infty, x_0}(n) \asymp e^{\delta n}$  et puisque  $F$  est fini, il existe donc, par un argument de série géométrique,  $A' > 0$  et  $T > 0$  tels que, pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$g(t) = \text{Card}\{(\alpha, \beta, r) \in \Gamma_\infty \times \Gamma_0 \times \mathcal{R} : t \leq d(x_\infty, \alpha \gamma_r \beta x_0) \leq t + T\} \geq A' e^{\delta t} .$$

Soit  $(\alpha, \beta, r) \in \Gamma_\infty \times \Gamma_0 \times \mathcal{R}$ . Par la formule (-24-), nous avons

$$\begin{aligned} d(x_\infty, \alpha\gamma_r\beta x_0) &\leq d(\alpha^{-1}x_\infty, x_\infty) + d(x_\infty, \gamma_r x_0) + d(x_0, \beta x_0) \\ &\leq d(x_\infty, \alpha x_\infty) + D(r) + d(x_0, \beta x_0) + 2c . \end{aligned}$$

Puisque  $C_\infty$  (contenant  $\alpha^{-1}x_\infty$  et  $u_r$ ) et  $C_0$  (contenant  $v_r$  et  $\gamma_r\beta x_0$ ) sont convexes disjoints et par un argument usuel de quasi-géodésiques dans l'espace CAT(-1)  $X$ , puis par le lemme A.2, il existe une constante  $c'' = c''(\eta)$  (ne dépendant que de  $\eta$ ) telle que

$$\begin{aligned} d(x_\infty, \alpha\gamma_r\beta x_0) &\geq d(\alpha^{-1}x_\infty, u_r) + d(u_r, v_r) + d(v_r, \gamma_r\beta x_0) - c'' \\ &\geq d(x_\infty, \alpha x_\infty) + D(r) + d(x_0, \beta x_0) - 2c - c'' . \end{aligned}$$

Posons

$$a_n = \text{Card}\{r \in \mathcal{R} : n \leq D(r) < n + 1\} \leq c_+ e^{\delta(n+1)} .$$

Si  $n + 2c + 3 \leq d(x_\infty, \alpha\gamma_r\beta x_0) \leq n + 2c + 3 + T$ , nous avons donc, en notant les parties entières  $k = E[D(r)]$ ,  $\ell = E[d(x_\infty, \alpha x_\infty)]$ ,  $m = E[d(x_0, \beta x_0)]$ ,

$$k + l + m \geq D(r) + d(x_\infty, \alpha x_\infty) + d(x_0, \beta x_0) - 3 \geq d(x_\infty, \alpha\gamma_r\beta x_0) - 2c - 3 \geq n$$

et

$$k + l + m \leq D(r) + d(x_\infty, \alpha x_\infty) + d(x_0, \beta x_0) \leq d(x_\infty, \alpha\gamma_r\beta x_0) + 2c + c'' \leq n + M ,$$

où  $M = E[4c + c'' + 3 + T] + 1$ . Donc par un argument de comptage, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons

$$g(n + 2c + 3) \leq \sum_{k+\ell+m=n}^{n+M} a_k b_\ell c_m .$$

Ceci entraîne que  $\sum_{k+\ell+m=n}^{n+M} a_k b_\ell c_m \geq A' e^{\delta(n+2c+3)}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par définition de  $a_n$  et sommation d'une série géométrique, le résultat découle alors du lemme élémentaire suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur.  $\square$

**Lemme A.3** *Pour tous  $M \in \mathbb{N}$  et  $A, \delta, \delta' > 0$  où  $\delta > \delta'$ , il existe  $B > 0$  tel que pour toutes les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $]0, +\infty[$  vérifiant, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , que  $b_n, c_n \leq A e^{\delta' n}$ ,  $a_n \leq A e^{\delta n}$  et  $\sum_{k+\ell+m=n}^{n+M} a_k b_\ell c_m \geq \frac{1}{A} e^{\delta n}$ , on ait  $\sum_{k=0}^n a_k \geq B e^{\delta n}$ .  $\square$*

## Références

- [Bab] M. Babillot. *On the mixing property for hyperbolic systems*. Israel J. Math. **129** (2002) 61–76.
- [Bea] A. F. Beardon. *The geometry of discrete groups*. Grad. Texts Math. **91**, Springer-Verlag, 1983.
- [BHP] K. Belabas, S. Hersonsky, and F. Paulin. *Counting horoballs and rational geodesics*. Bull. Lond. Math. Soc. **33** (2001), 606–612.
- [Bow] B. Bowditch. *Geometrical finiteness with variable negative curvature*. Duke Math. J. **77** (1995) 229–274.

