Sur le codage du flot géodésique dans un arbre

Anne Broise-Alamichel Frédéric Paulin

Laboratoire de Mathématique UMR 8628 CNRS
Équipe de Topologie et Dynamique (Bât. 425)
Université Paris-Sud
91405 ORSAY Cedex, FRANCE.
e-mail : Anne.Broise@math.u-psud.fr

Département de Mathématique et Applications, UMR 8553 CNRS
École Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS Cedex 05, FRANCE
e-mail : Frederic.Paulin@ens.fr

Résumé

Étant donné un arbre T et un groupe Γ d'automorphismes de T, nous étudions les propriétés markoviennes du flot géodésique sur le quotient de l'espace des géodésiques de T par Γ. Par exemple, quand T est l'arbre de Bruhat-Tits d'un groupe algébrique linéaire connexe semi-simple $\underline{G}$ de rang 1 sur un corps local non archimédien $\widehat{K}$ et si Γ est un réseau (éventuellement non uniforme) dans $\underline{G}(\widehat{K})$, nous montrons que l'action des puissances paires de la transformation géodésique est Bernoulli d'entropie finie sur chacune des deux composantes ergodiques. Sous des hypothèses générales bénignes, nous montrons que si le flot géodésique est mélangeant pour une mesure de probabilité de Patterson-Sullivan-Bowen-Margulis, alors il est lâchement Bernoulli.

Abstract

Given a tree T and a group Γ of automorphisms of T, we study the markovian properties of the geodesic flow on the quotient by Γ of the space of geodesics of T. For instance, when T is the Bruhat-Tits tree of a semi-simple connected algebraic group $\underline{G}$ of rank one over a non archimedian local field $\widehat{K}$, and Γ is a (possibly non uniform) lattice in $\underline{G}(\widehat{K})$, we prove that the type preserving geodesic flow is Bernoulli with finite entropy on each of the two ergodic components. Under some mild assumptions, we prove that if the quotient geodesic flow is mixing for a probability Patterson-Sullivan-Bowen-Margulis measure, then it is loosely Bernoulli. [1]

[1] **AMS codes :** 20 G 25, 20 E 08, 37 A 25. **Keywords :** group actions on trees, Bruhat-Tits trees, geodesic flow, coding, Bernoulli shifts.

1 Introduction

Soit T un arbre localement fini, Γ un sous-groupe discret d'automorphismes de T, $\mathcal{G}T$ l'espace des géodésiques de T (i.e. des isométries $\ell : \mathbb{R} \to T$ d'origine $\ell(0)$ un sommet de T), et $\widetilde{\varphi} : \mathcal{G}T \to \mathcal{G}T$ la transformation géodésique sur $\mathcal{G}T$, définie par $\ell \mapsto \{t \mapsto \ell(t+1)\}$.

Le but de cet article est d'étudier la dynamique symbolique de la transformation géodésique quotient $\varphi : \Gamma\backslash\mathcal{G}T \to \Gamma\backslash\mathcal{G}T$ de $\widetilde{\varphi}$, pour obtenir des propriétés ergodiques plus fines que celles obtenues dans [BM, Rob]. Il ne s'agit pas de se restreindre au cas où Γ est un réseau uniforme, qui est bien connu et bien plus élémentaire (voir par exemple les références [Coo, CP], qui s'intéressent au cas plus général des groupes hyperboliques). Nous nous intéressons au contraire au cas des réseaux non uniformes (voir le livre [BL] pour avoir une idée de la richesse des exemples) ; en général on ne peut pas se débarrasser de la torsion par passage à un sous-groupe d'indice fini, ceci est un problème crucial en ce qui concerne le codage. En supposant que la mesure de Patterson-Sullivan ne charge pas les ensembles de points fixes d'éléments elliptiques non triviaux, un premier résultat de codage (voir le paragraphe 4) est le suivant (voir le paragraphe 2 pour des rappels de définitions).

Théorème 1.1 *Soit $\widetilde{\mu}_{BM}$ une mesure de (Patterson-Sullivan)-Bowen-Margulis pour Γ sur $\mathcal{G}T$. Supposons que le système dynamique mesuré quotient de $(\mathcal{G}T, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\mu}_{BM})$ par Γ soit de probabilité et mélangeant. Alors il est lâchement Bernoulli.*

(Voir [BM, Rob] (ou le paragraphe 3) pour de grandes classes d'exemples où les conditions de finitude de la mesure et de mélange sont vérifiées.) Dans le cadre algébrique, nous améliorons encore ce résultat, de la manière suivante.

Soit $\widehat{K}$ un corps local, $\underline{G}$ un groupe algébrique linéaire connexe semi-simple, défini sur ce corps, $\underline{S}$ un tore $\widehat{K}$-déployé maximal, et Γ un réseau de $G = \underline{G}(\widehat{K})$. Les propriétés dynamiques et ergodiques de l'action de $S = \underline{S}(\widehat{K})$ par translations à droite sur l'espace quotient $\Gamma\backslash G$ font actuellement l'objet de nombreuses études (voir par exemple [Mar1, Zim, Mar2, Tom, LW]). Nous nous intéresserons dans cet article au cas où $\underline{S}$ est de $\widehat{K}$-rang 1 et $\widehat{K}$ est non archimédien, surtout dans la situation peu étudiée où Γ est non uniforme (l'existence d'un tel Γ implique que $\widehat{K}$ est isomorphe à un corps de séries formelles de Laurent sur un corps fini). Pour $\widehat{K} = \mathbb{F}_q((X^{-1}))$, $\underline{G} = \mathrm{PGL}_2$, $\underline{S}$ le sous-groupe diagonal et $\Gamma = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q[X])$, la situation a été complètement décrite dans [BP], en termes arithmétiques.

Si M est le sous-groupe compact maximal de S, il revient presqu'au même (voir par exemple [Moz, LP]) d'étudier l'action par translations à droite du groupe S/M sur l'espace $\Gamma\backslash G/M$. Celle-ci s'interprète en termes d'actions de groupes sur des arbres, de la manière suivante. Soit $\mathbb{T}$ l'arbre de Bruhat-Tits [BT] de $(\underline{G}, \widehat{K})$ (biparti, de sommets bleus ou verts). Alors G agit transitivement (par translation au but) sur le sous-espace $\mathcal{G}_0\mathbb{T}$ de $\mathcal{G}\mathbb{T}$ formé des géodésiques d'origine un sommet vert, et M est le stabilisateur d'un point de $\mathcal{G}_0\mathbb{T}$. L'action à droite de S/M, qui est isomorphe à $\mathbb{Z}$, sur G/M, qui s'identifie à $\mathcal{G}_0\mathbb{T}$, correspond à l'action des puissances paires de la transformation géodésique.

Lorsque Γ est uniforme, il est connu (voir par exemple [CP]) que l'action de S/M sur $\Gamma\backslash G/M$ est Bernoulli pour la mesure naturelle sur $\Gamma\backslash G/M$ venant de la mesure de Haar sur G (voir par exemple [HK] pour les définitions et rappels de théorie ergodique). Nous généralisons ce résultat au cas non uniforme.

Théorème 1.2 *Pour tout réseau Γ de $G = \underline{G}(\widehat{K})$, l'action par translations à droite de S/M sur $\Gamma\backslash G/M$ est Bernoulli d'entropie finie.*

Nous montrons en fait un résultat (voir le théorème 5.1) valable pour de nombreux sous-groupes géométriquement finis d'automorphismes d'arbres localement finis au sens de [Rob, Pau].

Plus généralement, étant donné un arbre T et un sous-groupe d'automorphismes Γ de T, nous nous intéresserons au codage du flot géodésique sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$. Nous donnons dans la partie 6 des codages intrinsèques, au sens où ils n'utilisent que la structure de graphe de groupes quotient (au sens de [Ser]) de T par Γ. Les propriétés canoniques de cette construction devraient être utiles (voir par exemple [LP]). Ces codages markoviens (sur des alphabets éventuellement infinis) sont obtenus pour le cas d'actions k-acylindriques au sens de Sela [Sel] de n'importe quel groupe Γ sur n'importe quel arbre simplicial T (en particulier sans supposer T localement fini, et sans supposer finis les stabilisateurs de sommets dans Γ), voir le théorème 6.5.

Les réseaux non uniformes du théorème 1.2 n'agissent pas de manière acylindrique sur leur arbre de Bruhat-Tits, mais nous montrons dans la partie 6.2 comment modifier ces actions pour les rendre acylindriques. En particulier, l'action modifiée de l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q[X])$ sur l'arbre de Bruhat-Tits de $(\mathrm{PGL}_2, \mathbb{F}_q((X^{-1})))$ est 5-acylindrique, et donne lieu à un codage par la méthode générale, qui est très proche du codage particulier obtenu dans [BP].

La partie 6 de cet article a été écrite avant la partie 4.1 de [Pau], où le second auteur étudie d'autres propriétés dynamiques du flot géodésique sur un arbre, et en particulier certains arguments de la partie 4.1 de [Pau] ont été inspirés de ceux de la partie 6, et pas inversement. Il faut remarquer que lorsque l'on autorise de la torsion dans les réseaux, le flot géodésique n'est pas a priori markovien. C'est précisément pour obtenir un caractère markovien (et donc un codage par une dynamique symbolique) que nous avons introduit un "flot géodésique d'ordre k" sur un arbre dans la partie 6.

Remerciements : Nous remercions J.-P. Thouvenot pour son aide précieuse, en particulier concernant les références, ainsi que S. Mozes et F. Ledrappier. Nous remercions le rapporteur anonyme d'une version précédente de cet article, certains de ses commentaires nous ont permis de démontrer le théorème 1.1.

2 Notations et rappels

Nous renvoyons à [Ser, Coo, Pau, Rob] pour des preuves et compléments concernant cette partie. Pour toute action d'un groupe Γ sur un ensemble, nous notons Γ_x le stabilisateur d'un point x. Par boule d'un espace métrique, nous entendons boule fermée.

2.1 Graphes de groupes et flot géodésique sur un arbre

Si X est un graphe, on note VX l'ensemble de ses sommets et EX l'ensemble de ses arêtes. Pour toute arête e, on désigne par $o(e)$ son sommet origine, $t(e)$ son sommet terminal et $\overline{e}$ son arête opposée. Les longueurs d'arêtes (des réalisations géométriques) sont supposées égales à 1.

On appelle *graphe de groupes*, et on note (X, G_*), la donnée des objets suivants :
– un graphe X (supposé connexe dans la suite) ;
– pour tout sommet v de X, un groupe G_v ;
– pour toute arête e de X, un groupe G_e, tel que $G_e = G_{\overline{e}}$;
– pour toute arête e de X, un morphisme injectif $\rho_e : G_e \to G_{t(e)}$.

Par exemple, si Γ est un groupe d'automorphismes (sans inversion) d'un arbre T, alors le graphe quotient $X = \Gamma\backslash T$ est muni d'une structure de graphe de groupes, appelée *graphe de groupes quotient* et notée $\Gamma\backslash\backslash T$. On procède ainsi pour la construire. On fixe un relevé $\widetilde{v}$ dans T de chaque sommet v de X, un relevé $\widetilde{e}$ dans T de chaque arête e de X, on impose que $\widetilde{\overline{e}} = \overline{\widetilde{e}}$ et on fixe un élément g_e de Γ tel que $g_e\widetilde{t(e)} = t(\widetilde{e})$. On définit G_e et G_v comme les fixateurs dans Γ de $\widetilde{e}$ et $\widetilde{v}$. Alors $\rho_e : G_e \to G_{t(e)}$ est définie comme la restriction à G_e de la conjugaison $x \mapsto g_e^{-1}xg_e$ par g_e^{-1}. Le graphe de groupes quotient $\Gamma\backslash\backslash T$ ne dépend pas (à isomorphisme de graphes de groupes près), du choix des $\widetilde{e}$, $\widetilde{v}$ et g_e (voir [Ser] pour tout complément). Si T est localement fini et Γ est discret, alors les groupes G_e et G_v sont finis. Si de plus $\Gamma\backslash T$ est fini, alors $\Gamma\backslash\backslash T$ est un graphe (connexe) fini de groupes finis.

Soit T un arbre simplicial, muni de sa topologie faible. L'*espace des géodésiques* de T est l'espace $\mathcal{G}T$ des applications simpliciales injectives de $\mathbb{R}$ dans T (avec $\mathbb{R}$ muni de sa structure simpliciale usuelle d'ensemble de sommets $\mathbb{Z}$), muni de la topologie compacte-ouverte. Comme T est un arbre, la condition d'injectivité est équivalente à la condition d'injectivité locale. Notons $\mathrm{Aut}(T)$ son groupe d'automorphismes sans inversion. Il est localement compact pour la topologie compacte-ouverte si T est localement fini.

Le groupe $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathcal{G}T$ par translations à la source $(n, f) \mapsto \{x \mapsto f(x + n)\}$. Le groupe $\mathrm{Aut}(T)$ agit par homéomorphismes sur $\mathcal{G}T$ par composition au but $(\gamma, f) \mapsto \{x \mapsto \gamma f(x)\}$. Ces deux actions commutent. Appelons *transformation géodésique sur* $\mathcal{G}T$ l'application $\widetilde{\varphi} : \mathcal{G}T \to \mathcal{G}T$ définie par $\ell \mapsto \{t \mapsto \ell(t+1)\}$. Appelons *renversement du temps sur* $\mathcal{G}T$ l'application $\widetilde{\tau} : \mathcal{G}T \to \mathcal{G}T$ définie par $\ell \mapsto \{t \mapsto \ell(-t)\}$.

Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(T)$. On munit les quotients $\Gamma\backslash T$ et $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ de la topologie quotient. On note $\pi : T \to \Gamma\backslash T$ et $\pi' : \mathcal{G}T \to \Gamma\backslash\mathcal{G}T$ les projections canoniques. L'application $\widetilde{\varphi}$ induit une application continue $\varphi : \Gamma\backslash\mathcal{G}T \to \Gamma\backslash\mathcal{G}T$, aussi appelée la *transformation géodésique* sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$. L'application $\widetilde{\tau}$ induit une application $\tau : \Gamma\backslash\mathcal{G}T \to \Gamma\backslash\mathcal{G}T$, que nous appelerons *renversement du temps sur* $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$.

2.2 Groupes géométriquement finis et mesure de Bowen-Margulis

Soit T un arbre localement fini. Notons $T \cup \partial T$ la compactification par l'espace des bouts de T, et $\partial_2 T$ le produit $\partial T \times \partial T$ privé de sa diagonale. Rappelons que toute arête e de T définit une partition en deux parties $\partial_e T$ et ${}^c\partial_e T$ de ∂T, de sorte que toute droite géodésique d'origine dans $\partial_e T$ et d'extrémité dans ${}^c\partial_e T$ parcourt e suivant l'orientation de e. Nous dirons que T est *uniforme* s'il existe un sous-groupe discret dans $\mathrm{Aut}(T)$ tel que le graphe $\Gamma\backslash T$ soit fini. Par exemple, un arbre régulier ou bi-régulier est uniforme.

Notons x_0 un sommet fixé de T. L'*entropie volumique* de T, qui ne dépend pas de x_0, est

$$\delta_T = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{Card}(B(x_0, n) \cap VT) \ .$$

Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(T)$. En particulier, l'action de Γ sur $\mathcal{G}T$ est proprement discontinue (mais pas forcément libre en général), et donc $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ est localement compact.

Le groupe Γ est dit *non élémentaire* s'il ne préserve ni point ni paire de points de $T \cup \partial T$. Il existe alors un unique plus petit sous-arbre Γ-invariant non vide dans T, noté $T_{\Gamma,\min}$.

On appelle *rayon cuspidal de groupes* tout graphe de groupes finis (R, G_*) avec R un rayon (i.e. un graphe dont la réalisation géométrique est une demi-droite fermée de $\mathbb{R}$), de suite des arêtes consécutives $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orientées vers le bout de R, tel que pour tout n dans $\mathbb{N} - \{0\}$, le morphisme $G_{e_n} \to G_{o(e_n)}$ soit surjectif. Le groupe Γ est dit *géométriquement fini* s'il est non élémentaire et si le graphe quotient $\Gamma\backslash T_{\Gamma,\min}$ est réunion d'un graphe fini et, recollés en leur extrémité, d'un nombre fini de rayons qui, munis de leur structure de graphe de groupes induite par $\Gamma\backslash\backslash T_{\Gamma,\min}$, sont des rayons cuspidaux de groupes. Voir [Pau] pour l'équivalence avec la définition dynamique usuelle (comme dans [Rob]), et des développements.

Nous renvoyons par exemple à [BH] pour la définition des horoboules (fermées par défaut) dans un espace métrique géodésique CAT(0). Comme montré dans [Pau], la préimage dans $T_{\Gamma,\min}$ des sous-rayons cuspidaux maximaux de $\Gamma\backslash\backslash T_{\Gamma,\min}$ forme alors une famille disjointe Γ-invariante maximale d'horoboules ouvertes. Les points à l'infini de ces horoboules, qui sont donc les extrémités des rayons géodésiques relevant les rayons cuspidaux, seront appelés les *points paraboliques bornés* de Γ (voir [Rob, Pau] pour l'explication dynamique).

Par exemple, soit $\widehat{K}$ un corps local non archimédien, $\underline{G}$ un groupe algébrique linéaire connexe semi-simple sur $\widehat{K}$, de $\widehat{K}$-rang 1. Soit Γ un réseau de $G = \underline{G}(\widehat{K})$.

Soit T l'arbre de Bruhat-Tits de $(\underline{G}, \widehat{K})$. Alors, par un théorème de A. Lubotzky [Lub], l'action de Γ sur T est géométriquement finie et $T = T_{\Gamma,\min}$.

Soit Γ un sous-groupe géométriquement fini de $\mathrm{Aut}(T)$. Nous dirons que Γ *possède la propriété de Selberg* s'il admet un sous-groupe d'indice fini, tel que le groupe d'un sommet qui n'est pas intérieur à un sous-rayon cuspidal de $\Gamma'\backslash\backslash T$ soit trivial. Par exemple, c'est vrai si $\Gamma\backslash\backslash T$ n'a pas de sous-rayon cuspidal (voir [Ser]). Par le lemme de Selberg [Alp], c'est aussi vrai pour Γ un réseau de $G = \underline{G}(\widehat{K})$ agissant fidèlement sur l'arbre de Bruhat-Tits de $(\underline{G}, \widehat{K})$, avec $\widehat{K}$ un corps local non archimédien et $\underline{G}$ un groupe algébrique linéaire connexe semi-simple sur $\widehat{K}$, de $\widehat{K}$-rang 1. Cette propriété est aussi vérifiée si tout stabilisateur de point parabolique borné dans Γ est résiduellement fini, car on peut alors utiliser le résultat susnommé de [Ser] pour enlever la torsion sur le graphe privé de ses rayons cuspidaux, et recoller des rayons cuspidaux correspondant à des sous-groupes d'indice fini des stabilisateurs de points paraboliques bornés. Rappelons qu'un groupe est *résiduellement fini* si l'intersection de ses sous-groupes d'indice fini est réduite à l'élément neutre.

L'*exposant critique* $\delta = \delta_\Gamma$ de Γ, qui ne dépend pas de x_0, est l'élément de $[0, +\infty]$ tel que la *série de Poincaré* de Γ

$$P(s) = P_{\Gamma,x_0}(s) = \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(x_0,\gamma x_0)}$$

converge pour $s > \delta$ et diverge pour $s < \delta$. Le groupe Γ est *de type divergent* si sa série de Poincaré $P(s)$ diverge pour $s = \delta$.

Si Γ est d'exposant critique fini non nul et de type divergent, alors il existe (voir [Coo]) une famille $(\mu_x)_{x\in VT}$ de mesures finies sur ∂T, appelée *mesure de Patterson-Sullivan*, unique à scalaire multiplicatif près, de supports $\partial T_{\Gamma,\min}$, telle que

– $\forall\, \gamma \in \Gamma\ ,\ \ \gamma_*\mu_x = \mu_{\gamma x}$,

– $\forall\, x, y \in VT,\ \forall\, \xi \in \partial T\ ,\ \ \frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\xi) = e^{-\delta\beta_\xi(x,y)}$,

où $\beta_\xi(x, y) = d(x, z) - d(z, y)$ pour tout sommet z suffisamment proche de ξ.

