Groupes géométriquement finis d'automorphismes d'arbres et approximation diophantienne dans les arbres.

Frédéric Paulin

Résumé

We introduce a class of non uniform tree lattices, analogous to the fundamental group of geometrically finite negatively curved manifolds. This class contains all the algebraic examples. Given such a tree lattice, we develop, as in [HP2] in the manifold case, a theory of diophantine approximation of points in the boundary of the tree by the parabolic fixed points. We compute approximation constants for some algebraic examples. All results are expressed intrinsically in terms of a natural geodesic flow for a graph of groups. [1]

1 Introduction

Soit T un arbre localement fini, ∂T son espace des bouts et $\mathrm{Aut}(T)$ le groupe localement compact des automorphismes de T. Dans [BL, chap. 4], H. Bass et A. Lubotzky donnent, pour certains tels arbres, de très nombreux exemples de sous-groupes discrets Γ de covolume fini dans $\mathrm{Aut}(T)$, les graphes $\Gamma\backslash T$ ayant différents types de croissance et d'espaces de bouts.

Nous introduisons (au chapitre 3) une nouvelle classe de sous-groupes discrets non élémentaires de $\mathrm{Aut}(T)$, que nous appelons *géométriquement finis*, vérifiant une des deux conditions ci-dessous.

Théorème 1.1 *Si Γ est un sous-groupe discret non élémentaire de $Aut(T)$, les assertions suivantes sont équivalentes:*

– *tout point limite de Γ dans ∂T est ou bien conique ou bien parabolique borné,*

– *le graphe de groupe quotient $\Gamma\backslash\backslash T_{\min}$ est réunion d'un graphe fini de groupes finis, et d'un nombre fini de rayons cuspidaux de groupes, où $T_{\min}$ est le sous-arbre Γ-invariant non vide minimal de T.*

Voir [Ser, BL] et le chapitre 2 pour des définitions. Ces groupes sont de covolume fini si $T = T_{\min}$. La première assertion, de nature dynamique, vient d'une analogie avec les groupes discrets d'isométries de variétés riemanniennes à courbure négative (voir par exemple [Bou]).

L'intérêt de cette classe est qu'elle contient tous les exemples algébriques. Plus précisément, soit $\hat{K}$ un corps valué localement compact non archimédien, et $\underline{G}$ un groupe algébrique connexe semi-simple sur $\hat{K}$ de $\hat{K}$-rang 1. Soit T l'arbre de Bruhat-Tits de $\underline{G}(\hat{K})$. Tout sous-groupe discret Γ de covolume fini de $\underline{G}(\hat{K})$ vérifie la seconde assertion,

1. **AMS codes:** 20E08, 11J61, 20G25, 11J06. **Keywords:** tree lattices, diophantine approximation, Hurwitz constant, Bruhat-Tits tree, graph of groups.

avec $T_{\min} = T$, par un résultat de A. Lubotzky [Lub] (suite aux travaux de J.-P. Serre, M. Raghunathan, ...).

Soit Γ un sous-groupe géométriquement fini de $\mathrm{Aut}(T)$ et ω_∞ un point limite parabolique borné. Supposons pour simplifier que T n'a pas de sous-arbre invariant propre. L'orbite $\Gamma\omega_\infty$ est alors dense dans ∂T. Nous nous intéressons dans cet article aux propriétés d'approximation diophantienne des points de $\partial T - \{\omega_\infty\}$ par des points de $\Gamma\omega_\infty$. Nos résultats sont inspirés d'une série de travaux avec S. Hersonsky [HP2, HP3, HP4]. Par exemple, lorsque T est l'arbre de Bruhat-Tits de $\underline{SL_2}$ sur le corps local $k((\frac{1}{t}))$, pour un corps fini k, et $\Gamma = SL_2(k[t])$, il s'agit alors d'étudier les propriétés d'approximation diophantienne des séries formelles de Laurent dans $k((\frac{1}{t}))$ par les fractions rationnelles P/Q dans $k(t)$, voir par exemple [Las, Sch, Pau, BP].

Nous montrons (au chapitre 3.2) qu'il existe dans T une unique horoboule ouverte maximale HB_∞ centrée en ω_∞ dont les images par Γ sont deux à deux disjointes. La complexité d'un point $\gamma\omega_\infty$ de $\Gamma\omega_\infty - \{\omega_\infty\}$ est alors mesurée par la distance $D(\gamma\omega_\infty) = d_T(HB_\infty, \gamma HB_\infty)$. Dans l'exemple précédent, $D(P/Q) = 2\deg Q$ (voir le paragraphe 4.5).

Une distance naturelle sur $\partial T - \{\omega_\infty\}$ entre deux points ω, ω' suffisamment proches est donnée par $d_{\omega_\infty}(\omega, \omega') = e^{-d_T(p,q)}$ où p est le point d'intersection de ∂HB_∞ et de la géodésique $]\omega_\infty, \omega[$, et q le point de bifurcation des deux géodésiques $]\omega_\infty, \omega[$ et $]\omega_\infty, \omega'[$. Dans l'exemple précédent, d_{ω_∞} est la distance ultramétrique usuelle sur $k((\frac{1}{t}))$ (voir le paragraphe 4.5).

Nous montrons (voir le corollaire 5.4) un théorème à la Dirichlet suivant.

Théorème 1.2 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout ξ dans $\partial T - \Gamma\omega_\infty$, il existe une infinité de points r dans $\Gamma\omega_\infty$ avec $d_{\omega_\infty}(\xi, r) \leq Ce^{-D(r)}$.*

Nous appelons constante de Hurwitz de Γ la meilleure telle constante C. Nous montrons comment la calculer à partir du graphe de groupes quotient $\Gamma\backslash\backslash T$. Par exemple, soit $\underline{G}$ un groupe algébrique simple sur k, simplement connexe et déployé, de rang 1, et T l'arbre de Bruhat-Tits de $\underline{G}$ sur le corps local $k((\frac{1}{t}))$. Nous montrons que la constante de Hurwitz pour le réseau $\underline{G}(k[t])$ est $1/e$ et celle pour le sous-groupe de congruence $\mathrm{Ker}\,(PGL_2(k[t]) \to PGL_2(k[t]/t^n k[t]))$ est e^{n-1}. Nous calculons aussi l'analogue du spectre de Lagrange pour ces exemples.

Nous exprimons tous nos résultats de manière intrinsèque en terme du graphe de groupes quotient $\Gamma\backslash\backslash T$. En particulier, nous donnons (au chapitre 4.1) une description intrinsèque pour un graphe de groupes du flot géodésique sur son arbre de Bass-Serre. Cette description est inspirée par, et ultérieure à, la référence [BP], où nous donnons, sur certaines hypothèses sur Γ, un codage markovien de ce flot géodésique.

Remerciements. Je remercie le rapporteur pour ses nombreuses remarques. Sur sa suggestion, un glossaire final a été ajouté.

2 Notations et rappels sur les actions de groupes sur les arbres

2.1 Graphes et graphes de groupes [Ser, BL]

Si X est un graphe, nous noterons VX l'ensemble de ses sommets, EX l'ensemble de ses arêtes, $\overline{e}$ l'arête opposée de e, et $o(e)$ le sommet origine et $t(e)$ le sommet terminal d'une arête e. Chaque arête e est munie d'une longueur $\ell(e) = \ell(\overline{e}) > 0$. Nous supposerons toujours que $\inf_{e \in EX} \ell(e) > 0$. Nous identifions un graphe connexe et sa réalisation géométrique, qui est munie de l'unique distance d_X maximale rendant chaque moitié d'arête e isométrique à $[0, \frac{\ell(e)}{2}]$. Nous identifions tout chemin d'arêtes dans le graphe X avec sa réalisation géométrique (paramétrée par longueur d'arc).

Si X est un graphe, nous noterons $\mathrm{Aut}(X)$ le groupe de ses automorphismes sans inversion préservant la longueur des arêtes (donc la distance sur chaque composante connexe de X).

Soit X un graphe connexe localement fini. Muni de la topologie compacte ouverte, $\mathrm{Aut}(X)$ est un groupe localement compact, et un sous-groupe Γ est discret si et seulement si tout fixateur de sommet est fini. On note ∂X l'espace topologique compact des bouts de X, et $\overline{X} = X \cup \partial X$ la compactification de X par ses bouts.

Si T est un arbre, l'*espace des géodésiques* de T est l'ensemble $\mathcal{G}T$ des isométries f de $\mathbb{R}$ dans T, telles que $f(0)$ est un sommet de T. Si T est localement fini, l'ensemble $\mathcal{G}T$ est muni de la topologie compacte-ouverte. Notons $\widetilde{\sigma} : \mathcal{G}T \to \mathcal{G}T$ la bijection (que nous appellerons *flot géodésique*) qui à f associe l'application $t \mapsto f(t + d_T(f(0), x_1))$ avec x_1 le sommet de T suivant $f(0)$ sur l'image de f. Le groupe $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathcal{G}T$ par translation à la source $(n, f) \mapsto \widetilde{\sigma}^{\circ n}(f)$. Le groupe $\mathrm{Aut}(T)$ agit sur $\mathcal{G}T$ par composition au but $(\gamma, f) \mapsto \{x \mapsto \gamma f(x)\}$. Ces deux actions commutent. L'application $\widetilde{\tau} : f \mapsto \{t \mapsto f(-t)\}$ est une involution de $\mathcal{G}T$, appelée l'*application de renversement du temps*. Elle commute avec l'action de $\mathrm{Aut}(T)$.

Rappelons qu'un *graphe de groupes* est la donnée, notée (X, G_*), des objets suivants :
— un graphe X (supposé connexe dans la suite),
— pour tout sommet x de X, un groupe G_x,
— pour toute arête e de X, un groupe G_e tel que $G_e = G_{\overline{e}}$,
— pour toute arête e de X, un morphisme injectif de groupes $\rho_e : G_e \to G_{t(e)}$.

Si Y est un sous-graphe de X, alors nous notons (Y, G_*) le graphe de groupes induit par (X, G_*).

Par exemple, si Γ est un groupe d'automorphismes d'un arbre T, alors le graphe quotient $X = \Gamma\backslash T$ est muni d'une structure de graphe de groupes, appelée *graphe de groupes quotient* et notée $\Gamma\backslash\backslash T$, de la façon suivante. On fixe un relevé $\widetilde{v}$ dans T de chaque sommet v de X, un relevé $\widetilde{e}$ dans T de chaque arête e de X, de sorte que $\widetilde{\overline{e}} = \overline{\widetilde{e}}$, et un élément g_e de Γ tel que $g_e\widetilde{t(e)} = t(\widetilde{e})$. On définit alors G_e et G_v comme les fixateurs dans Γ de $\widetilde{e}$ et $\widetilde{v}$, et $\rho_e : G_e \to G_{t(e)}$ comme la restriction à G_e de la conjugaison par g_e^{-1}. À isomorphisme de graphes de groupes près (au sens évident), le graphe de groupes quotient $\Gamma\backslash\backslash T$ ne dépend pas du choix des $\widetilde{e}$, $\widetilde{v}$ et g_e (voir [Ser, chap. 5] pour tout complément).

