Constructions arborescentes d'immeubles

Frédéric Haglund Frédéric Paulin

Résumé

We prove that, contrarily to the case of spherical and euclidean buidings, the set of (isomorphism classes of) locally finite 3-dimensional hyperbolic buildings is uncountable. The proof uses on one hand a classification of 3-dimensional Coxeter polytops satisfying some local properties of irreducibility and symmetry, and on another hand, an arborescent construction of buildings for splitable Coxeter systems. [1]

1 Introduction

Soit P un polytope de Coxeter sphérique, euclidien ou hyperbolique de dimension $n \geq 2$. On note $S(P)$ l'ensemble des réflexions par rapport aux hyperplans contenant une face de codimension 1 de P, et $W(P)$ le groupe de réflexions sphérique, euclidien ou hyperbolique engendré par $S(P)$.

Un *immeuble sphérique, euclidien ou hyperbolique* de type P est un complexe polyédral muni d'une famille maximale de sous-complexes appelés *appartements*, polyédralement isométriques au pavage de $\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{H}^n$ par les images de P sous W, tels que
• par deux cellules passe au moins un appartement,
• pour tout couple d'appartements (A, A'), il existe une isométrie polyédrale de A sur A' fixant $A \cap A'$.

Les premières subdivisions barycentriques des immeubles hyperboliques de type P sont exactement les réalisations géométriques de Davis-Moussong des immeubles (en tant que système de chambres) de type $(W(P), S(P))$, voir [GP].

En dimension au moins 2 (respectivement 3), les immeubles sphériques (respectivement euclidiens) irréductibles localement finis sont classés par les travaux de Tits (voir par exemple [Tit1, Tit2]), et en particulier, l'ensemble de leur classes d'isomorphisme est dénombrable. La situation est différente pour les immeubles hyperboliques. Il n'existe par exemple pas encore de liste de polytopes hyperboliques analogues aux classifications de Coxeter dans le cas sphérique ou euclidien (mis à part le cas des simplexes hyperboliques, classés par Schläfli-Lannér, voir par exemple [VS]). En dimension 2, en hyperbolique (voir [GP]) comme en euclidien, il existe un ensemble non dénombrable de classes d'isomorphisme d'immeubles.

Nous montrons que ceci persiste en dimension 3 pour les immeubles hyperboliques. Un polytope hyperbolique de Coxeter de dimension 3 est dit *localement réflexif* si la réflexion par rapport à l'hyperplan médian de chaque arête préserve un voisinage de cette arête dans le polytope. Il est dit *localement irréductible* si le link de chaque sommet, qui est un triangle sphérique, est irréductible (i.e. possède un seul angle droit). Dans la section 3.1,

1. **AMS codes:** 51 E 24, 51 M 10, 51 F 15. **Keywords:** hyperbolic polytop, building, hyperbolic building, right-angled building, tree of buildings.

grâce au théorème d'Andréev, nous donnons des exemples de et une classification complète des polytopes hyperboliques de Coxeter de dimension 3, localement réflexifs et localement irréductibles.

Théorème 1.1 *Soit P un polytope hyperbolique de dimension 3, d'angles dièdres $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{3}$, localement réflexif et localement irréductible, dont les faces ont un nombre pair de côtés. Soit L l'immeuble des drapeaux de l'espace projectif de dimension 3 sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ avec $q \geq 5$. Alors il existe un ensemble non dénombrable de (classes d'isomorphismes) d'immeubles hyperboliques de type P, dont les links de sommets sont isomorphes à L.*

Un énoncé plus général est donné en section 4.5. Notons que l'hypothèse de parité exclut que P soit un simplexe hyperbolique.

Les constructions reposent sur une décomposition (en arbres d'immeubles) d'immeubles de Tits, reflétant une décomposition (en produit amalgamé) de leurs systèmes de Coxeter. Plus précisément, soit (W, I) un système de Coxeter. Un *scindement* de (W, I) est un couple (I_+, I_-) de parties de I, de réunion I et d'intersection I_0 différente de I_+, I_-, tel que $m_{s,t} = \infty$ pour tout $(s, t) \in (I_+ - I_0) \times (I_- - I_0)$. L'existence d'un scindement et le fait que le groupe W admette une décomposition en produit amalgamé sont équivalents (voir [Ser, MT]). Un *arbre d'immeubles* de type (I_+, I_-) est la donnée d'un arbre biparti T de sommets étiquetés par $+, -$, d'un immeuble Δ_x de type $(W_{I_\pm}, I_\pm)$ pour tout sommet x de T d'étiquette $\pm$, d'un immeuble Δ_a de type (W_{I_0}, I_0) pour toute arête a de T, d'une identification de l'ensemble des arêtes dont une extrémité est x avec l'ensemble des I_0-résidus de Δ_x, et d'un isomorphisme $f_{x,a}$ de Δ_a sur le I_0-résidu correspondant de Δ_x pour toute arête a dont une extrémité est x.

Soient $\Delta_+, \Delta_-, \Delta_0$ trois immeubles de type $(W_{I_+}, I_+), (W_{I_-}, I_-), (W_{I_0}, I_0)$ respectivement. Un immeuble est *modelable* sur $\mathcal{M} = (\Delta_+, \Delta_-, \Delta_0)$ si ses résidus de type I_+, I_-, I_0 sont isomorphes à $\Delta_+, \Delta_-, \Delta_0$ respectivement. Nous donnons en section 4.4 un théorème de structure pour les immeubles modelables sur $\mathcal{M}$: ils sont isomorphes à l'immeuble associé à un arbre d'immeubles, voir la proposition 4.9. La non dénombrabilité vient alors de la souplesse des recollements possibles.

En utilisant les techniques d'arbres d'immeubles, nous donnons en section 5 une classification complète des immeubles de Tits à angles droits. Ce résultat avait déjà été démontré par M. Globus [Glo], et était connu aussi de M. Davis, T. Januszkiewicz et J. Swiatkowski (le cas des immeubles hyperboliques à angles droits de dimension 2 est dû à [Bou1]).

Proposition 1.2 *Soit (W, I) un système de Coxeter à angles droits (i.e. pour tout $i \neq j$, on a $m_{i,j} = 2$ ou $m_{i,j} = \infty$) et $(q_i)_{i \in I}$ une famille de cardinaux ($q_i \geq 2$). Alors, il existe un unique (à isomorphisme près) immeuble de type (W, I) tel que pour tout $i \in I$, chaque $\{i\}$-résidu de Δ est de cardinal q_i. Son groupe d'automorphismes est transitif sur les chambres, et tout automorphisme d'un résidu de l'immeuble est la restriction d'un automorphisme de l'immeuble.*

Nous remercions M. Ronan pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

2 Notations et rappels

Nous utiliserons les références suivantes pour les définitions et rappels : [Ron] pour les systèmes de Coxeter, les systèmes de chambres, et les immeubles (vus comme systèmes de chambres); [BH] pour les complexes polyédraux, les complexes de groupes et les espaces métriques CAT(0); [GP] pour les immeubles hyperboliques.

Sur les graphes : Un *cycle d'arêtes* dans un complexe polyédral est une suite finie d'arêtes cycliquement consécutives, sans aller-retour. C'est un *n-cycle d'arêtes* s'il contient n arêtes.

Par *graphe*, nous entendrons la réalisation géométrique d'un 1-complexe simplicial, sans sommet terminal. La *maille* d'un graphe est le nombre minimal d'arêtes d'un cycle d'arêtes. Un graphe est *2-connexe* si privé d'au plus un sommet ou une arête (fermée), il reste connexe. Un graphe est *planaire* s'il est plongé (de manière polyédrale) dans la sphère $\mathbb{S}^2$. Si Γ est un graphe, nous noterons $\Gamma_{(0)}, \Gamma_{(1)}, \Gamma_{\frac{1}{2}}$ l'ensemble des sommets, des arêtes, des milieux d'arêtes de Γ.

Sur les polytopes et immeubles hyperboliques : Un immeuble hyperbolique est dit *localement irréductible* si le link de chacun de ses sommets, qui est un immeuble sphérique, est irréductible. Il est dit *localement réflexif* si pour toute arête a, il existe une isométrie d'un voisinage de a échangeant les deux sommets de a et fixant l'orthogonal de a en son milieu (dans chaque cellule contenant a). C'est une manière forte d'imposer que les links de tous les sommets soient isomorphes, voir [Hag].

Un polytope hyperbolique est *de Coxeter* si ses angles dièdres sont de la forme $\frac{\pi}{k}$ avec k entier au moins 2. Il est alors simple (voir par exemple [Vin]). Il est dit *localement irréductible* si aucun link de sommet n'est un joint sphérique non trivial. En dimension trois, ceci signifie exactement que pour tout sommet, une et une seule arête contenant ce sommet est d'angle dièdre $\frac{\pi}{2}$. Un polytope hyperbolique est *localement réflexif* si la réflexion hyperbolique sur l'hyperplan hyperbolique orthogonal en son milieu à chaque arête induit une isométrie d'un voisinage de cette arête. Par exemple, toute chambre d'un immeuble hyperbolique localement irréductible et localement réflexif est un polytope hyperbolique de Coxeter localement irréductible et localement réflexif.

Sur les systèmes de Coxeter : Une *matrice de Coxeter* M sur un ensemble I est une matrice symétrique $(m_{ij})_{i,j\in I}$ à coefficients dans $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ telle que $m_{ii}=1$ et $m_{ij}\geq 2$ pour $i\neq j$. Le *groupe de Coxeter* associé à M est le groupe W défini par générateurs s_i pour $i\in I$ et relations $(s_is_j)^{m_{ij}}=1$ pour $i,j\in I$ avec $m_{i,j}\neq\infty$. La *norme* d'un élément w de W est le plus petit $n\in\mathbb{N}$ tel que $w=s_{i_1}\dots s_{i_n}$ avec $i_k\in I$ (et $n=0$ si w est l'élément neutre). Le couple (W,I) est appelé un *système de Coxeter*. Pour $J\subset I$, le sous-groupe W_J de W engendré par J est appelé *spécial*. On montre que $W_J\cap W_K=W_{J\cap K}$. Le *nerf fini* de (W,I) est le sous-complexe du simplexe sur I dont les simplexes sont les parties J de I telles que W_J est fini, voir [Dav].

Sur les systèmes de chambres : Un *système de chambres sur un ensemble I* est un ensemble X muni d'une famille indexée par I de partitions de X. Les éléments de X sont appelés les chambres de X. Deux chambres sont i-adjacentes si elles appartiennent à la même partie de la partition indexée par $i\in I$.

Soient X,X' deux systèmes de chambres sur I. Un *morphisme* de X dans X' est une application $f:X\to X'$ telle que si $x,y\in X$ sont i-adjacents, alors $f(x),f(y)$ sont i-adjacents.

Un système de chambres est dit *chambre-transitif* s'il admet un groupe d'automorphismes transitif sur ses chambres.

Si X,X' sont des systèmes de chambres sur I,I' respectivement, et si $\tau:I\to I'$ est une bijection, alors un *morphisme au-dessus de τ* de X dans X' est une application $f:X\to X'$

telle que si $x, y \in X$ sont i-adjacents, alors $f(x), f(y)$ sont $\tau(i)$-adjacents.

Soit X un système de chambres sur I. Soit I^* le monoïde libre sur I. Une *galerie* de *type* $\tau = i_1 \dots i_n \in I^*$ est une suite finie de chambres $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ telle que c_j est i_j-adjacente à c_{j-1} et différente de c_{j-1} (nous ne considérerons donc que les galeries "sans répétition"). Sa longueur est n. Soit $J \subset I$, un système de chambres sur I est *J-connexe* si deux chambres peuvent être jointes par une galerie de type $\tau \in J^*$. Les composantes J-connexes de X sont appelés les *J-résidus* (ou résidus de type J) de X. Muni de la partition indexée par J restreinte, un J-résidu est un système de chambres sur J. Un J-résidu de X sera toujours muni implicitement de sa structure de système de chambres sur J.

Un système de chambres sur I est dit *sans bord* (respectivement *épais*) si tout i-résidu contient au moins deux (respectivement trois) chambres, pour tout $i \in I$.

Notation : Lorsqu'une décomposition $I = I_+ \cup I_-$ est sous-entendue, nous noterons $R_+(C)$, $R_-(C)$ et $R_0(C)$ les résidus de type I_+, I_- et $I_0 = I_+ \cap I_-$ respectivement d'une chambre C de X.

Sur les immeubles : Soit M une matrice de Coxeter sur un ensemble I, et (W, I) son système de Coxeter. Un *immeuble* (combinatoire) *de type* (W, I) est un système de chambres X sur I, sans bord, muni d'une application $\delta : X \times X \to W$ appelée *W-distance*, telle que, pour tout mot W-réduit $i_1 \cdots i_k$, $\delta(x, y) = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ si et seulement si x, y peuvent être joints par une galerie de type $i_1 \cdots i_k$.

Rappelons qu'une galerie γ dans un immeuble est géodésique si et seulement si son type est un mot W-réduit. Rappelons que dans un immeuble de type (W, I), le J-résidu d'une chambre c est l'ensemble des chambres d telles que $\delta(c, d) \in W_J$. C'est un immeuble de type (W_J, J).

Pour $J \subset I$, nous dirons par abus de langage immeuble de type W_J pour immeuble de type (W_J, J).