Pour toute géodésique ℓ, notons ℓ_-, ℓ_+ les points de ∂T origine et extrémité de ℓ. L'application $\mathcal{G}T \to \partial_2 T \times \mathbb{Z}$, qui à ℓ associe (ℓ_-, ℓ_+, t) avec t la distance algébrique sur ℓ entre $\ell(0)$ et le point de ℓ le plus proche de x_0, est un homéomorphisme. Ce paramétrage dépend du point base x_0. Si Γ est d'exposant critique fini non nul et de type divergent, on définit une mesure $\widetilde{m}_{\mathrm{BM}}$ sur $\mathcal{G}T$, appelée *mesure de Bowen-Margulis*, par

$$d\widetilde{m}_{\mathrm{BM}}(\ell_-, \ell_+, t) = \frac{d\mu_{x_0}(\ell_-)d\mu_{x_0}(\ell_+)dt}{d_{x_0}(\ell_-, \ell_+)^{2\delta}}\ ,$$

où d_{x_0} est la distance sur ∂T définie par $d_{x_0}(\ell_-, \ell_+) = e^{-u}$ avec u la longueur de l'intersection des rayons géodésiques issus de x_0 convergeant vers ℓ_- et ℓ_+. (L'origine de cette mesure remonte aussi aux travaux de Patterson-Sullivan, mais nous préférons donner des noms différents à deux mesures différentes, la mesure de Patterson-Sullivan qui vit sur ∂T et celle de Bowen-Margulis qui vit sur $\mathcal{G}T$.) La mesure $\widetilde{m}_{\mathrm{BM}}$ ne dépend pas de x_0. Elle est invariante par la transformation géodésique sur $\mathcal{G}T$

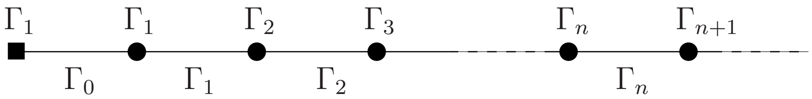
et par Γ. Elle induit donc une mesure $m_{\rm BM}$ sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$, appelée *mesure de Bowen-Margulis sur* $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$, qui est invariante par la transformation géodésique sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$. Le support de $m_{\rm BM}$ est $\Gamma\backslash\mathcal{G}T_{\Gamma,\min}$. Lorsque Γ est cocompact, cette mesure est la mesure d'entropie maximale pour φ (voir [CP, Kai, Bou]). Lorsque T est un arbre de Bruhat-Tits comme dans l'introduction, alors la restriction de $\widetilde{m}_{\rm BM}$ à $\mathcal{G}_0T$ (défini dans l'introduction) s'identifie (à un scalaire multiplicatif près) avec l'image dans G/M de la mesure de Haar de G.

3 Finitude de la mesure et mélange

Les résultats de ce paragraphe découlent essentiellement de résultats connus (voir [BM, Rob]). En particulier, les trois premières assertions de la proposition suivante découlent du Corollary 6.5 de [BM], l'avant-dernière de la Proposition 7.3 de [BM] et la dernière assertion, en utilisant l'avant dernière et la troisième, découle de [Rob] (adaptant des idées de [DOP]). Nous ne donnons la preuve regroupée que par souci de complétude.

Proposition 3.1 *Soit T un arbre localement fini et Γ un sous-groupe géométriquement fini de* $\operatorname{Aut}(T)$. *Si $T_{\Gamma,\min}$ est uniforme, alors*
- *δ_Γ est fini, non nul ;*
- *$\delta_\Gamma = \delta_{T_{\Gamma,\min}}$;*
- *Γ est de type divergent ;*
- *pour tout point parabolique borné ξ de ∂T et tout point y_0 dans VT, il existe une constante $c \geq 1$ telle que $\frac{1}{c}\, e^{n\delta_\Gamma} \leq \operatorname{Card}\,(B(y_0, 2n) \cap \Gamma_\xi\, y_0) \leq c\, e^{n\delta_\Gamma}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$;*
- *pour tout point parabolique borné ξ de ∂T, on a $\delta_{\Gamma_\xi} = \delta_\Gamma/2$;*
- *la mesure de Bowen-Margulis sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ est finie.*

Remarques. (1) L'hypothèse que $T_{\Gamma,\min}$ est uniforme ne peut être omise. En effet, pour tout n dans $\mathbb{N}$, posons $q_n = 2^n$ et $\Gamma_n = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{q_n}$. Notons que Γ_n s'injecte naturellement dans Γ_{n+1}. Considérons le graphe de groupes suivant (de type Nagao au sens de [BL]), qui est géométriquement fini (et de volume fini) :



Soit T le revêtement universel de ce graphe de groupes (qui est un arbre non uniforme, car de valences non uniformément bornées) et Γ son groupe fondamental, pour des choix indifférents de points bases (voir [Ser]). Si x_0 est un sommet de T, préimage de l'origine de ce rayon de groupes, alors la boule de rayon $n+1$ et de centre x_0 contient au moins $2^{q_n}/2^{q_{n-1}} = 2^{q_{n-1}}$ points, donc

$$\delta_\Gamma \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \log(q_{n-1} - 1) = +\infty\ ,$$

et l'exposant critique de Γ est infini.

(2) Soit T un arbre localement fini et Γ' un sous-groupe discret de Aut T. Alors $\delta_{\Gamma'} \leq \delta_T$, car

$$P_{\Gamma',x_0}(s) = (\text{Card } \Gamma'_{x_0}) \sum_{y \in \Gamma' x_0} e^{-sd(x_0,y)} \leq (\text{Card } \Gamma'_{x_0}) \sum_{y \in VT} e^{-sd(x_0,y)} ,$$

qui converge si $s > \delta_T$. Si Γ' est non élémentaire, alors $\delta_{\Gamma'}$ est non nul, car alors Γ' contient au moins un groupe libre de rang 2 de Schottky (voir par exemple [Lub]). Si les valences de T sont uniformément bornées, disons par $q+1$, alors $\delta_{\Gamma'}$ est fini, car $\delta_T \leq \log q$.

Démonstration de la proposition 3.1. Quitte à remplacer T par $T_{\Gamma,\min}$, nous pouvons supposer que $T = T_{\Gamma,\min}$, car dans la quatrième assertion, si y est le point de $T_{\Gamma,\min}$ le plus proche de y_0, avec $d(y,y_0) = D$, alors

$$\text{Card } (B(y, 2(n-D)) \cap \Gamma_\xi y) \leq \text{Card } (B(y_0, 2n) \cap \Gamma_\xi y_0)$$

$$\leq \text{Card } (B(y, 2n) \cap \Gamma_\xi y) \times \text{Card } \Gamma_y .$$

Si T est un arbre uniforme ayant au moins trois bouts, il est bien connu (voir par exemple [Coo, Bou, Rob]) que δ_T est fini et non nul, et qu'il existe une constante $c_1 \geq 1$ telle que pour tout x dans VT et n dans $\mathbb{N} - \{0\}$, pour toute composante connexe C de $T - \{x\}$,

$$\frac{1}{c_1}\, e^{n\delta_T} \leq \text{Card } (B(x,n) \cap VT \cap C) \leq c_1\, e^{n\delta_T} . \quad (*)$$

En particulier, la série $\sum_{y \in VT} e^{-sd(x_0,y)}$ diverge en $s = \delta_T$. Donc la première assertion de la proposition 3.1 découle de la seconde remarque ci-dessus.

Soit ξ un point parabolique borné de ∂T. Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite des sommets consécutifs d'un rayon géodésique d'extrémité ξ, se projetant sur un rayon cuspidal dans $\Gamma\backslash T$. Alors l'intersection avec $\Gamma_\xi\, x_0$ de la sphère $S(x_0, 2n)$ est la réunion des $C \cap S(x_n, n)$, où C est une composante connexe de $T - \{x_n\}$ qui ne contient ni x_{n-1} ni x_{n+1}. Comme T est de valences uniformément bornées, la quatrième assertion, avec des δ_T à la place des δ_Γ, de la proposition 3.1 découle de $(*)$. Cette quatrième assertion implique en particulier que $\delta_{\Gamma_\xi} = \delta_T/2$.

Si T_0 est le graphe obtenu en enlevant à l'arbre T la réunion de la famille disjointe Γ-invariante maximale d'horoboules ouvertes, alors VT_0 ne contient qu'un nombre fini d'orbites sous Γ. Par conséquent, la série de Poincaré de Γ diverge si et seulement si la série $\sum_{y \in VT_0} e^{-sd(x_0,y)}$ diverge.

Montrons qu'il existe une constante $c_2 \geq 1$ telle que, pour toute horosphère H dans T, passant par un sommet de T, bord d'une horoboule HB ne contenant pas x_0 dans son intérieur, et pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\text{Card } (B(x_0,n) \cap H) \leq \text{Card } (B(x_0,n) \cap HB \cap VT) \leq c_2 \text{ Card } (B(x_0,n) \cap H) . \quad (**)$$

En effet, soit ξ_0 le point à l'infini de HB. On peut supposer que l'intérieur de HB rencontre $B(x_0, n)$. Notons p la distance de x_0 à HB, et y le point du rayon géodésique entre x_0 et ξ_0, à distance $\frac{n+p}{2}$ de x_0. Alors $B(x_0, n) \cap HB = B(y, \frac{n-p}{2})$, et si B est la réunion des composantes connexes de $B(y, \frac{n-p}{2}) - \{y\}$ rencontrant H, alors $B(x_0, n) \cap H = B \cap S(y, \frac{n-p}{2})$. Or par $(*)$, il existe une constante $c_3 \geq 1$, ne dépendant pas de y, n, p telle que

$$\text{Card}\ \left(B \cap S(y, \frac{n-p}{2})\right) \geq \frac{1}{c_3}\ \text{Card}\ \left(B(y, \frac{n-p}{2}) \cap VT\right)\ .$$

L'affirmation $(**)$ s'en déduit.

Il découle de $(**)$ que la série $\sum_{y \in VT_0} e^{-sd(x_0,y)}$ diverge si et seulement si la série $\sum_{y \in VT} e^{-sd(x_0,y)}$ diverge. Ceci montre que $\delta_\Gamma = \delta_T$, ce qui termine en particulier la preuve du quatrième point, et que Γ est de type divergent.

Pour montrer que la mesure de Bowen-Margulis est finie, d'après le théorème B de [DOP], comme remarqué dans [Rob, théo. 1.11], il suffit de montrer que Γ est de type divergent, ce que nous venons de faire, et que pour tout point parabolique borné ξ dans ∂T, l'exposant critique δ_{Γ_ξ} est strictement inférieur à δ_Γ. Or $\delta_{\Gamma_\xi} = \delta_T/2 = \delta_\Gamma/2 < \delta_\Gamma$, ce qui montre le résultat. $\square$

Dans la suite de cet article, si les hypothèses de la proposition 3.1 sont vérifiées, nous supposerons, quitte à normaliser, que m_{BM} est une mesure de probabilité.

Après la propriété de finitude de la mesure de Bowen-Margulis, regardons celle de mélange. Soit T un arbre localement fini et Γ un sous-groupe discret non élémentaire de $\text{Aut}(T)$.

Même lorsque Γ est cocompact, la transformation géodésique φ sur $\Gamma \backslash \mathcal{G}T$ n'est pas forcément mélangeante. Remarquons par exemple que si $T^{(1)}$ est la première subdivision barycentrique de T, alors Γ est encore un sous-groupe de $\text{Aut}(T^{(1)})$, mais la transformation géodésique sur $\Gamma \backslash \mathcal{G}T^{(1)}$ n'est pas mélangeante. De plus, la propriété de mélange de φ n'est pas invariante par passage à un sous-groupe d'indice fini. Par exemple, la transformation géodésique pour le bouquet de deux cercles est mélangeante, mais pas celle pour son revêtement connexe à deux feuillets où aucun des deux cercles n'est relevable.

Il existe un critère assez pratique pour vérifier que la transformation géodésique est mélangeante.

Notons L_Γ le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par les distances de translation des éléments de Γ dans T. Par exemple, si T est l'arbre de Bruhat-Tits d'un groupe algébrique linéaire connexe semi-simple $\underline{G}$ de rang 1 sur un corps local non archimédien $\widehat{K}$, et si Γ est un réseau de $\underline{G}(\widehat{K})$, alors le groupe L_Γ vaut $2\mathbb{Z}$.

Si T n'a pas de sous-arbre invariant non vide et propre, et n'a pas de sommet de valence 2, alors L_Γ vaut $\mathbb{Z}$ ou $2\mathbb{Z}$ (ces hypothèses sont bénignes, car on peut toujours passer au sous-arbre invariant minimal $T_{\Gamma,\min}$, et lui enlever les sommets de valence 2, et elles sont préservées par passage à un sous-groupe d'indice fini de Γ). Une des manières de démontrer cette affirmation est d'introduire le sous-groupe Λ_Γ

de $\mathbb{Z}$ engendré par les distances entre sommets de valence au moins 3 de T, qui est donc égal à $\mathbb{Z}$ sous notre hypothèse, et de remarquer avec [GL, page 564] que

$$2\Lambda_\Gamma \subset L_\Gamma \subset \Lambda_\Gamma \;.$$

Remarquons quand même que la suppression des sommets de valence 2 peut avoir un certain effet dans le cas algébrique. Soit T l'arbre de Bruhat-Tits de $(\underline{G}, \widehat{K})$ comme dans l'introduction, et soit Γ un réseau de $\underline{G}(\widehat{K})$. Supposons qu'il existe une (alors unique) $\underline{G}(\widehat{K})$-orbite de sommets de valence 2 (ce qui est le cas par exemple pour $\underline{G} = \mathrm{PGL}_2$). Alors après suppression de ces sommets, le groupe L_Γ devient $\mathbb{Z}$, et l'action de S/M sur $\Gamma\backslash G/M$ s'identifie maintenant exactement avec l'action de la transformation géodésique.

Si $L_\Gamma = 2\mathbb{Z}$, fixons x_0 un point base de T, et notons $\mathcal{G}_0T$ le sous-espace de $\mathcal{G}T$ formé des géodésiques dont l'origine est à distance paire de x_0. Il est facile de voir que $\mathcal{G}_0T$ est invariant par Γ et par φ^2. Pour l'invariance par φ^2, on remarque que pour x, y, z trois points d'un arbre, si $d(x, y)$ et $d(y, z)$ sont pairs, alors $d(x, z)$ l'est. Pour l'invariance par Γ, on remarque que si A_γ est l'axe de translation ou l'ensemble des points fixes d'un élément γ dans Γ de distance de translation $\lambda(\gamma)$, alors $d(x, \gamma x) = 2d(x, A_\gamma) + \lambda(\gamma)$ (voir par exemple [Ser]), donc $d(x, \gamma x)$ est pair si $\lambda(\gamma)$ l'est. Si $L_\Gamma = 2\mathbb{Z}$, nous munirons $\Gamma\backslash\mathcal{G}_0T$ de la restriction de la mesure de Bowen-Margulis, normalisée pour être de probabilité.

Le résultat suivant découle alors de [Rob, Theo. 3.1] (en fait d'une version discrète de ce théorème). Lorsque Γ est un réseau de $G = \underline{G}(\widehat{K})$ agissant sur l'arbre de Bruhat-Tits de $(\underline{G}, \widehat{K})$, avec $\widehat{K}$ un corps local non archimédien et $\underline{G}$ un groupe algébrique linéaire connexe semi-simple sur $\widehat{K}$, de $\widehat{K}$-rang 1, le second énoncé découle aussi du théorème de Howe-Moore [Zim], par les rappels de l'introduction.

Proposition 3.2 *(1) Si Γ est géométriquement fini, si $T_{\Gamma,\min}$ est uniforme et si $L_\Gamma = \mathbb{Z}$, alors la transformation géodésique φ est mélangeante sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ pour m_{BM}.*

(2) Si Γ est géométriquement fini, si $T_{\Gamma,\min}$ est uniforme, sans sommet de valence 2, et si $L_\Gamma = 2\mathbb{Z}$, alors le carré φ^2 de la transformation géodésique est mélangeant sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}_0T$ pour m_{BM}. □

4 Un premier codage général

Fixons-nous les données suivantes :

- T un arbre localement fini,
- Γ un sous-groupe discret non élémentaire de $\mathrm{Aut}(T)$,
- $(\mu_x)_{x\in VT}$ une mesure de Patterson-Sullivan pour Γ de dimension δ, où $0 < \delta < +\infty$, telle que pour tout élément elliptique γ de $\Gamma - \{e\}$, l'ensemble des points fixes de γ dans ∂T soit de mesure nulle pour μ_x,
- $\mathcal{G}T$ l'espace des géodésiques de T et $\widetilde{\varphi} : \mathcal{G}T \to \mathcal{G}T$ la transformation géodésique,
- $\widetilde{\psi} = \widetilde{\varphi}^N$ avec $N \geq 1$, et

- $V'T$ une partie Γ-invariante de VT telle que, pour tout ℓ dans

$$\mathcal{G}'T = \{\ell \in \mathcal{G}T \ : \ \ell(0) \in V'T\}$$

  et pour tout t dans $\mathbb{Z}$, le sommet $\ell(t)$ appartient à $V'T$ si et seulement s'il existe n dans $\mathbb{Z}$ tel que $\widetilde{\psi}^n \ell(0) = \ell(t)$. En particulier $\mathcal{G}'T$ est une partie mesurable Γ-invariante de $\mathcal{G}T$, invariante par $\widetilde{\psi}$.

Notons $\widetilde{\mu}_{\rm BM}$ la restriction à $\mathcal{G}'T$ de la mesure de Bowen-Margulis de Γ associée à $(\mu_x)_{x\in VT}$, $\psi : \Gamma\backslash\mathcal{G}'T \rightarrow \Gamma\backslash\mathcal{G}'T$ l'application induite par $\widetilde{\psi}$, et $\mu_{\rm BM}$ la mesure sur l'espace quotient $\Gamma\backslash\mathcal{G}'T$ induite par $\widetilde{\mu}_{\rm BM}$.

La condition de mesure nulle de l'ensemble des points fixes des éléments elliptiques non triviaux est très souvent vérifiée, et nous pensons qu'elle l'est toujours si Γ est un réseau (uniforme ou non) de $\mathrm{Aut}(T)$, avec T uniforme. Donnons ci-dessous quelques arguments pour d'une part étayer cet espoir, et d'autre part montrer que le problème n'est pas complètement trivial. La première remarque donne une condition suffisante, la seconde montre que les ensembles de points fixes ne peuvent pas être outrancièrement gros, mais la dernière montre qu'ils peuvent quand même être assez gros.

Nous noterons $\mathrm{Fix}_T(\gamma)$ et $\mathrm{Fix}_{\partial T}(\gamma)$ les ensembles de points fixes dans T et ∂T respectivement d'une isométrie γ de T, et $\delta_\gamma = \delta_{\mathrm{Fix}_T(\gamma)}$ l'entropie volumique de $\mathrm{Fix}_T(\gamma)$. Rappelons que $\mathrm{Fix}_T(\gamma)$ est un sous-arbre de T (éventuellement vide).

Remarque 4.1 *Si T est uniforme, si Γ est un réseau (uniforme ou non) de* $\mathrm{Aut}(T)$ *d'exposant critique égal à δ, si $\gamma \in \Gamma$ vérifie $\delta_\gamma < \delta$, alors $\mu_x(\mathrm{Fix}_{\partial T}(\gamma)) = 0$ pour tout x dans VT.*

Preuve. Soit x dans VT. Par unicité (voir par exemple [BM]), la mesure μ_x est (à scalaire multiplicatif près) la mesure de Hausdorff de la distance visuelle d_x (voir par exemple [Coo, BM]) sur ∂T, et δ est la dimension de Hausdorff de d_x. Donc si la dimension de Hausdorff δ'_γ de $\mathrm{Fix}_{\partial T}(\gamma)$ pour d_x est strictement inférieure à δ, alors $\mu_x(\mathrm{Fix}_{\partial T}(\gamma)) = 0$. Or $\delta'_\gamma \leq \delta_\gamma$ (ce qui montre le résultat), car il est classique que pour tout arbre localement fini T', la dimension de Hausdorff δ'' de son bord pour ses distances visuelles est inférieure à son entropie volumique δ'. (En effet, soit x'_0 dans T', soit $s > \delta'$, soit $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathrm{Card}\, B(x'_0, n_k) \leq e^{sn_k}$, soit $(\xi_i)_{1\leq i\leq p_k}$ une partie finie minimale de ∂T telle que $\partial T \subset \bigcup_{i=1}^{p_k} B(\xi_i, e^{-n_k})$, et soit x_i le point à distance n_k de x'_0 sur le rayon géodésique de x'_0 à ξ_i. Alors par minimalité les x_i sont deux à deux distincts, donc sont au nombre de e^{sn_k} au plus. Par conséquent, si $\mu_{s,e^{-n_k}}(\partial T)$ est la borne inférieure, sur tous les recouvrements finis de ∂T par des boules B_j de rayon r_j au plus e^{-n_k}, des nombres $\sum_j r_j^s$, alors

$$\mu_{s,e^{-n_k}}(\partial T) \leq \sum_{i=1}^{p_k} e^{-sn_k} \leq 1 < +\infty\ .$$

Par définition de la dimension de Hausdorff, on a donc $\delta'' \leq s$, d'où $\delta'' \leq \delta'$). □

Par exemple, si Γ est un réseau géométriquement fini d'un arbre uniforme T, d'exposant critique δ, dont les groupes de sommet qui ne sont pas intérieurs à un rayon cuspidal sont triviaux, alors pour tout γ dans $\Gamma - \{0\}$, l'ensemble $\mathrm{Fix}_T(\gamma)$ est contenu dans une horoboule de T, et donc son entropie volumique est au plus $\delta/2$, par la proposition 3.1, donc $\mu_x(\mathrm{Fix}_{\partial T}(\gamma))$ est bien nulle par la remarque précédente.