Si A est un sous-arbre maximal de X, nous renvoyons à [Ser, chap. 5] pour la définition du *groupe fondamental* $\Gamma = \pi_1(X, G_*; A)$ de (X, G_*) et du *revêtement universel* de (X, G_*) correspondant à A : l'objet T est un arbre, muni d'une action de Γ, tel que les graphes de groupes $\Gamma\backslash\backslash X$ et (X, G_*) sont isomorphes.

Soit (X, G_*) un *rayon de groupes*, i.e. un graphe de groupes avec X un rayon, de suite des arêtes consécutives $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que nous supposerons toujours orientées vers le bout de X. Nous dirons que (X, G_*) est un *rayon cuspidal* si, pour tout n dans $\mathbb{N} - \{0\}$, le morphisme $\rho_{\overline{e_n}} : G_{e_n} \to G_{o(e_n)}$ est surjectif (donc un isomorphisme). Cette condition se lit sur le graphe indexé (X, i) associé à (X, G_*) (voir par exemple [BL, sect. 2.5]).

2.2 Distance visuelle, fonction de Buseman et distance de Hamenstädt [Bou, HP1]

Soit T un arbre localement fini. Si x est un point de T et si ω, ω' sont deux bouts de T, alors les rayons géodésiques issus de x et convergeant vers ω, ω' coïncident sur un segment de longueur notée $(\omega, \omega')_x$. La *distance visuelle vue de* x (voir par exemple [Bou]) entre ω et ω' est

$$d_x(\omega, \omega') = e^{-(\omega,\omega')_x}.$$

Cette distance induit sur l'ensemble des bouts de T la topologie des bouts. (Lorsque T est un arbre régulier de degré $q+1 \geq 3$ et de longueurs d'arêtes 1, il peut être préférable (à cause des exemples classiques) de prendre plutôt $d_x(\omega, \omega') = q^{-(\omega,\omega')_x}$.)

Soit d_T la distance de T, et ω un bout de T. On appelle *fonction de Buseman* en ω l'application $\beta_\omega : T \times T \to \mathbb{R}$ définie par

$$\beta_\omega(x, y) = \lim_{t \to +\infty} d_T(y, c(t)) - d_T(x, c(t))$$

avec $c : [0, +\infty[\to T$ un rayon géodésique convergeant vers ω. Elle ne dépend pas du choix de c, et vérifie la relation de cocycle $\beta_\omega(x, y) + \beta_\omega(y, z) = \beta_\omega(x, z)$. On appelle *horosphère centrée* en ω toute ligne de niveau d'une fonction $x \mapsto \beta_\omega(x, y_0)$ pour n'importe quel y_0 dans T. On appelle *horoboule (ouverte) (fermée) centrée* en ω toute image réciproque d'un intervalle minoré non majoré (ouvert) (fermé) de $\mathbb{R}$ par une fonction $x \mapsto \beta_\omega(x, y_0)$ pour un y_0 dans T.

Soit ω un bout de T et H une horosphère centrée en ω. Pour tous points u, v du bord de T distincts de ω, il existe un unique paramétrage isométrique $c_u : \mathbb{R} \to T$, respectivement $c_v : \mathbb{R} \to T$, de la géodésique entre ω et u, respectivement ω et v, tel que $c_u(0)$ et $c_v(0)$ appartiennent à H, et $c_u(t)$ et $c_v(t)$ convergent respectivement vers u et v quand t tend vers $+\infty$. Puisque T est un arbre, il existe un unique réel $t_0 = (u, v)_{\omega,H}$ tel que c_u et c_v coïncident exactement sur $]-\infty, t_0]$. On appelle alors *distance de Hamenstädt* sur $\partial T - \{\omega\}$ entre u et v la quantité

$$d_{\omega,H}(u, v) = e^{-(u,v)_{\omega,H}}.$$

Il est démontré dans [HP1, Appendix] que $d_{\omega,H}$ est une distance sur $\partial T - \{\omega\}$. Il est facile de voir que c'est une distance ultramétrique induisant la topologie des bouts sur $\partial T - \{\omega\}$, et que, en posant $\beta_\omega(H, H') = \beta_\omega(x, x')$ pour toutes les horosphères H, H' centrées en ω, et pour tout x dans H et x' dans H', alors

$$d_{\omega,H'} = e^{-\beta_\omega(H',H)} d_{\omega,H}.$$

2.3 Ensemble limite de groupes discrets d'automorphismes [Bou, Rob]

Soit T un arbre localement fini, et Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(T)$. Nous supposerons dans la suite que Γ est *non élémentaire*, i.e. qu'il ne fixe aucun point de T (ou de manière équivalente qu'il est infini), ni aucun bout ou paire de bouts de T.

L'*ensemble limite* de Γ est l'ensemble, noté Λ_Γ, des points d'accumulations de n'importe quelle orbite de Γ dans T. C'est l'unique fermé non vide invariant minimal de ∂T. Il est homéomorphe à un ensemble de Cantor.

L'*enveloppe convexe* de Γ, notée $C\Lambda_\Gamma$, est le plus petit connexe de T dont l'adhérence dans $\overline{T}$ contient Λ_Γ. C'est un arbre localement fini, sans sommet terminal, invariant par Γ, dont la compactification par les bouts s'identifie naturellement avec son adhérence dans $\overline{T}$ (en particulier, $\partial C\Lambda_\Gamma = \Lambda_\Gamma$). C'est le plus petit sous-arbre de T non vide invariant par Γ.

Un point ω de Λ_Γ est dit *point limite conique* s'il existe une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans Γ telle que, pour un (tout) point x de T et un (tout) rayon géodésique c dans T convergeant vers ω, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad d_T(\gamma_n x, c) \leq C.$$

Un point ω de Λ_Γ est dit *point limite horosphérique* s'il existe une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans Γ tel que pour un (tout) point x de T, la suite $\gamma_n x$ rentre dans toute horoboule centrée en ω, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \beta_\omega(\gamma_n x, x) = +\infty\ .$$

Il est immédiat que tout point limite conique est un point limite horosphérique. Il existe des groupes discrets (non de type fini) d'automorphismes d'arbres réguliers ayant un point limite horosphérique non conique. Par exemple, soit X le graphe planaire $(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})\cup(\mathbb{Z}\times\mathbb{R})$. Soit c un chemin d'arêtes dans X qui spirale vers l'infini (par exemple celui qui part de l'origine et avance d'une unité, fait un quart de tour à gauche et avance de deux unites, fait un quart de tour à gauche et avance de trois unités, etc). Soit T un revêtement universel du graphe X (qui est un arbre régulier de degré 4) et Γ son groupe de revêtement. Alors Γ est un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(T)$, et le point à l'infini de tout relevé de c est un point limite horosphérique non conique.

Un point ω de Λ_Γ est appelé *point parabolique borné* si son fixateur Γ_ω dans Γ agit proprement discontinuement avec quotient compact sur $\Lambda_\Gamma - \{\omega\}$.

Soit (X, G_*) un graphe (connexe) de groupes, et (pour un choix indifférent de sous-arbre maximal) Γ son groupe fondamental, et T son revêtement universel. Supposons Γ non élémentaire. On appelle *cœur convexe* de (X, G_*), et on note $\mathrm{Conv}(X, G_*)$, le graphe de groupes $\Gamma\backslash\backslash C\Lambda_\Gamma$. Le graphe de groupes (X, G_*) est obtenu à partir de $\mathrm{Conv}(X, G_*)$ en recollant en chaque sommet x de $\mathrm{Conv}(X, G_*)$ des arbres de groupes (éventuellement aucun), dont les groupes des arêtes et les groupes des sommets sont des sous-groupes de G_x, le morphisme d'un groupe d'une arête dans le groupe de son extrémité la plus proche de x étant l'inclusion. (En effet, si $T_{\min} = C\Lambda_\Gamma$ est le sous-arbre invariant non vide minimal de T, alors Γ permute les composantes connexes c de $T - T_{\min}$, l'adhérence de c ne rencontrant $T_{\min}$ qu'en un seul point x_c, le stabilisateur de c étant contenu dans le fixateur de x_c.) Le graphe de groupes (X, G_*) est dit *minimal* s'il est égal à son cœur convexe, ou, de manière équivalente, si l'action de Γ sur T est *minimale* (i.e. sans sous-arbre invariant non vide propre).

3 Groupes d'automorphismes géométriquement finis

3.1 Groupes discrets paraboliques

Soit T un arbre localement fini. Rappelons le corollaire 3, page 90 de [Ser] qui dit qu'un groupe de type fini d'automorphismes d'un arbre, dont tous les éléments sont *elliptiques* (i.e. ont au moins un point fixe dans l'arbre), admet un point fixe global. Les conditions suivantes sur un sous-groupe discret P de $\mathrm{Aut}(T)$ sont donc équivalentes :

– P est infini et tous ses éléments sont elliptiques,

– P est infini et *localement elliptique* (i.e. tout sous-groupe de type fini fixe un point de T),

– P est infini et *localement fini* (i.e. tout sous-groupe de type fini est fini).

Nous dirons qu'un sous-groupe discret P de $\mathrm{Aut}(T)$ est *parabolique* s'il vérifie l'une de ces conditions.

Il est montré dans [BL, page 49] que P fixe alors un unique bout ω de T (et ne fixe aucun point de T). Le groupe P préserve toute horosphère centrée en ω. Il n'est pas de type fini. Tout sous-groupe de type fini de P fixe un rayon géodésique convergeant vers ω.

Remarque. Si ω est le point fixe de P, alors P agit par isométries sur $\partial T - \{\omega\}$ pour la distance de Hamenstädt $d_{\omega,H}$ définie au paragraphe 2.2.

Proposition 3.1 *Soit Γ un sous-groupe discret de Aut(T). Soit ω un point parabolique borné de Λ_Γ.*

(i) Le fixateur Γ_ω est un sous-groupe discret parabolique de Aut(T).

(ii) De plus, tout rayon géodésique dans T convergeant vers ω admet un sous-rayon qui s'injecte par passage au quotient dans $\Gamma\backslash C\Lambda_\Gamma$ en un voisinage d'un bout b_ω de $\Gamma\backslash C\Lambda_\Gamma$, ce voisinage étant (muni de la structure de graphe de groupes induite par $\Gamma\backslash\backslash C\Lambda_\Gamma$) un rayon cuspidal.

Preuve. Quitte à remplacer T par son sous-arbre $C\Lambda_\Gamma$, nous pouvons supposer que $C\Lambda_\Gamma = T$. En particulier, $\Lambda_\Gamma = \partial T$ et T est sans sommet terminal.

Montrons d'abord l'assertion (i). Comme ∂T est un espace de Cantor, l'hypothèse de compacité sur $\Gamma_\omega\backslash(\partial T - \{\omega\})$ entraîne que Γ_ω est infini. S'il existe un élément non elliptique γ dans Γ_ω, quitte à remplacer γ par γ^{-1}, alors γ a une dynamique Nord-Sud sur ∂T, de point fixe répulsif ω. Si V est un petit voisinage compact du point fixe attractif, alors $\gamma^n V$ est contenu dans V pour n assez grand, ce qui contredit le fait que Γ_ω agit proprement discontinûment sur $\partial T - \{\omega\}$.

Montrons maintenant l'assertion (ii). Notons $c = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un rayon géodésique convergeant vers ω et $x_n = t(e_n) = o(e_{n+1})$. Soit Γ_n le fixateur de x_n, et Γ_{e_n} celui de e_n. Il suffit de montrer que, pour tout n assez grand,

1. d'une part $\Gamma_n \cap \Gamma_\omega$ agit transitivement sur les arêtes issues de x_n ne pointant pas vers ω,

2. d'autre part Γ_n fixe ω.