3 Construction de polytopes de Coxeter et d'immeubles hyperboliques de dimension 3

3.1 Classification de polytopes de Coxeter hyperboliques de dimension 3

Le but de cette section est de donner une classification des polytopes hyperboliques de Coxeter de dimension 3 localement irréductibles et localement réflexifs.

Soit Γ un graphe planaire 2-connexe, de maille au moins 5. Par exemple, Γ peut être la subdivision barycentrique du 1-squelette d'une triangulation de $\mathbb{S}^2$. Soit $N = N(\Gamma)$ un voisinage régulier de Γ dans $\mathbb{S}^2$ et $\pi : N \to \Gamma$ la rétraction naturelle. Notons $\underline{\Gamma} = \partial N \cup \pi^{-1}(\Gamma_{\frac{1}{2}})$, qui est un graphe planaire trivalent, d'ensemble de sommets $\partial N \cap \pi^{-1}(\Gamma_{\frac{1}{2}})$ (en effet, $\underline{\Gamma}$ n'a pas d'arête double, car Γ n'a pas de sommet terminal). Notons A et B l'ensemble des arêtes de $\underline{\Gamma}$ contenues dans ∂N et $\pi^{-1}(\Gamma_{\frac{1}{2}})$ respectivement, de sorte que $\underline{\Gamma}_{(1)} = A \cup B$. Notons $\mathcal{C}$ la cellulation de $\mathbb{S}^2$ dont $\underline{\Gamma}$ est le 1-squelette, avec F_+ et F_- l'ensemble des 2-cellules contenues dans $\overline{\mathbb{S}^2 - N}$ et N respectivement. Remarquons que l'inclusion entre parties de $\mathbb{S}^2$ induit une bijection de F_+ avec $\pi_0(\mathbb{S}^2 - \Gamma)$ et de $\Gamma_{(0)}$ avec F_-.

Soient m_0, m_1 deux entiers au moins 3 avec $\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m_1} > \frac{1}{2}$. Si $m_0 \neq m_1$, nous supposerons de plus que Γ est un graphe biparti ; il existe alors une unique partition de A en deux parties A_0, A_1, telle que deux arêtes de A ayant un sommet en commun ne sont pas dans la même partie, et deux arêtes de A dans le bord d'une même 2-cellule qui est dans F_- sont dans la même partie. Posons $A_0 = A, A_1 = \emptyset$ si $m_0 = m_1$. Soit $\Theta : \underline{\Gamma}_{(1)} \to]0, \frac{\pi}{2}]$ l'application qui à e dans $\underline{\Gamma}_{(1)}$ associe $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{m_0}, \frac{\pi}{m_1}$ si e appartient à B, A_0, A_1 respectivement (voir Figure 1).

Proposition 3.1 *Il existe un et (à isométrie près) un seul polytope hyperbolique $P = P(\Gamma, m_0, m_1)$ de dimension 3 tel qu'il existe un homéomorphisme polyédral $f : \mathcal{C} \to \partial P$ avec $\Theta(e)$ égal à l'angle dièdre de $f(e)$ dans P pour toute arête e de $\mathcal{C}$. De plus, P est localement irréductible et localement réflexif.*

Preuve. La preuve repose sur le théorème suivant d'Andreev.

Théorème 3.2 *(Andreev [And]) Soit $\mathcal{C}$ une cellulation polyédrale de la sphère $\mathbb{S}^2$, non polyédralement isomorphe au bord du tétraèdre ou du prisme triangulaire, duale à une triangulation τ, et munie d'une application $\Theta : \mathcal{C}_{(1)} \to]0, \frac{\pi}{2}]$. Il existe un et un seul (à isométrie près) polytope hyperbolique de dimension 3, muni d'un isomorphisme polyédral $f : \mathcal{C} \to \partial P$ avec $\Theta(e)$ égal à l'angle dièdre de $f(e)$ dans P pour toute arête e de $\mathcal{C}$, si et seulement si*

1. *si (e_1^*, e_2^*, e_3^*) est un 3-cycle dans τ, alors $\sum_{i=1}^{3} \Theta(e_i) > \pi$ si ce cycle borde un triangle dans τ, et $\sum_{i=1}^{3} \Theta(e_i) < \pi$ sinon,*

2. *si $(e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$ est un 4-cycle ne bordant pas la réunion de deux triangles dans τ, alors $\sum_{i=1}^{4} \Theta(e_i) < 2\pi$,*

en notant e^* l'arête de τ duale à l'arête e de $\mathcal{C}$. □

Considérons la cellulation polyédrale τ de $\mathbb{S}^2$ suivante :

- les sommets de τ sont d'une part les sommets de Γ, dits de type $-$, et d'autre part un point $x_D \in D \cap (\mathbb{S}^2 - N(\Gamma))$, dit de type $+$, pour chaque composante connexe D de $\mathbb{S}^2 - \Gamma$,

- les arêtes de τ sont d'une part les arêtes de Γ, dites de type $--$, et d'autre part, pour chaque composante connexe D de $\mathbb{S}^2 - \Gamma$ et pour chaque sommet x de Γ sur ∂D, d'une arête $c_{D,x}$, dite de type $+-$, qui est un arc dans $\overline{D}$ entre x_D et x, avec $c_{D,x} \cap c_{D,y} = \{x_D\}$ si $x \neq y$, et $c_{D,x} \cap \Gamma = \{x\}$.

D'un sommet de type $+$ ne partent que des arêtes de type $+-$, et il y en a au moins 2, car Γ est sans boucle. Les cellules de $\mathcal{C}$ contenues dans $N(\Gamma)$ ont un nombre pair de côtés, alternativement dans A et B. Donc, de chaque sommet de type $-$ partent, alternativement pour l'ordre cyclique, des arêtes de type $+-$ et $--$. Par conséquent, les cellules de τ sont des triangles. Il n'y a pas d'arête double de type $+-$, car Γ privé d'un sommet reste connexe. Comme Γ est de maille ≥ 3, en discutant sur les types des différentes arêtes, on montre que τ est sans boucle et sans arête double. Donc τ est une triangulation.

Il est alors facile de vérifier que la cellulation polyédrale $\mathcal{C}$ est duale à la cellulation polyédrale τ.

Comme Γ n'a pas de 3-cycle, aucune 2-cellule de $\mathcal{C}$ n'est triangulaire, donc $\mathcal{C}$ n'est pas polyédralement isomorphe au bord du tétraèdre ni du prisme triangulaire.

Soit $\alpha = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ un 3-cycle dans τ. Comme Γ ne contient pas de 3-cycle, nous pouvons supposer que e_1^*, e_2^* sont de type $+-$ et e_3^* de type $--$. Soit D' la composante connexe de $\mathbb{S}^2 - N(\Gamma)$ contenant le sommet de type $+$ commun à e_1^*, e_2^*. Soit $\gamma = \pi(\partial D')$ le cycle de Γ correspondant à $\partial D'$. Comme une arête (fermée) de Γ ne disconnecte pas, et par le théorème de Jordan, deux sommets de γ non adjacents dans γ sont non adjacents dans Γ. Donc e_3^* est une arête de γ, et α borde un triangle dans τ. Par l'hypothèse sur les m_i, on a $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{m_0} + \frac{\pi}{m_1} > \pi$. Donc la condition (1) du théorème d'Andreev est vérifiée.

Soit α un 4-cycle de τ. Comme Γ n'a pas de 4-cycle, le lacet α contient au moins un sommet de type $+$, donc deux arêtes de type $+-$. Comme $m_0, m_1 \geq 3$, la condition (2) du théorème d'Andreev est vérifiée.

La dernière assertion de la proposition 3.1 vient du fait qu'un triangle sphérique est déterminé à isométrie près par les angles en ses sommets. □

Exemple 3.3 Si Γ est un cycle de longueur $n \geq 5$, alors $P(\Gamma, 3, 3)$ est un prisme hyperbolique de base n-gonale. Si Γ est la première subdivision barycentrique du 1-squelette du dodécaèdre, alors $P(\Gamma, 3, 3)$ est un zonotope de Coxeter hyperbolique de type $H3$ (voir [HP] page 201).

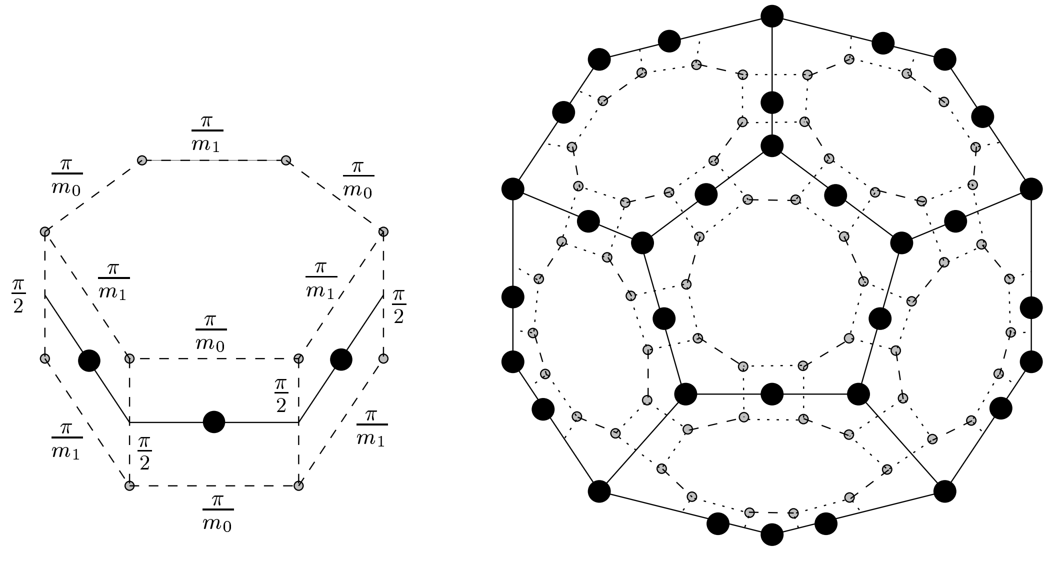

Figure 1 : Exemples de polytopes hyperboliques localement réflexifs.

La proposition suivante est une réciproque à la dernière assertion de la proposition 3.1.

Proposition 3.4 *Si P est un polytope hyperbolique de Coxeter de dimension 3, localement réflexif et localement irréductible, alors P est polyédralement isométrique à $P(\Gamma, m_0, m_1)$ pour Γ un graphe planaire 2-connexe de maille au moins 5, et m_0, m_1 deux entiers au moins 3 vérifiant $\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} > \frac{1}{2}$, avec Γ biparti si $m_0 \neq m_1$.*

Preuve. Notons $\mathcal{M}$ la réunion des arêtes d'angle dièdre différent de $\frac{\pi}{2}$. Comme P est localement irréductible, $\mathcal{M}$ est une sous-variété de dimension 1 de ∂P, donc est une union finie disjointe de cercles $\{\gamma_i\}_{i=1\cdots k}$. Chaque γ_i sépare ∂P en deux disques. Comme P est localement réflexif, les arêtes de P, d'angle dièdre $\frac{\pi}{2}$ et contenant un sommet sur γ_i, sont contenues dans l'adhérence d'une même composante connexe de $\partial P - \gamma_i$. Comme P est un polytope hyperbolique, l'autre composante connexe C_i ne rencontre pas le 1-squelette de P. L'adhérence de $\partial P - \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ est un sous-complexe polyédral N de ∂P. Pour toute 2-cellule σ de N, fixons un point x_σ dans l'intérieur de σ, et pour toute arête de σ d'angle dièdre $\frac{\pi}{2}$, considérons l'arc géodésique entre x_σ et le milieu de cette arête. La réunion de ces arcs pour toutes les 2-cellules de N est la subdivision barycentrique d'un graphe planaire Γ de sommets les x_σ, dont N est un voisinage régulier, de telle sorte que la préimage des milieux des arêtes de Γ est la réunion des arêtes d'angle dièdre $\frac{\pi}{2}$.

Il est facile de voir qu'un polytope hyperbolique de Coxeter de dimension 3, localement réflexif et localement irréductible, n'est pas un tétraèdre ni un prisme triangulaire. Par la nécessité des conditions (1) et (2) du théorème d'Andreev, le graphe Γ est de maille ≥ 5. Comme deux cellules distinctes de ∂P ne se rencontrent qu'au plus en une face commune propre, le graphe Γ est 2-connexe. Par locale réflexivité de P, les angles dièdres non droits d'une 2-cellule de P contenue dans N sont égaux. Si les angles dièdres en un sommet de P sont deux à deux distincts, alors par locale réflexivité, tout cycle bordant une 2-cellule dans ∂P est de longueur paire (les angles dièdres étant ou bien $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{m_i}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{m_i}, \ldots$, ou bien $\frac{\pi}{m_0}, \frac{\pi}{m_1}, \frac{\pi}{m_0}, \frac{\pi}{m_1}, \ldots$. Il est facile d'en déduire que Γ est alors biparti. Finalement, le résultat découle de l'unicité dans le théorème d'Andreev. $\square$

3.2 Une famille dénombrable d'immeubles hyperboliques localement réflexifs et chambre-transitifs

Proposition 3.5 *Soit L un immeuble sphérique chambre-transitif, et P un polytope hyperbolique de dimension 3, dont les faces ont un nombre pair de côtés, dont les links de sommet sont polyédralement isométriques à une chambre de L, et qui est localement réflexif. Alors il existe au moins un immeuble hyperbolique de type $(W(P), S(P))$, chambre-transitif, localement réflexif, de links de sommets isomorphes à L.*

Remarques. Le fait pour P d'avoir ses links de sommet polyédralement isométriques à une chambre de L force P à être un polytope de Coxeter. Si L est fini, tout immeuble comme dans la conclusion de la proposition est localement fini.