Remarque 4.2 *Si $T = T_{\Gamma,\min}$, alors aucun élément non trivial de Γ ne fixe point par point un ouvert non vide de ∂T.*

Preuve. vide de ∂T. Comme Γ est non élémentaire et $T = T_{\Gamma,\min}$, les couples de points fixes d'éléments hyperboliques de Γ sont denses dans ∂T. Pour tout $\epsilon > 0$ et tout ξ dans ∂T, il existe un élément hyperbolique γ dans Γ ayant son point fixe répulsif à distance au plus ϵ de ξ, et l'autre point fixe dans U. Soit x un point de l'axe de translation de γ. Pour tout entier n assez grand, $\gamma^n x$ est fixé par α (car celui-ci fixe U point par point). Donc pour tout n assez grand, $\gamma^{-n}\alpha\gamma^n x = x$. Comme Γ est discret, il existe des entiers distincts n et m tels que $\gamma^{-n}\alpha\gamma^n = \gamma^{-m}\alpha\gamma^m$. Donc, en posant $p = n - m \neq 0$, l'élément elliptique α commute avec l'élément hyperbolique γ^p. Par conséquent α fixe l'axe de translation de γ^p, qui est l'axe de translation de γ, donc α admet un point fixe à distance au plus ϵ de ξ. Donc l'ensemble des points fixes de α, qui est fermé et dense dans ∂T, est égal à ∂T. Par conséquent α vaut l'identité sur ∂T, donc sur $T = T_{\Gamma,\min}$, ce qui contredit le fait que α soit non trivial. □

Remarquons toutefois que contrairement au cas des réseaux sans torsion, dont tout élément différent de l'identité n'a que deux points fixes dans l'espace des bouts de l'arbre, il existe des réseaux ayant des éléments (elliptiques) non triviaux γ dont l'ensemble des points fixes est un espace de Cantor, avec δ_γ arbitrairement prescrit.

Remarque 4.3 *Il existe une partie $\mathcal{S}$ dense dans $]0,+\infty[$, telle que pour tout s dans $\mathcal{S}$, il existe un triplet (T,Γ,γ), avec T un arbre localement fini, Γ un réseau uniforme de T et γ un élément non trivial de Γ, tel que $\delta_\gamma = s$.*

Preuve. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des $s > 0$ tels qu'il existe un réseau uniforme d'un arbre localement fini dont l'entropie volumique est s. Il est bien connu que $\mathcal{S}$ est une partie (dénombrable) dense de $]0,+\infty[$ (par exemple, l'entropie volumique de la p-ème subdivision barycentrique de l'arbre régulier de valence $q+1$ est $\frac{\log q}{p}$).

Soit s un élément de $\mathcal{S}$, et Γ_0 un réseau uniforme d'un arbre localement fini T_0, d'entropie volumique s. Notons A_1, A_2 deux copies du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Considérons le graphe de groupes $\mathcal{G}$, obtenu à partir du graphe de groupes $\Gamma_0\backslash\backslash T_0$ en y remplacant chaque groupe d'arête ou de sommet par son produit direct avec A_1, avec monomorphismes évidents, en rajoutant au graphe $\Gamma_0\backslash T_0$ une arête partant d'un sommet quelconque et d'extrémité libre, le groupe de la nouvelle arête étant trivial, et le groupe du nouveau sommet étant A_2. Notons T l'arbre de Bass-Serre de $\mathcal{G}$, Γ le groupe fondamental de $\mathcal{G}$ pour un choix indifférent de point base dans $\Gamma_0\backslash T_0$ (voir par exemple [Ser]), et γ l'élément de Γ correspondant à l'élément non trivial de A_1. Alors Γ (isomorphe au produit libre $(\Gamma_0 \times A_1) * A_2$) est un réseau uniforme de T, γ est un élément elliptique non trivial de Γ, l'ensemble $\mathrm{Fix}_{\partial T}(\gamma)$ est un espace de Cantor dans ∂T (c'est l'espace des bouts du sous-arbre $\mathrm{Fix}_T(\gamma)$ de T, qui est isomorphe à T_0), et l'entropie volumique δ_γ de $\mathrm{Fix}_T(\gamma)$ est égale au nombre prescrit s. $\square$

Bien sûr, dans cet exemple, $\delta_\Gamma > \delta_\gamma$. Nous ne savons pas s'il est possible de trouver des triplets (T, Γ, γ) (disons en imposant une borne fixée sur les valences des sommets de T) tels que la différence $\delta_\Gamma - \delta_\gamma$ soit arbitrairement petite.

Revenons au cadre initial de cette partie. Dans toute la suite de cette partie, nous supposons que le système dynamique mesuré $(\Gamma\backslash\mathcal{G}'T, \psi, \mu_{\mathrm{BM}})$ est de probabilité et mélangeant.

Par exemple, dans le cas où Γ est géométriquement fini et $T_{\Gamma,\min}$ est uniforme, la proposition 3.1 assure que μ_{BM} est une mesure finie, que l'on normalise pour être de probabilité. La proposition 3.2 assure que $(\Gamma\backslash\mathcal{G}'T, \psi, \mu_{\mathrm{BM}})$ est mélangeant, d'une part pour $N = 1$ et $V'T = VT$ si $L_\Gamma = \mathbb{Z}$, et d'autre part pour $N = 2$ et $V'T$ le sous-ensemble des sommets à distance paire d'un sommet donné de T, si $L_\Gamma = 2\mathbb{Z}$ et si $T_{\Gamma,\min}$ n'a pas de sommet de valence 2.

D'abord, nous introduisons les notations qui vont permettre d'énoncer le résultat principal de cette partie.

Pour x dans $V'T$, notons $\mathcal{G}'T(x)$ le sous-espace mesurable Γ-invariant et $\widetilde{\psi}$-invariant des éléments ℓ de $\mathcal{G}'T$ tels que, pour une infinité de temps positifs et de temps négatifs t, le point $\ell(t)$ appartienne à l'orbite Γx (ou de manière équivalente par l'hypothèse sur $V'T$, l'origine de la géodésique $\widetilde{\psi}^{\,t}\ell$ appartienne à Γx). Par passage au quotient et par ergodicité de $(\Gamma\backslash\mathcal{G}'T, \psi, \mu_{\mathrm{BM}})$, il existe un point x_0 dans $V'T$ tel que $\widetilde{X} = \mathcal{G}'T(x_0)$ soit de mesure pleine dans $\mathcal{G}'T$. On appelle X l'espace topologique quotient $\Gamma\backslash\widetilde{X}$, et $\pi : \widetilde{X} \to X$ la projection canonique. On note de la même manière les restrictions de $\widetilde{\psi}$ et $\widetilde{\mu}_{\mathrm{BM}}$ à $\widetilde{X}$, ainsi que celles de ψ et μ_{BM} à X.

Soit $\widetilde{X}_0$ le sous-espace fermé Γ-invariant des géodésiques de $\widetilde{X}$ d'origine dans Γx_0. Pour tout ℓ dans $\widetilde{X}_0$, notons $t_\ell > 0$ le premier temps de retour de l'orbite de ℓ sous $\widetilde{\psi}$ dans $\widetilde{X}_0$; par l'hypothèse sur $V'T$, c'est le minimum des entiers strictement positifs t tels que $\ell(t)$ appartienne à Γx_0.

Notons $\widetilde{\psi}_0 : \widetilde{X}_0 \to \widetilde{X}_0$ l'application de premier retour définie par $\widetilde{\psi}_0\ell = \widetilde{\psi}^{\,t_\ell}\ell$, qui est Γ-équivariante. Notons X_0 l'image de $\widetilde{X}_0$ par π. L'application ψ_0 est l'application induite par passage au quotient de $\widetilde{\psi}_0$ à $\widetilde{X}_0$. La mesure m_0 sur X_0 est la mesure induite par passage au quotient de la restriction $\widetilde{m}_0$ de $\widetilde{\mu}_{\mathrm{BM}}$ à $\widetilde{X}_0$. Renormalisons les mesures de sorte que la mesure m_0 soit de probabilité, ce qui est possible car la mesure μ_{BM} est supposée être de probabilité.

Notons S l'ensemble des γ dans $\Gamma - \Gamma_{x_0}$ tels que l'intersection $]\,x_0, \gamma x_0[\, \cap\, \Gamma x_0$ soit vide. Remarquons que S est invariant par translations à droite et à gauche par Γ_{x_0}.

Nous renvoyons par exemple à [Kit] pour les définitions sur les décalages de Markov. Rappelons que la *mesure de Markov* μ_Π sur $S^{\mathbb{Z}}$, associée à une matrice

$\Pi = (\pi_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in S}$ *stochastique* (i.e. $\sum_{\beta \in S} \pi_{\alpha,\beta} = 1$ pour tout α dans S) et à une mesure de probabilité $\nu = (\nu_\alpha)_{\alpha \in S}$ sur S qui est Π-*stationnaire* (i.e. $\sum_{\alpha \in S} \nu_\alpha \pi_{\alpha,\beta} = \nu_\beta$ pour tout β dans S), est l'unique mesure borélienne de probabilité sur $S^{\mathbb{Z}}$, invariante par le décalage, telle que, pour tout k dans $\mathbb{N}$ et tous $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ dans S, on ait

$$\mu_\Pi[Z_0 = \alpha_0, \dots, Z_k = \alpha_k] = \nu_{\alpha_0} \left(\prod_{i=0}^{k-1} \pi_{\alpha_i, \alpha_{i+1}} \right) .$$

Énonçons maintenant le résultat principal de cette partie.

Théorème 4.4 *Il existe une mesure de Markov μ_Π sur $S^{\mathbb{Z}}$, de sorte que le système dynamique probabilisé (X_0, ψ_0, m_0) soit un facteur du système de Markov $(S^{\mathbb{Z}}, \sigma, \mu_\Pi)$.*

Avant de démontrer ce résultat, nous allons énoncer et démontrer ses corollaires.

Corollaire 4.5 *Si le système dynamique mesuré $(\Gamma \backslash \mathcal{G}'T, \psi, \mu_{BM})$ est de probabilité et mélangeant, alors il est lâchement Bernoulli.*

Preuve. Il suffit de montrer que le système dynamique probabilisé $(X, \psi, \mu_{\mathrm{BM}})$, qui est de mesure pleine dans $(\Gamma \backslash \mathcal{G}'T, \psi, \mu_{\mathrm{BM}})$, est lâchement Bernoulli.

Remarquons que X_0 est une transversale totale du système dynamique probabilisé $(X, \psi, \mu_{\mathrm{BM}})$, dont ψ_0 est l'application de premier retour, $\Gamma\ell \mapsto t_\ell$ le temps de premier retour, et m_0 la mesure induite, et donc $(X, \psi, \mu_{\mathrm{BM}})$ est une suspension mélangeante de (X_0, ψ_0, m_0).

Rappelons qu'une transformation T définie sur X est *markovienne*, s'il existe une fonction f définie sur X et prenant un nombre fini ou dénombrable de valeurs réelles telle que le processus $(f \circ T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit markovien et si la plus petite tribu qui rende mesurable tous les itérés $f \circ T^n$ de f est la tribu tout entière de l'espace sur lequel est définie T.

Avec le résultat de Adler, Shields et Smorodinsky [ASS] dans le cas d'un décalage de Markov sur un espace d'états fini et sa généralisation pour un espace d'états dénombrable (il suffit d'utiliser une généralisation du théorème de Perron-Frobenius, voir le chapitre 7 du livre de Kitchens [Kit]), on peut caractériser les transformations markoviennes : une transformation markovienne est le produit direct d'une rotation sur un espace d'états fini et d'un schéma de Bernoulli.

Cette propriété est stable par passage à un facteur, donc un facteur d'une transformation markovienne est encore une transformation markovienne.

Comme toute suspension mélangeante d'une transformation markovienne est un système lâchement Bernoulli (voir par exemple [Tho]), le théorème 4.4 implique bien le corollaire 4.5. □

Ce résultat permet de déduire les deux énoncés suivants. En prenant $N = 1$ et $V'T = VT$, nous obtenons l'énoncé du théorème 1.1 de l'introduction, que nous rappelons ci-dessous.

Corollaire 4.6 *Soit Γ un sous-groupe discret non élémentaire de* $\mathrm{Aut}(T)$ *et soit $\widetilde{\mu}_{BM}$ une mesure de Bowen-Margulis pour Γ sur $\mathcal{G}T$, dont la mesure de Patterson-Sullivan sur ∂T ne charge aucun ensemble de points fixes d'élément elliptique non trivial de Γ. Si le système dynamique mesuré quotient de $(\mathcal{G}T, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\mu}_{BM})$ par Γ est de probabilité et mélangeant, alors il est lâchement Bernoulli.* □

Nous obtenons un second résultat dans le cas algébrique.

Corollaire 4.7 *Avec les notations $\underline{G}, \widehat{K}, G, S, M, \mathbb{T}$ de l'introduction, pour tout réseau Γ de G, si $\mathcal{G}_0\mathbb{T}$ est le sous-espace de $\mathcal{G}\mathbb{T}$ formé des géodésiques d'origine un sommet à distance paire d'un sommet donné de $\mathbb{T}$, alors le système dynamique probabilisé $(\Gamma\backslash\mathcal{G}_0\mathbb{T}, \psi, \mu_{BM})$ est lâchement Bernoulli.*

Ainsi, l'action par translations à droite de S/M sur $\Gamma\backslash G/M$ est lâchement Bernoulli.

Preuve. par son image dans celui-ci, nous pouvons supposer que G, et donc Γ, agit fidèlement sur $\mathbb{T}$. Nous allons utiliser le corollaire 4.5 avec $N = 2$, $V'T$ l'ensemble des sommets à distance paire du sommet donné de $\mathbb{T}$ de sorte que $\mathcal{G}'T = \mathcal{G}_0\mathbb{T}$, δ l'entropie volumique de $\mathbb{T}$, et $(\mu_x)_{x\in V\mathbb{T}}$ la mesure de Patterson-Sullivan de dimension δ pour Γ (unique par [BM] par exemple). Rappelons que tout réseau de G est géométriquement fini et possède la propriété de Selberg. Soit Γ' un sous-groupe d'indice fini de Γ tel que le groupe de tout sommet non intérieur à un rayon cuspidal de $\Gamma'\backslash\backslash\mathbb{T}$ soit trivial. Alors par l'exemple suivant la remarque 4.1, la mesure de Patterson-Sullivan sur ∂T pour Γ', qui coincide avec celle pour Γ, ne charge aucun ensemble de points fixes d'élément elliptique non trivial de Γ'. Par la proposition 3.2 (1) appliquée à $\mathbb{T}$ où l'on a enlevé les sommets de valences 2 s'ils existent, ou la proposition 3.2 (2) sinon, le système dynamique probabilisé $(\Gamma'\backslash\mathcal{G}_0\mathbb{T}, \psi, \mu_{\rm BM})$ est mélangeant. Donc par le corollaire 4.5, le système $(\Gamma'\backslash\mathcal{G}_0\mathbb{T}, \psi, \mu_{\rm BM})$ est lâchement Bernoulli. Comme tout facteur d'un système lâchement Bernoulli l'est encore (voir par exemple [Tho]), la première assertion en découle.

La seconde assertion découle de la première par la correspondance rappelée en introduction. □

Ce résultat est plus faible que le théorème 1.2 de l'introduction. Celui-ci sera complètement démontré dans la partie 5.

Démonstration du théorème 4.4. Définissons une matrice de transition $A = (A_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in S}$. Pour tous α, β dans S, posons $A_{\alpha,\beta} = 1$ si x_0 appartient au segment géodésique entre $\alpha^{-1}x_0$ et βx_0, et $A_{\alpha,\beta} = 0$ sinon. Remarquons que $A_{\alpha,\beta} = 1$ si et seulement si la réunion $[x_0, \alpha x_0] \cup [\alpha x_0, \alpha\beta x_0]$ est un segment géodésique.

Notons (X_A, σ) le sous-décalage défini par la matrice de transition A, i.e.

$$X_A = \{(\alpha_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in S^{\mathbb{Z}} \;:\; \forall\, i \in \mathbb{Z},\; A_{\alpha_i,\alpha_{i+1}} = 1\}\;,$$

muni de la restriction de la topologie produit, et σ la restriction à X_A du décalage vers la gauche des suites bilatères de $S^{\mathbb{Z}}$.

Construisons une application $\Theta : X_A \to X_0$ de la manière suivante. Soit $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X_A$, définissons une suite $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ dans Γ par récurrence, en posant γ_0 l'élément neutre e de Γ, et $\gamma_{i+1} = \gamma_i\alpha_{i+1}$ pour tout i dans $\mathbb{Z}$. Alors les points $(\gamma_i x_0)_{i\in\mathbb{Z}}$ sont consécutivement alignés sur une géodésique ℓ. En effet, comme $A_{\alpha_i,\alpha_{i+1}} = 1$, la réunion $[x_0, \alpha_i x_0] \cup [\alpha_i x_0, \alpha_i\alpha_{i+1}x_0]$ est un segment géodésique, donc son image par γ_{i-1} aussi et donc $\gamma_{i-1}x_0, \gamma_i x_0, \gamma_{i+1}x_0$ sont bien alignés dans cet ordre. Paramétrons ℓ de sorte que $\ell(0) = x_0$ et que $\gamma_i x_0$ converge vers les extrémités $\ell_\pm$ de ℓ quand $i \to \pm\infty$. Par définition de $\widetilde{X}_0$, la géodésique ℓ appartient à $\widetilde{X}_0$. Posons alors $\Theta((\alpha_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \pi(\ell)$.

Montrons que Θ est surjective. En effet, soit $\overline{\ell}$ un élément de X_0. Choisissons un relevé ℓ de $\overline{\ell}$ dans $\widetilde{X}_0$ tel que $\ell(0) = x_0$. Notons $(\gamma_i x_0)_{i\in\mathbb{Z}}$ la suite des points consécutifs de ℓ dans Γx_0, où l'on peut supposer que $\gamma_0 = e$. Posons $\alpha_i = \gamma_{i-1}^{-1}\gamma_i$, qui appartient à S. Puisque $\gamma_{i-1}x_0, \gamma_i x_0, \gamma_{i+1}x_0$ sont alignés dans cet ordre sur ℓ, nous avons $A_{\alpha_i,\alpha_{i+1}} = 1$. Par construction, nous avons alors $\Theta((\alpha_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \pi(\ell) = \overline{\ell}$.

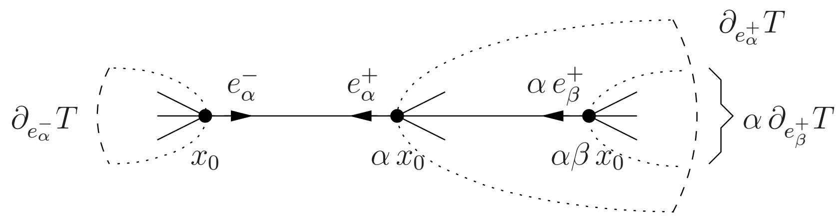
Par définition de la topologie produit sur $S^{\mathbb{Z}}$ et de la topologie de $\mathcal{G}T$, l'application $\Theta : X_A \to X_0$ est continue. Il est immédiat que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_A & \xrightarrow{\Theta} & X_0 \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \psi_0 \\ X_A & \xrightarrow{\Theta} & X_0 \end{array} \quad . \quad (*)$$

Donc topologiquement, le système dynamique (X_0, ψ_0) est un facteur du système dynamique symbolique (X_A, σ).

Nous allons maintenant construire une mesure de Markov sur le sous-décalage X_A, dont l'image par Θ sera m_0. Nous commençons pour cela par définir une mesure $(\nu_\alpha)_{\alpha\in S}$ sur l'ensemble dénombrable discret S et des probabilités de transitions $(\pi_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in S}$, après quelques notations.

Pour tout α dans S, notons e^+_α (respectivement e^-_α) l'arête (orientée) d'origine αx_0 (respectivement x_0) et contenue dans $[x_0, \alpha x_0]$. Remarquons que pour α dans Γ_{x_0} et β dans S, nous avons $\alpha\, e^+_\beta = e^+_{\alpha\beta}$. Pour α, β dans S, nous avons $A_{\alpha,\beta} = 1$ si et seulement si $\alpha\, \partial_{e^+_\beta} T = \partial_{\alpha e^+_\beta} T$ est contenu dans $\partial_{e^+_\alpha} T$.



Notons $\partial_0 T$ l'ensemble des points ξ de ∂T tels qu'il existe une infinité de points de l'orbite Γx_0 sur le rayon géodésique entre x_0 et ξ. Il est invariant par Γ.