Montrons la première assertion par l'absurde. Il existe sinon une suite d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ et une arête e'_k issue de x_{n_k}, différente de e_{n_k+1}, qui n'est envoyé sur l'arête $\overline{e_{n_k}}$ par aucun élément de $\Gamma_{n_k} \cap \Gamma_\omega$. Comme T n'a pas de sommet terminal, il existe un rayon géodésique dans T d'arête initiale e'_k. Soit ω_k le bout de T extrémité de ce rayon. Alors d'après (i), pour tout γ dans Γ_ω, l'image par γ de la géodésique entre ω_k et ω (qui existe car $\omega_k \neq \omega$) ne rencontre le rayon géodésique c qu'au plus en son sous-rayon $[x_{n_k}, \omega[$. Donc

$$d_{x_0}(\omega, \Gamma_\omega \omega_k) \leq e^{-d_T(x_0, x_{n_k})}$$

qui tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Donc pour tout compact K de $\partial T - \{\omega\}$, si k est assez grand, aucun point de l'orbite $\Gamma_\omega\, \omega_k$ n'appartient à K. Ceci contredit le fait que $\Gamma_\omega \backslash (\partial T - \{\omega\})$ est compact.

Montrons aussi par l'absurde la seconde assertion. Sinon, il existe une sous-suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $A_k = \Gamma_{n_k} - \Gamma_{e_{n_k+1}}$ est non vide. D'après la première assertion, quitte à supprimer les premiers termes de la suite, nous pouvons supposer que pour tout $n \geq n_0$, le groupe $\Gamma_n \cap \Gamma_\omega$ agit transitivement sur les arêtes issues de x_n et différentes de e_{n+1}. En particulier, pour $k \geq 1$, il existe au moins un élément de A_k qui envoie e_{n_k+1} sur $\overline{e_{n_k}}$. Choisissons g_k un tel élément, qui de plus envoie un segment $[x_{n_k}, x_{n_k+N_k}]$ de longueur maximale sur un segment de $[x_{n_k}, x_{n_0}]$. Comme ∂T est sans point isolé, nous pouvons supprimer les sommets de T de valence 2. Il part alors au moins trois arêtes de x_n, et par la première assertion, pour n assez grand, le groupe $\Gamma_n \cap \Gamma_\omega$ est un sous-groupe propre de $\Gamma_{n+1} \cap \Gamma_\omega$. Donc le cardinal de Γ_n tend vers $+\infty$ quand $n \to \infty$. Comme g_k conjugue le stabilisateur de $x_{n_k+N_k}$ au stabilisateur de $x_{n_k-N_k}$, et puisque les stabilisateurs des sommets sont finis, on en déduit que $n_k - N_k$ tend vers ∞. En particulier, $n_k - N_k \geq n_0 + 1$ pour k assez grand. Fixons un tel k. Comme $\Gamma_{n_k-N_k} \cap \Gamma_\omega$ agit transitivement sur les arêtes issues de $x_{n_k-N_k}$ et différentes de $e_{n_k-N_k+1}$, et puisque

$$g_k e_{n_k+N_k+1} \neq g_k \overline{e_{n_k+N_k}} = e_{n_k-N_k+1},$$

on en déduit qu'il existe g'_k dans $\Gamma_{n_k-N_k} \cap \Gamma_\omega$ qui envoie $g_k e_{n_k+N_k+1}$ sur $\overline{e_{n_k-N_k}}$. Donc $g'_k g_k$ envoie le segment $[x_{n_k}, x_{n_k+N_k+1}]$ sur un segment de $[x_{n_k}, x_{n_0}]$. Or $g'_k g_k$ appartient à A_k, car $\Gamma_n \cap \Gamma_\omega \subset \Gamma_{n+1} \cap \Gamma_\omega$. Ceci contredit la propriété de maximalité de g_k.

Ceci termine la preuve de la proposition 3.1. $\square$

3.2 Système maximal d'horosphères et bouts cuspidaux

Soit T un arbre localement fini, Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(T)$, et ω un point parabolique borné, de fixateur Γ_ω. Soit $\pi : T \to \Gamma\backslash T$ la projection canonique, et b_ω le bout de $\Gamma\backslash T$ associé à ω (voir proposition 3.1 (ii)).

Nous dirons qu'une horoboule est *homogène* si le stabilisateur de son point à l'infini agit transitivement sur l'intersection avec $C\Lambda_\Gamma$ de l'horosphère bord de l'horoboule.

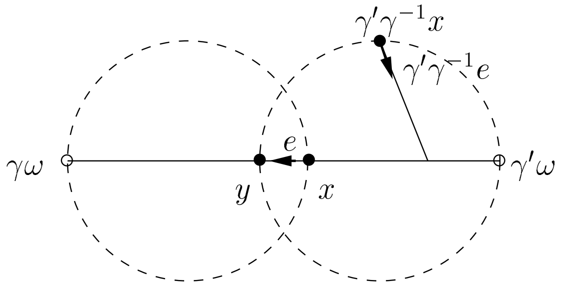
Soit (X, G_*) un graphe de groupes. Un *rayon cuspidal maximal* (Y, G_*) dans (X, G_*) est un sous-graphe Y de X muni de sa structure de graphe de groupes induite, tel que

1. (Y, G_*) est un rayon cuspidal,
2. Y privé de son origine est un ouvert de X,
3. Y est maximal (pour l'inclusion).

Proposition 3.2 *Il existe une unique famille Γ-équivariante d'horoboules ouvertes homogènes disjointes maximales centrées sur les points de l'orbite $\Gamma\omega$ de ω. De plus, l'intersection avec $C\Lambda_\Gamma$ de la réunion de cette famille est la préimage par π du rayon cuspidal maximal de bout b_ω dans $\Gamma\backslash\backslash C\Lambda_\Gamma$.*

Preuve. D'après la proposition 3.1 (ii), il existe un rayon géodésique c dans T convergeant vers ω qui s'injecte par passage au quotient dans $\Gamma\backslash C\Lambda_\Gamma$ en un rayon cuspidal maximal de $\Gamma\backslash\backslash C\Lambda_\Gamma$. Notons H_ω l'horosphère centrée en ω passant par l'origine de c, et HB_ω l'horoboule ouverte de bord H_ω. Pour tout γ dans Γ/Γ_ω, posons $HB_{\gamma\omega} = \gamma HB_\omega$. Montrons que la famille $(HB_{\gamma\omega})_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_\omega}$ convient.

En effet, cette famille est équivariante par construction, et contient exactement une horoboule ouverte centrée en chaque point de $\Gamma\omega$. Par la seconde condition des rayons cuspidaux maximaux, l'horoboule HB_ω est bien homogène, ainsi que chaque $HB_{\gamma\omega}$.



Montrons que ces horoboules sont disjointes. Soient γ, γ' distincts dans Γ/Γ_ω. Il existe donc une géodésique entre les bouts distincts $\gamma\omega$ et $\gamma'\omega$, que l'on note $]\gamma\omega, \gamma'\omega[$. Notons $H_{\gamma\omega} = \gamma H_\omega$. Notons x (respectivement y) l'intersection de $H_{\gamma\omega}$ (respectivement $H_{\gamma'\omega}$) avec $]\gamma\omega, \gamma'\omega[$. Supposons par l'absurde que les horoboules ouvertes $HB_{\gamma\omega}$ et $HB_{\gamma'\omega}$ se rencontrent. Alors $\gamma\omega, y, x, \gamma'\omega$ sont dans cet ordre sur $]\gamma\omega, \gamma'\omega[$. Notons que $\gamma'\gamma^{-1}$ envoie le rayon $[x, \gamma\omega[$ sur un rayon $[\gamma'\gamma^{-1}x, \gamma'\omega[$ avec $\gamma'\gamma^{-1}x \in H_{\gamma'\omega}$. Donc, si e est l'arête issue de x pointant vers $\gamma\omega$, alors $\gamma'\gamma^{-1}e$ est une arête dans $C\Lambda_\Gamma$ issue de $\gamma'\gamma^{-1}x$ et pointant vers $\gamma'\omega$. Par transitivité du fixateur de $\gamma'\omega$ sur $H_{\gamma'\omega} \cap C\Lambda_\Gamma$, il existe un élément de Γ envoyant $\gamma'\gamma^{-1}e$ sur l'arête issue de y pointant vers $\gamma'\omega$. Donc le segment $[x, y]$ ne s'injecte pas par passage au quotient dans $\Gamma\backslash T$, contradiction.

Enfin, montrons que ces horoboules sont maximales. En effet, par maximalité de c, l'image de l'origine de c dans $\Gamma\backslash T$ est un point triple de $\Gamma\backslash C\Lambda_\Gamma$, ou sinon l'injection du fixateur Γ_e de la première arête e de c dans le fixateur Γ_x de l'origine x de c n'est pas surjective. Dans le premier cas, Γ_ω n'agit pas transitivement sur l'intersection avec $C\Lambda_\Gamma$ de toute horosphère centrée en ω non contenue dans l'adhérence de HB_ω. Dans le second cas, si γ est dans $\Gamma_x - \Gamma_e$, alors l'intersection des adhérences de $HB_{\gamma\omega}$ et HB_ω est le singleton $\{x\}$, donc la famille $(HB_{\gamma\omega})_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_\omega}$ est maximale. $\square$

3.3 Caractérisation des groupes géométriquement finis

Définition 3.3 *Un graphe de groupes finis (X, G_*) est dit géométriquement fini si son groupe fondamental est non élémentaire et si son cœur convexe est réunion d'un graphe fini de groupes finis et d'un nombre fini de rayons cuspidaux de groupes finis.*

Soit T un arbre localement fini, un sous-groupe discret non élémentaire Γ de Aut(T) est dit géométriquement fini si le graphe de groupes $\Gamma\backslash\backslash C\Lambda_\Gamma$ l'est.

Remarque. Si (X, G_*) est un graphe de groupes finis, minimal, rappelons (voir [BL, page 29]) que le volume de (X, G_*) est par définition la somme des $\frac{1}{|G_x|}$ pour x sommet de X, sauf les sommets x de valence 2 tels que $|G_{e_+}| = |G_{e_-}| = |G_x|$ pour $e_\pm$ les deux arêtes d'origine x. Si Γ est géométriquement fini, alors un argument de série géométrique montre que le graphe de groupes $\Gamma\backslash\backslash C\Lambda_\Gamma$ est de volume fini. De plus (voir [BL]), le groupe Γ est de covolume fini dans $\mathrm{Aut}(T)$ si et seulement si le graphe de groupes $\Gamma\backslash\backslash C\Lambda_\Gamma$ est de volume fini. Dans [BL, Theo. 4.13, Theo. 4.17], il est construit de nombreux exemples de graphes de groupes de volume fini qui ne sont pas géométriquement finis. C'est là une différence essentielle avec le cas des variétés riemanniennes à courbure négative pincée.

Nous renvoyons à [Bow, Dal] par exemple pour des caractérisations des variétés riemanniennes complètes, à courbure négative pincée, géométriquement finies.

Théorème 3.4 *Soit T un arbre localement fini, et Γ un groupe discret non élémentaire de $Aut(T)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Γ est géométriquement fini,

(2) tout point de l'ensemble limite est ou bien un point limite conique, ou bien un point parabolique borné,

(3) tout point de l'ensemble limite est ou bien un point limite horosphérique, ou bien un point parabolique borné.