Si L est un immeuble sphérique fini, irréductible, de rang au moins 3, alors par le théorème de classification de Tits [Tit1], il est automatiquement chambre-transitif.

Preuve. On fixe une chambre fondamentale C_0 de L. On note I le type du système de chambres L. Soit G un groupe d'automorphismes de L, transitif sur les chambres. Notons B le stabilisateur dans G de la chambre C_0, P_i le stabilisateur du i-résidu de C_0 pour tout i dans I et, pour $J \subset I$ non vide, P_J le stabilisateur du J-résidu de C_0. On pose $P_\emptyset = G$.

Soit x_0 un sommet de P. Il existe alors une rétraction simpliciale régulière r de la triangulation duale τ de ∂P sur le 2-simplexe de τ correspondant au sommet x_0. On construit cette rétraction le long de chaque chemin d'arêtes de ∂P, en utilisant les réflexions locales, car P est localement réflexif. La parité des longueurs des cycles d'arêtes dans ∂P assure alors que cette construction ne dépend pas des chemins suivis. Par dualité, cette rétraction envoie une face propre de P sur une face propre de P contenant x_0.

Fixons une isométrie polyédrale entre C_0 et le link de x_0 dans P. L'ensemble $\Sigma_{x_0}P$ des faces propres de P contenant x_0 est donc munie d'une application type $t : \Sigma_{x_0}P \to \mathcal{P}(I)$, avec $t(x_0) = \emptyset$. En notant ΣP l'ensemble de toutes les faces propres de P, cette application s'étend en une application type $\Sigma P \to \mathcal{P}(I)$ encore notée t, en posant $t(c) = t(r(c))$ pour tout $c \in \Sigma_{x_0}P$.

On construit de la manière suivante un complexe de groupes simple (voir [BH]). Son complexe sous-jacent est le polytope hyperbolique P. Le groupe de la cellule P est égal à B, et le groupe d'une face propre de P de type J est égal à P_J. Le monomorphisme du groupe d'une cellule de P dans le groupe d'une de ses faces propres est l'inclusion ensembliste. La commutativité du système inductif de ces monomorphismes est immédiate.

Les développements locaux en les sommets (voir [BH]) de ce complexe de groupe sont polyédralement isométriques à L. Par le théorème 0.1 de [GP], ce complexe de groupe est donc développable, de revêtement universel un immeuble hyperbolique $\Delta(P, L)$ de type $(W(P), S(P))$. Par construction, $\Delta(P, L)$ est chambre-transitif et tous ses links de sommets sont polyédralement isométriques à L. Par les propriétés d'extensions des automorphismes d'un complexe de groupes à son revêtement universel (voir [BH]), $\Delta(P, L)$ est localement réflexif. $\square$

Exemple 3.6 Par exemple, nous pouvons prendre pour L l'immeuble des drapeaux de l'espace vectoriel k^4 sur un corps fini k, avec $G = PGL_4(k)$, B le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures, P_i le sous-groupe des matrices dont les coefficients dans le triangle inférieur strict sont nuls sauf peut-être celui en $i+1, i$, et pour P un polytope hyperbolique comme dans l'exemple 3.3.

4 Constructions arborescentes d'immeubles

4.1 Systèmes de Coxeter scindés

Un *scindement* d'un système de Coxeter (W, I) est un couple (I_+, I_-) de parties de I tel que, en posant $I_0 = I_+ \cap I_-$,

– $I = I_+ \cup I_-$, $I_+ \neq I_0 \neq I_-$,

– pour tout $(s_+, s_-) \in (I_+ - I_0) \times (I_- - I_0)$, on a $m_{s_+, s_-} = \infty$.

Nous dirons que (W, I) *est scindable* (au dessus de I_0) si (W, I) admet un scindement (I_+, I_-).

La terminologie est justifiée par les remarques suivantes.

Remarques. (1) Le couple (I_+, I_-) est un scindement de (W, I) si et seulement si le produit amalgamé de W_{I_+} avec W_{I_-} au dessus de W_{I_0} est non trivial et l'application naturelle de ce produit amalgamé dans W est un isomorphisme. Ceci provient juste de la définition par générateurs et relations des groupes de Coxeter, et du fait que si A_1, A_2, C sont trois groupes, si $j_i : C \to A_i$ est un morphisme de groupe injectif, et $\langle S_i \mid R_i \rangle$ une présentation de A_i pour $i = 1, 2$, si S_C est une partie génératrice de C avec $j_i(S_C) \subset S_i$, alors $\langle S_1 \sqcup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup \{j_1(s)(j_2(s))^{-1} \mid s \in S_C\} \rangle$ est une présentation du produit amalgamé $A_1 *_C A_2$.

(2) Les conditions suivantes sur un système de Coxeter (W, I) sont équivalentes:

(i) (W, I) est scindable,

(ii) W se décompose en produit amalgamé non trivial,

(iii) le graphe de Coxeter de (W, I) contient une arête de poids ∞.

L'équivalence entre (ii) et (iii) est due à [Ser, page 93], voir aussi [MT]. Si $m_{st} = \infty$, alors $(I_+ = I - \{s\}, I_- = I - \{t\})$ est un scindement. En particulier, un système de Coxeter fini ou de type affine irréductible différent de $\widetilde{A}_1$ n'est pas scindable, tandis qu'un système de Coxeter à angles droits (i.e. ses m_{st} sont 2 ou ∞), de groupe de Coxeter infini, est scindable.

(3) Le système de Coxeter (W, I) est scindable au dessus de I_0 si et seulement si le nerf fini de $(W_{I-I_0}, I - I_0)$ a au moins deux composantes connexes. A priori, il peut y avoir plusieurs scindements possibles de (W, I) au dessus de I_0. Cependant si le nerf fini de $(W_{I-I_0}, I - I_0)$ a exactement deux composantes connexes, d'ensembles de sommets respectifs J^+ et J^-, alors l'unique scindement de (W, I) au dessus de I_0 est $(J^+ \cup I_0, J^- \cup I_0)$.

(4) Soit P un polytope de Coxeter euclidien ou hyperbolique de dimension $n \geq 2$. Alors $(W(P), S(P))$ est scindable si et seulement si P n'est pas un simplexe. En effet, les hyperplans contenant deux faces F, F' de codimension 1 de P se rencontrent si et seulement si F et F' se rencontrent (voir par exemple [Vin]).

Par exemple, si $F_1, F_2, \dots, F_k$ sont des faces de codimension 1 de P, dont la réunion est homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-2} \times [0, 1]$, alors $(W(P), S(P))$ est scindable au dessus de I_0, avec I_0 l'ensemble des réflexions par rapport aux hyperplans contenant $F_1, F_2, \dots, F_k$. En effet, si $\Omega_\pm$ sont les adhérences des deux composantes connexes de $\partial P - (F_1 \cup \ldots \cup F_k)$, si $J_\pm$ est l'ensemble des réflexions par rapport aux hyperplans contenant les faces de codimension 1 de P contenues dans $\Omega_\pm$, alors $(I_+ = J_+ \cup I_0, I_- = J_- \cup I_0)$ est un scindement de $(W(P), S(P))$ au-dessus de I_0. Mais il peut y en avoir d'autres en général.

Nous avons construit en section 3.1 de nombreux exemples de P de dimension 3 qui ne sont pas des simplexes, donc tels que $(W(P), S(P))$ est scindable. Avec les notations de la section 3.1, soit Γ un graphe planaire 2-connexe, de maille au moins 5, et m_0, m_1 deux entiers au moins 3 avec $\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} > \frac{1}{2}$, avec Γ biparti si $m_0 \neq m_1$. Pour tout cycle d'arêtes c de Γ, de longueur minimale, si $F_1, F_2 \dots, F_k$ sont les faces de codimension 1 du polytope $P = P(\Gamma, m_0, m_1)$ contenant une arête de c, alors la réunion de ces faces est homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. Donc comme vu ci-dessus, $(W(P), S(P))$ est scindable au dessus de I_0, avec I_0 l'ensemble des réflexions par rapport aux hyperplans contenant $F_1, F_2 \dots, F_k$.

Soit (W, I) un système de Coxeter, muni d'un scindement (I_+, I_-) au-dessus de $I_0 = I_+ \cap I_-$. Nous aurons besoin dans la section suivante d'un critère assurant la non trivialité d'éléments de W.

Rappelons (voir par exemple [Ron, page 16]), que pour tout $J \subset I$ et $w \in W$, il existe un unique élément v de plus petite norme dans la classe à droite wW_J. De plus, pour tout $u \in W_J$, on a $|vu| = |v| + |u|$. Nous dirons qu'un élément de plus petite norme dans la classe à droite modulo W_J est *W_J-réduit*. Il est immédiat qu'un élément W_J-réduit est $W_{J'}$-réduit si $J' \subset J$. On vérifie que v est W_J-réduit si et seulement si $|vs_j| = |v| + 1$ pour tout $j \in J$. Donc si $A(w) = \{i \in I \ : \ |ws_i| < |w|\}$, alors v est W_J-réduit si et seulement si $A(w) \cap J = \emptyset$. Remarquons que par convexité des sous-groupes spéciaux, si $g \in W_J$, alors $A(g) \subset J$. D'après [Ron, page 18], si $i, j \in A(w)$ avec $i \neq j$, alors $m_{ij} \neq \infty$.

On note $W_\alpha = W_{I_\alpha}$ pour $\alpha \in \{+, 0, -\}$. Dans la fin de cette partie, on fixe $\varepsilon \in \{+, -\}$.

Lemme 4.1 *Soit $w \in W$. Alors w est W_ε-réduit et non trivial si et seulement si w est W_0-réduit et $A(w) \cap (I_{-\varepsilon} - I_0) \neq \emptyset$.*

Preuve. D'après ce qui précède, w est W_ε-réduit si et seulement si $A(w) \subset I_{-\varepsilon} - I_0$, et w est trivial si et seulement si $A(w)$ est vide.

Le sens direct est donc immédiat. Réciproquement, si w est W_0-réduit et s'il existe $i_{-\varepsilon} \in A(w) \cap (I_{-\varepsilon} - I_0)$, alors $A(w)$ est non vide, et contenu dans $I - I_0$. Comme $m_{i_{-\varepsilon}, j} = \infty$ pour tout $j \in I_\varepsilon - I_0$, l'ensemble $A(w)$ ne rencontre pas $I_\varepsilon - I_0$, donc $A(w) \subset I_{-\varepsilon} - I_0$. Ceci montre le résultat. $\square$

Proposition 4.2 *Posons $\varepsilon_i = (-1)^{i+1}\varepsilon$ et n un entier au moins 1. Soient $g_1, \ldots, g_n$ dans W tels que $g_i \in W_{\varepsilon_i} - \{1\}$ et g_i est W_0-réduit. Alors $w = g_1 \ldots g_n$ est $W_{-\varepsilon_n}$-réduit, $A(w) \cap (I_{\varepsilon_n} - I_0) \neq \emptyset$ et $|w| = |g_1| + \ldots + |g_n|$; en particulier $w \neq 1$.*

Preuve. On procède par récurrence. Pour $n = 1$, le lemme précédent conclut, puisque $A(g_1) \neq \emptyset$ et $A(g_i) \subset I_{\varepsilon_i} - I_0$.

Supposons la proposition vraie au rang n. Étudions alors $w' = g_1 \ldots g_n g_{n+1}$. Posons $w = g_1 \ldots g_n$. Par l'hypothèse de récurrence, w est $W_{-\varepsilon_n}$-réduit, $A(w) \cap (I_{\varepsilon_n} - I_0) \neq \emptyset$ et $|w| = |w_1| + \ldots + |w_n|$. Remarquons que $-\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1}$.

Pour montrer que w' est $W_{-\varepsilon_{n+1}}$-réduit, il suffit d'après le lemme précédent de vérifier qu'il est W_{I_0}-réduit et que $A(w) \cap (I_{\varepsilon_{n+1}} - I_0) \neq \emptyset$.

Soit $w_0 \in W_0$. Alors $w'w_0 = wg_{n+1}w_0$; mais $g_{n+1}w_0 \in W_{\varepsilon_{n+1}}$. Puisque w est $W_{-\varepsilon_n}$-réduit, on a donc $|w'w_0| = |w| + |g_{n+1}w_0|$. Par hypothèse, g_{n+1} est W_0-réduit, donc finalement $|w'w_0| = |w| + |g_{n+1}| + |w_0|$. Pour $w_0 = 1$ cette équation donne $|w'| = |w| + |g_{n+1}|$. Donc pour $w_0 \in W_0$ quelconque, on trouve $|w'w_0| = |w'| + |w_0|$. C'est dire que w' est W_0-réduit.