Comme la géodésique entre deux points de ∂T est contenue dans la réunion des rayons géodésiques entre x_0 et ces points, une géodésique ℓ de T appartient à

$\mathcal{G}'T(x_0)$ si et seulement si ses extrémités $\ell_\pm$ appartiennent à $\partial_0 T$. En particulier, $\widetilde{X} = \{\ell \in \mathcal{G}'T \;:\; \ell_\pm \in \partial_0 T\}$ et $\widetilde{X}_0 = \{\ell \in \mathcal{G}T \;:\; \ell(0) \in \Gamma x_0, \ell_\pm \in \partial_0 T\}$ (remarquons que si $\ell \in \mathcal{G}T$ et $\ell(0) \in \Gamma x_0$, alors $\ell \in \mathcal{G}'T$). Par le paramétrage de Hopf, l'image de $\widetilde{X}$ est donc contenue dans $\partial_0 T \times \partial_0 T \times \mathbb{Z}$. Comme $\widetilde{X}$ est de mesure pleine dans $\mathcal{G}'T$ pour la mesure de Bowen-Margulis, et par les propriétés de celle-ci, nous en déduisons que $\partial_0 T$ est de mesure pleine dans ∂T pour la mesure de Patterson-Sullivan μ_{x_0}.

Comme Γ est non élémentaire, quitte à remplacer T par son unique sous-arbre non vide invariant minimal, nous pouvons supposer que T soit sans arête terminale, et que le support de la mesure de Patterson-Sullivan soit égal à ∂T. En particulier, pour tout sommet x et toute arête e de T, on a $\mu_x(\partial_e T) > 0$. Rappelons que le groupe Γ_{x_0} est de cardinal $|\Gamma_{x_0}|$ fini.

Pour tout α dans S, posons maintenant

$$\nu_\alpha = \frac{1}{|\Gamma_{x_0}|^2}\; \mu_{x_0}(\partial_{e_\alpha^-} T)\, \mu_{x_0}(\partial_{e_\alpha^+} T) > 0\ .$$

Pour tous α, β dans S, posons $\pi_{\alpha,\beta} = 0$ si $A_{\alpha,\beta} = 0$, et sinon

$$\pi_{\alpha,\beta} = \frac{1}{|\Gamma_{x_0}|}\; \frac{\mu_{x_0}(\partial_{\alpha\, e_\beta^+} T)}{\mu_{x_0}(\partial_{e_\alpha^+} T)} > 0\ .$$

Remarques (1) Pour α dans S, les parties $\partial_{e_\alpha^-} T, \partial_{e_\alpha^+} T$ ne dépendent que de la classe à droite de α modulo Γ_{x_0}, et pour α, β dans S, l'égalité $A_{\alpha,\beta} = 1$ ne dépend que de la classe à gauche de α modulo Γ_{x_0}, et de la classe à droite de β modulo Γ_{x_0}.

(2) Pour tous $\gamma, \gamma', \gamma''$ dans Γ_{x_0} et tous α, β dans S, par invariance de la mesure μ_{x_0} par Γ_{x_0}, on a

$$\nu_\alpha = \nu_{\gamma\alpha\gamma'} \quad \text{et} \quad \pi_{\alpha,\beta} = \pi_{\gamma'\alpha\gamma, \gamma^{-1}\beta\gamma''}\ . \quad (\sharp)$$

Lemme 4.8 *La matrice* $\Pi = (\pi_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in S}$ *est une matrice stochastique sur* S*, de mesure stationnaire* $\nu = (\nu_\alpha)_{\alpha\in S}$*.*

Preuve. Il s'agit de montrer que $\sum_{\alpha\in S} \nu_\alpha = 1$, que $\sum_{\beta\in S} \pi_{\alpha,\beta} = 1$ pour tout α dans S, et que $\sum_{\alpha\in S} \nu_\alpha \pi_{\alpha,\beta} = \nu_\beta$ pour tout β dans S. Nous commençons la preuve par quelques notations et résultats ensemblistes.

Pour tout x dans $V'T$ et toutes les parties B_-, B_+ de ∂T tels que toutes les géodésiques entre un point de B_- et un point de B_+ passent par x, notons $B_+ \times B_- \times \{x\}$ l'ensemble des géodésiques ℓ de T telles que $\ell(0) = x, \ell_- \in B_-, \ell_+ \in B_+$. Par définition de la mesure de Bowen-Margulis, remarquons que si B_+, B_- sont mesurables, comme $\partial_0 T$ est de mesure pleine,

$$\widetilde{\mu}_{\rm BM}(B_- \times B_+ \times \{x\}) = \mu_x(B_-)\, \mu_x(B_+)\ .$$

En particulier, pour tout α dans S, on a

$$\nu_\alpha = \frac{1}{|\Gamma_{x_0}|^2}\; \widetilde{\mu}_{\rm BM}(\partial_{e_\alpha^-} T \times \partial_{e_\alpha^+} T \times \{x_0\})\ .$$

Lemme 4.9 *Nous avons les réunions disjointes suivantes (où nous notons de la même manière une classe et l'un de ses représentants) :*

(1) $\partial_0 T = \bigsqcup_{\alpha\in S/\Gamma_{x_0}} (\partial_{e_\alpha^+} T \cap \partial_0 T)$,

(2) pour tout α *dans* S, $\partial_{e_\alpha^+} T \cap \partial_0 T = \bigsqcup_{\beta\in S/\Gamma_{x_0}\,:\,A_{\alpha,\beta}=1} (\partial_{\alpha e_\beta^+} T \cap \partial_0 T)$,

(3) pour tous β *dans* S, $\partial_{e_\beta^-} T \cap \partial_0 T = \bigsqcup_{\alpha\in\,\Gamma_{x_0}\backslash S\,:\,A_{\alpha,\beta}=1} (\partial_{\alpha^{-1} e_\alpha^-} T \cap \partial_0 T)$,

(4) $X_0 = \bigsqcup_{\alpha\in\,\Gamma_{x_0}\backslash S/\Gamma_{x_0}} \pi\big((\partial_{e_\alpha^-} T \cap \partial_0 T) \times (\partial_{e_\alpha^+} T \cap \partial_0 T) \times \{x_0\}\big)$.

Preuve. Les objets sont bien définis, par la première des remarques précédant l'énoncé du lemme 4.8.

Montrons (1). Soient α, β dans S, et supposons qu'il existe ξ dans $\partial_{e_\alpha^+} T \cap \partial_{e_\beta^+} T \cap \partial_0 T$, alors le rayon géodésique de x_0 à ξ passe par αx_0 et par βx_0. De plus, ces points coïncident, car ce sont tous les deux le premier point de $\Gamma x_0 - \{x_0\}$ rencontré par le rayon. Donc $\alpha\Gamma_{x_0} = \beta\Gamma_{x_0}$. Par conséquent, la réunion dans l'assertion (1) est disjointe.

Pour tout ξ dans $\partial_0 T$, le rayon géodésique de x_0 à ξ passe par un premier point de l'orbite Γx_0 différent de x_0. Ce point s'écrit αx_0 avec α dans S, donc ξ appartient à $\partial_{e_\alpha^+} T$, ce qui montre (1).

Les autres assertions se montrent de manière analogue. □

Par le lemme 4.9 (4), et le fait que l'action de Γ_{x_0} sur $(\partial T, \mu_{x_0})$ soit essentiellement libre, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in S} \nu_\alpha &= \frac{1}{|\Gamma_{x_0}|^2} \sum_{\alpha\in S} \widetilde{\mu}_{\mathrm{BM}}(\partial_{e_\alpha^-} T \times \partial_{e_\alpha^+} T \times \{x_0\}) \\
&= \frac{1}{|\Gamma_{x_0}|} \sum_{\alpha\in S/\Gamma_{x_0}} \widetilde{\mu}_{\mathrm{BM}}(\partial_{e_\alpha^-} T \times \partial_{e_\alpha^+} T \times \{x_0\}) \\
&= \sum_{\alpha\in\,\Gamma_{x_0}\backslash S/\Gamma_{x_0}} \frac{1}{|\Gamma_{[x_0,\alpha x_0]}|} \widetilde{\mu}_{\mathrm{BM}}(\partial_{e_\alpha^-} T \times \partial_{e_\alpha^+} T \times \{x_0\}) \\
&= \sum_{\alpha\in\,\Gamma_{x_0}\backslash S/\Gamma_{x_0}} m_0(\pi(\partial_{e_\alpha^-} T \times \partial_{e_\alpha^+} T \times \{x_0\})) = m_0(X_0) = 1 \,.
\end{aligned}$$

Par le lemme 4.9 (2), nous avons $\sum_{\beta\in S} \pi_{\alpha,\beta} = 1$. De plus, si $A_{\alpha,\beta} = 1$, puisque toute géodésique entre un point de $\partial_{e_\alpha^-} T$ et un point de $\partial_{\alpha\, e_\beta^+} T$ passe par αx_0, et par invariance de $\widetilde{\mu}_{\mathrm{BM}}$, alors

$$\begin{aligned}
\nu_\alpha \pi_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{|\Gamma_{x_0}|^3} \mu_{x_0}(\partial_{e_\alpha^-} T)\mu_{x_0}(\partial_{\alpha\, e_\beta^+} T) = \frac{1}{|\Gamma_{x_0}|^3} \widetilde{\mu}_{\mathrm{BM}}(\partial_{e_\alpha^-} T \times \partial_{\alpha\, e_\beta^+} T \times \{\alpha x_0\}) \\
&= \frac{1}{|\Gamma_{x_0}|^3} \widetilde{\mu}_{\mathrm{BM}}(\partial_{\alpha^{-1}\, e_\alpha^-} T \times \partial_{e_\beta^+} T \times \{x_0\}) \,.
\end{aligned}$$

Donc

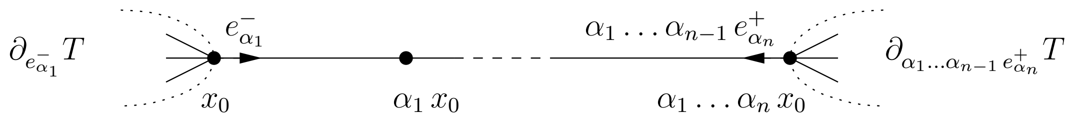
$$\sum_{\alpha\in S} \nu_\alpha \pi_{\alpha,\beta} = \sum_{\alpha\in\,\Gamma_{x_0}\backslash S\,:\,A_{\alpha,\beta}=1} \frac{1}{|\Gamma_{x_0}|^2}\,\widetilde{\mu}_{\rm BM}(\partial_{\alpha^{-1}\,e^-_\alpha} T\times\partial_{e^+_\beta}T\times\{x_0\}) = \nu_\beta$$

par le lemme 4.9 (3). Ceci conclut la preuve du lemme 4.8. □

Comme $\pi_{\alpha,\beta}=0$ si $A_{\alpha,\beta}=0$ pour tout α,β dans S, la mesure de Markov μ_Π associée à (Π,ν), définie avant l'énoncé du théorème 4.4, est à support dans X_A. Nous notons encore μ_Π sa restriction à X_A.

Lemme 4.10 *Les mesures $\Theta_*\mu_\Pi$ et m_0 coïncident.*

Preuve. Pour $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ dans S tels que pour tout i dans $\{1,\dots,n-1\}$, nous ayons $A_{\alpha_i,\alpha_{i+1}}=1$, notons $U_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ l'image par π de l'ensemble $\widetilde{U}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ des ℓ dans $\widetilde{X}_0$ tels que les $n+1$ premiers points de Γx_0 rencontrés par ℓ à partir de l'instant 0 soient $x_0,\alpha_1x_0,\dots,\alpha_1\dots\alpha_nx_0$. Les $U_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ et leurs images par les puissances de ψ_0 sont des boréliens de X_0, qui engendrent la tribu des boréliens de X_0, par définition de X_0.



Par commutativité du diagramme $(*)$, les mesures $\Theta_*\mu_\Pi$ et m_0 sont deux mesures de probabilité sur X_0 invariantes par ψ_0. Pour montrer que $\Theta_*\mu_\Pi=m_0$, il suffit donc de montrer que

$$\Theta_*\mu_\Pi(U_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}) = m_0(U_{\alpha_1,\dots,\alpha_n})$$

pour tous les $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ dans S tels que $A_{\alpha_i,\alpha_{i+1}}=1$. Procédons par récurrence sur n, le cas $n=0$ étant clair, car $\Theta_*\mu_\Pi(X_0)=m_0(X_0)=1$.

Rappelons que, par définition de Θ, pour tout $(Z_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ dans X_A, on a $\Theta((Z_i)_{i\in\mathbb{Z}})=\pi(\ell')$ où les $n+1$ premiers points de Γx_0 rencontrés par ℓ' à partir de l'instant 0 sont x_0, Z_1x_0, …, $Z_1\dots Z_nx_0$. Remarquons que $\pi(\ell')$ appartient à $\pi(\widetilde{U}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n})$ si et seulement s'il existe $\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_n$ dans Γ_{x_0} tels que

$$\forall\, i\in\{1,\dots,n\},\ \beta_0^{-1}\alpha_1\dots\alpha_i\beta_i = Z_1\dots Z_i\ .\quad (**)$$

Donc $\Theta((Z_i)_{i\in\mathbb{Z}})$ appartient à $U_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ si et seulement s'il existe $\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_n$ dans Γ_{x_0} tels que

$$\forall\, i\in\{1,\dots,n\},\quad Z_i=\beta_{i-1}^{-1}\alpha_i\beta_i\ .\quad (***)$$

Par définition de la mesure de Markov et les propriétés d'invariance $(\sharp)$ des $\nu_\alpha,\pi_{\alpha,\beta}$, nous avons, pour tous $\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_n$ dans Γ_{x_0},

$$\mu_\Pi[Z_1=\beta_0^{-1}\alpha_1\beta_1,\dots,Z_n=\beta_{n-1}^{-1}\alpha_n\beta_n] = \nu_{\alpha_1}\left(\prod_{i=1}^{n-1}\pi_{\alpha_i,\alpha_{i+1}}\right)\ .$$

Définissons une relation d'équivalence $\sim$ sur $\Gamma_{x_0}^{n+1}$ par

$$(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) \sim (\beta'_0, \beta'_1, \dots, \beta'_n) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\forall\, i \in \{1, \dots, n\},\ \ \beta_{i-1}^{-1}\alpha_i\beta_i = \beta'^{-1}_{i-1}\alpha_i\beta'_i\Big)\ .$$

Le cardinal de chaque classe d'équivalence est égal à celui du stabilisateur $\Gamma_{[x_0,\alpha_1\dots\alpha_n x_0]}$ (car, par l'équivalence entre les assertions $(**)$ et $(***)$, dans une classe donnée, β_0 est uniquement déterminé modulo ce stabilisateur, et les β_i pour $i > 0$ sont uniquement déterminés par β_0). Donc le nombre $N_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ de classes d'équivalence vaut

$$N_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} = \frac{|\Gamma_{x_0}|^{n+1}}{|\Gamma_{[x_0,\alpha_1\dots\alpha_n x_0]}|}\ . \quad (****)$$

Par les propriétés d'invariance des mesures de Patterson-Sullivan $(\mu_x)_{x\in T}$, pour toute partie mesurable A de ∂T et tous les points x, y de T, si le rayon géodésique entre x et chaque point de A passe par y, alors $\mu_x(A) = e^{-\delta d(x,y)}\mu_y(A)$. En particulier, pour $1 \le i \le n$,

$$\mu_{x_0}(\partial_{e^+_{\alpha_i}} T) = \mu_{\alpha_1\dots\alpha_{i-1}x_0}(\alpha_1\dots\alpha_{i-1}\partial_{e^+_{\alpha_i}} T) = e^{\delta d(x_0,\,\alpha_1\dots\alpha_{i-1}x_0)}\ \mu_{x_0}(\alpha_1\dots\alpha_{i-1}\partial_{e^+_{\alpha_i}} T)\ .$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
\mu_\Pi(\Theta^{-1}(U_{\alpha_1,\dots,\alpha_n})) &= N_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}\ \nu_{\alpha_1}\left(\prod_{i=1}^{n-1}\pi_{\alpha_i,\alpha_{i+1}}\right)\\
&= \frac{N_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}}{|\Gamma_{x_0}|^{n+1}}\mu_{x_0}(\partial_{e^-_{\alpha_1}}T)\mu_{x_0}(\partial_{e^+_{\alpha_1}}T)\left(\prod_{i=1}^{n-1}\frac{\mu_{x_0}(\partial_{\alpha_i e^+_{\alpha_{i+1}}}T)}{\mu_{x_0}(\partial_{e^+_{\alpha_i}}T)}\right)\\
&= \frac{N_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}}{|\Gamma_{x_0}|^{n+1}}\mu_{x_0}(\partial_{e^-_{\alpha_1}}T)\mu_{x_0}(\partial_{e^+_{\alpha_1}}T)\left(\prod_{i=1}^{n-1}\frac{\mu_{x_0}(\alpha_1\dots\alpha_{i-1}\alpha_i\ \partial_{e^+_{\alpha_{i+1}}}T)}{\mu_{x_0}(\alpha_1\dots\alpha_{i-1}\ \partial_{e^+_{\alpha_i}}T)}\right)\\
&= \frac{N_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}}{|\Gamma_{x_0}|^{n+1}}\ \mu_{x_0}(\partial_{e^-_{\alpha_1}}T)\mu_{x_0}(\partial_{\alpha_1\dots\alpha_{n-1}\ e^+_{\alpha_n}}T)\\
&= \frac{N_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}}{|\Gamma_{x_0}|^{n+1}}\ \widetilde{\mu}_{\rm BM}(\partial_{e^-_{\alpha_1}}T \times \partial_{\alpha_1\dots\alpha_{n-1}\ e^+_{\alpha_n}}T \times \{x_0\})\ .
\end{aligned}$$

Comme Γ_{x_0} agit essentiellement librement sur ∂T, et que tout élément de $U_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ est l'image d'exactement $|\Gamma_{[x_0,\alpha_1\dots\alpha_n x_0]}|$ éléments de $\partial_{e^-_{\alpha_1}}T \times \partial_{\alpha_1\dots\alpha_{n-1}\ e^+_{\alpha_n}}T \times \{x_0\}$, on a

$$m_0(U_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}) = \frac{1}{|\Gamma_{[x_0,\alpha_1\dots\alpha_n x_0]}|}\ \widetilde{\mu}_{\rm BM}(\partial_{e^-_{\alpha_1}}T \times \partial_{\alpha_1\dots\alpha_{n-1}\ e^+_{\alpha_n}}T \times \{x_0\})\ .$$

Par $(****)$, on a donc $\mu_\Pi(\Theta^{-1}(U_{\alpha_1,\dots,\alpha_n})) = m_0(U_{\alpha_1,\dots,\alpha_n})$, ce qu'il fallait démontrer. □

Le lemme 4.10 achève de montrer que Θ est un morphisme surjectif entre les systèmes dynamiques probabilisés (X_A, σ, μ_Π) et (X_0, ψ_0, m_0). Ceci conclut la preuve du théorème 4.4, car μ_Π est à support dans X_A. □

5 Codage du flot géodésique sur un graphe de groupes géométriquement fini

Le but de cette partie est de montrer le résultat fin suivant, améliorant pour des groupes géométriquement finis le corollaire 4.5.

Théorème 5.1 *Soit T un arbre localement fini, Γ un sous-groupe géométriquement fini de $\mathrm{Aut}(T)$ ayant la propriété de Selberg, avec $T_{\Gamma,\min}$ uniforme, sans sommet de valence 2.*

Si la transformation géodésique sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ est mélangeante pour la mesure de Bowen-Margulis, alors elle est Bernoulli d'entropie finie pour cette mesure.

Si la transformation géodésique sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ n'est pas mélangeante pour la mesure de Bowen-Margulis, alors son carré est Bernoulli d'entropie finie en restriction à $\Gamma\backslash\mathcal{G}_0T$, où $\mathcal{G}_0T$ est le sous-espace de $\mathcal{G}T$ formé des géodésiques d'origine un sommet à distance paire d'un sommet donné de T.

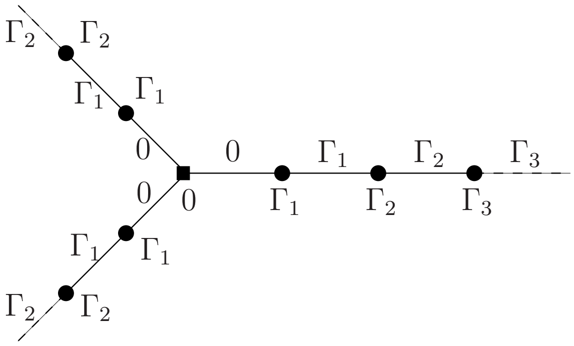
Preuve. Nous pouvons supposer que $T = T_{\Gamma,\min}$.