Preuve. Quitte à remplacer T par son sous-arbre $C\Lambda_\Gamma$, nous pouvons supposer que $C\Lambda_\Gamma = T$. En particulier, $\Lambda_\Gamma = \partial T$. Notons $(X, G_*) = \Gamma\backslash\backslash T$ le graphe de groupes quotient.

Montrons que (3) implique (1).

Fait. Pour tout bout b de X, il existe un voisinage du bout b qui est un rayon géodésique c, et qui, muni de la structure de graphe de groupes induite, est un rayon cuspidal.

Ceci montre en particulier que tout bout de X est isolé. Comme X est localement fini, l'espace des bouts de X est compact. Le nombre de bouts de X est donc fini. Comme chacun de ces bouts admet un voisinage qui est un rayon géodésique cuspidal, il en découle que (X, G_*) est géométriquement fini.

Preuve du fait. Soit b un bout de X. Comme X est localement fini, il existe un rayon géodésique c dans X convergeant vers b. Soit $\tilde{c}$ un relevé de c dans T, et $\omega = \tilde{c}(\infty)$ son point à l'infini. Comme c est géodésique dans X, le point ω n'est pas un point limite horosphérique. (Sinon, il existerait une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans Γ telle que $\beta_\omega(\gamma_n\tilde{c}(0), \tilde{c}(0)) \to +\infty$. Donc $\beta_\omega(\gamma_{n_0}\tilde{c}(0), \tilde{c}(0)) > 0$ pour un n_0 suffisamment grand. Soit $\tilde{p}$ la projection orthogonale de $\gamma_{n_0}\tilde{c}(0)$ sur $\tilde{c}$, et p l'image de $\tilde{p}$ dans X. Alors le segment $[\gamma_{n_0}\tilde{c}(0), \tilde{p}]$ de T s'envoie dans X sur un chemin entre $c(0)$ et p strictement plus court que le sous-segment de c entre $c(0)$ et p, ce qui contredit le fait que c est géodésique.) Le point ω est donc un point parabolique borné. Le résultat découle alors de la proposition 3.1 (ii). □

Montrons que (1) implique (2). Soit ω un point du bord de T, Γ_ω son fixateur, et $\tilde{c}$ un rayon géodésique d'extrémité ω. Notons c le chemin dans X projection de $\tilde{c}$.

Comme X est la réunion d'un graphe fini et d'un nombre fini de rayons géodésiques, le chemin c ou bien passe une infinité de fois par un même sommet (auquel cas ω est un point limite conique), ou bien converge vers l'un des bouts b de X. Dans ce second cas, comme un voisinage de b est un rayon géodésique cuspidal, quitte à raccourcir $\tilde{c}$, le chemin c est un rayon géodésique cuspidal dans X, qui est un voisinage de b.

Montrons que Γ_ω agit proprement discontinûment avec quotient compact sur $\partial T - \{\omega\}$ (ce qui montre que ω est un point parabolique borné). Notons K le compact de $\partial T - \{\omega\}$ formé des points ω' tels que $d_{\tilde{c}(0)}(\omega, \omega') \geq 1$, i.e. tels que la géodésique entre ω' et ω passe par $\tilde{c}(0)$. Soit ω'' dans $\partial T - \{\omega\}$ et u l'intersection de la géodésique $]\omega, \omega''[$ avec l'horosphère de centre ω passant par $\tilde{c}(0)$. Puisque c est un rayon géodésique cuspidal, qui est un voisinage de b, il existe un élément de Γ_ω envoyant u sur $\tilde{c}(0)$. Donc toute orbite de Γ_ω dans $\partial T - \{\omega\}$ rencontre K. L'ensemble des γ dans Γ_ω, tels que $\gamma K \cap K$ est non vide, est contenu dans le fixateur de $\tilde{c}(0)$, donc est fini car Γ est discret. Donc (1) implique (2).

Enfin, nous avons déjà vu que (2) implique (3). Le résultat en découle. $\square$

Le corollaire suivant découle alors de la preuve (1) implique (2) précédente (pour la surjectivité) et de la proposition 3.2 (pour l'injectivité).

Corollaire 3.5 *Soit (X, G_*) un graphe de groupes géométriquement fini, Γ son groupe fondamental et T son revêtement universel. Soit $\Gamma\backslash\partial_p T$ l'ensemble des orbites par Γ des points paraboliques bornés dans ∂T. L'application $\omega \mapsto b_\omega$ définie dans la proposition 3.1 (ii) induit une bijection de $\Gamma\backslash\partial_p T$ dans l'ensemble des bouts de Conv(X, G_*).* $\square$

Soit (X, G_*) un graphe de groupes géométriquement fini. En particulier, X est un graphe connexe union d'un graphe fini et d'un nombre finis d'arbres. Un bout b de X sera dit *cuspidal* si c'est un bout du cœur convexe de (X, G_*). L'origine v_b du rayon cuspidal maximal de bout b dans $\mathrm{Conv}(X, G_*)$ sera appelée le *pied* de b.

Le graphe de groupes $\mathrm{Conv}(X, G_*)$, privé du rayon cuspidal maximal (ouvert) de chaque bout cuspidal de X, est un graphe fini de groupes finis, appelé *cœur convexe épais* de (X, G_*) et noté $\mathrm{Conv}_0(X, G_*)$.

Remarque. Un groupe est (isomorphe à) un sous-groupe géométriquement fini du groupe des automorphismes d'un arbre localement fini si et seulement s'il est (isomorphe à) un groupe fondamental d'un graphe fini de groupes dénombrables localement finis. Un tel groupe n'est pas toujours de type fini, comme le montre l'exemple de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q[t])$ (voir [Ser, page159]).

4 Géodésiques rationnelles et irrationnelles dans les graphes de groupes cuspidaux

4.1 Géodésiques dans les graphes de groupes

Soit (X, G_*) un graphe de groupes. Nous appellerons *chemin bi-infini* de (X, G_*) toute suite $\underline{c} = (g_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ avec e_i une arête de X et g_i un élément de $G_{o(e_i)}$ tels que $o(e_{i+1}) = t(e_i)$. Ce chemin est dit *réduit* si l'égalité $e_i = \overline{e_{i-1}}$ implique que g_i n'appartient pas à $\rho_{\overline{e_i}}(G_{\overline{e_i}})$. Deux chemins bi-infinis réduits $(g_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et $(g'_i, e'_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ sont dit *équivalents* s'il existe η_i dans G_{e_i} pour tout i dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$\forall\, i \in \mathbb{Z}, \quad g'_i = \rho_{e_{i-1}}(\eta_{i-1})^{-1} g_i\, \rho_{\overline{e_i}}(\eta_i) \;\text{ et }\; e'_i = e_i.$$

Nous appellerons *géodésique (orientée, pointée) de* (X, G_*) et noterons $[g_i, e_i]_{i\in\mathbb{Z}}$ la classe d'équivalence d'un chemin bi-infini réduit $(g_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Nous noterons $\Sigma = \Sigma(X, G_*)$ leur ensemble. L'application $\tau : [g_i, e_i]_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto [g_{-i}^{-1}, \overline{e_{-i-1}}]_{i\in\mathbb{Z}}$ est une involution de Σ, appelée l'*application de renversement du temps*.

Notons $\sigma : [g_i, e_i]_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto [g_{i+1}, e_{i+1}]_{i\in\mathbb{Z}}$ *l'application de décalage* sur Σ. Elle induit une action de $\mathbb{Z}$ sur Σ, et nous appellerons toute orbite une *géodésique non pointée* de (X, G_*). Une géodésique ξ est dite *périodique* s'il existe un entier n dans $\mathbb{N} - \{0\}$ tel que $\sigma^n(\xi) = \xi$. Le plus petit tel entier n est appelé la *période* de ξ.

Remarque. L'ensemble Σ des géodésiques de (X, G_*) est muni, pour tout entier $k \geq 1$ d'une application naturelle sur l'espace Σ'_0 du flot géodésique d'ordre k défini dans [BP]. La preuve ci-dessous est inspirée de la preuve du théorème 6.5 de [BP].

Théorème 4.1 *Soit T un arbre, Γ un sous-groupe de $Aut(T)$ et $\Sigma = \Sigma(\Gamma\backslash\backslash T)$. Notons encore $\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}$ les applications de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ dans $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ induites par le flot géodésique et le renversement du temps sur $\mathcal{G}T$ (voir le paragraphe 2.1). Alors il existe une bijection $\phi : \Gamma\backslash\mathcal{G}T \to \Sigma$ qui rend les diagrammes suivants commutatifs*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\backslash\mathcal{G}T & \xrightarrow{\widetilde{\sigma}} & \Gamma\backslash\mathcal{G}T \\ \phi\downarrow & & \downarrow\phi \\ \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \Gamma\backslash\mathcal{G}T & \xrightarrow{\widetilde{\tau}} & \Gamma\backslash\mathcal{G}T \\ \phi\downarrow & & \downarrow\phi \\ \Sigma & \xrightarrow{\tau} & \Sigma \end{array} .$$

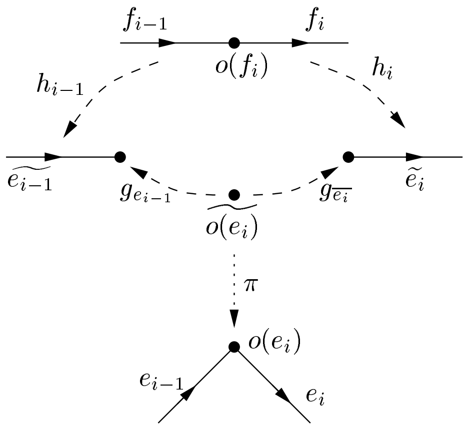
Remarque. L'intérêt de ce résultat est d'exprimer le flot géodésique sur $\mathcal{G}T$ de manière intrinsèque, purement en termes du graphe de groupes $\Gamma\backslash\backslash T$. Dans le cas des variétés riemanniennes compactes M, il est souvent important d'utiliser le flot géodésique directement sur M, sans passer au revêtement universel. Une description du flot géodésique dans le cas des orbifolds riemanniens n'est pas toujours immédiate. Ici aussi, la présence des stabilisateurs (finis) de sommets apporte une complication importante, expliquant la technicité et la longueur de la preuve qui suit. La présence éventuelle d'éléments de Γ non triviaux fixant une géodésique toute entière de T peut être problématique (voir [BP]).

Preuve. Soit $\pi : T \to \Gamma\backslash T$ la projection canonique. Construisons une application $\widetilde{\phi} : \mathcal{G}T \to \Sigma$ de la manière suivante. Soit $f : \mathbb{R} \to T$ un chemin d'arêtes dans T. Notons $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ les arêtes consécutives de f, orientées comme f, avec $o(f_0) = f(0)$. Posons $e_i = \pi(f_i)$. Alors $t(e_{i-1}) = \pi(t(f_{i-1})) = \pi(o(f_i)) = o(e_i)$.