D'autre part, par hypothèse, il existe $i \in A(g_{n+1}) \cap (I_{\varepsilon_{n+1}} - I_0)$. Comme $w's_i = w(g_{n+1}s_i)$ et $g_{n+1} \in W_{\varepsilon_{n+1}}$, on a $g_{n+1}s_i \in W_{\varepsilon_{n+1}}$ et $|g_{n+1}s_i| = |g_{n+1}| - 1$. Donc puisque w est $W_{-\varepsilon_n}$-réduit, on a $|w's_i| = |w| + |g_{n+1}| - 1 = |w'| - 1$, d'où $s_i \in A(w') \cap (I_{\varepsilon_{n+1}} - I_0)$. $\square$

4.2 L'arbre d'un immeuble de type scindé.

Soit (W, I) un système de Coxeter, muni d'un scindement (I_+, I_-) au dessus de $I_0 = I_+ \cap I_-$. Soit X un système de chambres sur I. Tout I_0-résidu $R_0(C)$ de I est contenu dans un unique I_+-résidu $R_+(C)$ et un unique I_--résidu $R_-(C)$. Formons alors le graphe $T(X) = T_{I_+, I_-}(X)$ dont les sommets sont les $I_\pm$-résidus (qui sont des systèmes de chambres sur $I\pm$) de X, dont les arêtes sont les I_0-résidus de X, les deux extrémités d'un I_0-résidu $R_0(C)$ étant $R_+(C)$, $R_-(C)$. Deux résidus de types différents d'un système de chambres, même si leurs ensembles sous-jacents sont égaux, sont de partitions distinctes (car indexées par des ensembles distincts), donc sont distincts. Par conséquent, le graphe $T(X)$ est biparti.

Lemme 4.3 *Si Δ est un immeuble de type (W, I), alors le graphe $T(\Delta)$ est un arbre.*

Preuve. Toute galerie Γ de Δ d'extrémités C, C' définit naturellement un chemin d'arêtes sans aller-retour $p(\Gamma)$ dans $T(\Delta)$ d'extrémités $R_0(C), R_0(C')$, de la manière suivante. Pour

C une chambre de Δ, posons $p((C)) = (R_0(C))$. Supposons $p(\Gamma)$ défini pour toute galerie Γ de longueur $\leq n$. Pour Γ une galerie de longueur n, d'extrémité C', et C'' une chambre i-adjacente à C' (et différente de C'), posons

$$p((\Gamma, C'')) = \begin{cases} p(\Gamma) & \text{si } i \in I_0 \\ (p(\Gamma), R_0(C'')) & \text{sinon} \end{cases} .$$

La connexité de Δ entraîne alors celle de $T(\Delta)$.

Comme $T(\Delta)$ est biparti, il n'existe pas de boucle dans $T(\Delta)$. Soit γ un chemin d'arêtes sans aller-retour dans $T(\Delta)$, ayant $n+1$ arêtes, avec $n \geq 1$. Il existe alors des I_0-résidus $R_0^0, \ldots, R_n^0$, une suite $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ dans $\{+,-\}$ avec $\varepsilon_{i+1} = -\varepsilon_i$ pour $i = 1, \cdots, n-1$, et un I_{ε_k}-résidu $R_k^{\varepsilon_k}$ pour $k = 1, \cdots, n$, tels que $\gamma = (R_0^0, \ldots, R_n^0)$, et avec $R_{j+1}^{\varepsilon_{j+1}}$ contenant R_j^0 et R_{j+1}^0 pour $j = 0, \cdots, n-1$.

On fixe une chambre C_0 dans R_0^0, et par récurrence, on note $C_{i+1} \in R_{i+1}^0$ la projection de C_i sur le I_0-résidu R_{i+1}^0 de $R_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}$ pour $i = 1, \cdots, n-1$.

Pour $i = 1, \ldots, n$, posons $g_i = \delta(C_{i-1}, C_i)$, qui appartient à $W_{I_{\varepsilon_i}}$ par convexité des I_{ε_i}-résidus, et qui est W_{I_0}-réduit par définition de la projection (voir par exemple [Ron]). Notons que $g_i \neq 1$, car sinon $R_i^0 = R_{i+1}^0$. Par la proposition 4.2, si $w = g_1 \ldots g_n$, alors $|w| = |g_1| + \ldots + |g_n|$ et w est W_{I_0}-réduit et non trivial.

Considérons une galerie géodésique Γ_i de Δ entre C_i et C_{i+1}. La galerie $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \ldots \cdot \Gamma_n$, obtenue en concaténant (sans répétition) les Γ_i, joint C_1 à C_{n+1}. Elle est de type réduit d'après ce qui précède. Donc C_1 et C_{n+1} ne sont pas dans le même I_0-résidu (sinon, par convexité, la galerie Γ est contenue dans un I_0-résidu, donc $w \in W_{I_0}$, ce qui contredit le fait que w est W_{I_0}-réduit et non trivial). La galerie γ de $T(\Delta)$ n'est donc pas un cycle d'arêtes, ce qui achève de prouver que $T(\Delta)$ est un arbre. $\square$

Remarquons que si Δ, Δ' sont deux immeubles de type (W, I), et si $\varphi : \Delta \to \Delta'$ est un isomorphisme, comme l'image par φ d'un I_α-résidu est un I_α-résidu pour tout $\alpha \in \{-, 0, +\}$, et puisque φ préserve l'inclusion des résidus, alors l'application φ induit un isomorphisme de l'arbre $T(\Delta)$ dans l'arbre $T(\Delta')$.

4.3 Modèles de systèmes de chambres et $I_\pm$-voisinages de chambres

Le but de cette section est de mettre en place les processus de recollement qui nous serviront en section 4.5 pour construire des ensembles non dénombrable de classes d'isomorphismes d'immeubles. On fixe un système de Coxeter (W, I), muni d'un scindement (I_+, I_-).

Un *modèle* (ou $I_\pm$-modèle pour préciser) est un triplet $\mathcal{M} = (\Delta_+, \Delta_-, \Delta_0)$ avec Δ_+, Δ_- et Δ_0 trois immeubles de types respectifs W_{I_+}, W_{I_-} et W_{I_0}.

Soit $\mathcal{M} = (\Delta_+, \Delta_-, \Delta_0)$ un modèle. Notons G_+, G_-, G_0 le groupe d'automorphismes (préservant le type) de l'immeuble $\Delta_+, \Delta_-, \Delta_0$. Nous dirons que $\mathcal{M}$ est *transitif* si

1. il existe dans $\Delta_\pm$ un I_0-résidu isomorphe à Δ_0;

2. le groupe $G_\pm$ est transitif sur les I_0-résidus de $\Delta_\pm$ qui sont isomorphes à Δ_0.

Nous dirons qu'un système de chambres X de type I est *modelable* sur $\mathcal{M}$ si les conditions suivantes sont remplies

1. tout I_ε-résidu sans bord de X est isomorphe à Δ_ε (pour $\varepsilon = \pm$);

2. X est la réunion de ses I_+-résidus sans bord et I_--résidus sans bord;

3. si $R_\varepsilon(C)$ sont des I_ε-résidus sans bord pour $\varepsilon = \pm$, alors $R_0(C) = R_+(C) \cap R_-(C)$ et $R_0(C)$ est isomorphe à Δ_0.

Soit $f_\pm$ un isomorphisme de Δ_0 sur un I_0-résidu de $\Delta_\pm$. Notons $V = V_{f_+,f_-}$ le quotient de l'union disjointe de Δ_+, Δ_- et Δ_0 par la relation identifiant $C, f_+(C)$ et $f_-(C)$ pour tout $C \in \Delta_0$. Notons φ_+, φ_- et φ_0 les applications canoniques injectives de Δ_+, Δ_- et Δ_0 dans V. Pour tout $i \in I$, on décrète que deux chambres C et C' de V sont i-adjacentes si et seulement si elles sont égales ou sont les images de deux chambres i-adjacentes de Δ_α par φ_α pour un $\alpha \in \{-, 0, +\}$ tel que $i \in I_\alpha$. On vérifie que la i-adjacence est une relation d'équivalence sur V, donc V est un système de chambres sur I. On vérifie que le seul $I_\pm$-résidu sans bord de V est $\varphi_\pm(\Delta_\pm)$. Comme tout résidú d'un immeuble est sans bord, le système de chambres V est modelable sur $\mathcal{M}$. Nous dirons que V_{f_+,f_-} est le système de chambres *obtenu en recollant* Δ_+ et Δ_- par (f_+, f_-).

Nous appelerons *$I_\pm$-voisinage modelable sur $\mathcal{M}$* tout système de chambres V sur I tel qu'il existe $f_\pm$ un isomorphisme de Δ_0 sur un I_0-résidu de $\Delta_\pm$, pour lesquels V est isomorphe à V_{f_+,f_-}.

Exemple. Si C est une chambre d'un système de chambres X sur I, nous appellerons *$I_\pm$-voisinage de C dans X* la partie de X

$$V(C) = V_{I_+,I_-}(C) = R_+(C) \cup R_-(C) \ .$$

Tout $I_\pm$-voisinage V de chambre C d'un immeuble de type (W, I) modelable sur $\mathcal{M}$ est bien un $I_\pm$-voisinage modelable sur $\mathcal{M}$. En effet, un résidu d'un immeuble est un immeuble et l'intersection de deux résidus d'un immeuble est vide ou un résidu de type l'intersection des types. Donc V est isomorphe au recollement de $R_+(C) \simeq \Delta_+$ et $R_-(C) \simeq \Delta_-$ par les inclusions $f_\pm : R_0(C) \to R_\pm(C)$, et $R_0(C) \simeq \Delta_0$.

Pour montrer que les constructions non dénombrables de la section 4.5 fournissent des immeubles deux à deux non isomorphes, nous aurons besoin de savoir distinguer les classes d'isomorphismes de $I_\pm$-voisinages modelables sur $\mathcal{M}$.

Notons $\mathcal{O}(M)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de $I_\pm$-voisinages modelables sur $\mathcal{M}$. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des couples (f_+, f_-), avec $f_\pm$ un isomorphisme de Δ_0 sur un I_0-résidu de $\Delta_\pm$. Le groupe $G_+ \times G_- \times G_0$ agit (à gauche) sur $\mathcal{F}$ par

$$((g_+, g_-, g_0), (f_+, f_-)) \mapsto (g_+ \circ f_+ \circ g_0^{-1}, g_- \circ f_- \circ g_0^{-1}).$$

Proposition 4.4 *L'application de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{O}(M)$, qui à (f_+, f_-) associe la classe d'isomorphisme de V_{f_+,f_-}, induit une bijection de $(G_+ \times G_- \times G_0)\backslash\mathcal{F}$ dans $\mathcal{O}(M)$.*

Preuve. Pour $(f_+, f_-), (f'_+, f'_-) \in \mathcal{F}$, et $\alpha \in \{-, 0, +\}$, notons $\varphi_\alpha : \Delta_\alpha \to V_{f_+,f_-}$ et $\varphi'_\alpha : \Delta_\alpha \to V_{f'_+,f'_-}$ les applications canoniques (injectives), vérifiant $\varphi_\pm \circ f_\pm = \varphi_0$ et $\varphi'_\pm \circ f'_\pm = \varphi'_0$.

Supposons tout d'abord qu'il existe $(g_+, g_-, g_0) \in G_+ \times G_- \times G_0$ tel que $f'_\pm = g_\pm \circ f_\pm \circ g_0^{-1}$. Posons $h_\pm = \varphi'_\pm \circ g_\pm \circ {\varphi_\pm}^{-1}$. Alors $h_\pm$ est un isomorphisme de $\varphi_\pm(\Delta_\pm)$ sur $\varphi'_\pm(\Delta_\pm)$. Sur $\varphi_0(\Delta_0)$, ces deux isomorphismes coïncident, étant tous deux égaux à $\varphi'_0 \circ g_0 \circ {\varphi_0}^{-1}$. Donc h_+ et h_- se recollent en un isomorphisme de systèmes de chambres de V_{f_+,f_-} sur $V_{f'_+,f'_-}$.

Réciproquement, soit $\psi : V_{f_+,f_-} \to V_{f'_+,f'_-}$ un isomorphisme. En particulier, Ψ envoie $\varphi_\pm(\Delta_\pm)$ sur $\varphi'_\pm(\Delta_\pm)$, car ces $I_\pm$-résidus sont les seuls à être sans bord. De plus, le I_0-résidu $\phi_0(\Delta_0)$, intersection de $\varphi_+(\Delta_+)$ et $\varphi_-(\Delta_-)$, est envoyé par ψ sur $\phi'_0(\Delta_0)$. Pour $\alpha \in \{-,0,+\}$, posons $g_\alpha = (\varphi'_\alpha)^{-1} \circ \psi \circ \varphi_\alpha$, qui est un automorphisme de Δ_α. Alors $\varphi'_\pm \circ f'_\pm \circ {\varphi'_0}^{-1} \circ \psi = \psi \circ \varphi_\pm \circ f_\pm \circ \varphi_0^{-1}$ sur $\varphi_0(\Delta_0)$, donc $\varphi'_\pm \circ f'_\pm \circ g_0 \circ \varphi_0^{-1} = \varphi'_\pm \circ g_\pm \circ f_\pm \circ \varphi_0^{-1}$ sur $\varphi_0(\Delta_0)$, d'où $f'_\pm = g_\pm \circ f_\pm \circ g_0^{-1}$ sur Δ_0.

Le résultat en découle. $\square$

Soit $\mathcal{M} = (\Delta_+, \Delta_-, \Delta_0)$ un modèle transitif. Fixons un isomorphisme $f_{0,\pm}$ de Δ_0 sur un I_0-résidu $\Delta_{0,\pm}$ de $\Delta_\pm$. Notons $\Gamma(f_{0,\pm})$ le sous-groupe de G_0 formé des éléments qui, une fois conjugués par $f_{0,\pm}$, s'étendent à tout $\Delta_\pm$.