Notons $X = \Gamma\backslash T$ le graphe quotient, et X_0 le sous-graphe complémentaire des rayons cuspidaux maximaux ouverts. Pour tout β dans EX_0, fixons un relevé $\widetilde{\beta}$ de β dans ET, de sorte que $\overline{\widetilde{\beta}} = \widetilde{\overline{\beta}}$. Numérotons de 1 à r les rayons cuspidaux maximaux. Notons $(a_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite consécutive des arêtes, orientées vers le bout, du i-ème rayon cuspidal maximal. On fixe un relevé dans T de ce rayon, dont on note $(\widetilde{a_{i,n}})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite consécutive des arêtes, orientées vers un point à l'infini noté ξ_i de T. Notons $\Gamma_{i,n}$ le stabilisateur du sommet $o(\widetilde{a_{i,n}})$, de sorte que $\Gamma_{i,n}$ soit contenu dans $\Gamma_{i,n+1}$, et que $\Gamma_{\xi_i} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_{i,n}$.

Rappelons qu'un facteur d'une transformation mélangeante (resp. Bernoulli d'entropie finie) l'est encore (voir par exemple [Orn]). Comme Γ possède la propriété de Selberg, il existe un sous-groupe d'indice fini Γ' de Γ dont tout stabilisateur de sommet ne se projetant pas dans un rayon cuspidal ouvert est trivial. Supposons le résultat démontré pour Γ'. Si la transformation géodésique de $\Gamma'\backslash\mathcal{G}T$ est mélangeante, alors elle est Bernoulli d'entropie finie, et son facteur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ est aussi mélangeant et Bernoulli d'entropie finie. Sinon, le carré de la transformation géodésique sur $\Gamma'\backslash\mathcal{G}_0T$ est Bernoulli d'entropie finie. Si $\mathcal{G}_0T$ est invariant par Γ, alors le facteur $\Gamma\backslash\mathcal{G}_0T$ de $\Gamma'\backslash\mathcal{G}_0T$ est aussi Bernoulli d'entropie finie pour le carré de la transformation géodésique, et la transformation géodésique de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ n'est pas mélangeante. Si $\mathcal{G}_0T$ n'est pas invariant par Γ, alors $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ est un facteur de $\Gamma'\backslash\mathcal{G}_0T$, donc le carré de la transformation géodésique de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ est Bernoulli d'entropie finie, et donc la transformation géodésique de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ est Bernoulli d'entropie finie (donc mélangeante).

Dans la suite, nous supposons donc que le groupe G_x est trivial pour tout sommet x dans X_0.

Par exemple, le graphe de groupes suivant est isomorphe au graphe de groupes quotient de l'arbre de Bruhat-Tits de SL_2 sur le corps $\mathbb{F}_2((X^{-1}))$ par le réseau (de congruence) $\Gamma = \ker(\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_2[X]) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_2))$, avec $\Gamma_i = \{P \in \mathbb{F}_2[X] \ : \ P(0) = 0, \deg P = i\}$.



En ce qui concerne le problème du codage du flot géodésique, la nouveauté par rapport au cas cocompact est de coder les excursions dans les rayons cuspidaux. La remarque fondamentale (voir [Ser]) est que la projection dans $\Gamma\backslash T$ d'une géodésique de T est un chemin d'arêtes, dont les seuls aller-retours possibles sont dans les rayons cuspidaux maximaux ouverts, et qui, s'il fait demi-tour en montant vers un bout, est alors obligé de redescendre pour sortir complètement du rayon cuspidal maximal.

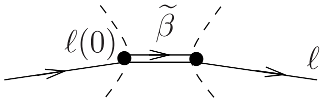
Considérons l'alphabet suivant, qui est dénombrable infini, sauf si Γ est cocompact (auquel cas il est fini),

$$\mathcal{A} = EX \ \cup \bigcup_{1\leq i\leq r\,,\, n\in\mathbb{N}} \big((\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n} \times \{+\}\big) \cup \big(\Gamma_{i,n}\backslash(\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n}) \times \{-\}\big)\ .$$

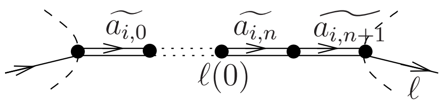
Nous munissons $\mathcal{A}$ de la topologie discrète. Notons que le passage à l'inverse induit une bijection de $(\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}$ sur $\Gamma_{i,n}\backslash(\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})$ et réciproquement. L'alphabet $\mathcal{A}$ est muni d'une involution $\beta \mapsto \overline{\beta}$, avec $\overline{\beta}$ l'arête opposée de β si $\beta \in EX$, et $\overline{(g,+)} = (g^{-1},-)$ si $g \in (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}$.

Nous allons définir une partition $\mathcal{P}$ de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$, indexée par $\mathcal{A}$, de la manière suivante. Pour une géodésique ℓ dans T, notons $(\ell_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ la suite de ses arêtes consécutives, de sorte que $t(\ell_{i-1}) = o(\ell_i) = \ell(i)$. Notons qu'avec $\widetilde{\tau}$ l'application de renversement du temps, on a $\widetilde{\tau}(\ell)_i = \overline{\ell_{-i-1}}$. Pour tout β dans $\mathcal{A}$, définissons une partie non vide E_β de $\mathcal{G}T$ par :

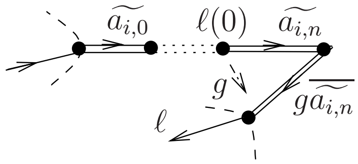
si $\beta \in EX_0$, alors $E_\beta = \{\ell \in \mathcal{G}T \ : \ \ell_0 = \widetilde{\beta}\ \}$,



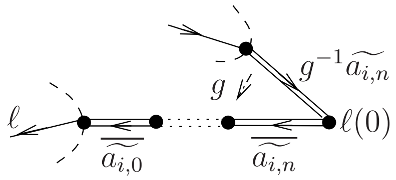
si $\beta = a_{i,n}$, alors $E_\beta = \{\ell \in \mathcal{G}T \ : \ \ell_0 = \widetilde{a_{i,n}}$, $\ell_1 = \widetilde{a_{i,n+1}},\ \ell_{-n} = \widetilde{a_{i,0}}\ \}$,



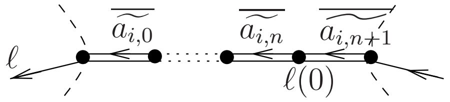
si $\beta = (g,+)$ avec $g \in (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}$, alors $E_\beta = \{\ell \in \mathcal{G}T \ : \ \ell_0 = \widetilde{a_{i,n}},\ \ell_1 = g\widetilde{a_{i,n}},\ \ell_{-n} = \widetilde{a_{i,0}}\ \}$,



si $\beta = (g, -)$ avec $g \in \Gamma_{i,n}\backslash(\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})$, alors $E_\beta = \{\ell \in \mathcal{G}T \ : \ \ell_0 = \overline{\widetilde{a_{i,n}}},\ \ell_{-1} = g^{-1}\widetilde{a_{i,n}},\ \ell_n = \overline{\widetilde{a_{i,0}}}\ \}$,



si $\beta = \overline{a_{i,n}}$, alors $E_\beta = \{\ell \in \mathcal{G}T \ : \ \ell_0 = \overline{\widetilde{a_{i,n}}}$, $\ell_{-1} = \overline{\widetilde{a_{i,n+1}}},\ \ell_n = \overline{\widetilde{a_{i,0}}}\ \}$.



Les parties du second type codent les géodésiques qui à l'instant $t = 0$ avancent dans un rayon cuspidal, et vont continuer d'avancer. Celles du troisième type codent les géodésiques qui à l'instant $t = 0$ avancent dans un rayon cuspidal, et vont faire demi-tour. Celles du quatrième type codent les géodésiques qui à l'instant $t = 0$ viennent de faire demi-tour. Enfin celles du dernier type codent les géodésiques qui à l'instant $t = 0$ descendent dans un rayon cuspidal, et qui descendaient aussi à l'instant d'avant.

Lemme 5.2 *Les parties E_β de $\mathcal{G}T$, pour β dans $\mathcal{A}$, sont compactes, ouvertes et deux à deux disjointes. Leur réunion E est un domaine fondamental strict pour l'action de Γ (i.e. $\Gamma E = \mathcal{G}T$ et si $\gamma E \cap E$ est non vide pour un γ dans Γ, alors $\gamma = 1$).*

Preuve. Comme $\Gamma_{i,n}$ fixe l'arête $\widetilde{a_{i,n}}$ (et son arête opposée), les parties E_β sont bien définies. Par définition de la topologie compacte-ouverte, et comme l'arbre T est localement fini, elles sont bien compactes et ouvertes. Comme $g\overline{\widetilde{a_{i,n}}} \neq \widetilde{a_{i,n+1}}$ pour tout g dans $\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n}$, ces parties sont deux à deux disjointes. Toute géodésique dans T est équivalente modulo Γ à une géodésique ℓ telle que ℓ_0 vaut ou bien $\widetilde{\beta}$ pour un β dans EX_0, ou bien $\widetilde{a_{i,n}}$ ou bien $\overline{\widetilde{a_{i,n}}}$ pour un n dans $\mathbb{N}$ et i dans $\{1, \dots, k\}$. Dans les seconde et troisième alternatives, on a respectivement $\pi(\ell_{-n}) = a_{i,0}$ et $\pi(\ell_n) = \overline{a_{i,0}}$. Donc, quitte à faire agir un élément de $\Gamma_{i,n}$, on peut supposer respectivement que $\ell_{-n} = \widetilde{a_{i,0}}$ et $\ell_n = \overline{\widetilde{a_{i,0}}}$. L'ensemble des arêtes d'origine $t(\widetilde{a_{i,n}})$ est exactement

$$\{g\overline{\widetilde{a_{i,n}}} \ : \ g \in (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}\} \cup \{\overline{\widetilde{a_{i,n}}}, \widetilde{a_{i,n+1}}\}\ .$$

Comme une géodésique n'a pas d'aller-retour, on obtient que $\Gamma E = \mathcal{G}T$. Enfin, comme les stabilisateurs des $\widetilde{a_{i,0}}$ pour i dans $\{1, \dots, r\}$ et des $\widetilde{\beta}$ pour β dans EX_0 sont triviaux, la réunion E est un domaine fondamental strict. $\square$

En notant encore E_β l'image de E_β dans $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$, on obtient donc une partition $\mathcal{P} = \{E_\beta\}_{\beta \in \mathcal{A}}$ de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$, par parties compactes, ouvertes et non vides.

Considérons la matrice de transition $(A_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in \mathcal{A}}$ définie par $A_{\alpha,\beta} = 1$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée

(1) $\quad \alpha, \beta \in EX,\ t(\alpha) = o(\beta),\ \beta \neq \overline{\alpha}$

ou

(2) $\quad \exists\, i \in \{1, \dots, r\},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, g \in (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}$,

$$\alpha \in EX, \beta = (g, +),\ t(\alpha) = o(a_{i,n}),\ \alpha \neq \overline{a_{i,n}}$$

ou

(3) $\quad \exists\, i \in \{1,\dots,r\},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, g \in (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}, \quad \alpha = (g,+),\ \beta = (g^{-1},-)$

ou

(4) $\quad \exists\, i \in \{1,\dots,r\},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, g \in \Gamma_{i,n}\backslash(\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n}),$

$$\alpha = (g,-),\ \beta \in EX,\ o(\beta) = t(\overline{a_{i,n}}),\ \beta \neq a_{i,n}$$

et $A_{\alpha,\beta} = 0$ sinon. Remarquons que dans le cas (2), on a $\alpha = a_{i,n-1}$ si $n \geq 1$, et dans le cas (4), on a $\beta = \overline{a_{i,n-1}}$ si $n \geq 1$.

Considérons l'espace topologique produit $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, où pour tout x dans $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ on note x_i la i-ème composante de x. Notons $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ le décalage défini par $\sigma((x_j)_{j\in\mathbb{Z}})_i = x_{i+1}$. Notons $\kappa : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ l'involution définie par $\kappa((x_j)_{j\in\mathbb{Z}})_i = \overline{x_{-i-1}}$. La matrice de transition $(A_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}}$ définit un sous-décalage (invariant par σ et par κ)

$$X_A = \left\{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \ :\ \forall\, i \in \mathbb{Z},\ A_{x_i,x_{i+1}} = 1\right\}.$$

Proposition 5.3 *L'application itinéraire $\Theta : \Gamma\backslash\mathcal{G}T \to X_A$, définie par $\ell \mapsto (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ où pour tout i dans $\mathbb{Z}$, on a $\varphi^i(\ell) \in E_{x_i}$ est un homéomorphisme, rendant les diagrammes suivants commutatifs :*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\backslash\mathcal{G}T & \xrightarrow{\Theta} & X_A \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\sigma \\ \Gamma\backslash\mathcal{G}T & \xrightarrow{\Theta} & X_A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Gamma\backslash\mathcal{G}T & \xrightarrow{\Theta} & X_A \\ \tau\downarrow & & \downarrow\kappa \\ \Gamma\backslash\mathcal{G}T & \xrightarrow{\Theta} & X_A \end{array}\ .$$

Preuve. On vérifie que pour tous les α,β dans $\mathcal{A}$ et ℓ dans $\mathcal{G}T$ tels que $\widetilde{\varphi}^{-1}(\ell)$ appartienne à ΓE_α, on a $A_{\alpha,\beta} = 1$ si et seulement s'il existe une géodésique ℓ' dans T telle que ℓ' et ℓ coïncident sur $]-\infty, 0]$ et $\ell' \in \Gamma E_\beta$. Ceci montre que l'application Θ est bien à valeurs dans X_A, et qu'elle est surjective. Comme une géodésique est déterminée par la suite des arêtes qu'elle traverse et comme le stabilisateur d'une arête de X_0 est trivial, l'application Θ est injective. Les parties de la partition $\mathcal{P}$ sont définies par des conditions ne portant que sur l'arête ℓ_0 d'une géodésique ℓ, et éventuellement sur un nombre fini d'arêtes supplémentaires. Par définition des topologies sur $\mathcal{G}T$ et $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on en déduit que Θ est un homéomorphisme.

Le premier diagramme est commutatif par définition de Θ. Pour montrer la commutativité du second diagramme, on vérifie que pour tout β dans $\mathcal{A}$ et ℓ dans $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$, on a (par une étude cas par cas pour la seconde équivalence)

$$\Theta\circ\tau(\ell)_0 = \beta \iff \tau(\ell) \in E_\beta \iff \varphi(\ell) \in E_{\overline{\beta}} \iff \kappa\circ\Theta(\ell)_0 = \beta\ .$$

En utilisant que $\varphi\circ\tau = \tau\circ\varphi^{-1}$ et $\sigma\circ\kappa = \kappa\circ\sigma^{-1}$, on conclut alors par la commutativité du premier diagramme. $\square$

À l'aide de la mesure de Bowen-Margulis $m_{\rm BM}$, construisons une mesure de probabilité ν sur l'ensemble discret dénombrable $\mathcal{A}$. Posons, pour tout β dans $\mathcal{A}$,

$$\nu_\beta = \nu(\{\beta\}) = m_{\rm BM}(E_\beta).$$

Comme m_{BM} est une mesure de probabilité sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$, et que $\mathcal{P}$ est une partition de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$, la mesure ν est bien de masse totale 1. Comme les E_β sont des ouverts non vides, et que m_{BM} est une mesure de support total car $T = T_{\Gamma,\min}$, les ν_β sont strictement positifs.

Considérons la matrice $\Pi = (\pi_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}}$, définie par

$$\pi_{\alpha,\beta} = m_{\text{BM}}[\varphi(\ell) \in E_\beta \mid \ell \in E_\alpha] = \frac{m_{\text{BM}}(\varphi^{-1}(E_\beta) \cap E_\alpha)}{\nu_\alpha} = \frac{m_{\text{BM}}(\varphi(E_\alpha) \cap E_\beta)}{\nu_\alpha} \ .$$

La matrice Π est une matrice stochastique sur $\mathcal{A}$, de mesure stationnaire ν. En effet, comme $\mathcal{P}$ est une partition de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$, et comme m_{BM} est invariante par φ, on a immédiatement que $\sum_\beta \pi_{\alpha,\beta} = 1$ pour tout α, et $\sum_\alpha \nu_\alpha \pi_{\alpha,\beta} = \nu_\beta$ pour tout β.

Notons μ_Π la mesure de Markov sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ associée à (Π, ν) (voir les rappels précédents l'énoncé du théorème 4.4).

Proposition 5.4 *La mesure de Markov μ_Π est de support X_A, et $\Theta_* m_{BM} = \mu_\Pi$.*

Preuve. On remarque que $\pi_{\alpha,\beta}$ est nul si et seulement si $A_{\alpha,\beta}$ est nul, ce qui montre, avec le fait que les ν_β sont strictement positifs, que le support de μ_Π est X_A.

Puisque m_{BM} est invariante par φ, comme Θ est un homéomorphisme qui conjugue φ et σ, la mesure $\Theta_* m_{\text{BM}}$ est une mesure borélienne de probabilité, invariante par σ. Comme $m_{\text{BM}}(E_{\alpha_0}) = \nu_{\alpha_0} = \mu_\Pi[Z_0 = \alpha_0]$, pour établir que $\Theta_* m_{\text{BM}}$ et μ_Π sont égales, il suffit de vérifier que $\Theta_* m_{\text{BM}}$ vérifie la propriété de Markov, c'est-à-dire que pour tout k dans $\mathbb{N}$ et tous $\alpha_{-k}, \ldots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \beta$ dans $\mathcal{A}$, on a

$$\Theta_* m_{\text{BM}}[Z_1 = \beta | Z_0 = \alpha_0, Z_{-1} = \alpha_{-1}, \ldots, Z_{-k} = \alpha_{-k}] = \pi_{\alpha_0,\beta} \ .$$

On peut supposer, pour tout i dans $\{1, \ldots, k\}$, que $A_{\alpha_{-i},\alpha_{-(i-1)}} = 1$ et que $A_{\alpha_0,\beta} = 1$, sinon le résultat est immédiat. Notons $F_k = \varphi^k(E_{\alpha_{-k}}) \cap \varphi^{k-1}(E_{\alpha_{-(k-1)}}) \cap \ldots \cap E_{\alpha_0}$ et $F'_k = F_k \cap \varphi^{-1}(E_\beta)$, qui sont donc des compacts ouverts non vides. Le membre de gauche de l'équation ci-dessus est égal à $m_{\text{BM}}(F'_k)/m_{\text{BM}}(F_k)$. Comme $\pi_{\alpha_0,\beta} = m_{\text{BM}}(F'_0)/m_{\text{BM}}(F_0)$, il suffit donc de montrer que $m_{\text{BM}}(F'_k)/m_{\text{BM}}(F_k)$ ne dépend pas de k.

Soit $\widetilde{\alpha_0}$ l'arête de T définie comme le relevé précédemment choisi de α_0 si α_0 est dans EX, par $\widetilde{\alpha_0} = \widetilde{a_{i,n}}$ si $\alpha_0 = (g, +)$ avec $g \in (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}$, et par $\widetilde{\alpha_0} = \overline{\widetilde{a_{i,n}}}$ si $\alpha_0 = (g, -)$ avec $g \in \Gamma_{i,n}\backslash(\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})$. Nous utiliserons le paramétrage de $\mathcal{G}T$ par $\partial_2 T \times \mathbb{Z}$ défini par le point base $u = o(\widetilde{\alpha_0})$.

Montrons que F_k (resp. F'_k) est l'image injective par la projection canonique $\pi' : \mathcal{G}T \to \Gamma\backslash\mathcal{G}T$ d'une partie $\widetilde{F}_k$ (resp. $\widetilde{F}'_k$) de $\mathcal{G}T$ de la forme $V_k \times U \times \{0\}$ (resp. $V_k \times U' \times \{0\}$), avec U, U', V_k des parties de ∂T, telles que U, U' ne dépendent pas de k et sont disjointes de V_k, et telles que toute géodésique entre un point de V_k et un point de U (resp. U') passe par u. Alors pour tout (ξ_-, ξ_+) dans $V_k \times U$ (resp. $V_k \times U'$), on aura $d_u(\xi_-, \xi_+) = 1$. Donc, par définition de la mesure de Bowen-Margulis (voir la partie 2.2),

$$\frac{m_{\text{BM}}(F'_k)}{m_{\text{BM}}(F_k)} = \frac{\widetilde{m}_{\text{BM}}(\widetilde{F}'_k)}{\widetilde{m}_{\text{BM}}(\widetilde{F}_k)} = \frac{\mu_u(U')}{\mu_u(U)} \ ,$$

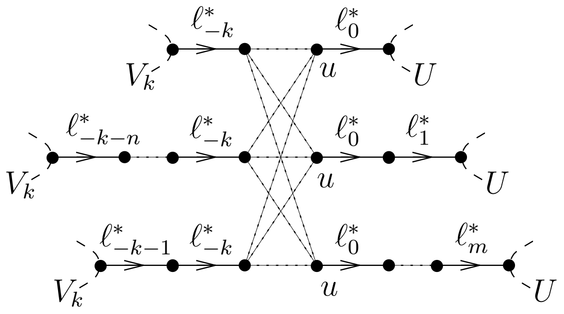
qui ne dépendra pas de k, ce qui montrera le résultat.