Reprenons les notations $\widetilde{e}, \widetilde{v}, g_e$ de la définition du graphe de groupes quotient $\Gamma\backslash\backslash T$ (voir le paragraphe 2.1), pour e une arête et v un sommet de $\Gamma\backslash T$. Comme $\pi(f_i) = \pi(\widetilde{e_i}) = e_i$, il existe h_i dans Γ tel que $h_i f_i = \widetilde{e_i}$. L'élément h_i est bien défini modulo multiplication à gauche par un élément du fixateur de l'arête $\widetilde{e_i}$, donc un élément de G_{e_i}. Posons

$$g_i = g_{e_{i-1}}^{-1} h_{i-1} h_i^{-1} g_{\overline{e_i}} . \qquad (*)$$

Alors g_i fixe $\widetilde{o(e_i)}$, donc appartient à $G_{o(e_i)} = G_{t(e_{i-1})}$ (voir la figure ci-dessous).



Remarque. Notons que
$$\overline{f_{i-1}} = h_{i-1}^{-1}\overline{\widetilde{e_{i-1}}} = h_{i-1}^{-1}\widetilde{\overline{e_{i-1}}}\ .$$
Donc f est localement injective (i.e. $f_i \neq \overline{f_{i-1}}$ pour tout i dans $\mathbb{Z}$) si et seulement si pour tout i dans $\mathbb{Z}$ ou bien $e_i \neq \overline{e_{i-1}}$, ou bien
$$e_i = \overline{e_{i-1}} \quad \text{et} \quad g_i g_{\overline{e_i}}^{-1}\widetilde{e_i} \neq g_{\overline{e_i}}^{-1}\widetilde{e_i}\ .$$
Cette dernière inégalité est équivalente à g_i n'appartient pas à $\rho_{\overline{e_i}}(G_{e_i})$. En particulier, comme T est un arbre, l'application $f : \mathbb{R} \to T$ est une isométrie si et seulement si $(g_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est un chemin bi-infini réduit.

La classe d'équivalence de $(g_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ne dépend pas du choix des h_i. En effet, si h'_i est un autre choix, donnant g'_i, alors
$$g'_i = g_{e_{i-1}}^{-1} h'_{i-1} h_{i-1}^{-1} g_{e_{i-1}} g_{e_{i-1}}^{-1} h_{i-1} h_i^{-1} g_{\overline{e_i}}\, g_{\overline{e_i}}^{-1} h_i {h'_i}^{-1} g_{\overline{e_i}} = \rho_{e_{i-1}}(h_{i-1} {h'_{i-1}}^{-1})^{-1} g_i\, \rho_{\overline{e_i}}(h_i {h'_i}^{-1}),$$
et donc $(g_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et $(g'_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ sont équivalents, car $h_i {h'_i}^{-1}$ fixe $\widetilde{e_i}$. Posons $\widetilde{\phi}(f) = [g_i, e_i]_{i\in\mathbb{Z}}$. Alors l'application $\widetilde{\phi}$ est à valeurs dans Σ, et est Γ-invariante, donc induit une application $\phi : \Gamma\backslash\mathcal{G}T \to \Sigma$. La commutativité des diagrammes de l'énoncé du théorème 4.1 est immédiate par construction.

Montrons que $\widetilde{\phi}$ est surjective, ce qui entraîne que ϕ est surjective. Soit $(g_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ un chemin bi-infini réduit. Posons $f_0 = \widetilde{e_0}$ et $h_0 = \mathrm{id}$. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$, il existe une arête f_k de T et un élément h_k de G tels que
$$t(f_{k-1}) = o(f_k),\ \ h_k^{-1}\widetilde{e_k} = f_k \quad \text{et} \quad g_k = g_{e_{k-1}}^{-1} h_{k-1} h_k^{-1} g_{\overline{e_k}}\ .$$
Le résultat est clair pour $n = 1$. Supposons que l'hypothèse de récurrence soit satisfaite au rang n. Posons
$$h_n = (h_{n-1}^{-1} g_{e_{n-1}} g_n g_{\overline{e_n}}^{-1})^{-1}\ .$$
Alors la relation $g_n = g_{e_{n-1}}^{-1} h_{n-1} h_n^{-1} g_{\overline{e_n}}$ est vérifiée, et h_n^{-1} envoie $o(\widetilde{e_n})$ sur $t(f_{n-1})$. En effet,
$$\begin{aligned} h_n^{-1} o(\widetilde{e_n}) &= h_{n-1}^{-1} g_{e_{n-1}} g_n g_{\overline{e_n}}^{-1} o(\widetilde{e_n}) = h_{n-1}^{-1} g_{e_{n-1}} g_n \widetilde{o(e_n)} \\ &= h_{n-1}^{-1} g_{e_{n-1}} \widetilde{o(e_n)} = h_{n-1}^{-1} t(\widetilde{e_{n-1}}) = t(f_{n-1})\ . \end{aligned}$$
Maintenant, posons $f_n = h_n^{-1}\widetilde{e_n}$. L'origine de f_n est bien $t(f_{n-1})$. Alors pour $1 \leq k \leq n$, les arêtes f_k et les éléments h_k de G vérifient l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$.

On fait une construction similaire pour $n < 0$. Notons $f : \mathbb{R} \to T$ le chemin d'arêtes dans T, d'arêtes consécutives $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, avec $f(0) = o(f_0)$. Par la remarque précédente, f appartient à $\mathcal{G}T$. On a alors $\widetilde{\phi}(f) = [g_i, e_i]_{i\in\mathbb{Z}}$ par construction, ce qui montre la surjectivité de $\widetilde{\phi}$.

Montrons que ϕ est injective. Soient f, f' dans $\mathcal{G}T$ tels que $\widetilde{\phi}(f) = \widetilde{\phi}(f')$. Montrons qu'il existe γ dans Γ tel que $f' = \gamma f$. Notons f'_i, e'_i, h'_i, g'_i les objets correspondants pour f' aux objets f_i, e_i, h_i, g_i construits pour f en début de preuve. Comme $\widetilde{\phi}(f) = \widetilde{\phi}(f')$, on a $e'_i = e_i$. Quitte à remplacer f et f' par leurs images par des éléments de Γ, nous pouvons supposer que $f_0 = f'_0 = \widetilde{e_0}$, et dans la construction, nous pouvons alors prendre $h_0 = h'_0 = \mathrm{id}$.

Comme $\widetilde{\phi}(f) = \widetilde{\phi}(f')$, il existe une suite $(\eta_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ avec η_i dans G_{e_i}, tels que $g'_i = \rho_{e_{i-1}}(\eta_{i-1})^{-1} g_i\, \rho_{\overline{e_i}}(\eta_i)$. Par l'égalité $(*)$, ceci entraîne

$$g_{e_{i-1}}^{-1} h'_{i-1}(h'_i)^{-1} g_{\overline{e_i}} = \rho_{e_{i-1}}(\eta_{i-1}^{-1})\ g_{e_{i-1}}^{-1} h_{i-1} h_i^{-1} g_{\overline{e_i}}\ \rho_{\overline{e_i}}(\eta_i),$$

ce qui équivaut à

$$h'_i(h'_{i-1})^{-1} = \eta_i^{-1} h_i h_{i-1}^{-1} \eta_{i-1}\ .$$

Posons $f'' = \eta_0 f'$. Alors, par naturalité, pour construire $\widetilde{\phi}(f'')$, on peut prendre $h''_i = h'_i \eta_0^{-1}$. Donc, pour tout i dans $\mathbb{Z}$,

$$h''_i(h''_{i-1})^{-1} = \eta_i^{-1} h_i h_{i-1}^{-1} \eta_{i-1}.$$

Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que $h''_n = \eta_n^{-1} h_n$. Comme $h_0 = h'_0 = \mathrm{id}$, on a $h''_0 = h'_0\eta_0^{-1} = \eta_0^{-1} h_0$. Supposons la formule vraie au rang $n-1$, alors

$$h''_n = \eta_n^{-1} h_n h_{n-1}^{-1} \eta_{n-1} h''_{n-1} = \eta_n^{-1} h_n\ .$$

Un raisonnement analogue pour $n \leq 0$ montre que pour tout i dans $\mathbb{Z}$, on a encore $h''_i = \eta_i^{-1} h_i$. Donc, puisque η_i fixe l'arête $\widetilde{e_i}$, on a

$$f''_i = (h''_i)^{-1}\widetilde{e_i} = h_i^{-1}\eta_i\widetilde{e_i} = h_i^{-1}\widetilde{e_i} = f_i\ .$$

Donc $f'' = f$, ce qui montre bien que f et f' sont dans la même orbite par Γ. Donc ϕ est injective. $\square$

Soit (X, G_*) un graphe de groupes, Γ son groupe fondamental et T son revêtement universel (pour un choix indifférent de sous-arbre maximal).

La proposition précédente donne donc une bijection ϕ entre les orbites sous Γ des géodésiques de T et les géodésiques de (X, G_*). Si $\pi : \mathcal{G}T \to \Gamma\backslash\mathcal{G}T$ est la projection canonique, et ξ est une géodésique de (X, G_*), toute géodésique f de T telle que $\phi\circ\pi(f) = \xi$ sera appelée un *relevé* de ξ dans T. Il est immédiat qu'une géodésique ξ de (X, G_*) est périodique si et seulement si un (tout) relevé de ξ est l'axe de translation dans T d'un élément de Γ.

Nous appellerons *support* d'une géodésique $[g_i, e_i]_{i\in\mathbb{Z}}$ de (X, G_*) le chemin d'arêtes $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Lorsque le sens est clair, nous dirons parfois qu'une géodésique de (X, G_*) vérifie une propriété au lieu de dire que son support vérifie cette propriété.

4.2 Géodésiques rationnelles et irrationnelles

Soit (X, G_*) un graphe de groupes géométriquement fini. Soit b_∞ un bout cuspidal fixé de (X, G_*).

Notons $Lk_{(X,G_*)}(b_\infty)$ l'ensemble des géodésiques non pointées de (X, G_*) issues de b_∞ et contenues dans $\mathrm{Conv}(X, G_*)$. Une géodésique *irrationnelle* est un élément de $Lk_{(X,G_*)}(b_\infty)$ ne convergeant vers aucun bout cuspidal de (X, G_*). Une géodésique *rationnelle* est un élément de $Lk_{(X,G_*)}(b_\infty)$ convergeant vers b_∞. Notons $\pi_1(X, G; b_\infty)$ le sous-ensemble des géodésiques rationnelles. Si (X, G_*) n'a qu'un seul bout cuspidal, alors un élément de $Lk_{(X,G_*)}(b_\infty)$ est irrationnel si et seulement s'il n'est pas rationnel.

Proposition 4.2 *Une géodésique irrationnelle s'accumule dans $Conv_0(X, G_*)$.*

Preuve. Soit $\xi = [g_i, e_i]_{i\in\mathbb{Z}}$ une géodésique contenue dans $\mathrm{Conv}(X, G_*)$, issue de b_∞, et ne convergeant pas vers un bout de $\mathrm{Conv}(X, G_*)$. Supposons par l'absurde que la suite $(o(e_i))_{i\in\mathbb{Z}}$ ne s'accumule pas dans $\mathrm{Conv}_0(X, G_*)$. Comme $\mathrm{Conv}_0(X, G_*)$ est un graphe fini de groupes finis, et que les pieds des bouts cuspidaux séparent le graphe sous-jacent de $\mathrm{Conv}(X, G_*)$, il existe un entier N tel que pour tout $i \geq N$, l'arête e_i est contenue dans le rayon cuspidal maximal Y d'un bout b de $\mathrm{Conv}(X, G_*)$, privé de son pied. Comme ξ ne converge pas vers b, il existe un entier $i \geq N$ tel que e_{i+1} pointe vers le bout b et $e_i = \overline{e_{i+1}}$. Mais comme Y est cuspidal, ceci contredit le fait que le chemin bi-infini $(g_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est réduit. □

Soit Γ le groupe fondamental de (X, G_*) et T son revêtement universel (pour un choix indifférent de sous-arbre maximal de X). Considérons ω_∞ le point à l'infini d'un relevé fixé dans T d'un rayon géodésique de X convergeant vers b_∞. Notons Γ_∞ le fixateur de ω_∞ dans Γ.