Corollaire 4.5 *L'ensemble $\mathcal{O}(\mathcal{M})$ est en bijection avec $\Gamma(f_{0,-})\backslash G_0/\Gamma(f_{0,+})$.*

Preuve. Par transitivité de $\mathcal{M}$, tout couple $(f_+, f_-) \in \mathcal{F}$ est équivalent modulo $G_+ \times G_- \times \{\mathrm{id}_{G_0}\}$ à un couple $(g_+, g_-) \in \mathcal{F}$ tel que $g_\pm(\Delta_0) = \Delta_{0,\pm}$. Ce couple (g_+, g_-) est équivalent modulo $\{\mathrm{id}_{G_+}\} \times \{\mathrm{id}_{G_-}\} \times G_0$ à un (unique) couple $(f_{0,+}, h_-) \in \mathcal{F}$ avec $h_-(\Delta_0) = \Delta_{0,-}$ (prendre $g_0 = (f_{0,+})^{-1} \circ g_+$).

Deux couples $(f_{0,+}, h_-)$ et $(f_{0,+}, h'_-)$ dans $\mathcal{F}$ avec $h_-(\Delta_0) = h'_-(\Delta_0) = \Delta_{0,-}$ sont équivalents modulo $G_+ \times G_- \times G_0$ si et seulement s'il existe $(\varphi_+, \varphi_-, \varphi_0) \in G_+ \times G_- \times G_0$ tel que

$$\varphi_+ \circ f_{0,+} \circ {\varphi_0}^{-1} = f_{0,+} \quad \text{et} \quad \varphi_- \circ h_- \circ {\varphi_0}^{-1} = h'_- \ .$$

L'égalité de gauche exprime que φ_0 est dans $\Gamma(f_{0,+})$. L'égalité de droite exprime alors que $f_{0,-}^{-1} \circ h_-$ et $f_{0,-}^{-1} \circ h'_-$ sont dans la même double classe à gauche modulo $\Gamma(f_{0,-})$ et à droite modulo $\Gamma(f_{0,+})$.

Ceci montre que l'application de $(G_+ \times G_- \times G_0)\backslash\mathcal{F}$ dans $\Gamma(f_{0,-})\backslash G_0/\Gamma(f_{0,+})$ qui à la classe de (f_+, f_-) associe la double classe de $f_{0,-}^{-1} \circ h_-$ est bien définie et est une bijection. On conclut alors par la proposition précédente. $\square$

Remarque 4.6 Par ce corollaire, il existe (à isomorphisme près) un unique $I_\pm$-voisinage modelable sur $\mathcal{M}$ si et seulement si $\Gamma(f_{0,-}).\Gamma(f_{0,+}) = G_0$. En particulier, si tout automorphisme d'un I_0-résidu de $\Delta_\pm$ isomorphe à Δ_0 est la restriction d'un élément de $G_\pm$, alors il existe un unique $I_\pm$-voisinage modelable sur $\mathcal{M}$.

Corollaire 4.7 *Supposons qu'il existe une bijection $\tau : I_+ \to I_-$ fixant chaque élément de I_0 et un isomorphisme $F : \Delta_+ \to \Delta_-$ au dessus de τ. Alors, il existe (à isomorphisme près) un unique $I_\pm$-voisinage modelable sur $\mathcal{M}$ si et seulement si $\Gamma(f_{0,+}) = G_0$.*

Preuve. Si τ, F existent, alors il existe $f_{0,+}, f_{0,-}$ tels que $\Gamma(f_{0,+}) = \Gamma(f_{0,-})$. En effet, vu l'hypothèse de transitivité, on peut supposer, quitte à pré- et postcomposer par des éléments de G_+ et G_-, que F envoie $\Delta_{0,+}$ sur $\Delta_{0,-}$. Alors il suffit de prendre $f_{0,+}$ quelconque et $f_{0,-} = F \circ f_{0,+}$.

La conclusion du corollaire découle alors de la remarque 4.6 précédente. $\square$

Notre construction non dénombrable d'immeubles par une méthode de recollements arborescents décrite en section 4.4 repose sur la possibilité de trouver deux $I_\pm$-voisinages modelables sur $\mathcal{M}$ non isomorphes. Nous donnons ci-dessous, après quelques notations, un critère d'existence de deux $I_\pm$-voisinages modelables sur $\mathcal{M}$ non isomorphes, qui sera utilisé pour les applications pratiques en section 4.5.

Soit V le $I_\pm$-voisinage obtenu en recollant Δ_+ et Δ_- par $(f_{0,+}, f_{0,-})$. On suppose donné une partie J de I telle que $(J_+ = J \cap I_+, J_- = J \cap I_-)$ est un scindement de (W_J, J) au dessus de $J_0 = J \cap I_0$. On fixe un J_0-résidu Σ_0 de Δ_0. On appelle $\Sigma_\pm$ le $J_\pm$-résidu dans $\Delta_\pm$ de $\Sigma_{0,\pm} = f_{0,\pm}(\Sigma_0)$. On obtient ainsi un $J_\pm$-modèle $\mathcal{M}_J = (\Sigma_+, \Sigma_-, \Sigma_0)$. Soit U le $J_\pm$-voisinage modelable sur $\mathcal{M}_J$ obtenu en recollant Σ_+ et Σ_- par $(s_{0,+}, s_{0,-}) = (f_{0,+|\Sigma_0}, f_{0,-|\Sigma_0})$.

Proposition 4.8 *Supposons que le couple $(f_{0,+}, f_{0,-})$ et J vérifient*

1. *$\mathcal{M}_J$ est transitif,*
2. *tous les $J_\pm$-voisinages de chambres dans V modelables sur $\mathcal{M}_J$ sont isomorphes à U,*
3. *il existe un $J_\pm$-voisinage U' modelable sur $\mathcal{M}_J$ et non isomorphe à U,*
4. *tout automorphisme de Σ_0 s'étend à Δ_0.*

Alors il existe un $I_\pm$-voisinage V' modelable sur $\mathcal{M}$, non isomorphe à V.

Preuve. Le système de chambres U' est isomorphe au recollement de Σ_+ et Σ_- par un couple de plongements $(s_+, s_-) : \Sigma_0 \to \Sigma_+ \times \Sigma_-$. Par transitivité de $\mathcal{M}_J$, on peut supposer que $s_\pm(\Sigma_0) = \Sigma_{0,\pm}$. Puis quitte à précomposer s_+ et s_- par un automorphisme convenable, on peut supposer que $s_+ = s_{0,+}$. Alors $s_- = s_{0,-} \circ \sigma$ avec $\sigma \in \mathrm{Aut}(\Sigma_0)$.

D'après l'hypothèse (4), il existe $\varphi \in \mathrm{Aut}(\Delta_0)$ tel que $\varphi_{|\Sigma_0} = \sigma$. Soit donc V' le $I_\pm$-voisinage modelable sur $\mathcal{M}$ obtenu en recollant Δ_+ et Δ_- par $(f_{0,+}, f_{0,-} \circ \varphi)$.

Soit C une chambre dans l'image canonique de Σ_0 dans V'. Le $J_\pm$-voisinage de C dans V' est modelable sur $\mathcal{M}_J$ et isomorphe à U'. Donc les $J_\pm$-voisinages de chambres dans V' modelables sur $\mathcal{M}_J$, ne sont pas tous isomorphes à U. Par la seconde hypothèse, V' n'est pas isomorphe à V. □

Nous donnerons dans la section 4.5 des exemples de $W, I, I_\pm, \mathcal{M} = (\Delta_+, \Delta_-, \Delta_0)$, $(f_{0,+}, f_{0,-})$, J vérifiant les hypothèses de cette section et de la proposition ci-dessus.

4.4 Arbres d'immeubles

Soit (W, I) un système de Coxeter, muni d'un scindement (I_+, I_-). Un *arbre d'immeubles de type* (W, I) (ou $I_\pm$-arbre d'immeubles de type (W, I) pour préciser) est la donnée, notée $(T, (\Delta_x), (f_{x,a}))$, des objets suivants:

- un arbre T, muni d'une application c, appelée *couleur*, de l'ensemble VT des sommets de T dans $\{+, -\}$, qui est bijective sur l'ensemble des extrémités de toute arête;
- pour chaque sommet x de T, un immeuble Δ_x de type $W_{I_{c(x)}}$;
- pour chaque arête a de T, un immeuble Δ_a de type W_{I_0};
- pour chaque sommet x de T, une identification entre l'ensemble des arêtes de T dont une extrémité est x et l'ensemble des I_0-résidus de Δ_x;

– pour toute arête a de T dont une extrémité est x, un isomorphisme $f_{x,a}$ de Δ_a sur le I_0-résidu de Δ_x correspondant à a.

Nous dirons que cet arbre d'immeuble est *modelable* sur un modèle $\mathcal{M} = (\Delta_+, \Delta_-, \Delta_0)$, si pour tout sommet x de couleur $\pm$, l'immeuble Δ_x est isomorphe à $\Delta_\pm$, et pour toute arête a, l'immeuble Δ_a est isomorphe à Δ_0.

Par exemple, si X est un immeuble de type (W, I), si $T(X)$ est l'arbre construit en section 4.2, si $\Delta_\sigma(X) = \sigma$ pour tout sommet ou arête σ de $T(X)$, et $f_{x,a}(X) : \Delta_a(X) \to \Delta_x(X)$ est l'inclusion, alors $(T(X), (\Delta_x(X)), (f_{x,a}(X)))$ est un arbre d'immeubles. Si X est modelable sur un modèle $\mathcal{M}$, alors cet arbre d'immeuble l'est aussi.

Un *isomorphisme d'arbres d'immeubles* entre $(T, (\Delta_x), (f_{x,a}))$ et $(T', (\Delta'_x), (f'_{x,a}))$ est la donnée de :

– un isomorphisme d'arbres colorés $\phi : T \to T'$;

– pour tout sommet et toute arête x de T, un isomorphisme d'immeubles $\phi_x : \Delta_x \to \Delta'_{\phi(x)}$

de sorte que, pour toute arête a de T dont une extrémité est x,

$$\phi_x \circ f_{x,a} = f'_{\phi(x),\phi(a)} \circ \phi_a \ .$$

À tout arbre d'immeubles $(T, (\Delta_x), (f_{x,a}))$, on peut associer $\Delta = \Delta(T, (\Delta_x), (f_{x,a}))$, un système de chambres sur I, comme suit. Comme ensemble, Δ est le quotient de la réunion disjointe des Δ_x, pour x sommet de T, par la relation identifiant $f_{x,a}(C)$ et $f_{y,a}(C)$ pour toute arête a de T d'extrémités x, y, et toute chambre C de Δ_a. Il faut noter que cette relation est une relation d'équivalence puisque, pour tout sommet x de T fixé, les images des $f_{x,a}$ sont disjointes. Pour tout sommet ou arête σ de T, on a donc une application canonique injective de Δ_σ dans Δ, par laquelle on identifie Δ_σ avec une partie de Δ. On décrète alors que deux chambres C et C' de Δ sont i-adjacentes si et seulement si elles sont égales ou si elles sont les images de deux chambres i-adjacentes de l'un des immeubles Δ_σ. On vérifie facilement les propriétés suivantes:

1. Δ est un système de chambres sur I, avec $\Delta_x \cap \Delta_y$ non vide si et seulement si x et y sont des extrémités d'une même arête de T; les $I_\pm$-résidus de Δ sont les Δ_x avec x sommet de T de couleur $\pm$, et les I_0-résidus sont les Δ_a avec a arête de T ;

2. $T(\Delta)$ est canoniquement isomorphe à T;

3. si l'arbre d'immeubles $(T, (\Delta_x), (f_{x,a}))$ est modelable sur un modèle $\mathcal{M}$, alors Δ aussi;

4. si B est un immeuble de type (W, I), alors $\Delta(T(B), (\Delta_x(B)), (f_{x,a}(B)))$ est un système de chambres isomorphe à B;

5. un isomorphisme d'arbres d'immeubles entre $(T, (\Delta_x), (f_{x,a}))$ et $(T', (\Delta'_x), (f'_{x,a}))$ induit un isomorphisme de systèmes de chambres entre les systèmes de chambres $\Delta(T, (\Delta_x), (f_{x,a}))$ et $\Delta(T', (\Delta'_x), (f'_{x,a}))$.

Proposition 4.9 *Le système de chambres Δ est un immeuble de type (W, I).*

Remarque. Si au lieu d'un arbre d'immeubles, on considère un graphe de système de chambres dont les revêtements universels sont des immeubles, on obtient un système de chambre, dont le revêtement universel (au sens des systèmes de chambres) est un immeuble. En particulier, en utilisant des graphes finis, ceci permet de construire des immeubles Δ assez réguliers, puisque le groupe d'automorphismes de Δ agit alors comme un réseau uniforme de $T(\Delta)$.

Preuve. Montrons que Δ est un immeuble, en utilisant la caractérisation "locale" donnée dans [Ron], Theorem 4.9 page 47 (voir aussi [Tit3], Corollary 3, page 539). Nous devons donc montrer que Δ est un système de chambres de type (W, I), que ses résidus sphériques (de rang ≤ 3) sont des immeubles et que Δ est 2-simplement connexe.