Comme les F'_k sont des compacts non vides décroissants en k, il existe au moins une géodésique ℓ^* (que l'on fixe) dans T dont l'image par π' est un élément de $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F'_k$, telle que $\ell^*_0 = \widetilde{\alpha_0}$ (ce qui est possible, car F'_k est contenu dans E_{α_0}). Par définition des E_β, tout élément de F_k (resp. F'_k) se relève en au moins une géodésique ℓ de T telle que $\ell_{-k} = \ell^*_{-k}, \dots, \ell_0 = \ell^*_0$ (resp. $\ell_{-k} = \ell^*_{-k}, \dots, \ell_0 = \ell^*_0, \ell_1 = \ell^*_1$), et en particulier ℓ passe à l'instant $t = 0$ par le point u. Nous allons maintenant définir V_k et U (resp. U') en discutant suivant les valeurs de α_{-k} et α_0 (resp. β), voir le dessin ci-dessous.

$\alpha_{-k} \in EX_0$ $\qquad$ $\alpha_0 \in EX_0$

$\alpha_{-k} = \begin{cases} a_{i,n} \\ (g,+) \end{cases}$ $\qquad$ $\alpha_0 = \begin{cases} a_{j,m} \\ (h,+) \end{cases}$

$\alpha_{-k} = \begin{cases} (g,-) \\ \overline{a_{i,n}} \end{cases}$ $\qquad$ $\alpha_0 = \begin{cases} (h,-) \\ \overline{a_{j,m}} \end{cases}$



Si α_{-k} est dans EX_0, posons $V_k = \partial_{\ell^*_{-k}} T$.
Si α_{-k} vaut $a_{i,n}$ ou $(g,+)$ avec $g \in (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}$, alors posons $V_k = \partial_{\ell^*_{-k-n}} T$.
Si α_{-k} vaut $(g,-)$ ou $\overline{a_{i,n}}$ avec $g \in \Gamma_{i,n} \backslash (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})$, alors posons $V_k = \partial_{\ell^*_{-k-1}} T$.
Si α_0 est dans EX_0, posons $U = \partial_{\overline{\ell^*_0}} T$.
Si α_0 vaut $a_{j,m}$ ou $(h,+)$ avec $h \in (\Gamma_{j,m+1} - \Gamma_{j,m})/\Gamma_{j,m}$, alors posons $U = \partial_{\overline{\ell^*_1}} T$.
Si α_0 vaut $(h,-)$ ou $\overline{a_{j,m}}$ avec $h \in \Gamma_{j,m} \backslash (\Gamma_{j,m+1} - \Gamma_{j,m})$, alors posons $U = \partial_{\overline{\ell^*_m}} T$.
Si β est dans EX_0, posons $U' = \partial_{\overline{\ell^*_1}} T$.
Si β vaut $a_{j,m}$ ou $(h,+)$ avec $h \in (\Gamma_{j,m+1} - \Gamma_{j,m})/\Gamma_{j,m}$, alors posons $U' = \partial_{\overline{\ell^*_2}} T$.
Si β vaut $(h,-)$ ou $\overline{a_{j,m}}$ avec $h \in \Gamma_{j,m} \backslash (\Gamma_{j,m+1} - \Gamma_{j,m})$, alors posons $U' = \partial_{\overline{\ell^*_{m+1}}} T$.

Par construction, les parties U et U' ne dépendent pas de k et sont disjointes de V_k. Toute géodésique entre un point de V_k et un point de U ou U' passe par u. On vérifie que si $\widetilde{F}_k = V_k \times U \times \{0\}$ (resp. $\widetilde{F}'_k = V_k \times U' \times \{0\}$), alors par construction des E_γ, tout élément de F_k (resp. F'_k) admet un unique relevé dans $\widetilde{F}_k$ (resp. $\widetilde{F}'_k$). Donc la restriction de π' à $\widetilde{F}_k$ (resp. $\widetilde{F}'_k$) est injective, d'image F_k (resp. F'_k). Le résultat en découle. $\square$

Proposition 5.5 *L'entropie de la partition $\mathcal{P}$ est finie.*

Preuve. Notons pour simplifier $\Gamma_i = \Gamma_{\xi_i}$, $\delta = \delta_\Gamma$, $\delta_i = \delta_{\Gamma_i}$ et $u_i = o(\widetilde{a_{i,0}})$.

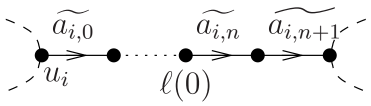
Rappelons que l'entropie $h_\mathcal{P}$ de la partition $\mathcal{P}$ pour la mesure $m_{\rm BM}$ est

$$h_\mathcal{P} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \nu_\alpha(-\log \nu_\alpha)\ .$$

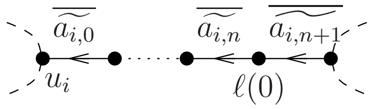
Calculons ν_α pour α dans $\mathcal{A} - EX_0$ (car EX_0 est fini). Par définition, la partie E_α de $\mathcal{G}T$ est, dans le paramétrage de $\mathcal{G}T$ défini par le point base u_i (pour un certain

i dépendant de α, précisé ci-dessous), de la forme $V \times U \times \{t_\alpha\}$ pour un t_α dans $\mathbb{Z}$ et U, V deux parties disjointes de ∂T, telles que toutes les géodésiques entre V et U passent par u_i. Donc

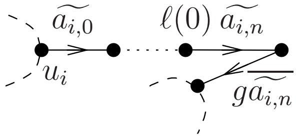
si $\alpha = a_{i,n}$, alors $\nu_\alpha = \mu_{u_i}(\partial_{\widetilde{a_{i,0}}}T)\mu_{u_i}(\partial_{\overline{\widetilde{a_{i,n+1}}}}T)$,



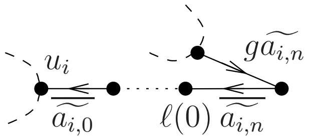
si $\alpha = \overline{a_{i,n}}$, alors $\nu_\alpha = \mu_{u_i}(\partial_{\overline{\widetilde{a_{i,n+1}}}}T)\mu_{u_i}(\partial_{\widetilde{a_{i,0}}}T)$,



si $\alpha = (g, +)$ avec $g \in (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}$, alors $\nu_\alpha = \mu_{u_i}(\partial_{\widetilde{a_{i,0}}}T)\mu_{u_i}(\partial_{g\widetilde{a_{i,n}}}T)$,



si $\alpha = (g^{-1}, -)$ avec $g \in (\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}$, alors $\nu_\alpha = \mu_{u_i}(\partial_{g\widetilde{a_{i,n}}}T)\mu_{u_i}(\partial_{\widetilde{a_{i,0}}}T)$.



Par le théorème de la densité fluctuante de Sullivan (voir [HP1, Theo. 4.1]), si ξ_i est un point parabolique borné, si Γ est de type divergent, et s'il existe une constante $c_0 \geq 1$ telle que

$$\frac{1}{c_0}\, e^{\,\delta_i n} \leq \mathrm{Card}\{\gamma \in \Gamma_i \ :\ d(u_i, \gamma u_i) \leq n\} \leq c_0\, e^{\,\delta_i n}\ ,$$

alors il existe une constante $c_1 \geq 1$ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{c_1} e^{2(\delta_i - \delta)n} \leq \mu_{u_i}(\partial_{\overline{\widetilde{a_{i,n}}}}T) \leq c_1 e^{2(\delta_i - \delta)n}\ .$$

(Pour les variétés riemaniennes (complètes), cette propriété a été démontrée par Sullivan dans le cas de volume fini et de courbure négative constante, et par Stratmann et Velani dans le cas géométriquement fini et de courbure négative constante. Dans [HP1], elle est énoncée dans le cas de la courbure négative variable, mais la preuve est faite d'une part par des arguments de comparaison avec les arbres, qui sont valables dans notre cas, et d'autre part par des arguments de limites, mais une limite (pour la topologie de Hausdorff-Gromov pointée) d'arbres de valences uniformément bornées est encore un arbre localement fini. Voir aussi [HP2, Prop. 3.2].) Notons que les hypothèses de ce résultat sont vérifiées, par la proposition 3.1. Comme de plus $\delta_i = \delta/2$ par la proposition 3.1, on a

$$\frac{1}{c_1} e^{-\delta n} \leq \mu_{u_i}(\partial_{\overline{\widetilde{a_{i,n}}}}T) \leq c_1 e^{-\delta n}\ .$$

Remarquons, pour $g \in \Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n}$, que $o(g\widetilde{a_{i,0}})$ appartient à l'orbite de u_i, et que $d(u_i, o(g\widetilde{a_{i,0}})) = 2n$. Par le lemme de l'ombre de Sullivan (voir par exemple [Rob, Lem. 1.3] dans un contexte plus général), il existe donc une constante $c_2 \geq 1$ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$ et g dans $\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n}$,

$$\frac{1}{c_2} e^{-2n\delta} \leq \mu_{u_i}(\partial_{g\widetilde{a_{i,0}}} T) \leq c_2 e^{-2n\delta} \ .$$

Remarquons que $\partial_{g\widetilde{a_{i,0}}} T \subset \partial_{g\widetilde{a_{i,n}}} T \subset \partial_{\widetilde{\overline{a_{i,n}}}} T$. Posons $c_3^- = \min_{1 \leq i \leq r} \mu_{u_i}(\partial_{\widetilde{a_{i,0}}} T)$ et $c_3^+ = \max_{1 \leq i \leq r} \mu_{u_i}(\partial_{\widetilde{a_{i,0}}} T)$. Comme les valences de T sont uniformément bornées, il existe un N dans $\mathbb{N}$ qui majore le cardinal de $(\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}$ pour tout i et n. Donc

$$\sum_{1 \leq i \leq r,\ n \in \mathbb{N}} - \big(\nu_{a_{i,n}} \log \nu_{a_{i,n}} + \nu_{\overline{a_{i,n}}} \log \nu_{\overline{a_{i,n}}}\big) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2rc_1 c_3^+ e^{-\delta(n+1)} (\delta(n+1) + \log \frac{c_1}{c_3^-}) \ ,$$

et, la première somme suivante portant sur les g dans $(\Gamma_{i,n+1} - \Gamma_{i,n})/\Gamma_{i,n}$, pour $1 \leq i \leq r$ et n dans $\mathbb{N}$,

$$\sum - \big(\nu_{(g,+)} \log \nu_{(g,+)} + \nu_{(g^{-1},-)} \log \nu_{(g^{-1},-)}\big) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2Nrc_1 c_3^+ e^{-\delta n} (2\delta n + \log \frac{c_2}{c_3^-}) \ .$$

Comme $\delta > 0$ (voir la proposition 3.1), ces deux sommes convergent, ce qui montre le résultat. □

Terminons maintenant la preuve du théorème 5.1. Par les propositions 5.3 et 5.4, les systèmes dynamiques mesurés $(\Gamma \backslash \mathcal{G}T, m_{\rm BM}, \varphi)$ et (X_A, μ_Π, σ) sont conjugués par Θ.

Supposons tout d'abord que $L_\Gamma = \mathbb{Z}$. Alors $(\Gamma \backslash \mathcal{G}T, m_{\rm BM}, \varphi)$ est mélangeant par la proposition 3.2, donc (X_A, μ_Π, σ) aussi. L'homéomorphisme Θ envoie par construction la partition $\mathcal{P}$ de $\Gamma \backslash \mathcal{G}T$ sur la partition génératrice $\{\{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \ : \ x_0 = \alpha\}\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de X_A. Donc par la proposition 5.5, le système (X_A, μ_Π, σ) est un décalage de Markov mélangeant sur un alphabet dénombrable, de partition génératrice d'entropie finie. Il est bien connu qu'un tel décalage est conjugué à un décalage de Bernoulli, voir par exemple [FO] lorsque l'alphabet est fini, et [Tho, sect. 8] pour l'extension à un alphabet dénombrable de partition génératrice d'entropie finie.

Si $L_\Gamma \neq \mathbb{Z}$, alors $L_\Gamma = 2\mathbb{Z}$, car $T = T_{\Gamma,\min}$ et n'a pas de sommet de valence 2. Donc $(\Gamma \backslash \mathcal{G}T, m_{\rm BM}, \varphi)$ n'est pas mélangeant, mais $(\Gamma \backslash \mathcal{G}_0 T, m_{\rm BM}, \varphi^2)$ l'est, par la proposition 3.2. En remplaçant les arêtes par les suites de deux arêtes consécutives d'extrémités deux sommets de T à distance paire du point base de T, on construit de manière analogue à ce qui précède un codage de $(\Gamma \backslash \mathcal{G}_0 T, m_{\rm BM}, \varphi^2)$ par un décalage de Markov sur un alphabet dénombrable, de partition génératrice d'entropie finie. Le théorème 5.1 en découle. □

Le théorème 1.2 de l'introduction est un corollaire du théorème 5.1, par la discussion précédant la proposition 3.2.

6 Le flot géodésique sur un graphe de groupes

Dans cette partie, nous nous intéressons au codage du flot géodésique sur un arbre quotienté par un sous-groupe d'automorphismes, sans supposer le sous-groupe discret ni même l'arbre localement fini.

6.1 Flot géodésique d'ordre 1 sur un graphe de groupes

Soit (X, G_*) un graphe de groupes. Posons :

$$\Omega = \coprod_{e,e' \in EX\,:\,o(e)=t(e')} \rho_{e'}(G_{e'}) \backslash G_{o(e)} / \rho_{\overline{e}}(G_e) \ .$$

On munit $\Omega \times EX$ de la topologie discrète et $\Sigma = (\Omega \times EX)^{\mathbb{Z}}$ de la topologie produit. Si (X, G_*) est un graphe fini de groupes finis, alors $\Omega \times EX$ est fini, et Σ est compact. On note σ le décalage à gauche sur Σ.

Notons Σ_0 l'ensemble des éléments $(g_i, e_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de Σ tels que, pour tout i dans $\mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} (1) \ \ o(e_i) = t(e_{i-1}) \\ (2) \ \ g_i \in \rho_{e_{i-1}}(G_{e_{i-1}}) \backslash G_{o(e_i)} / \rho_{\overline{e_i}}(G_{e_i}) \\ (3) \ \ \text{si } e_i = \overline{e_{i-1}}, \text{ alors } g_i \notin \rho_{\overline{e_i}}(G_{e_i}) \ . \end{cases}$$

Cette dernière condition dit simplement que si $e_i = \overline{e_{i-1}}$, alors g_i n'est pas la double classe triviale.

On appelle *flot géodésique d'ordre* 1 *sur* (X, G_*) le sous-décalage (Σ_0, σ). Il est immédiat que σ préserve Σ_0, et que les conditions définissant Σ_0 sont "locales". Ainsi, lorsque (X, G_*) est un graphe fini de groupes finis, le sous-décalage (Σ_0, σ) est de type fini.

Proposition 6.1 *Soit T un arbre, et Γ un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}(T)$*. Si (Σ_0, σ) est le flot géodésique d'ordre* 1 *du graphe de groupes quotient $\Gamma \backslash\backslash T$, alors il existe une application continue surjective $\theta : \Gamma \backslash \mathcal{G}T \to \Sigma_0$ qui rend le diagramme suivant commutatif*

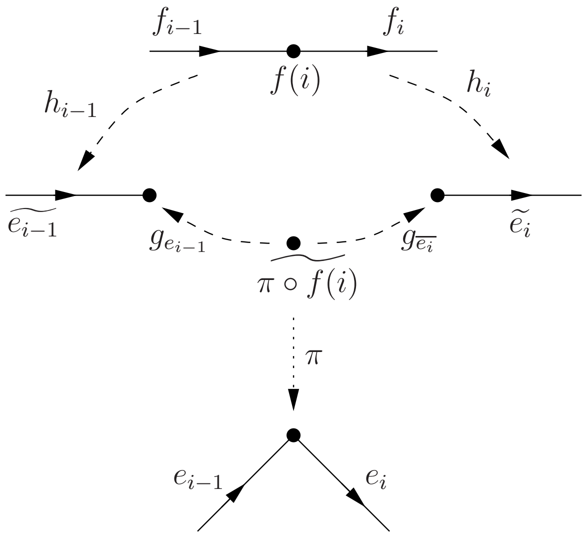
$$\begin{array}{ccc} \Gamma \backslash \mathcal{G}T & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma \backslash \mathcal{G}T \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ \Sigma_0 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_0 \end{array} \ .$$

Preuve. Soit $(X, G_*) = \Gamma \backslash\backslash T$ et $\pi : T \to X = \Gamma \backslash T$ la projection canonique. Dans un premier temps, on construit une application $\widetilde{\theta} : \mathcal{G}T \to \Sigma_0$. Soit f une application simpliciale de $\mathbb{R}$ dans T. Pour i dans $\mathbb{Z}$, notons f_i l'arête $f([i, i+1])$ d'origine $f(i)$ et posons $e_i = \pi(f_i)$. On a alors $t(e_{i-1}) = \pi \circ f(i) = o(e_i)$.

On reprend les notations de la définition du graphe de groupes quotient $\Gamma \backslash\backslash T$ dans la partie 2.1, où l'on avait fixé des relevés $\widetilde{e}$ et $\widetilde{v}$ dans T d'une arête e et d'un sommet v de X, et choisi un élément g_e dans Γ pour toute arête e. Comme $\pi(f_i) = \pi(\widetilde{e_i}) = e_i$, il existe h_i dans Γ tel que $h_i f_i = \widetilde{e_i}$. L'élément h_i est bien défini modulo multiplication à gauche par un élément du fixateur de l'arête $\widetilde{e_i}$, qui est un élément de G_{e_i}. Posons

$$g_i = g_{e_{i-1}}^{-1} h_{i-1} h_i^{-1} g_{\overline{e_i}} \, . \qquad (*)$$

L'élément g_i fixe $\widetilde{\pi \circ f(i)}$, il appartient donc à $G_{o(e_i)} = G_{t(e_{i-1})}$ (voir la figure suivante). L'élément g_i est défini modulo multiplication à gauche par un élément de $g_{e_{i-1}}^{-1} G_{e_{i-1}} g_{e_{i-1}} = \rho_{e_{i-1}}(G_{e_{i-1}})$, ainsi que modulo multiplication à droite par un élément de $g_{\overline{e_i}}^{-1} G_{e_i} g_{\overline{e_i}} = \rho_{\overline{e_i}}(G_{e_i})$. Nous noterons encore g_i la double classe de g_i dans le double quotient $\rho_{e_{i-1}}(G_{e_{i-1}}) \backslash G_{o(e_i)} / \rho_{\overline{e_i}}(G_{e_i})$.



Remarquons que si $e_i = \overline{e_{i-1}}$, alors

$$\overline{f_{i-1}} = h_{i-1}^{-1} \overline{\widetilde{e_{i-1}}} = h_{i-1}^{-1} \widetilde{\overline{e_{i-1}}} = h_{i-1}^{-1} \widetilde{e_i} \, .$$

Donc f est localement injective si et seulement si pour tout i dans $\mathbb{Z}$, on a $f_i \neq \overline{f_{i-1}}$, donc si et seulement si

– ou bien $e_i \neq \overline{e_{i-1}}$;
– ou bien $e_i = \overline{e_{i-1}}$ et $g_i g_{\overline{e_i}}^{-1} \widetilde{e_i} \neq g_{\overline{e_i}}^{-1} \widetilde{e_i}$.

Cette dernière inégalité est équivalente à la non-appartenance de g_i à $\rho_{\overline{e_i}}(G_{e_i})$.

Posons alors $\widetilde{\theta}(f) = (g_i, e_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Par construction, l'application $\widetilde{\theta}$ est à valeurs dans Σ_0, et est invariante par Γ, elle induit donc une application $\theta : \Gamma \backslash \mathcal{G}T \to \Sigma_0$. Par construction, on a $\theta \circ \varphi = \sigma \circ \theta$.