Proposition 4.3 *L'application qui à γ dans $\Gamma - \Gamma_\infty$ associe l'image par $\phi : \Gamma\backslash\mathcal{G}T \to \Sigma(X, G_*)$ de la géodésique de T entre ω_∞ et $\gamma\omega_\infty$ induit une bijection de $\Gamma_\infty\backslash(\Gamma - \Gamma_\infty)/\Gamma_\infty$ dans $\pi_1(X, G; b_\infty)$.*

Preuve. Rappelons que l'orbite par le flot géodésique $\widetilde{\sigma}$ d'une géodésique de T est déterminée par le couple de ses points à l'infini. Il suffit alors de remarquer, avec le théorème 4.1, que l'orbite par le décalage σ d'une géodésique ξ dans (X, G_*) est rationnelle si et seulement si les points à l'infini d'un relevé de ξ dans T sont deux points distincts de l'orbite de ω_∞ par Γ. □

4.3 La distance entre deux géodésiques issues d'un bout cuspidal

Conservons les mêmes notations que dans la sous-section précédente. Si ξ est une géodésique issue de b_∞ contenue dans $\mathrm{Conv}(X, G_*)$, alors il existe un relevé de ξ qui est une géodésique issue de ω_∞ contenue dans $C\Lambda_\Gamma$. Un tel relevé est uniquement défini modulo Γ_∞. En considérant son point à l'infini dans $\Lambda_\Gamma - \{\omega_\infty\}$, on obtient donc une bijection entre $Lk_{(X,G_*)}(b_\infty)$ et $\Gamma_\infty\backslash(\Lambda_\Gamma - \{\omega_\infty\})$. Ceci permet de munir $Lk_{(X,G_*)}(b_\infty)$ d'une topologie et d'une distance, par passage au quotient.

Plus précisément, notons H_∞ l'horosphère de T centrée en ω_∞ dont l'intersection avec l'enveloppe convexe de Γ se projette sur le pied v_{b_∞} du bout b_∞ (voir sous-section 3.2). Si ξ, ξ' sont deux éléments de $Lk_{(X,G_*)}(b_\infty)$, on note

$$d(\xi, \xi') = \min d_{\omega_\infty, H_\infty}(\widetilde{\xi}(+\infty), \widetilde{\xi}'(+\infty))$$

avec $\widetilde{\xi}, \widetilde{\xi}'$ parcourant les géodésiques de T issues de ω_∞, relevant des géodésiques pointées représentant ξ, ξ', et convergeant vers $\widetilde{\xi}(+\infty), \widetilde{\xi}'(+\infty)$ dans ∂T. Comme ω_∞ est un point parabolique borné, cette borne inférieure est bien un minimum. Cette application d est donc une distance sur $Lk_{(X,G_*)}(b_\infty)$, qui est la distance de Hamenstädt quotient sur $\Gamma_\infty\backslash(\Lambda_\Gamma - \{\omega_\infty\})$, et que nous appellerons encore la *distance de Hamenstädt*.

4.4 La profondeur d'une géodésique rationnelle

Conservons les mêmes notations que dans la sous-section précédente. Nous allons mesurer la complexité d'une géodésique rationnelle r par la longueur du sous-segment de r entre le premier et le dernier point de passage par le pied du bout b_∞.

Plus précisément, soit r une géodésique rationnelle, et $(g_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ un représentant. Il existe deux entiers

$$i_- = \min\{i \in \mathbb{Z} \,|\, o(e_i) = v_{b_\infty}\} \ \text{ et } \ i_+ = \max\{i \in \mathbb{Z} \,|\, o(e_i) = v_{b_\infty}\}$$

avec $-\infty < i_- \leq i_+ < +\infty$. La somme

$$D(r) = \sum_{i=i_-}^{i_+-1} \ell(e_i)$$

ne dépend pas du représentant choisi, et est appelée la *profondeur* de r.

Lemme 4.4 *Si r est une géodésique rationnelle, correspondant à la double classe $\Gamma_\infty\gamma\Gamma_\infty$ avec $\gamma \in \Gamma - \Gamma_\infty$, alors*

$$D(r) = d_T(H_\infty, \gamma H_\infty).$$

Preuve. C'est immédiat en relevant r au revêtement universel T. □

Proposition 4.5 *L'ensemble des profondeurs des géodésiques rationnelles est un ensemble discret de $\mathbb{R}$ avec multiplicités finies.*

Preuve. Par le lemme précédent, ceci découle du fait que l'action du groupe fondamental de (X, G_*) sur son revêtement universel est discrète, et que le point fixe parabolique correspondant au bout cuspidal b_∞ est borné. □

4.5 L'exemple des réseaux arithmétiques

Le résultat suivant découle des travaux de M. Raghunathan et A. Lubotsky [Lub, Theo. 6.1].

Théorème 4.6 *Soit $\hat{K}$ un corps valué localement compact non archimédien, et $\underline{G}$ un groupe algébrique connexe semi-simple sur $\hat{K}$ de $\hat{K}$-rang 1. Soit Γ un réseau (i.e. un sous-groupe discret de covolume fini) dans $\underline{G}(\hat{K})$. Soit T l'arbre de Bruhat-Tits de $\underline{G}(\hat{K})$. Alors Γ est un groupe géométriquement fini minimal d'automorphismes de T.* □

En fait, si $\hat{K}$ est de caractéristique nulle (i.e. si $\hat{K}$ est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$), alors Γ est cocompact. Si $\hat{K}$ est de caractéristique $p > 0$, (i.e. si $\hat{K}$ est $\mathbb{F}_q((X^{-1}))$ avec q une puissance de p), il existe un ensemble non dénombrable de classes de conjugaisons de Γ non cocompacts [Lub, Theo. 6.1].

Dans le cas des réseaux arithmétiques, voir par exemple [Ser, BT], les informations plus précises ci-dessous sont connues. Soit K le corps des fonctions d'une courbe algébrique $\mathcal{C}$ géométriquement connexe définie sur un corps fini k, v une place de K (qui est à la fois un point fermé de $\mathcal{C}$ et une valuation discrète sur K), A l'anneau affine de la courbe affine $\mathcal{C} - \{v\}$, $\hat{K}$ le complété de K pour la valuation v, $\underline{G}$ un groupe algébrique simple simplement connexe et déployé de rang 1 sur K, et T l'arbre de Bruhat-Tits de $\underline{G}(\hat{K})$. Alors $\underline{G}(A)$ est un sous-groupe géométriquement fini minimal de $\mathrm{Aut}(T)$ et les bouts (qui sont tous cuspidaux) de $\underline{G}(A)\backslash T$ sont en bijection avec l'ensemble fini

$$\underline{G}(A)\backslash\underline{G}(K)/\underline{P}(K)$$

avec $\underline{P}$ un sous-groupe parabolique minimal de $\underline{G}$ défini sur K (alors que les bouts de T sont en bijection avec $\underline{G}(\hat{K})/\underline{P}(\hat{K})$).

Par exemple (voir par exemple [Ser, page 149]), prenons $K = \mathbb{F}_q(X)$ le corps des fractions rationnelles sur $\mathbb{F}_q$ (le corps des fonctions de la droite projective $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_q)$), $v(P/Q) = (-\deg P) - (-\deg Q)$ la place en l'infini, et $\underline{G} = \underline{PGL_2}$. Alors $A = \mathbb{F}_q[X]$ est l'anneau des polynômes, $\hat{K} = \mathbb{F}_q((X^{-1}))$ est le corps des séries formelles de Laurent en X^{-1}, de valeur absolue (ultramétrique) $|\cdot|_\infty = q^{-v(\cdot)}$, en notant encore v la valuation de $\hat{K}$ étendant celle de K. L'arbre de Bruhat-Tits T est l'arbre régulier de degré $q+1$, et $\underline{G}(A)\backslash\backslash T$ est le rayon de groupes suivant

$$\begin{array}{cccccccccc} \Gamma_0^+ & & \Gamma_1 & & \Gamma_2 & & \Gamma_3 & & \Gamma_4 & \\ \bullet & \underset{\Gamma_0}{\rule{3em}{0.4pt}} & \bullet & \underset{\Gamma_1}{\rule{3em}{0.4pt}} & \bullet & \underset{\Gamma_2}{\rule{3em}{0.4pt}} & \bullet & \underset{\Gamma_3}{\rule{3em}{0.4pt}} & \bullet & \text{------} \end{array}$$

avec $\Gamma_0^+ = PGL_2(\mathbb{F}_q)$ et $\Gamma_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},\ a, d \in \mathbb{F}_q^\times, b \in \mathbb{F}_q[X],\ \deg b \leq n \right\}$, avec les inclusions évidentes. Le graphe de groupes $\underline{G}(A)\backslash\backslash T$ est clairement géométriquement fini et minimal, avec un seul bout cuspidal b_∞.

Le bord ∂T de T s'identifie avec la droite projective $\mathbb{P}_1(\hat{K})$, et le point à l'infini de cette droite projective, que nous noterons ∞, est un point parabolique borné, de stabilisateur

$$\Gamma_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n .$$

L'orbite sous $\underline{G}(A)$ du point ∞ est la droite projective $\mathbb{P}_1(K)$ sur K, c'est-à-dire l'ensemble des points rationnels de la courbe projective $\mathbb{P}_1(\hat{K})$ définie sur K.

L'ensemble $Lk_{\underline{G}(A)\backslash\backslash T}(b_\infty)$ s'identifie avec le quotient $\hat{K}/\Gamma_\infty$ de $\hat{K}$ par le groupe engendré par les homothéties par les éléments de $\mathbb{F}_q^\times$ et par les translations par les éléments de A. L'ensemble des géodésiques rationnelles de $\underline{G}(A)\backslash\backslash T$ correspond alors à K/Γ_∞, car elles sont exactement les géodésiques non pointées issues du bout b_∞ dont un (tout) relevé issu de ∞ est d'extrémité un point de l'orbite sous $\underline{G}(A)$ du point ∞, i.e. un élément de K.