Fait 1 : Le système de chambres Δ est 2-simplement connexe.

Preuve. Il s'agit de montrer que deux galeries de mêmes extrémités sont 2-homotopes dans Δ.

Soit Γ une galerie de Δ. Alors il existe une unique suite $\sigma_+(\Gamma) = (\Gamma_0^+, \Gamma_1^-, \Gamma_1^+, \ldots, \Gamma_n^-, \Gamma_n^+)$ de galeries de Δ, une unique suite $s_+(\Gamma) = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de sommets de T de couleur $+$ et une unique suite $s_-(\Gamma) = (y_1, \ldots, y_n)$ de sommets de T de couleur $-$, telles que

- l'extrémité de Γ_i^+ est l'origine de Γ_{i+1}^-, l'extrémité de Γ_i^- est l'origine de Γ_i^+, et $\Gamma = \Gamma_0^+ \cdot \Gamma_1^- \cdot \Gamma_1^+ \cdot \ldots \cdot \Gamma_n^- \cdot \Gamma_n^+$;
- chaque galerie Γ_i^+ est contenue dans Δ_{x_i}, chaque galerie Γ_i^- est contenue dans Δ_{y_i};
- pour $1 \leq i \leq n$ (et $i \neq n$ si $\varepsilon = +$), la galerie Γ_i^ε a au moins deux chambres et ses deux premières chambres sont j-adjacentes avec $j \notin I_{-\varepsilon}$.

Nous noterons $p_+(\Gamma)$ le chemin $(x_0, y_1, x_1, \ldots, y_n, x_n)$ de sommets (consécutifs) de T. Par exemple, si Γ reste dans un I_+-résidu Δ_x de Δ, alors $p_+(\Gamma) = (x)$.

Montrons que toute galerie Γ de Δ est 2-homotope à une galerie Γ', de mêmes extrémités que Γ, et telle que $p_+(\Gamma')$ est sans aller-retour.

Pour cela, supposons qu'apparaisse dans $p_+(\Gamma)$ un aller-retour et montrons comment le supprimer par une 2-homotopie. Nous pouvons supposer que l'aller-retour se fait en un sommet de couleur $+$, de sorte que

$$p_+(\Gamma) = (x_0, \ldots, x_i, y_{i+1}, x_{i+1}, y_{i+2} = y_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)\ .$$

Alors les extrémités de Γ_{i+1}^+ sont toutes deux dans $\Delta_{x_{i+1}} \cap \Delta_{y_{i+1}}$, qui est un I_0-résidu $\Delta_{a_{i+1}}$ de Δ. Comme $\Delta_{a_{i+1}}$ est connexe et $\Delta_{x_{i+1}}$ 2-simplement connexe, il existe une galerie Γ'_{i+1} de mêmes extrémités que Γ_{i+1}^+, contenue dans $\Delta_{a_{i+1}}$ et 2-homotope à Γ_{i+1}^+ (dans $\Delta_{x_{i+1}}$).

Ainsi Γ est 2-homotope à $\Gamma' = \Gamma_0^+ \cdot \ldots \cdot \Gamma_i^+ \cdot (\Gamma_{i+1}^- \cdot \Gamma'_{i+1} \cdot \Gamma_{i+2}^-) \cdot \Gamma_{i+2}^+ \cdot \ldots \cdot \Gamma_n^+$. On a $\sigma_+(\Gamma') = (\Gamma_0^+, \ldots, \Gamma_i^+, (\Gamma_{i+1}^- \cdot \Gamma'_{i+1} \cdot \Gamma_{i+2}^-), \Gamma_{i+2}^+, \ldots, \Gamma_n^+)$ et $p_+(\Gamma') = (x_0, \ldots, x_i, y_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$.

Montrons enfin que deux galeries Γ_1, Γ_2 de mêmes extrémités sont 2-homotopes.

En effet, $\Gamma = \Gamma_2^{-1} \cdot \Gamma_1$ est une galerie fermée d'origine une chambre C. Donc $p_+(\Gamma)$ est un lacet de T basé au sommet x de couleur $+$ tel que Δ_x est le I_+-résidu de C dans Δ. D'après ce qui précède Γ est 2-homotope à Γ', une galerie fermée basée en C, telle que $p_+(\Gamma')$ est sans aller-retour. Mais comme $p_+(\Gamma')$ est un lacet basé en x et que T est un arbre, on a en fait $p_+(\Gamma') = (x)$.

Alors Γ' est une galerie fermée de l'immeuble Δ_x, donc est 2-homotope à la galerie constante (C). Finalement $\Gamma_2^{-1} \cdot \Gamma_1$ est 2-homotope à (C), donc Γ_1 et Γ_2 sont 2-homotopes. $\square$

Fait 2 : Tout résidu sphérique de Δ est un immeuble.

Preuve. Tout tel résidu est nécessairement contenu dans Δ_x pour x un sommet de T. Car si le type d'une galerie Γ n'est contenu ni dans I_+ ni dans I_-, alors ce type doit contenir un $i_+ \in I_+ - I_0$ et un $i_- \in I_- - I_0$. Comme $m_{i_+,i_-} = +\infty$, la galerie Γ n'est contenue dans aucun résidu sphérique.

Puisque les Δ_x sont eux-mêmes des immeubles, leurs résidus (sphériques) sont des immeubles, ce qui montre le résultat. $\square$

Fait 3 : Le système de chambres Δ est de type (W, I).

Preuve. Par construction, Δ est sans bord.

Soit $(i,j) \in I^2$ avec $i \neq j$. Si $m_{i,j} < \infty$, alors on a vu ci-dessus que tout $\{i,j\}$-résidu de Δ est un immeuble d'un Δ_x, donc un $m_{i,j}$-gone généralisé.

Si $m_{i,j} = \infty$, considérons une galerie Γ non réduite à une chambre et dont les adjacences sont alternativement de type i, j (ou j, i). Alors toutes les galeries de $\sigma_+(\Gamma)$ sont aussi de ce type (sauf peut-être Γ_0^+, Γ_n^+, éventuellement réduites à une chambre). Ce sont donc les uniques géodésiques des immeubles Δ_{x_k} ou Δ_{y_k} entre leurs extrémités. Par construction de $\sigma_+(\Gamma)$, pour $i \geq 1$, ces galeries commencent par sortir du I_0-résidu d'où elles démarrent. Mais elles ne peuvent plus y revenir, par stricte convexité des résidus d'un immeuble. Donc $p_+(\Gamma)$ est sans aller-retour et Γ n'est jamais un lacet. $\square$

Les faits 1,2,3 montrent que Δ vérifie la caractérisation "locale" des immeubles, donc est un immeuble. $\square$

4.5 Constructions non dénombrables d'immeubles

Théorème 4.10 *Soit (W, I) un système de Coxeter muni d'un scindement (I_+, I_-). On suppose que $\mathcal{M} = (\Delta_+,\, \Delta_-,\, \Delta_0)$ est un modèle transitif tel que*

1. *tous les I_0-résidus de $\Delta_\pm$ sont isomorphes à Δ_0,*
2. *il existe deux $I_\pm$-voisinages modelables sur $\mathcal{M}$ non isomorphes.*

Alors il existe (à isomorphisme typé près) une infinité non dénombrable d'immeubles de type (W, I) modelables sur $\mathcal{M}$.

Preuve. Pour tout immeuble Δ modelable sur $\mathcal{M}$, notons $T(\Delta)$ l'arbre associé (voir section 4.2) et $\chi_\Delta : T(\Delta)_{(1)} \to \mathcal{O}(\mathcal{M})$ l'application envoyant une arête a de $T(\Delta)$ sur la classe d'isomorphisme de V_a, avec V_a est le $I_\pm$-voisinage d'une chambre (quelconque) du I_0-résidu Δ_a de Δ correspondant à a. Notons que $T(\Delta)$ est un arbre birégulier de valences v_+, v_-, où $v_\pm$ est le cardinal de l'ensemble des I_0-résidus de $\Delta_\pm$. Remarquons que $v_\pm \geq 2$ car $I_0 \neq I_\pm$.

Soient Δ_1, Δ_2 deux immeubles modelables sur $\mathcal{M}$. Alors un isomorphisme de Δ_1 sur Δ_2 induit un isomorphisme entre les arbres colorés $(T(\Delta_1), \chi_{\Delta_1})$ et $(T(\Delta_2), \chi_{\Delta_2})$.

D'autre part, à automorphisme d'arbre coloré près, l'ensemble des colorations des arêtes de l'arbre birégulier de valences $v_+, v_- \geq 2$ dans un ensemble ayant au moins deux éléments est non dénombrable.

Pour établir le théorème, il reste donc à montrer le résultat suivant: si T est l'arbre birégulier (de sommets x de couleurs $\varepsilon(x) \in \{+,-\}$) de valences v_+, v_- et si χ est une fonction quelconque de l'ensemble des arêtes de T dans $\mathcal{O}(\mathcal{M})$, alors il existe un immeuble Δ modelable sur $\mathcal{M}$ tel que $(T(\Delta), \chi_\Delta) = (T, \chi)$.

Nous construisons Δ comme l'immeuble associé à un arbre d'immeubles $(T, (\Delta_x), (f_{x,a}))$ modelable sur $\mathcal{M}$, dont l'arbre sous-jacent est T.

Pour toute arête a de T, posons $\Delta_a = \Delta_0$. Pour tout sommet x de T, posons $\Delta_x = \Delta_{\varepsilon(x)}$. Fixons pour tout sommet x de T une identification arbitraire de l'ensemble $lk(x,T)$ des arêtes dont une extrémité est x avec l'ensemble des I_0-résidus de Δ_x. Nous noterons R_a le I_0-résidu de Δ_x correspondant à l'arête $a \in lk(x,T)$.

Pour définir les applications $f_{x,a} : \Delta_a = \Delta_0 \to \Delta_x = \Delta_{\varepsilon(x)}$, choisissons pour toute arête a de T des plongements $g_{a,\pm} : \Delta_0 \to \Delta_\pm$ tels que $\chi(a)$ soit la classe d'isomorphisme de $V_{g_{a,+},g_{a,+}}$. Pour toute arête a de T dont une extrémité est x, les hypothèses assurent que $\mathrm{Aut}(\Delta_x)$ est transitif sur les I_0-résidus de Δ_x. En particulier il existe $\varphi_{x,a} \in \mathrm{Aut}(\Delta_x)$ envoyant le I_0-résidu $g_{a,\varepsilon(x)}(\Delta_0)$ sur R_a. Nous posons alors $f_{x,a} = \varphi_{x,a} \circ g_{a,\varepsilon(x)}$. Ainsi pour toute arête a de T d'extrémités x de couleur $+$ et y de couleur $-$, la classe d'isomorphisme de $V_{f_{x,a},f_{y,a}}$ est bien $\chi(a)$ (voir la proposition 4.4).

Pour conclure, si Δ est l'immeuble associé à cet arbre d'immeubles $(T, (\Delta_x), (f_{x,a}))$, on a bien $(T(\Delta), \chi_\Delta) = (T, \chi)$. $\square$

Donnons maintenant quelques applications explicites du théorème précédent.

Un immeuble sphérique fini est *algébrique* s'il est isomorphe à l'immeuble sphérique fini associé à la BN-paire d'un groupe fini adjoint de type de Lie (voir [Car]). Ces groupes sont les suivants (voir [Car]), avec q une puissance d'un nombre premier p, sauf cas contraires indiqués :

$$A_\ell(q) = PGL_{\ell+1}(\mathbb{F}_q),\ \ell \geq 2 \ ;\ B_\ell(q),\ \ell \geq 3 \ ;\ C_\ell(q),\ \ell \geq 3 \ ;\ D_\ell(q),\ \ell \geq 4$$

$$G_2(q) \ ;\ F_4(q) \ ;\ E_6(q) \ ;\ E_7(q) \ ;\ E_8(q)$$

$${}^2A_\ell(q^2),\ \ell \geq 2 \ ;\ {}^2D_\ell(q^2),\ \ell \geq 4 \ ;\ {}^2D_4(q^3) \ ;\ {}^2E_6(q^2)$$

$${}^2B_2(q^2),\ q^2 = 2^{2m+1} \ ;\ {}^2G_2(q^2),\ q^2 = 3^{2m+1} \ ;\ {}^2F_4(q^2),\ q^2 = 2^{2m+1}.$$

Corollaire 4.11 *Soit (W,I) un système de Coxeter muni d'un scindement (I_+, I_-). Soit Δ un immeuble épais chambre-transitif de type (W,I). Soit J une partie de I telle que, en posant $J_\pm = I_\pm \cap J$ et $J_0 = I_0 \cap J$,*

1. *(J_+, J_-) est un scindement de (W_J, J) avec J_0 non vide,*
2. *il existe un automorphisme involutif τ du diagramme de (W_J, J) fixant J_0 et envoyant J_- sur J_+, et un isomorphisme au-dessus de τ d'un J_+-résidu de Δ sur un J_--résidu de Δ,*
3. *(W_{J_0}, J_0) est un système de Coxeter à angles droits,*

4. *Les $J_\pm$-résidus de Δ sont des immeubles sphériques finis algébriques, d'invariant q suffisamment grand (si $(W_{J_\pm}, J_\pm)$ est de type A_n pour $n \geq 2$, alors $q \geq 5$ suffit),*

5. *tout automorphisme du J_0-résidu d'une chambre C de Δ s'étend au I_0-résidu.*

Alors il existe (à isomorphisme typé près) une infinité non dénombrable d'immeubles de type (W, I), dont tout résidu sphérique est isomorphe à un résidu sphérique de Δ.