- [BH] M. R. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*. Grund. math. Wiss. **319**, Springer Verlag, 1999.
- [BV] J. Buchmann and U. Vollmer. *Binary quadratic forms : an algorithmic approach*. Alg. Comput. Math. **20**, Springer Verlag, 2007.
- [Bue] D. A. Buell. *Binary quadratic forms*. Springer Verlag, 1989.
- [Bug] Y. Bugeaud. *Approximation by algebraic numbers*. Camb. Tracts Math. **160**, Cambridge Univ. Press, 2004.
- [Bur] E. Burger. *A tail of two palindromes*. Amer. Math. Month. **112** (2005) 311–321.
- [BK] P. Buser and H. Karcher. *Gromov’s almost flat manifolds*. Astérisque **81**, Soc. Math. France, 1981.
- [Coh] H. Cohn. *A second course in number theory*. Wiley, 1962, reprinted as *Advanced number theory*, Dover, 1980.
- [DOP] F. Dal’Bo, J.-P. Otal, and M. Peigné. *Séries de Poincaré des groupes géométriquement finis*. Israel J. Math. **118** (2000) 109–124.
- [EGM] J. Elstrodt, F. Grunewald, and J. Mennicke. *Groups acting on hyperbolic space : Harmonic analysis and number theory*. Springer Mono. Math., Springer Verlag, 1998.
- [EM] A. Eskin and C. McMullen. *Mixing, counting, and equidistribution in Lie groups*. Duke Math. J. **71** (1993) 181–209.
- [GP] A. Gorodnik and F. Paulin. *Counting orbits of integral points in families of affine homogeneous varieties and diagonal flows*. Prépublication [[arXiv :1110.5773](https://arxiv.org/abs/1110.5773)].
- [Herr] O. Herrmann. *Über die Verteilung der Längen geodätischer Lote in hyperbolischen Raumformen*. Math. Z. **79** (1962) 323–343.
- [Hers] S. Hersonsky. *Covolume estimates for discrete groups of hyperbolic isometries having parabolic elements*. Michigan Math. HelJv. **40** (1993) 467–475.
- [HP] S. Hersonsky and F. Paulin. *Counting orbit points in coverings of negatively curved manifolds and Hausdorff dimension of cusp excursions*. Erg. Theo. Dyn. Sys. **24** (2004) 1–22.
- [Hub] H. Huber. *Zur analytischen Theorie hyperbolischen Raumformen und Bewegungsgruppen*. Math. Ann. **138** (1959) 1–26.
- [Kat] S. Katok. *Fuchsian groups*. Univ. Chicago Press, 1992.
- [Lan] E. Landau. *Elementary number theory*. Chelsea Pub. 1958.
- [Lon] Y. Long. *Criterion for  $SL_2(\mathbb{Z})$ -matrix to be conjugate to its inverse*. Chin. Ann. Math. **23B** (2002) 455–460.
- [MR] C. Maclachlan and A. Reid. *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*. Grad. Texts in Math. **219**, Springer Verlag, 2003.
- [Mar] G. Margulis. *On some aspects of the theory of Anosov systems*. Mono. Math., Springer Verlag, 2004.
- [Nar] W. Narkiewicz. *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*. 2nd Ed., Springer Verlag, 1990.
- [New] M. Newman. *Integral matrices*. Academic Press, 1972.

- [OS] H. Oh and N. Shah. *Equidistribution and counting for orbits of geometrically finite hyperbolic groups*. Prépublication [arXiv :1001.2096].
- [Per] O. Perron. *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. B. G. Teubner, 1913.
- [PP1] J. Parkkonen and F. Paulin. *Equidistribution, counting and arithmetic applications*. Oberwolfach Report **29** (2010) 35–37.
- [PP2] J. Parkkonen and F. Paulin. *Spiraling spectra of geodesic lines in negatively curved manifolds*. Math. Z. **268** (2011) 101–142.
- [PP3] J. Parkkonen and F. Paulin. *On the representations of integers by indefinite binary Hermitian forms*. Bull. London Math. Soc. **43** (2011) 1048–1058.
- [PP4] J. Parkkonen and F. Paulin. *On the arithmetic and geometry of binary Hamiltonian forms*. Appendix by Vincent Emery. Prépublication [arXiv :1105.2290], à paraître dans Algebra & Number Theory.
- [PP5] J. Parkkonen and F. Paulin. *Skinning measure in negative curvature and equidistribution of equidistant submanifolds*. Prépublication Fév. 2012.
- [PP6] J. Parkkonen and F. Paulin. *Counting common perpendicular arcs in negative curvature*. En préparation.
- [PP7] J. Parkkonen and F. Paulin. *Counting geodesic arcs in negatively curved manifolds*. Survol en préparation.
- [PR] L. Polterovich and Z. Rudnick. *Stable mixing for cat maps and quasi-morphisms of the modular group*. Erg. Theo. Dyn. Sys. **24** (2004) 609–619.
- [Rob] T. Roblin. *Ergodicité et équidistribution en courbure négative*. Mémoire Soc. Math. France, **95** (2003).
- [Sam] P. Samuel. *Théorie algébrique des nombres*. Hermann, 1967.
- [Sar1] P. Sarnak. *Class numbers of indefinite binary quadratic forms*. J. Number Theo. **15** (1982) 229–247.
- [Sar2] P. Sarnak. *Reciprocal geodesics*. Clay Math. Proc. **7** (2007) 217–237.
- [Shi] G. Shimura. *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*. Princeton Univ. Press, 1971.
- [Wal] M. Waldschmidt. *Diophantine approximation on linear algebraic groups*. Grund. math. Wiss. Univ. **326**, Springer Verlag, 2000.

Department of Mathematics and Statistics, P.O. Box 35  
 40014 University of Jyväskylä, FINLAND  
*e-mail* : parkkone@maths.jyu.fi

DMA, UMR 8553 CNRS  
 Ecole Normale Supérieure  
 45 rue d’Ulm  
 75230 PARIS Cedex 05, FRANCE

and

Département de mathématique, UMR 8628 CNRS  
 Bât. 425, Université Paris-Sud 11  
 91405 ORSAY Cedex, FRANCE  
*e-mail* : frederic.paulin@math.u-psud.fr