La distance de Hamenstädt (avec $t \mapsto q^t$ remplaçant $t \mapsto e^t$ comme signalé précédemment) sur $\mathbb{P}_1(\hat{K}) - \{\infty\} = \hat{K}$ est exactement (voir [Pau, Coro. 5.2]) la distance induite par la valeur absolue $|\cdot|_\infty$. La profondeur d'une géodésique rationnelle r dont un relevé issu de ∞ est d'extrémité P/Q avec $\deg P \leq \deg Q$ est (voir [Pau, Coro. 6.1]) le double de la hauteur logarithmique de Weil de P/Q :

$$D(r) = 2\max\{-v(P), -v(Q)\} = 2\deg Q .$$

L'inégalité d'approximation diophantienne dans $\hat{K}$ (voir par exemple [Las, Sch]), pour x dans $\hat{K} - K$ et P, Q dans A (premiers entre eux)

$$|x - P/Q|_\infty \leq \frac{c}{|Q|_\infty^2}$$

devient (voir [Pau] pour plus d'information), en notant r la géodésique rationnelle projection de la géodésique de T entre ∞ et $\frac{P}{Q}$, et ξ la géodésique irrationnelle projection de la géodésique de T entre ∞ et x,

$$d(\xi, r) \leq c\, q^{-D(r)} .$$

5 Constantes d'approximation en approximation diophantienne non archimédienne

5.1 Constante de Hurwitz

Soit (X, G_*) un graphe de groupes géométriquement fini, b_∞ un bout cuspidal de (X, G_*), et d la distance de Hamenstädt sur $Lk_{(X,G_*)}(b_\infty)$.

Pour toute géodésique irrationnelle ξ de (X, G_*), notons $K(\xi)$ la borne inférieure des constantes C telles qu'il existe une infinité de géodésiques rationnelles r avec $d(\xi, r) \leq Ce^{-D(r)}$. Appelons *constante de Hurwitz* de (X, G_*), et notons $K_{(X,G_*)}(b_\infty)$, la borne supérieure des $K(\xi)$ pour ξ géodésique irrationnelle.

Le but de ce paragraphe, inspirée du cas des variétés riemanniennes traité dans [HP2], est de montrer que cette constante d'approximation est finie non nulle, et de donner des moyens de la calculer.

Soit $c_{b_\infty} : [0, +\infty[\to X$ le rayon géodésique partant du pied v_{b_∞} du bout cuspidal b_∞ et convergeant vers b_∞. Notons d_X la distance dans X. La structure des bouts de X montre que, pour tout x dans X, l'application $t \mapsto t - d_X(x, c_{b_\infty}(t))$ est constante pour t assez grand. Nous appelons *fonction hauteur* de (X, G_*) par rapport à b_∞ l'application $\beta = \beta_{X,G,b_\infty} : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$\beta(x) = \lim_{t \to +\infty} t - d_X(x, c_{b_\infty}(t)).$$

Si ξ est une géodésique de (X, G_*), de support $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, la *hauteur* de ξ est

$$ht(\xi) = \limsup_{i \to +\infty} \beta(o(e_i)) \ .$$

Soit A_+ l'adhérence de la composante connexe de $X - \{v_{b_\infty}\}$ contenant un rayon géodésique de bout b_∞, et A_- l'adhérence de $X - A_+$. Notons $p(x)$ la projection sur c_{b_∞} d'un point x de l'arbre A_+. Il est immédiat que $\beta(x) = -d_X(x, v_{b_\infty})$ pour x dans A_-, et $\beta(x) = d_X(v_{b_\infty}, p(x)) - d_X(x, p(x))$ pour x dans A_+. Notons E_∞ l'ensemble des arêtes de c_{b_∞}. Posons $DS = \sum_{e\in E_\infty} \mathbb{N}\ell(e) \cup \sum_{e\in EX-E_\infty} -\mathbb{N}\ell(e)$. Alors DS est un ensemble discret, et si x est dans le cœur convexe de (X, G_*), alors $\beta(x)$ appartient à DS.

Si ξ est une géodésique périodique, rationnelle, irrationnelle, sa hauteur $ht(\xi)$ appartient à DS, $\{+\infty\}$, $DS \cup \{+\infty\}$ respectivement.

Théorème 5.1 *Soit ξ une géodésique irrationnelle issue de b_∞ dans (X, G_*). Alors*

$$K(\xi) = \exp(-ht(\xi))$$

De plus, si $ht(\xi) < +\infty$, alors il existe au moins une géodésique périodique ξ' telle que $ht(\xi) = ht(\xi')$. Réciproquement, pour toute géodésique périodique ξ', il existe une géodésique irrationnelle ξ issue de b_∞ telle que $ht(\xi') = ht(\xi)$.

Preuve. Soit $\xi' = [g'_i, e'_i]_{i\in\mathbb{Z}}$ une géodésique périodique. Considérons un rayon géodésique c dans X, de bout b_∞, d'origine un point du support de ξ' que l'on peut supposer être $o(e'_0)$ quitte à renuméroter, et tel que la première arête de c est différente de $\overline{e'_{-1}}, e'_0$. Notons $(e_n)_{n\in-(\mathbb{N}-\{0\})}$ les arêtes consécutives de c, orientées vers $o(e'_0)$. Posons $g_n = id$ si $n < 0$, et $e_n = e'_n, g_n = g'_n$ si $n \geq 0$. Alors $\xi = [g_i, e_i]_{i\in\mathbb{Z}}$ est une géodésique irrationnelle telle que $ht(\xi') = ht(\xi)$. Ceci montre la troisième assertion dans le théorème 5.1.

Fixons pour la suite de cette preuve une géodésique irrationnelle ξ, et $\underline{c} = (g_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ un représentant de ξ. D'après la proposition 4.2, ξ s'accumule dans le cœur convexe $\mathrm{Conv}_0(X, G_*)$. Supposons que $ht(\xi) < +\infty$. Les hauteurs des sommets de ξ varient dans l'ensemble discret DS. Comme X est localement fini, il existe donc une suite strictement croissante d'entiers positifs $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $e_{i_n} = e_{i_0}$ et $ht(\xi) = \beta(o(e_{i_n}))$ pour tout entier n.

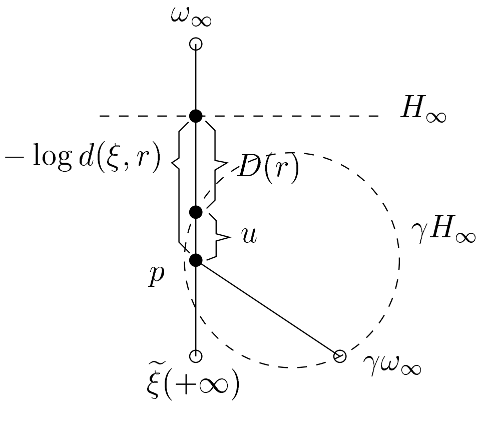
Soit $\underline{c}' = (g'_i, e'_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ un chemin bi-infini dans (X, G_*), périodique de période $i_1 - i_0$, avec $e'_k = e_k$ et $g'_k = g_k$ pour $i_0 + 1 \leq k \leq i_1$. Alors $\underline{c}'$ est réduit car $\underline{c}$ l'est. Si ξ' est la géodésique dont un représentant est $\underline{c}'$, on a $ht(\xi) = ht(\xi')$. Ceci montre la seconde assertion dans le théorème 5.1.

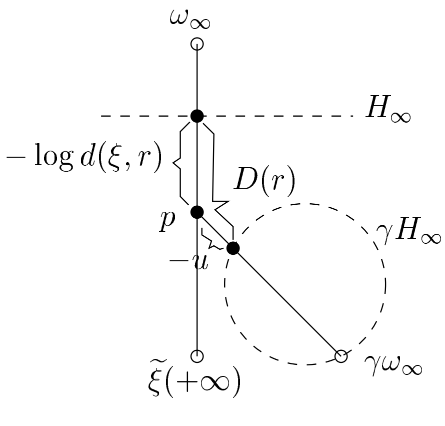
Soit Γ le groupe fondamental et T le revêtement universel de (X, G_*) (pour un choix indifférent de sous-arbre maximal de X). Considérons ω_∞ le point à l'infini d'un relevé fixé dans T d'un rayon géodésique de X convergeant vers b_∞. Notons Γ_∞ le fixateur de ω_∞ dans Γ. Soit $(HB_\gamma)_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_\infty}$ la famille équivariante d'horoboules ouvertes homogènes disjointes maximales centrées sur $\Gamma\omega_\infty$ (voir proposition 3.2). Notons H_γ l'horosphère centrée en $\gamma\omega_\infty$, bord de l'horoboule HB_γ, avec $H_\gamma = H_\infty$ si γ est la classe de l'élément neutre. Notons $\widetilde{\beta}_\gamma$ la fonction de Buseman du bout $\gamma\omega_\infty$ s'annulant sur H_γ (voir sous-section 2.2).

Lemme 5.2 *Soient ξ, r dans $Lk_{(X,G_*)}(b_\infty)$, avec r rationnelle. Soient $\widetilde{\xi}, \widetilde{r}$ des géodésiques de T issues de ω_∞ relevant ξ, r, avec $d(\xi, r) = d_{\omega_\infty, H_\infty}(\widetilde{\xi}(+\infty), \widetilde{r}(+\infty))$. Soit γ un élément de $(\Gamma - \Gamma_\infty)/\Gamma_\infty$ tel que $\widetilde{r}(+\infty) = \gamma\omega_\infty$. Alors*

$$-\log\, d(\xi, r) - D(r) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \widetilde{\beta}_\gamma(\widetilde{\xi}(t)).$$

Preuve. D'après le lemme 4.4, $D(r) = d_T(H_\infty, \gamma H_\infty) \geq 0$. Notons p la projection orthogonale de $\gamma\omega_\infty$ sur la géodésique $\widetilde{\xi}$. Posons $u = \sup_{t\in\mathbb{R}} \widetilde{\beta}_\gamma(\widetilde{\xi}(t))$. Il y a deux cas à considérer, suivant que p appartienne à HB_γ (auquel cas $u = d_T(p, H_\gamma)$) ou que p n'appartienne pas à HB_γ (auquel cas $u = -d_T(p, H_\gamma)$). Voir les dessins ci-dessous, respectivement de gauche et de droite.





Par définition de la distance de Hamenstädt d sur $Lk_{(X,G_*)}(b_\infty)$ (voir sous-section 4.3), on a $-\log d(\xi, r) = D(r) + u$ dans le premier cas et $D(r) = -\log d(\xi, r) - u$ dans le second. Le lemme en découle. □

Notons $\widetilde{\xi}$ une géodésique de T issue de ω_∞ relevant ξ, avec $(\widetilde{e_i})_{i\in\mathbb{Z}}$ la suite ordonnée de ses arêtes, $\widetilde{e_i}$ se projetant sur e_i dans X. Puisque $ht(\xi) = \beta(o(e_{i_n}))$, il existe au moins un rayon géodésique $\widetilde{c}_n$ dans T d'origine $o(\widetilde{e_{i_n}})$ convergeant vers $\gamma_n\omega_\infty$ pour un γ_n dans $(\Gamma - \Gamma_\infty)/\Gamma_\infty$, et dont l'arête origine est différente de $\widetilde{\overline{e_{i_n-1}}}, \widetilde{e_{i_n}}$ par maximalité. Notons r_n la géodésique rationnelle de (X, G_*), projection de la géodésique de T formée du sous-rayon de $\widetilde{\xi}$ entre ω_∞ et $o(\widetilde{e_{i_n}})$, et suivi du rayon $\widetilde{c}_n$.