Preuve. Soit C une chambre quelconque de Δ. Notons $\Delta_0, \Delta_-, \Delta_+$ les résidus de C de type I_0, I_-, I_+ respectivement. Notons $\mathcal{M}$ le modèle $(\Delta_0, \Delta_-, \Delta_+)$, qui est transitif, puisque Δ est chambre-transitif. Les immeubles $\Delta_\pm$ sont épais, car Δ l'est. Tous les I_0-résidus de $\Delta_\pm$ sont isomorphes à Δ_0, car Δ est chambre-transitif.

Le résultat découlera donc du théorème 4.10, dès que nous aurons vérifié qu'il existe deux $I_\pm$-voisinages modelables sur $\mathcal{M}$ non isomorphes. Pour cela, nous allons utiliser la proposition 4.8.

Notons V le $I_\pm$-voisinage de C dans Δ, U le $J_\pm$-voisinage de C dans Δ, $f_{0,+} : \Delta_0 \to \Delta_+, f_{0,-} : \Delta_0 \to \Delta_-$ les inclusions, $\Sigma_0, \Sigma_-, \Sigma_+$ les résidus de C de type J_0, J_-, J_+ respectivement, et $\mathcal{M}_J$ le $J_\pm$-modèle $(\Sigma_0, \Sigma_-, \Sigma_+)$. Ces notations coïncident bien avec celles précédant la proposition 4.8.

Vérifions que les hypothèses de la proposition 4.8 sont satisfaites. Comme Δ est chambre-transitif, le $J_\pm$-modèle $\mathcal{M}_J$ est transitif, et tous les $J_\pm$-voisinages dans V modelables sur $\mathcal{M}_J$ sont isomorphes à U. Par hypothèse, tout automorphisme de Σ_0 s'étend à Δ_0. Il suffit donc de montrer qu'il existe un $J_\pm$-voisinage U' modelable sur $\mathcal{M}_J$ et non isomorphe à U.

Par les hypothèses (3) et (4), (W_{J_0}, J_0) est un système de Coxeter fini à angles droits. Donc Σ_0 est isomorphe à un système de chambres sur J_0 produit, $\prod_{j \in J_0} E_j$, avec E_j un système de chambres de type $\{j\}$. Le cardinal d'un j-résidu de Σ_0 est alors égal au cardinal de E_j, pour tout $j \in J_0$. Le groupe des automorphismes (préservant le type) de Σ_0 est alors isomorphe au produit direct des groupes de permutations des E_j. Soit L un immeuble sphérique fini algébrique. L'ordre du groupe des automorphismes de L est un polynôme (à coefficients rationnels) en q (voir [Car]). Le cardinal d'un i-résidu de L est de la forme $1 + q^{\ell_i}$, avec $\ell_i = 1, 2$ ou 3 (voir [Ron, appendix 6]). Notons que $\prod_{j \in J_0}(1 + q^{\ell_j})!$ croît plus vite que tout polynôme en q, comme J_0 est non vide. Par l'hypothèse (4), il existe donc un automorphisme ϕ de Σ_0 qui ne s'étend pas en un automorphisme de Σ_+.

Par le corollaire 4.7 et l'hypothèse (2), il existe bien un $J_\pm$-voisinage U' modelable sur $\mathcal{M}_J$ et non isomorphe à U. □

Corollaire 4.12 *Soit L un immeuble sphérique fini algébrique, de cardinal de corps assez grand, et P un polytope hyperbolique de dimension 3, dont les faces ont un nombre pair de côtés, dont les links de sommet sont polyédralement isométriques à une chambre de L, et qui est localement réflexif. Alors il existe un ensemble non dénombrable d'immeubles hyperboliques de type $(W(P), S(P))$, deux à deux non isomorphes, de links de sommets isomorphes à L.*

Preuve. Soit $(W, I) = (W(P), S(P))$. D'après la section 3.1, il existe dans le graphe dual de la cellulation de ∂P un cycle d'arêtes $(a_0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1} = a_0)$ d'angles dièdres $\frac{\pi}{2}$. La réunion des faces de codimension 1 correspondant aux sommets de ce cycle est un anneau polyédral A plongé dans la sphère ∂P. Le complémentaire de cet anneau admet deux composantes connexes C_+, C_-. Considérons le scindement (I_+, I_-) de (W, I), avec $I_0 = I_+ \cap I_-$ correspondant à l'ensemble des faces de codimension 1 contenues dans A, et $I_\pm - I_0$ correspondant à l'ensemble des faces de codimension 1 contenues dans l'adhérence de $C_\pm$. On note J la partie de I correspondant à l'ensemble des quatre faces de codimension 1 rencontrant l'arête a_0. Tout immeuble X chambre-transitif de type (W_{I_0}, I_0) est un immeuble de Bourdon (voir [Bou1]), qui vérifie la propriété que tout automorphisme d'un résidu sphérique de X s'étend en un automorphisme de X (voir [Bou1], ainsi que la proposition 5.1).

Comme L est algébrique, il est aussi chambre-transitif. Soit Δ l'immeuble donné alors par la proposition 3.5. D'après ce qui précède, les hypothèses du corollaire 4.11 sont vérifiées (par exemple, la propriété (2) découle de la réflexivité locale de Δ). Le résultat en découle. $\square$

Pour conclure par un exemple particulièrement simple, dans le corollaire ci-dessus, on peut prendre pour P le prisme hyperbolique à base hexagonale, d'angles dièdres verticaux $\frac{\pi}{2}$, et d'angles dièdres horizontaux $\frac{\pi}{3}$ (voir dessin de gauche dans la figure 1), et pour L l'immeuble des drapeaux de l'espace projectif de dimension 3 sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ avec $q \geq 5$. Car alors si $q = p^m$ avec p premier, on a $q - 2 > m$, donc l'ordre $m(q+1)q(q-1)$ du groupe d'automorphismes (semi-linéaires) de la droite projective $P\Gamma L_2(\mathbb{F}_q)$ est strictement inférieur à l'ordre $(q+1)!$ du groupe $\mathcal{S}(\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_q))$ de toutes les permutations de la droite projective, ce qui suffit pour l'argument de la fin du corollaire 4.11). D'autres exemples de polyèdres P sont fournis par la section 3.1.

5 Classification d'immeubles de Tits à angles droits.

Dans cette section, nous utilisons les constructions arborescentes d'immeubles de la section 4.4 pour donner une descrtiption des immeubles de Tits à angles droits les plus réguliers. Ce résultat a été d'abord démontré par M. Globus [Glo], et était connu aussi de M. Davis, T. Januszkiewicz et J. Swiatkowski (le cas des immeubles hyperboliques à angles droits de dimension 2 est dû à [Bou1]). Nous renvoyons à [Hag] pour d'autres résultats d'existence-unicité d'immeubles. Le plan de la preuve ci-dessous est inspiré de [Hag].

Ce résultat peut être utilisé pour vérifier l'hypothèse (5) du corollaire 4.11. Nous ne l'avons utilisé (dans la preuve du corollaire 4.12) que dans le cas particulier considéré par [Bou1].

Rappelons qu'un système de Coxeter (W, I) est dit *à angles droits* si pour tout $i \neq j$ on a $m_{i,j} = 2$ ou $m_{i,j} = \infty$.

Soit (W, I) un système de Coxeter et $(q_i)_{i \in I}$ une famille de cardinaux ($q_i \geq 2$). Nous dirons qu'un immeuble Δ est *de paramètres* $(q_i)_{i \in I}$ si pour tout $i \in I$, chaque $\{i\}$-résidu de Δ est de cardinal q_i. Cette terminologie, utilisée par M. Bourdon [Bou2] pour les immeubles hyperboliques de dimension 2, diffère d'une unité avec celle pour les m-gones généralisés (voir par exemple [Ron]).

Proposition 5.1 *Soit (W, I) un système de Coxeter à angles droits et $(q_i)_{i \in I}$ une famille de cardinaux ($q_i \geq 2$).*

- *Il existe au moins un immeuble de type (W, I) et de paramètres $(q_i)_{i \in I}$. De plus si Δ, Δ' sont deux tels immeubles et si J est une partie de I, alors tout isomorphisme* *d'un J-résidu de Δ sur un J-résidu de Δ' s'étend en un isomorphisme de Δ sur Δ'.*

– *À isomorphisme près, il existe un unique immeuble de type (W, I) et de paramètres $(q_i)_{i\in I}$. Son groupe d'automorphismes est transitif sur les chambres, et tout automorphisme d'un résidu de l'immeuble est la restriction d'un automorphisme de l'immeuble.*

Remarque. L'existence, qui est bien connue (voir par exemple [RT]), peut se montrer à partir de complexes de groupes, de la manière suivante. Soit $N = N(W, I)$ le nerf fini de (W, I), soit $P = P(W, I)$ le cône simplicial de sommet x_0 sur la subdivision barycentrique N' de N. Tout sommet de N' a un type, qui est une partie J de I, non vide. Soit G_j un groupe de cardinal q_j (par exemple $\mathbb{Z}/q_j\mathbb{Z}$ si q_j est fini). On construit un complexe de groupes simple (voir [BH]), de complexe sous-jacent P, de groupe de sommet x de type J le groupe $G_x = \prod_{j\in J} G_j$, tel que, pour toute arête de N' d'origine x de type J et d'extrémité y de type J', le morphisme $G_x \to G_y$ soit l'inclusion naturelle $(x_i)_{i\in J} \mapsto (y_i)_{i\in J'}$ avec $y_i = x_i$ si $i \in J$ et $y_i = 1$ sinon.

Il est facile de vérifier (voir aussi [GP, section 3.3]) que ce complexe de groupes est développable, que son revêtement universel est la première subdivision barycentrique de la réalisation géométrique de Davis-Moussong d'un immeuble de type (W, I) et de paramètres $(q_i)_{i\in I}$.

Ainsi, dans le cas où les q_i sont finis, l'immeuble de type (W, I) et de paramètres $(q_i)_{i\in I}$ admet un réseau uniforme (un sous-groupe discret cocompact de son groupe (localement compact) d'automorphismes). Par exemple, le groupe fondamental du complexe de groupes ci-dessus convient. Notons qu'il s'agit d'un produit graphé de groupes finis cycliques, voir par exemple [Mei, Dav, Bou1, JS]).

Nous donnons une autre construction ci-dessous, qui utilise les outils de la section 4.3, et est susceptible de généralisations.

Preuve. La première assertion entraîne la deuxième. En effet, si on prend $J = \emptyset$, les J-résidus sont des chambres: donc on voit que deux immeubles de type (W, I) et de paramètres $(q_i)_{i\in I}$, pointés en deux chambres quelconques, sont isomorphes. D'autre part la possibilité de prolongement des automorphismes d'un J-résidu (avec maintenant J-quelconque) est bien un cas particulier de la première affirmation.

Pour tout ensemble I fini non vide et toute partie $J \subset I$, notons $r = \operatorname{card}(I)$ et $c = \operatorname{card}(I) - \operatorname{card}(J)$. Alors $(r, c) \in \mathcal{N} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq y \leq x, 0 < x\}$. Soit $\leq_\ell$ l'ordre lexicographique sur $\mathcal{N}$, qui vérifie $(\mathcal{N}, \leq_\ell) \simeq (\mathbb{N}, \leq)$. Nous montrons par récurrence la proposition $\mathcal{P}_{r,c}$ suivante:

$\mathcal{P}_{r,0}$	Pour tout système de Coxeter à angles droits (W, I) tel que $\operatorname{card}(I) = r$ et pour tout système de paramètres $(q_i)_{i\in I}$, il existe un immeuble de type (W, I) et de paramètres $(q_i)_{i\in I}$.
$\mathcal{P}_{r,c}$ (pour $c > 0$)	Pour tout système de Coxeter à angles droits (W, I) tel que $\operatorname{card}(I) = r$, pour tout système de paramètres $(q_i)_{i\in I}$ et pour toute partie J de I telle que $\operatorname{card}(I) - \operatorname{card}(J) = c$, tout isomorphisme entre deux J-résidus de deux immeubles de type (W, I) et de paramètres $(q_i)_{i\in I}$ s'étend en un isomorphisme entre les immeubles.

Le plus petit élément de $\mathcal{N}$ est $(1,0)$. Or la propriété $\mathcal{P}_{1,0}$ est évidente, puisque tout ensemble à q_1 éléments, muni de sa partition en une seule partie, est un immeuble qui convient.

Supposons la propriété $\mathcal{P}_{r',c'}$ vraie pour tout $(r',c') \leq_\ell (r,c)$ et montrons-la pour le successeur de (r,c).

Etape 1 (existence) : Supposons $c = r$.

Alors le successeur de (r,c) est $(r+1,0)$. Donnons-nous un système de Coxeter à angles droits (W,I) tel que $\mathrm{card}(I) = r+1$ et un système de paramètres $(q_i)_{i\in I}$. Nous devons construire un immeuble de type (W,I) et de paramètres $(q_i)_{i\in I}$.

Choisissons $i_0 \in I$, de sorte que $I = \{i_0\} \cup I_+$ avec I_+ de cardinal r. Deux cas se présentent alors.