Montrons que $\widetilde{\theta}$ est surjective, ce qui entraîne que θ est surjective. Soit $(g_i, e_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ un élément de Σ_0. Pour tout entier relatif i, on choisit un représentant dans la double classe g_i, encore noté g_i. Posons $f_0 = \widetilde{e_0}$ et $h_0 = \mathrm{id}$. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que pour tout $1 \leq k \leq n-1$, il existe des arêtes f_k de T et des éléments h_k de G tels que

$$t(f_{k-1}) = o(f_k), \quad h_k^{-1} \widetilde{e_k} = f_k \quad \text{et} \quad g_k = g_{e_{k-1}}^{-1} h_{k-1} h_k^{-1} g_{\overline{e_k}} \, .$$

Pour $n = 1$, on prend $h_1 = g_{\overline{e_1}} g_1^{-1} g_{e_0}^{-1}$ et $f_1 = h_1^{-1} \widetilde{e}_1$, alors : $o(f_1) = g_{e_0} g_1 g_{\overline{e_1}}^{-1} o(\widetilde{e}_1) = g_{e_0} g_1 \widetilde{o(e_1)} = g_{e_0} \widetilde{o(e_1)} = t(\widetilde{e_0}) = t(f_0)$. Supposons que l'hypothèse de récurrence soit satisfaite au rang n. Posons :

$$h_n = (h_{n-1}^{-1} g_{e_{n-1}} g_n g_{\overline{e_n}}^{-1})^{-1} .$$

Alors la relation $g_n = g_{e_{n-1}}^{-1} h_{n-1} h_n^{-1} g_{\overline{e_n}}$ est vérifiée, et h_n^{-1} envoie $o(\widetilde{e_n})$ sur $t(f_{n-1})$. En effet,

$$\begin{aligned} h_n^{-1} o(\widetilde{e_n}) &= h_{n-1}^{-1} g_{e_{n-1}} g_n g_{\overline{e_n}}^{-1} o(\widetilde{e_n}) = h_{n-1}^{-1} g_{e_{n-1}} g_n \widetilde{o(e_n)} \\ &= h_{n-1}^{-1} g_{e_{n-1}} \widetilde{o(e_n)} = h_{n-1}^{-1} t(\widetilde{e_{n-1}}) = t(f_{n-1}) . \end{aligned}$$

Maintenant, posons $f_n = h_n^{-1} \widetilde{e_n}$. L'origine de f_n est bien $t(f_{n-1})$. Pour $1 \leq k \leq n$, les arêtes f_k et les éléments h_k de G vérifient donc l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$.

On fait une construction similaire pour $n < 0$. Notons $f : \mathbb{R} \to T$ l'application simpliciale telle que pour tout i dans $\mathbb{Z}$, $f([i, i+1]) = f_i$. Alors f appartient à $\mathcal{G}T$ (par la condition (3) de la définition de Σ_0) et $\widetilde{\theta}(f) = (g_i, e_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, ce qui montre la surjectivité de $\widetilde{\theta}$.

Montrons maintenant que $\widetilde{\theta}$ est continue, ce qui entraîne que θ est continue. Si f et f' sont deux géodésiques de $\mathcal{G}T$, posons $\widetilde{\theta}(f) = (g_i, e_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et $\widetilde{\theta}(f') = (g'_i, e'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Supposons que f et f' coïncident sur $[-N, N]$, alors pour tout entier i de $[-N, N]$, on a $e_i = \pi(f_i) = \pi(f'_i) = e'_i$, et on peut supposer que h_i et h'_i coïncident. La formule $(*)$ montre alors que g_i et g'_i coïncident pour i entier dans $[-(N-1), N-1]$. Ceci montre que $\widetilde{\theta}$ est continue par définition de la topologie-produit. $\square$

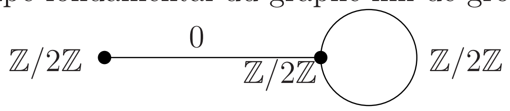
Malheureusement, l'application θ n'est pas toujours injective. Elle l'est si les stabilisateurs d'arêtes G_e, pour e dans EX, sont triviaux. Mais quand il existe un élément (non trivial) de Γ qui fixe un rayon géodésique de T, cela crée des problèmes de propagation d'éléments dans des stabilisateurs d'arêtes.

6.2 Actions acylindriques de groupes sur les arbres

Soit k un entier strictement positif. Comme le fait Z. Sela [Sel], nous dirons qu'une action simpliciale (sans inversion) d'un groupe Γ sur un arbre T est *k-acylindrique* si le fixateur d'un chemin (localement) injectif de k arêtes consécutives est trivial. Nous dirons qu'une action est *acylindrique* s'il existe k dans $\mathbb{N} - \{0\}$ tel que l'action soit k-acylindrique. Par exemple, une action est 1-acylindrique si elle est à stabilisateurs d'arête triviaux.

Remarque. En fait, dans la définition originale, Z. Sela demande aussi que l'action soit *minimale* (i.e. sans sous-arbre invariant non vide propre) et *réduite* (i.e. si le stabilisateur d'un sommet v admet exactement deux orbites d'arêtes d'origine v, alors chacune de ces deux orbites est de cardinal au moins 2.) Ici nous n'aurons pas besoin de ces deux hypothèses.

Remarque. Beaucoup d'actions de groupes sur des arbres sont acylindriques, voir [Sel], mais il existe des arbres T localement finis et des sous-groupes discrets cocompacts Γ de $\mathrm{Aut}(T)$, tels que l'action de Γ sur T ne soit pas acylindrique. Par exemple, l'action du groupe fondamental du graphe fini de groupes finis suivant



sur son arbre de Bass-Serre n'est pas acylindrique.

Avant de donner dans la partie 6.3 un théorème de codage pour des actions acylindriques, nous donnons quelques exemples. Le résultat suivant est sans doute bien connu, nous n'en donnons une preuve que par souci de complétude.

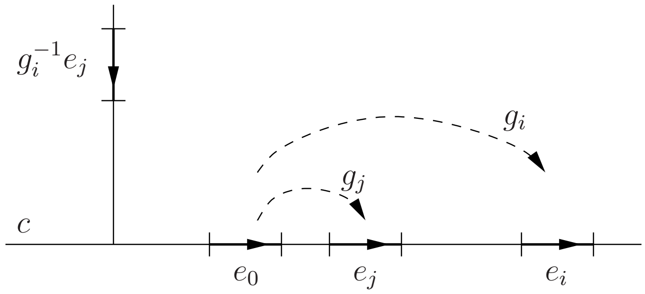
Proposition 6.2 *Soit T un arbre localement fini, Γ un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}(T)$*, tel que $\Gamma\backslash T$ soit fini et les stabilisateurs d'arête soient finis. Alors l'action de Γ sur T n'est pas acylindrique si et seulement s'il existe des éléments h, g de Γ tels que*
- *h est non trivial et admet un point fixe dans T,*
- *g n'admet pas de point fixe dans T,*
- *h et g commutent.*

Preuve. Supposons qu'il existe h et g comme dans l'énoncé. Comme g n'a pas de point fixe, il admet un axe de translation A_g. Cet ensemble A_g est (l'image d')une géodésique de T, et est invariant par g. Sur A_g, l'application g induit une translation de distance de translation $\lambda = \inf_{x\in T} d(x, gx) > 0$. D'ailleurs, A_g est l'ensemble des points x de T tels que $d(x, gx) = \lambda$ (voir par exemple [Ser]).

Comme h commute avec g, l'application h préserve A_g. L'ensemble des points fixes de h (qui est non vide) rencontre tout sous-arbre non vide de T invariant par h (voir par exemple [Ser]). Donc A_g contient au moins un point fixe x de h, et pour tout n dans $\mathbb{Z}$, l'isométrie h fixe $g^n x$. Donc h fixe la droite géodésique A_g (qui est de longueur infinie). Donc l'action n'est pas acyclindrique.

Réciproquement, soit N dans $\mathbb{N}$ tel que $N-1$ soit le maximum des cardinaux des stabilisateurs des arêtes de T (ces stabilisateurs sont en nombre fini modulo conjugaison). Soit N' le nombre d'arêtes (tenant compte des deux orientations possibles) de $\Gamma\backslash T$. Soit c un chemin d'arêtes géodésique dans T, fixé par un élément non trivial h' de Γ, dont la longueur est strictement supérieure à $k = N'(N+1)$. Alors il existe au moins $N+1$ arêtes de c, notées $(e_i)_{i\in\{0,\dots,N\}}$, orientées compatiblement le long de c et numérotées dans l'ordre où on les rencontre en parcourant c, dont les images par la projection canonique $\pi : T \to \Gamma\backslash T$ coïncident (en tenant compte aussi de l'orientation). Il existe donc $g_1, \dots, g_N$ dans Γ tels que g_i envoie e_0 sur e_i en préservant l'orientation. Comme h' fixe c, il existe h_i dans le stabilisateur de e_0 tel que $h' = g_i h_i g_i^{-1}$. Par définition de N, il existe $i \neq j$ tel que $h_i = h_j$. On peut toujours supposer (quitte à permuter) que l'arête e_j est entre l'arête e_0 et l'arête e_i sur c. On pose alors $h = h_i = h_j$. L'élément h est bien non trivial (car h' l'est) et fixe un point de T.

Rappelons (voir par exemple [Ser]) que si une isométrie γ d'un arbre envoie une arête e sur une arête distincte e' (en tenant compte aussi des orientations) et s'il existe un chemin d'arêtes orienté géodésique contenant e et e' avec orientations compatibles, alors γ n'a pas de point fixe, et admet un axe de translation contenant e et e'.



Posons $g = g_j^{-1}g_i$. Comme l'arête e_j est contenue dans le sous-chemin d'arêtes orienté de c entre e_0 et e_i, et comme g_i envoie e_0 sur e_i (avec les orientations), on en déduit que les arêtes $g_i^{-1}e_j$ et e_0 sont contenues avec orientations compatibles dans un chemin d'arêtes orienté géodésique. Donc g, qui envoie $g_i^{-1}e_j$ sur e_0 (avec orientations), n'a pas de point fixe. De plus, on a $h' = g_ih_ig_i^{-1} = g_jh_jg_j^{-1}$, donc les éléments h et g commutent. $\square$

Remarque. Un automorphisme sans point fixe d'un arbre est d'ordre infini. Rappelons qu'un groupe est *localement fini* si tout sous-groupe de type fini est fini. Si $\Gamma\backslash T$ et les stabilisateurs d'arête sont finis, alors, par la proposition 6.2 précédente, l'action de Γ sur T est acylindrique si l'un des deux cas suivants est vérifié :
- le centralisateur de tout élément d'ordre infini est cyclique,
- le centralisateur de tout élément non trivial ayant un point fixe est localement fini.

Proposition 6.3 *Soit T un arbre localement fini, et Γ un sous-groupe géométriquement fini de* $\mathrm{Aut}(T)$. *Alors, il existe un arbre T' et une action de Γ sur T' qui vérifient :*
- *$\Gamma\backslash T'$ est fini,*
- *les stabilisateurs d'arête de T' sont finis,*
- *les stabilisateurs de sommet de T' sont localement finis,*
- *il existe une application simpliciale équivariante de T dans T'.*

De plus, la transformation géodésique de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$, en restriction à un G_δ-dense de mesure de Bowen-Margulis totale de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T_{\Gamma,\min}$, s'obtient par suspension topologique de la transformation géodésique de $\Gamma\backslash\mathcal{G}T'$.

En outre, si Γ possède la propriété de Selberg, alors il existe un sous-groupe d'indice fini Γ' de Γ dont l'action sur T' est acylindrique.

Remarque. Lorsque Γ est un réseau uniforme, ceci est évident. En effet, $T' = T$ convient et, par des arguments de [Ser], le groupe Γ contient un sous-groupe libre d'indice fini, agissant librement sur T, donc de manière 1-acylindrique.

Preuve. Comme T se rétracte de manière Γ-équivariante sur $T_{\Gamma,\min}$, nous pouvons supposer que $T = T_{\Gamma,\min}$. Par définition, le graphe de groupes quotient $(X, G_*) =$

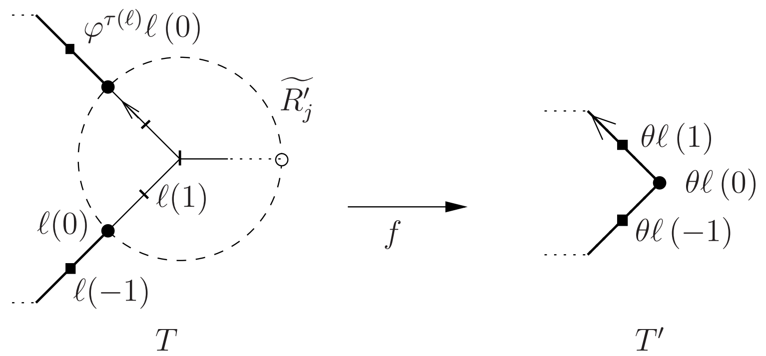
$\Gamma\backslash\backslash T$ est réunion d'un graphe fini de groupes finis et d'un nombre fini de rayons cuspidaux (maximaux), notés $(R_1, G_*), \dots, (R_r, G_*)$. Pour i dans $\{1, \dots, r\}$, notons R'_i le rayon R_i privé de son sommet origine et de son arête ouverte initiale, et $(v_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ les sommets consécutifs de R_i. Notons $\pi : T \to X$ la projection canonique. Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur T engendrée par $x \sim y$ si et seulement s'il existe i dans $\{1, \dots, r\}$ et une composante connexe de $\pi^{-1}(R'_i)$ contenant x et y. Notons T' l'espace quotient de T par $\sim$. Comme les composantes connexes des $\pi^{-1}(R'_i)$ sont des sous-arbres deux à deux disjoints de T, l'espace T' est un arbre, et la projection canonique $f : T \to T'$ est simpliciale. Puisque la relation d'équivalence $\sim$ est invariante par Γ, si l'on munit T' de l'action quotient de Γ, alors f est Γ-équivariante.

Pour tout sommet v de T, si v n'appartient pas à $\pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^r R'_i)$, alors le stabilisateur dans Γ du sommet $f(v)$ de T' est fini (égal au stabilisateur de v dans T). Si, par contre, v appartient à une composante connexe de $\pi^{-1}(R'_i)$, alors le stabilisateur de $f(v)$ est conjugué au groupe localement fini qui est la limite inductive des groupes des sommets de R_i.

Notons $\mathcal{G}^\sharp T$ le G_δ-dense de $\mathcal{G}T$ formé des géodésiques dont aucun bout n'est un point parabolique borné pour Γ. Posons $X_1 = \overline{X - \pi^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^r R'_i\right)}$. Notons $\mathcal{G}_1 T$ le sous-espace Γ-invariant de $\mathcal{G}^\sharp T$ formé des géodésiques ℓ telles que d'une part $\ell(0)$ appartienne à X_1, et d'autre part si $\ell(0)$ est dans $\pi^{-1}(\{v_{i,1} \;:\; i \in \{1, \dots, r\}\})$, alors $\ell(-1)$ ne soit pas dans l'intérieur de $\pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^r R'_i)$.

Pour ℓ dans $\mathcal{G}_1 T$, notons $\tau(\ell)$ l'entier non nul, valant 1 si $\ell(1) \in X_1$ et valant $1 + \min\{n \in \mathbb{N} - \{0\} \;:\; \ell(n) \in X_1\}$ sinon. Il s'agit du temps de premier retour dans $\mathcal{G}_1 T$ de l'orbite de ℓ par la transformation géodésique φ. Notons $\psi : \mathcal{G}_1 T \to \mathcal{G}_1 T$ l'application de premier retour, définie par $\psi : \ell \mapsto \varphi^{\tau(\ell)}(\ell)$.

Soit ℓ une géodésique appartenant à $\mathcal{G}^\sharp T$. Alors chaque composante connexe de $\ell(\mathbb{R}) \cap \pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^r R'_i)$ est un segment compact. La restriction à $\ell(\mathbb{R})$ de f écrase en un point chacune de ces composantes connexes. L'image par $f : T \to T'$ de $\ell(\mathbb{R})$ est donc l'image d'une géodésique $\theta\ell$ de T', d'origine $\theta\ell(0) = f(\ell(0))$, de sorte que $f : \ell(\mathbb{R}) \to \theta\ell(\mathbb{R})$ préserve l'orientation. Notons $\varphi' : \mathcal{G}T' \to \mathcal{G}T'$ la transformation géodésique pour T'.



L'application $\theta : \mathcal{G}_1 T \to \mathcal{G}T'$ définie par $\ell \mapsto \theta\ell$ est un homéomorphisme qui rend le diagramme suivant commutatif :

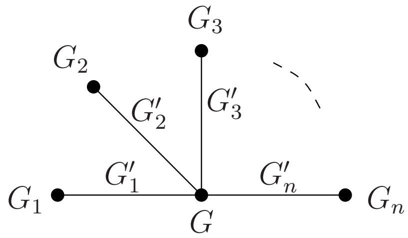
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1 T & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{G}T' \\ \psi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ \mathcal{G}_1 T & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{G}T' \end{array} \quad .$$

De plus, ce diagramme commute avec l'action de Γ. Donc la restriction à $\Gamma\backslash\mathcal{G}^\sharp T$ de la transformation géodésique sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}T$ est topologiquement conjuguée à une suspension de la transformation géodésique pour $\Gamma\backslash\mathcal{G}T'$. La mesure de Patterson-Sullivan de tout point parabolique borné est nulle (voir [DOP] dans le cadre des variétés, et [Rob] plus généralement). Comme il n'y a qu'un ensemble dénombrable de points paraboliques bornés pour Γ, le sous-espace $\mathcal{G}^\sharp T$ est donc de mesure pleine.

Si Γ possède la propriété de Selberg, alors il existe un sous-groupe Γ' d'indice fini de Γ, tel que le graphe de groupes quotient $\Gamma'\backslash\backslash T$ soit réunion d'un graphe fini de groupes triviaux, et d'un nombre fini de rayons cuspidaux. Tout élément non trivial de Γ', fixant un point de T', fixe donc un unique point de T', dont le stabilisateur est localement fini. Par la seconde assertion de la remarque qui précède la proposition 6.3, l'action de Γ' sur T' est donc acylindrique. $\square$

Remarque 6.4 *Soit T un arbre localement fini, et Γ un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}(T)$ *tel que $\Gamma\backslash\backslash T$ soit réunion de n rayons cuspidaux de groupes, recollés en leurs origines. S'il existe m dans $\mathbb{N} - \{0\}$ tel que l'action de Γ sur les m-uplets de points deux à deux distincts de ∂T soit libre, alors l'action de Γ sur T' (construit dans la preuve ci-dessus) est* $(2m-1)$*-acylindrique.*

Remarquons que le graphe de groupes $\Gamma\backslash\backslash T'$ est alors une étoile de groupes de la forme



avec, lorsque Γ est discret, $G, G'_1, \dots, G'_n$ des groupes finis, et $G_1, \dots, G_n$ des groupes localement finis.

Preuve. La projection dans $\Gamma\backslash T'$ d'un chemin d'arêtes géodésique c dans T', de longueur $2m-1$, comporte $m-1$ allers-retours plus une arête, donc est la projection d'un chemin d'arêtes géodésique de T pénétrant dans $m-1+1$ horoboules distinctes de la famille Γ-invariante maximale d'horoboules d'intérieurs disjoints. Tout élément de Γ fixant c fixe donc dans ∂T les m points à l'infini de ces horoboules. $\square$

Les hypothèses de cette remarque sont vérifiées, avec $n = 1$ et $m = 3$, lorsque l'on considère le groupe $\Gamma = \mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_q[X])$ agissant sur l'arbre de Bruhat-Tits T de $(\mathrm{PGL}_2, \mathbb{F}_q((X^{-1})))$. En particulier, comme annoncé dans l'introduction, l'action de Γ sur T n'est pas acylindrique, mais celle de Γ sur l'arbre T' associé à T par la preuve de la proposition 6.3 est 5-acylindrique.

6.3 Flot géodésique d'ordre k sur un graphe de groupes

Soit (X, G_*) un graphe de groupes et $k > 0$ un entier. Un *k-chemin* de X est une suite $(e_0, e_1, \ldots, e_k)$ d'arêtes de EX telles que $t(e_{i-1}) = o(e_i)$ pour $i = 1, \ldots, k$. Pour tout k-chemin, le groupe produit $G_{e_0} \times G_{e_1} \times \ldots \times G_{e_k}$ agit sur l'ensemble $G_{o(e_1)} \times G_{o(e_2)} \times \ldots \times G_{o(e_k)}$ par

$$((\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k), (g_1, \ldots, g_k) \mapsto (\rho_{e_0}(\alpha_0)\, g_1\, \rho_{\overline{e_1}}(\alpha_1^{-1}),\ \ldots\ , \rho_{e_{k-1}}(\alpha_{k-1})\, g_k\, \rho_{\overline{e_k}}(\alpha_k^{-1}))\ .$$

Notons $G(e_0, e_1, \ldots, e_k)$ l'ensemble quotient. Nous noterons $[g_1, \ldots, g_k]$ la classe d'un élément $(g_1, \ldots, g_k)$ de $G_{o(e_1)} \times G_{o(e_2)} \times \ldots \times G_{o(e_k)}$.

Considérons les trois applications

$$(g_1, ..., g_k) \mapsto (g_2, ..., g_k), \quad (g_1, ..., g_k) \mapsto (g_1, ..., g_{k-1}) \text{ et } (g_1, ..., g_k) \mapsto g_k$$

(les deux premières n'étant définies que si $k \geq 2$). Elles induisent des surjections $\mathrm{pr}_1 : G(e_0, e_1, \ldots, e_k) \to G(e_1, \ldots, e_k)$, $\mathrm{pr}_2 : G(e_0, e_1, \ldots, e_k) \to G(e_0, \ldots, e_{k-1})$ et $\mathrm{pr}_3 : G(e_0, e_1, \ldots, e_k) \to G(e_{k-1}, e_k)$.