Comme les points $\gamma_n\omega_\infty$ convergent vers $\widetilde{\xi}(+\infty)$, et que Γ_∞ agit proprement sur $C\Lambda_\Gamma - \{\omega_\infty\}$, nous pouvons supposer quitte à extraire que les r_n sont deux à deux distincts. Comme $ht(\xi) = \beta(t(e_{i_n}))$, on a, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$ht(\xi) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \widetilde{\beta}_{\gamma_n}(\widetilde{\xi}(t)) = \sup_{\gamma\in(\Gamma-\Gamma_\infty)/\Gamma_\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \widetilde{\beta}_\gamma(\widetilde{\xi}(t)) \ .$$

Par le lemme 5.2, on en déduit donc que $K(\xi) = e^{-ht(\xi)}$, ce qui termine la preuve du théorème 5.1 si $ht(\xi) < +\infty$. Des arguments analogues montrent que si $ht(\xi) = +\infty$, alors $K(\xi) = 0$. $\square$

Définition 5.3 *Notons $h_{(X,G_*)}(b_\infty)$ le minimum des hauteurs des géodésiques périodiques de (X, G_*).*

Remarquons que comme Γ est non élémentaire, il existe au moins une géodésique périodique dans (X, G_*). Toute géodésique périodique est contenue dans le cœur convexe de (X, G_*). L'intersection de ce cœur convexe avec $\beta^{-1}(]-\infty, t])$ est, pour t suffisamment petit, réunion disjointe (éventuellement vide) de rayons cuspidaux. Un rayon cuspidal privé de son origine ne contient pas de géodésique périodique. Donc l'ensemble non vide des hauteurs des géodésiques périodiques est minoré. Comme DS est discret, la borne inférieure des hauteurs des géodésiques périodiques est atteinte (donc est un minimum), et $h_{(X,G_*)}(b_\infty)$ est bien défini et appartient à DS.

Corollaire 5.4 *Soit (X, G_*) un graphe de groupes géométriquement fini, et b_∞ un bout cuspidal de (X, G_*).*

1. $K_{(X,G_*)}(b_\infty) = \exp(-h_{(X,G_*)}(b_\infty))$.
2. $0 < K_{(X,G_*)}(b_\infty) < +\infty$.
3. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute géodésique irrationnelle ξ, il existe une infinité de géodésiques rationnelles r avec*
$$d(\xi, r) \le Ce^{-D(r)}.$$

Preuve. La première assertion découle du théorème 5.1. La seconde découle de la première et du fait que $h_{(X,G_*)}(b_\infty)$ est dans DS. La troisième découle de la seconde par définition de $K_{(X,G_*)}(b_\infty)$. $\square$

5.2 Spectre de Lagrange

Soit (X, G_*) un graphe de groupes géométriquement fini, et b_∞ un bout cuspidal de (X, G_*). L'ensemble $Sp = Sp_{(X,G_*)}(b_\infty)$ des $K(\xi)$ lorsque ξ parcourt l'ensemble des géodésiques irrationnelles, est, par le corollaire 5.4, une partie majorée de $[0, +\infty[$, que nous appellerons *spectre de Lagrange* de (X, G_*) pour b_∞.

Le *spectre des hauteurs* de (X, G_*) par rapport à b_∞ est la partie $SpH = SpH_{(X,G_*)}(b_\infty)$ de $\mathbb{R}$ formé des hauteurs des géodésiques périodiques dans (X, G_*). C'est un ensemble discret non majoré, de minimum $h_{(X,G_*)}(b_\infty)$, chaque valeur pouvant avoir une multiplicité infinie.

Par le théorème 5.1, l'application de SpH dans $Sp - \{0\}$ qui à t associe e^{-t} est une bijection. Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le rayon cuspidal maximal de bout b_∞, alors SpH est la réunion d'un ensemble fini formé des hauteurs des géodésiques périodiques contenues dans $\mathrm{Conv}_0(X, G)$, des $-d(v_b, v_{b_\infty})$ pour b un bout cuspidal de X différent de b_∞, et de l'ensemble des $\sum_{i=0}^{n} \ell(e_i)$ pour les n dans $\mathbb{N} - \{0\}$ tels que l'inclusion $G_{e_n} \to G_{t(e_n)}$ soit propre.

Exemples de calculs de spectre de Lagrange

Soit $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments. Soit $\underline{G}$ un groupe algébrique simple sur $\mathbb{F}_q$, simplement connexe et déployé, de rang 1, et $T = T_{\underline{G},\mathbb{F}_q}$ l'arbre de Bruhat-Tits de $\underline{G}$ sur le corps local $\mathbb{F}_q((\frac{1}{t}))$. Alors $\underline{G}(\mathbb{F}_q[t])\backslash\backslash T$ est un rayon cuspidal de groupes (voir par exemple [Ser, page 151][Sou]). Comme $q \geq 2$, le spectre des hauteurs est $\mathbb{N} - \{0\}$. Par ce qui précède, son spectre de Lagrange est alors

$$Sp_{\,\underline{G}(\mathbb{F}_q[t])\backslash\backslash T} = e^{-(\mathbb{N}-\{0\})} \cup \{0\}.$$

Sa constante de Hurwitz est $1/e$, atteinte exactement pour les géodésiques irrationnelles qui, à partir d'un certain moment, oscillent entre les deux premiers sommets du rayon $\underline{G}(\mathbb{F}_q[t])\backslash T$, i.e. dont le support $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ vérifie

$$\forall\, i \geq 0, \quad e_{2i+N} = a \quad \text{et} \quad e_{2i+N+1} = \overline{a}$$

pour N un entier et a la première arête de $\underline{G}(\mathbb{F}_q[t])\backslash T$.

Proposition 5.5 *Soit k dans $\mathbb{N} - \{0\}$. Si $\Gamma^{(k)}$ est le sous-groupe de congruence principal*

$$\Gamma^{(k)} = Ker\left(PGL_2(\mathbb{F}_q[t]) \to PGL_2(\mathbb{F}_q[t]/t^k\mathbb{F}_q[t])\right),$$

alors le graphe de groupes quotient $\Gamma^{(k)}\backslash\backslash T$ a pour spectre de Lagrange (par rapport à n'importe lequel de ses bouts cuspidaux)

$$Sp_{\,\Gamma^{(k)}\backslash\backslash T} = \{e^m \mid m \in \mathbb{Z}, m \leq k-1\} \cup \{0\}.$$

En particulier, sa constante de Hurwitz est e^{k-1}.

Preuve. Reprenons les notations du paragraphe 4.5 concernant l'arbre de Bruhat-Tits $T = T_{PGL_2,\mathbb{F}_q}$ et son groupe d'automorphismes $\Gamma = PGL_2(\mathbb{F}_q[t])$. Notons $x_0, x_1, x_2, ...$ les sommets de T fixés par $\Gamma'_0, \Gamma_1, \Gamma_2, ...$ Posons ${\Gamma'_0}^{(k)} = \Gamma'_0 \cap \Gamma^{(k)}$ et $\Gamma_n^{(k)} = \Gamma_n \cap \Gamma^{(k)}$ pour tout n dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Alors ${\Gamma'_0}^{(k)}$ est trivial, et $\Gamma_n^{(k)}$ est trivial si $n \leq k-1$. Si $n \geq k$, alors $\Gamma_n^{(k)}$ contient $\{\begin{pmatrix} 1 & \alpha t^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{F}_q\}$, donc agit transitivement sur les arêtes d'extrémité x_n et d'origine différente de x_{n+1}. Donc l'image dans $\Gamma^{(k)}\backslash\backslash T$ du rayon géodésique $[x_{k-1}, \infty[$ est un rayon cuspidal maximal pour le groupe $\Gamma^{(k)}$. Notons $(HB^{(k)}_{\gamma\infty})_{\gamma\in\Gamma^{(k)}/\Gamma^{(k)}_\infty}$ la famille $\Gamma^{(k)}$-équivariante d'horoboules ouvertes homogènes disjointes maximales centrées aux points de l'orbite $\Gamma^{(k)}\infty$. Si $H_\infty^{(k)}$ est l'horosphère correspondante centrée en ∞, alors $H_\infty^{(k)}$ passe par le point x_{k-1}. Comme $\Gamma^{(k)}$ est distingué dans Γ, le groupe Γ préserve cette famille. Toute géodésique de T passe par un point de Γx_0, donc a même hauteur qu'une géodésique passant par x_0. Il en découle que le spectre des hauteurs pour $\Gamma^{(k)}$ est $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{0, -1, -2, \dots, -k+1\}$. Ceci démontre la proposition. $\square$

Index

Références

[BL] H. Bass, A. Lubotzky, *Tree lattices*, Prog. Math. **176**, Birkhäuser, 2001.

[BP] A. Broise, F. Paulin, *Dynamique sur le rayon modulaire et fractions continues en caractéristique p*, prépublication Univ. Orsay, juin 2002.

[BT] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local (données radicielles valuées)*, Pub. Math. I.H.E.S. **41** (1972) 5-252.

[Bou] M. Bourdon, *Structure conforme au bord et flot géodésique d'un $CAT(-1)$ espace*, L'Ens. Math. **41** (1995) 63-102.

[Bow] B. Bowditch, *Geometrical finiteness with variable negative curvature*, Duke Math. J. **77** (1995) 229-274.

[Coo] M. Coornaert, *Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov.* Pacific J. Math. **159** (1993) 241-270.

[Dal] F. Dal'Bo, *Topologie du feuilletage fortement stable*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **50** (2000) 1-13.

[HP1] S. Hersonsky, F. Paulin, *On the rigidity of discrete isometry groups of negatively curved spaces*, Comm. Math. Helv. **72** (1997) 349-388.

[HP2] S. Hersonsky, F. Paulin, *Diophantine approximation for negatively curved manifolds, I*, Math. Zeit. **241** (2002) 181-226.

[HP3] S. Hersonsky, F. Paulin, *Diophantine Approximation on Negatively Curved Manifolds and in the Heisenberg Group*, dans "Rigidity in dynamics and geometry (Cambridge, 2000)", M. Burger, A. Iozzi eds, Springer Verlag, 2002.

[HP4] S. Hersonsky, F. Paulin, *Counting orbit points in covering of negatively curved manifolds and Hausdorff dimension of cusp excursions*, à paraître dans Erg. Theo. Dyn. Sys.

[Las] A. Lasjaunias, *A survey of diophantine approximation in fields of power series*, Monat. Math. **130** (2000) 211-229.

[Lub] A. Lubotzky, *Lattices in rank one Lie groups over local fields*, GAFA **1** (1991), 405-431.

[Pau] F. Paulin, *Groupe modulaire, fractions continues et approximation diophantienne en caractéristique p*, Geom. Dedi. **95** (2002) 65-85.

[Rob] T. Roblin, *Ergodicité du feuilletage horocyclique, mélange du flot géodésique et équidistribution pour les groupes discrets en courbure négative*, à paraître, Mém. Soc. Math. France.

[Sch] W. Schmidt, *On continued fractions and diophantine approximation in power series fields*, Acta Arith. **XCV** (2000) 139-166.

[Ser] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2*, Astérisque **46** , Soc. Math. France (1983).

[Sou] C. Soulé, *Chevalley groups over polynomial rings*, in "Homological group theory", Proc. Symp. Durham 1977, Lond. Math. Soc. Lect. Notes **36** (1979) 359-367.

Laboratoire de Mathématiques UMR 8628 CNRS
Equipe de Topologie et Dynamique (Bât. 425)
Université Paris-Sud
91405 ORSAY Cedex, FRANCE.
e-mail: Frederic.Paulin@math.u-psud.fr

Adresse actuelle :
DMA, UMR 8553 CNRS
École Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS Cedex 05, FRANCE.
e-mail: Frederic.Paulin@ens.fr