Cas 1 : Dans W, la réflexion i_0 commute à toutes les réflexions de I_+.

Soit Δ_+ un immeuble de type (W_{I_+}, I_+) et de paramètres $(q_i)_{i\in I_+}$ (il en existe au moins un par récurrence, puisque $(r,0) \leq_\ell (r+1,0)$). Soit X_0 un ensemble de cardinal q_{i_0}. Nous allons définir un système de chambres Δ. L'ensemble des chambres de Δ est le produit cartésien de X_0 avec l'ensemble des chambres de Δ_+. Pour $i \in I$, $x, x' \in X_0$ et $C, C' \in \Delta^+$, on demande que la chambre (x,C) de Δ soit i-adjacente à la chambre (x',C') si et seulement si

– ou bien ($i = i_0$ et $C = C'$)

– ou bien ($i \neq i_0$, $x = x'$ et C est i-adjacente à C' dans Δ_+).

Il est facile de vérifier que le système de chambres Δ est un immeuble de type (W,I) et de paramètres $(q_i)_{i\in I}$ (par exemple le $\{i_0\}$-résidu d'une chambre (x,C) est l'ensemble des chambres (x',C) avec $x' \in X_0$, de même cardinal que X_0).

Cas 2 : L'élément i_0 est lié à un certain $j_0 \in I_+$ par une arête de poids ∞ dans le graphe de Coxeter de (W,I).

Posons alors $I_0 = I^+ \setminus \{j_0\}$ et $I_- = I_0 \cup \{i_0\}$, de sorte que (I_+, I_-) est un scindement de (W,I). Comme I_+, I_- sont de rang inférieurs à r, par l'hypothèse de récurrence, il existe Δ_+, Δ_-, Δ_0 des immeubles de type (W_{I_+}, I_+), (W_{I_-}, I_-), (W_{I_0}, I_0) et de paramètres $(q_i)_{i\in I_+}$, $(q_i)_{i\in I_-}$, $(q_i)_{i\in I_0}$ respectivement. Par récurrence, tous les I_0-résidus de $\Delta_\pm$ sont isomorphes à Δ_0, et tout automorphisme d'un I_0-résidu de $\Delta_\pm$ s'étend en un automorphisme de $\Delta_\pm$. Donc si $\mathcal{M} = (\Delta_+, \Delta_-, \Delta_0)$, alors $\mathcal{O}(\mathcal{M})$ est réduit à un élément (voir la remarque suivant le corollaire 4.5).

Notons $v_\pm$ le cardinal de l'ensemble des I_0-résidus de $\Delta_\pm$. Soit T l'arbre birégulier de sommets de couleurs $\pm$ de valences $v_\pm$. Soit χ l'unique application (constante) de l'ensemble des arêtes de T dans $\mathcal{O}(\mathcal{M})$. L'immeuble Δ tel que $(T(\Delta), \chi(\Delta)) = (T, \chi)$, construit dans la preuve du théorème 4.10, est un immeuble de type (W,I), qui est modelable sur $(\Delta_+, \Delta_-, \Delta_0)$, donc est bien de paramètres $(q_i)_{i\in I}$.

Etape 2 (prolongement des isomorphismes partiels) : Supposons $c < r$.

Alors le successeur de (r,c) est $(r, c+1)$. Soient Δ, Δ' deux immeubles de type (W,I) et de paramètres $(q_i)_{i\in I}$, avec $\mathrm{card}(I) = r$. Soit J une partie de I avec $\mathrm{card}(I) - \mathrm{card}(J) = c+1$. Considérons un isomorphisme f d'un J-résidu R de Δ sur un J-résidu R' de Δ'. Nous devons montrer que f s'étend en un isomorphisme de Δ sur Δ'.

Cas 1 : $c+1 \geq 2$.

Il existe alors une partie K de I telle que $J \subset K \subset I$ et les deux inclusions sont strictes.

Soient S, S' les K-résidus de Δ, Δ' contenant R, R'. Alors S, S' sont deux immeubles de type (W_K, K) et de paramètres $(q_i)_{i \in K}$ et $\mathrm{card}(K) < r$. Par l'hypothèse de récurrence appliquée à l'isomorphisme partiel $f : R \to R'$ entre les immeubles S et S', nous obtenons un isomorphisme d'immeubles $g : S \to S'$ prolongeant f. En réappliquant l'hypothèse de récurrence à cet isomorphisme partiel entre résidus de Δ, Δ', nous obtenons le prolongement de f cherché.

Cas 2 : $c+1 = 1$.

Alors $I = J \cup \{i_0\}$. Deux sous-cas se présentent, comme dans l'étape d'existence.

Sous-cas 1 : Dans W, la réflexion i_0 commute à toutes les réflexions de J.

Si $i \in J$ et C, C', D sont des chambres d'un immeuble X de type (W, I), les chambres C, C' étant i_0-adjacentes et C, D étant i-adjacentes, alors il existe une unique chambre D' de X qui est i-adjacente à C' et i_0-adjacente à D. L'application $C' \mapsto D'$ ainsi définie est une bijection du i_0-résidu de C dans le i_0-résidu de D. En utilisant des galeries, on définit ainsi un isomorphisme entre les i_0-résidus d'une chambre fixée de X et de n'importe quelle autre chambre de X, qui ne dépend pas des galeries choisies. De plus, pour toutes chambres C, D' de X, il existe une J-galerie d'origine C, dont l'extrémité est i_0-adjacente à D'. Ainsi tout immeuble X de type (W, I), muni de l'un quelconque de ses J-résidus R, est isomorphe au produit cartésien (au sens de l'étape d'existence) $R \times X_0$, où X_0 est un ensemble de cardinal q_{i_0} pointé en x_0, de sorte que le J-résidu R de Δ s'identifie avec le J-résidu $R \times \{x_0\}$ de $R \times X_0$.

Pour prolonger $f : R \to R'$, identifions Δ, Δ' avec $R \times X_0, R' \times X_0$ comme ci-dessus. Alors f s'identifie à $f \times \mathrm{id}_{\{x_0\}}$, et $f \times \mathrm{id}_{X_0}$ est une extension de f, qui est un isomorphisme de Δ sur Δ'.

Sous-cas 2 : L'élément i_0 est lié à un certain $j_0 \in J$ par une arête de poids ∞ dans le graphe de Coxeter de (W, I).

On pose alors $I_0 = J \setminus \{j_0\}$, $I_+ = J$, $I_- = I_0 \cup \{i_0\}$, de sorte que (I_+, I_-) est un scindement de (W, I). Comme I_+, I_- sont de rang strictement inférieurs à r, par l'hypothèse de récurrence, il existe $\Delta_+, \Delta_-, \Delta_0$ un immeuble, unique à isomorphisme près, de type $(W_{I_+}, I_+), (W_{I_-}, I_-), (W_{I_0}, I_0)$ et de paramètres $(q_i)_{i \in I_+}, (q_i)_{i \in I_-}, (q_i)_{i \in I_0}$ respectivement.

Par l'unicité ci-dessus, les immeubles Δ et Δ' sont modelables sur $(\Delta_+, \Delta_-, \Delta_0)$. En particulier (voir section 4.4), chaque immeuble Δ, Δ' est (isomorphe à) l'immeuble associé à un arbre d'immeubles modelable sur $(\Delta_+, \Delta_-, \Delta_0)$. Nous renvoyons à la section 4.2 pour la construction de $T(\Delta), T(\Delta')$.

Notons $\mathcal{B}_n$ la réunion des I_+- ou I_--résidus de Δ correspondant aux sommets de $T(\Delta)$ à distance $\leq n$ du sommet correspondant au I_+-résidu R (et de même $\mathcal{B}'_n$). Définissons $\partial\mathcal{B}_n$ comme la réunion des I_0-résidus de $\mathcal{B}_n$ non contenu dans $\mathcal{B}_{n-1}$ (et de même $\partial\mathcal{B}'_n$). Supposons avoir construit un isomorphisme $f_n : \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}'_n$ prolongeant f. Pour étendre f_n en un isomorphisme $f_{n+1} : \mathcal{B}_{n+1} \to \mathcal{B}'_{n+1}$, nous utilisons la combinatoire des I_+, I_-, I_0-résidus décrite par le fait que $T(\Delta), T(\Delta')$ sont des arbres.

Pour $\varepsilon \in \{+, -\}$, soit ρ un I_ε-résidu dans $\mathcal{B}_{n+1}$ non contenu dans $\mathcal{B}_n$. Alors $\tau = \rho \cap \mathcal{B}_n$ est un I_0-résidu dans $\partial\mathcal{B}_n$. Il est facile de voir que $f(\tau)$ est contenu dans $\partial\mathcal{B}'_n$. Notons ρ' le I_ε-résidu de Δ' contenant $f(\tau)$. Il est contenu dans $\mathcal{B}'_{n+1}$, mais non dans $\mathcal{B}'_n$.

Comme $T(\Delta)$, $T(\Delta')$ sont des arbres, pour construire le prolongement de f_n à $\mathcal{B}_{n+1}$, il suffit de pouvoir étendre chacun des isomorphismes partiel $f_n : \tau \to f(\tau)$ en un isomorphisme de ρ sur ρ'. Or c'est justement ce que garantit l'hypothèse de récurrence. Comme tout I_ε-résidu contenu dans $\mathcal{B}'_{n+1}$, mais non contenu dans $\mathcal{B}'_n$, est de la forme ρ', pour ρ un I_ε-résidu contenu dans $\mathcal{B}_{n+1}$ et non contenu dans $\mathcal{B}_n$, le prolongement ainsi obtenu est bien un isomorphisme de $\mathcal{B}_{n+1}$ sur $\mathcal{B}'_{n+1}$. □

Références

[And] E.M. Andreev, *On convex polyhedra in Lobachevskii space*, Math. USSR Sb. **12** (1970) 413–440.

[Bou1] M. Bourdon, *Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow*, GAFA **7** (1997) 245-268.

[Bou2] M. Bourdon, *Sur les immeubles fuschiens et leur type de quasi-isométrie*, Erg. Theo. Dyn. Syst. **20** (2000) 343–364.

[BH] M.R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces with non-positive curvature*, Grund. math. Wiss. **319**, Springer Verlag (1998).

[Car] R.W. Carter, *Simple groups of Lie type*, Pure Appl, Math. **28**, Wiley (1972).

[Dav] M. Davis, *Buildings are CAT(0)*, dans "Geometry and cohomology in group theory", P. Kropholler et al (ed.), Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. **252**, Camb. Univ. Press. (1998) 108-123.

[GP] D. Gaboriau, F. Paulin, *Sur les immeubles hyperboliques*, Geom. Dedi. **88** (2001) 153-197.

[Glo] M. Globus, résultat non publié, 1996.

[Hag] F. Haglund, *Existence, unicité, homogénéité de certains immeubles hyperboliques*, Math. Zeit. **242** (2002) 97-148.

[HP] F. Haglund, F. Paulin, *Simplicité de groupes d'automorphismes d'espaces à courbure négative*, Geometry and Topology Monographs Vol 1: The Epstein Birthday Schrift, I. Rivin, C. Rourke, C. Series, eds, (1998) 181-248, International Press. (http://www.maths.warwick.ac.uk/gt/gtmcontents1.html)

[JS] T. Januszkiewicz, J. Świątkowski, *Commensurability of graph products*, prépublication Wrocław, 2001.

[Mei] J. Meier, *When is the graph product of hyperbolic groups hyperbolic ?*, Geom. Ded. **61** (1996) 29-41.

[MT] M. Mihalik, S. Tschantz, *Visual decompositions of Coxeter groups*, prépublication 2001.

[Ron] M.A. Ronan, *Lectures on buildings*, Persp. Math. **7**, Academic Press, 1989.

[RT] M.A. Ronan, J. Tits, *Building buildings*, Math. Ann. **278** (1987) 291-306.

[Ser] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2*, Astérisque **46** , Soc. Math. France (1983).

[Tit1] J. Tits, *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Lect. Notes **386**, Springer Verlag, 1974.

[Tit2] J. Tits, *Immeubles de type affine*, dans "Buildings and the geometry of diagrams", Proc. CIME Como 1984, L. Rosati ed., Lect. Notes **1181**, Springer Verlag, 1986, 159-190.

[Tit3] J. Tits, *A local approach to buildings*, in "The geometric vein", pp. 519–547, Springer Verlag, 1981.

[Tit4] J. Tits, *Building and group amalgamations*, Proc. Groups - St-Andrew 1985, Lond. Math. Soc. Lect. Notes Ser. **121**, Camb. Univ. Press 1987, pp. 110-127.

[Vin] E.B. Vinberg, *Hyperbolic reflection groups*, Russian Math. Surveys **40** (1985), 31-75.

[VS] E. Vinberg, O. Shvartsman, *Discrete groups of motions of spaces of constant curvature*, in "Geometry II: Spaces of constant curvature", E. Vinberg ed., Enc. Math. Scien **29**, Springer Verlag 1993, 139-248.

Laboratoire de Mathématiques
UMR 8628 CNRS (Bât. 425)
Equipe de Topologie et Dynamique
Université Paris-Sud
91405 ORSAY Cedex, FRANCE.
e-mail: Frederic.Haglund@math.u-psud.fr

Département de Mathématiques et Applications
UMR 8553 CNRS
École Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS Cedex 05, FRANCE.
e-mail: Frederic.Paulin@ens.fr