Remarquons d'ailleurs que $G(e_{k-1}, e_k) = \rho_{e_{k-1}}(G_{e_{k-1}}) \backslash G_{o(e_k)} / \rho_{\overline{e_k}}(G_{e_k})$.

Notons Ω' la réunion disjointe des ensembles $G(e_0, e_1, \ldots, e_k)$ pour tous les k-chemins $(e_0, e_1, \ldots, e_k)$ de X. Munissons l'ensemble $\Omega' \times EX$ de la topologie discrète et l'ensemble $\Sigma' = (\Omega' \times EX)^{\mathbb{Z}}$ de la topologie produit. Remarquons que si (X, G_*) est un graphe fini de groupes finis, alors $\Omega' \times EX$ est fini. Notons encore σ le décalage à gauche sur Σ'.

Notons Σ'_0 l'ensemble des éléments $([g_{i,1}, g_{i,2}, \ldots, g_{i,k}], e_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de Σ' tels que pour tout entier i,

$$\begin{cases} (1')\ \ o(e_i) = t(e_{i-1}) \\ (2')\ \ [g_{i,1}, g_{i,2}, \ldots, g_{i,k}] \in G(e_{i-k}, \ldots, e_{i-1}, e_i) \\ (3')\ \ \mathrm{pr}_1([g_{i,1}, g_{i,2}, \ldots, g_{i,k}]) = \mathrm{pr}_2([g_{i+1,1}, g_{i+1,2}, \ldots, g_{i+1,k}]) \\ (4')\ \ \text{si } e_i = \overline{e_{i-1}}, \text{ alors } \mathrm{pr}_3([g_{i,1}, g_{i,2}, \ldots, g_{i,k}]) \notin \rho_{\overline{e_i}}(G_{e_i})\ . \end{cases}$$

Définissons alors le *flot géodésique d'ordre* k sur (X, G_*) comme le sous-décalage (Σ'_0, σ). Lorsque $k = 1$, on retrouve la définition de la partie 6.1.

Il est immédiat que σ préserve Σ'_0, et que les conditions définissant Σ'_0 sont "locales" (au temps i, elles ne dépendent que du temps i et des k termes précédents). En particulier, (Σ'_0, σ) est un sous-décalage de type fini lorsque (X, G_*) est un graphe fini de groupes finis.

Montrons maintenant le résultat suivant :

Théorème 6.5 *Soit T un arbre et Γ un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}(T)$*. Supposons que l'action de Γ sur T soit k-acylindrique. Alors la transformation géodésique quotient est topologiquement conjuguée à un sous-décalage.*

Plus précisément, si (Σ'_0, σ) est le flot géodésique d'ordre k du graphe de groupes quotient $\Gamma\backslash\backslash T$, alors il existe un homéomorphisme $\theta' : \Gamma\backslash\mathcal{G}T \to \Sigma'_0$ qui rend le *diagramme suivant commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma\backslash\mathcal{G}T & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma\backslash\mathcal{G}T \\
\theta' \downarrow & & \downarrow \theta' \\
\Sigma'_0 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma'_0
\end{array} .$$

Lorsque T est localement fini, et Γ un sous-groupe discret cocompact, ce résultat est déja connu : voir [Moz] pour un cadre algébrique (rappelé en introduction), qui s'étend en rang supérieur ; voir [CP] pour le cadre plus général des groupes hyperboliques, par des méthodes utilisant leur dynamique sur leur espace à l'infini.

Preuve. Considérons l'application $\widetilde{\theta'} : \mathcal{G}T \to \Sigma'_0$, définie par

$$\widetilde{\theta'}(f) = ([g_{i-k+1}, \dots, g_{i-1}, g_i], e_i)_{i\in\mathbb{Z}} ,$$

en reprenant dans la démonstration de la proposition 6.1 les objets f_i, e_i, h_i, g_i associés à f. Elle est bien définie, car la classe de $(g_{i-k+1}, \dots, g_{i-1}, g_i)$ dans l'ensemble quotient $G(e_{i-k}, \dots, e_{i-1}, e_i)$ ne dépend pas du choix des h_i. On vérifie immédiatement que les conditions $(1')$-$(4')$ ci-dessus sont satisfaites pour $\widetilde{\theta'}(f)$.

De la même manière que pour $\widetilde{\theta}$, l'application $\widetilde{\theta'} : \mathcal{G}T \to \Sigma'_0$ est continue et Γ-invariante. L'application

$$\rho : ([g_{i,1}, g_{i,2}, \dots, g_{i,k}], e_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto (\mathrm{pr}_3([g_{i,1}, g_{i,2}, \dots, g_{i,k}]), e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$$

est une application continue de Σ'_0 sur Σ_0. Il est immédiat que $\rho \circ \widetilde{\theta'} = \widetilde{\theta}$.

Montrons que $\widetilde{\theta'}$ est surjective. Soit $([g_{i,1}, g_{i,2}, \dots, g_{i,k}], e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ un élément de Σ'_0. Montrons que pour tout entier i, il existe un élément g_i de $G_{o(e_i)}$ tel que

$$[g_{i-k+1}, \dots, g_{i-1}, g_i] = [g_{i,1}, g_{i,2}, \dots, g_{i,k}]$$

dans $G(e_{i-k+1}, \dots, e_{i-1}, e_i)$. Posons $g_{-k+1} = g_{0,1}$, …, $g_{-1} = g_{0,k-1}$ et $g_0 = g_{0,k}$. Construisons les g_n pour $n \geq 1$ par récurrence sur n (et de manière similaire les g_{-n} pour $n \geq k$).

Soit $n \geq 0$, et supposons construits $g_{-k+1}, \dots, g_n$. En particulier, l'égalité

$$[g_{n-k+1}, \dots, g_{n-1}, g_n] = [g_{n,1}, g_{n,2}, \dots, g_{n,k}]$$

est vérifiée dans $G(e_{n-k+1}, \dots, e_{n-1}, e_n)$. Par la condition $(3')$,

$$\mathrm{pr}_1[g_{n-k+1}, \dots, g_{n-1}, g_n] = \mathrm{pr}_2[g_{n+1,1}, g_{n+1,2}, \dots, g_{n+1,k}] .$$

Donc il existe h_1 dans $G_{e_{n-k+1}}$, …, h_k dans G_{e_n} tels que

$$g_{n-k+2} = \rho_{e_{n-k+1}}(h_1) g_{n+1,1} \rho_{\overline{e}_{n-k+2}}(h_2)^{-1}, \dots, g_n = \rho_{e_{n-1}}(h_{k-1}) g_{n+1,k-1} \rho_{\overline{e}_n}(h_k)^{-1} .$$

Posons maintenant $g_{n+1} = \rho_{e_n}(h_k) g_{n+1,k}$. C'est un élément de $G_{e_{n+1}}$. De plus,

$$[g_{n-k+2}, \dots, g_n, g_{n+1}] = [g_{n+1,1}, g_{n+1,2}, \dots, g_{n+1,k}] ,$$

ce qui termine la récurrence.

Par la surjectivité de $\widetilde{\theta}$, il existe $f \in \mathcal{G}T$ tel que $\widetilde{\theta}(f) = (g_i, e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Alors, par construction de $\widetilde{\theta}'$, il est immédiat que $\widetilde{\theta}'(f) = ([g_{i,1}, g_{i,2}, \ldots, g_{i,k}], e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, ce qui montre la surjectivité de $\widetilde{\theta}'$.

D'après ce qui précède, l'application $\widetilde{\theta}'$ induit une application continue surjective $\theta' : \Gamma\backslash\mathcal{G}T \to \Sigma_0'$.

Montrons que θ' est injective. Soient f, f' dans $\mathcal{G}T$ tels que $\widetilde{\theta}'(f) = \widetilde{\theta}'(f')$. Montrons qu'il existe γ dans Γ tel que $f' = \gamma f$. Notons f_i', e_i', h_i', g_i' les objets correspondants pour f' à ceux introduits dans la démonstration de la proposition 6.1 pour f. Comme $\widetilde{\theta}'(f) = \widetilde{\theta}'(f')$, on a $e_i' = e_i$. Quitte à remplacer f et f' par leurs images par des éléments de Γ, nous pouvons supposer que $f_0 = f_0' = \widetilde{e_0}$, et dans la construction, nous pouvons alors prendre $h_0 = h_0' = \mathrm{id}$.

Comme $\widetilde{\theta}'(f) = \widetilde{\theta}'(f')$, il existe pour tout i, une suite $(\alpha_{i,-k}, \alpha_{i,-k+1}, \ldots, \alpha_{i,0})$ dans $G_{e_{i-k}} \times \ldots \times G_{e_{i-1}} \times G_{e_i}$ telle que, pour tout $j = 1, \ldots, k$,

$$g'_{i-k+j} = \rho_{e_{i-k+j-1}}(\alpha_{i,j-1-k})\, g_{i-k+j}\, \rho_{\overline{e_{i-k+j}}}(\alpha^{-1}_{i,j-k})\,. \quad (**)$$

La démonstration du lemme suivant est technique. Ceci s'explique par la possibilité de propagation de fixateurs d'arêtes dans des suites d'arêtes. C'est pour lui que nous avons besoin de l'hypothèse que l'action est k-acylindrique.

Lemme 6.6 *Pour tout i dans $\mathbb{Z}$, on a $\alpha_{i,-1} = \alpha_{i-1,0}$.*

Preuve. Le terme de gauche de l'égalité $(**)$ étant inchangé en remplaçant simultanément i par $i-1$ et j par $j+1$, il en est de même pour le terme de droite. Donc, pour tout $j = 1, \ldots, k-1$,

$$\rho_{e_{i-k+j-1}}(\alpha_{i,j-1-k})g_{i-k+j}\rho_{\overline{e_{i-k+j}}}(\alpha^{-1}_{i,j-k}) = \rho_{e_{i-k+j-1}}(\alpha_{i-1,j-k})g_{i-k+j}\rho_{\overline{e_{i-k+j}}}(\alpha^{-1}_{i-1,j+1-k}).$$

Ceci équivaut à

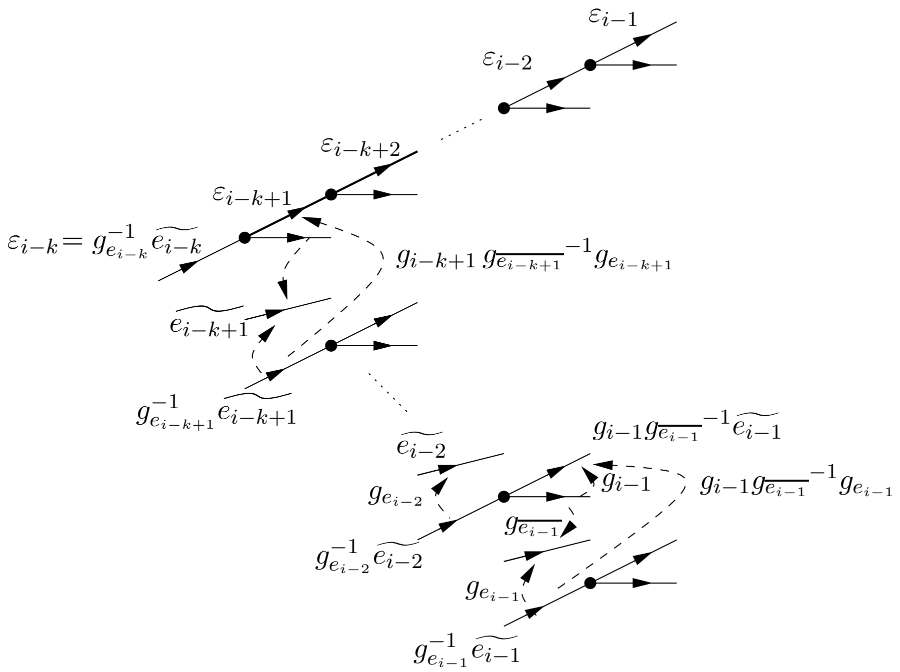
$$\rho_{e_{i-k+j-1}}(\alpha^{-1}_{i-1,j-k}\alpha_{i,j-1-k}) = g_{i-k+j}\, \rho_{\overline{e_{i-k+j}}}(\alpha^{-1}_{i-1,j+1-k}\alpha_{i,j-k})\, g^{-1}_{i-k+j}\,. \quad (***)$$

Comme $\alpha_{m,\ell}$ appartient à $G_{e_{m+\ell}}$, l'élément $\alpha^{-1}_{i-1,j-k}\alpha_{i,j-1-k}$ de Γ fixe l'arête $\widetilde{e_{i-k+j-1}}$.

Notons $\varepsilon_{i-k} = g^{-1}_{e_{i-k}}\widetilde{e_{i-k}}$, $\varepsilon_{i-k+1} = g_{i-k+1}\, g^{-1}_{\overline{e_{i-k+1}}}\, \widetilde{e_{i-k+1}}$, et pour $j = 2, \ldots, k-1$,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i-k+j} \;&=\; (g_{i-k+1}\, g^{-1}_{\overline{e_{i-k+1}}}\, g_{e_{i-k+1}})(g_{i-k+2}\, g^{-1}_{\overline{e_{i-k+2}}}\, g_{e_{i-k+2}})\\ &\quad \ldots (g_{i-k+j-1}\, g^{-1}_{\overline{e_{i-k+j-1}}}\, g_{e_{i-k+j-1}})\, g_{i-k+j}\, g^{-1}_{\overline{e_{i-k+j}}}\, \widetilde{e_{i-k+j}}.\end{aligned}$$

Comme g_ℓ fixe $\widetilde{t(e_{\ell-1})} = \widetilde{o(e_\ell)}$, et puisque $g^{-1}_{\overline{e_\ell}}$ envoie $o(\widetilde{e_\ell})$ sur $\widetilde{o(e_\ell)}$, la suite $(\varepsilon_{i-k}, \varepsilon_{i-k+1}, \ldots, \varepsilon_{i-1})$ est, par un argument de récurrence, un $(k-1)$-chemin de T (voir la figure ci-dessous).



Remarquons que, pour $\ell = 0, \ldots, k-1$, l'élément $\rho_{e_{i-k+\ell}}(\alpha_{i-1,\ell+1-k}^{-1}\alpha_{i,\ell-k})$ fixe l'arête $g_{e_{i-k+\ell}}^{-1}\widetilde{e_{i-k+\ell}}$.

L'élément $\rho_{e_{i-k}}(\alpha_{i-1,1-k}^{-1}\alpha_{i,-k})$, qui fixe $g_{e_{i-k}}^{-1}\widetilde{e_{i-k}} = \varepsilon_{i-k}$, est égal, d'après l'égalité $(***)$ pour $j=1$, à un élément fixant

$$g_{i-k+1}\, g_{\overline{e_{i-k+1}}}^{-1}\, \widetilde{e_{i-k+1}} = \varepsilon_{i-k+1}\ .$$

Donc $\rho_{e_{i-k}}(\alpha_{i-1,1-k}^{-1}\alpha_{i,-k})$ fixe $(\varepsilon_{i-k}, \varepsilon_{i-k+1})$. D'après la condition $(4')$, cette suite de deux arêtes consécutives n'est pas un aller-retour. Une récurrence immédiate montre que l'élément $\rho_{e_{i-k}}(\alpha_{i-1,1-k}^{-1}\alpha_{i,-k})$ fixe le $(k-1)$-chemin $(\varepsilon_{i-k}, \varepsilon_{i-k+1}, \ldots, \varepsilon_{i-1})$, qui est localement injectif. Il vaut donc l'identité, car l'action de Γ est k-acylindrique. Puisque les morphismes ρ_{e_n} sont injectifs, on a donc $\alpha_{i-1,1-k} = \alpha_{i,-k}$. Une récurrence immédiate utilisant les égalités $(***)$ pour $j = 1, \ldots, k-1$ montre alors que

$$\alpha_{i-1,\ell-k} = \alpha_{i,\ell-1-k}$$

pour $\ell = 1, \ldots, k$, ce qui montre le lemme en prenant $\ell = k$. □

Reprenons la démonstration de l'injectivité de θ'. Par l'égalité $(**)$ pour $j=k$, et par le lemme précédent, on a

$$g'_i = \rho_{e_{i-1}}(\alpha_{i,-1})\ g_i\ \rho_{\overline{e_i}}\,(\alpha_{i,0}^{-1}) = \rho_{e_{i-1}}(\alpha_{i-1,0})\ g_i\ \rho_{\overline{e_i}}\,(\alpha_{i,0}^{-1})\ .$$

La formule $(*)$ de la démonstration de la proposition 6.1 donne donc

$$g_{e_{i-1}}^{-1} h'_{i-1}(h'_i)^{-1} g_{\overline{e_i}} = \rho_{e_{i-1}}(\alpha_{i-1,0})\ g_{e_{i-1}}^{-1} h_{i-1} h_i^{-1} g_{\overline{e_i}}\ \rho_{\overline{e_i}}\,(\alpha_{i,0}^{-1}),$$

ce qui équivaut à

$$h'_i(h'_{i-1})^{-1} = \alpha_{i,0} h_i h_{i-1}^{-1} \alpha_{i-1,0}^{-1}\ .$$

Posons $f'' = \alpha_{0,0}^{-1} f'$. Alors, par naturalité, pour construire $\widetilde{\theta}(f'')$, on peut prendre $h_i'' = h_i' \alpha_{0,0}$. Donc, pour tout i dans $\mathbb{Z}$,

$$h_i''(h_{i-1}'')^{-1} = \alpha_{i,0} h_i h_{i-1}^{-1} \alpha_{i-1,0}^{-1}.$$

Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que $h_n'' = \alpha_{n,0} h_n$. Comme $h_0 = h_0' = \mathrm{id}$, on a $h_0'' = h_0' \alpha_{0,0} = \alpha_{0,0} h_0$. Supposons la formule vraie au rang $n-1$, alors

$$h_n'' = \alpha_{n,0} h_n h_{n-1}^{-1} \alpha_{n-1,0}^{-1} h_{n-1}'' = \alpha_{n,0} h_n \ .$$

Un raisonnement analogue pour $n \leq 0$ montre que pour tout i dans $\mathbb{Z}$, on a encore $h_i'' = \alpha_{i,0} h_i$. Donc, puisque $\alpha_{i,0}$ fixe l'arête $\widetilde{e_i}$, on a

$$f_i'' = (h_i'')^{-1} \widetilde{e_i} = h_i^{-1} \alpha_{i,0}^{-1} \widetilde{e_i} = h_i^{-1} \widetilde{e_i} = f_i \ .$$

Donc $f'' = f$, ce qui montre bien que f et f' sont dans la même orbite par Γ. Donc θ' est injective.

Cette démonstration montre aussi que si les i-èmes termes des suites $\widetilde{\theta}'(f)$ et $\widetilde{\theta}'(f')$ sont égaux pour i dans $[-N-2, N+2] \ \cap \ \mathbb{N}$, alors f et f' coïncident sur $[-N, +N]$. Donc $(\theta')^{-1}$ est continue. Ceci termine la démonstration du théorème 6.5. $\square$

Références

[ASS] R. L. Adler, P. Shields, M. Smorodinsky, *Irreducible Markov shifts*, Ann. Math. Statistics, **43** (1972) 1027-1029.

[Alp] R. Alperin, *An elementary account of Selberg's lemma*, L'Ens. Math. **33** (1987) 269-373.

[BL] H. Bass, A. Lubotzky, *Tree lattices*, Prog. Math. **176**, Birkhäuser, 2001.

[Bou] M. Bourdon, *Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(−1) espace*, L'Ens. Math. **41** (1995) 63-102.

[BH] M. R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces with non-positive curvature*, Grund. math. Wiss. **319**, Springer Verlag, 1998.

[BP] A. Broise-Alamichel, F. Paulin, *Dynamique sur le rayon modulaire et fractions continues en caractéristique p*, Prépublication, Univ. Orsay 2002.

[BT] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local (données radicielles valuées)*, Pub. Math. I.H.E.S. **41** (1972) 5-252.

[BM] M. Burger, S. Mozes, *CAT(−1) spaces, divergence groups and their commensurators*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996) 57-94.

[Coo] M. Coornaert, *Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov*, Pacific J. Math. **159** (1993) 241-270.

[CP] M. Coornaert, A. Papadopoulos, *Symbolic dynamics and hyperbolic groups*, Lect. Notes Math. **1539**, Springer Verlag, 1993.

[DOP] F. Dal'Bo, J.-P. Otal, M. Peigné, *Séries de Poincaré des groupes géométriquement finis*, Israel J. Math. **118** (2000) 109-124.

[FO] N. Friedman, D. Ornstein, *On isomorphism of weak Bernoulli transformations*, Adv. Math. **5** (1971) 365-394.

[GL] D. Gaboriau, G. Levitt, *The rank of actions on $\mathbb{R}$-trees*, Ann. Scien. Ec. Norm. Sup. (4) **28** (1995) 549-570.

[HK] B. Hasselblatt, A. Katok, eds., *Handbook of Dynamical Systems*, Elsevier, 2002.

[HP1] S. Hersonsky, F. Paulin, *Counting orbit points in covering of negatively curved manifolds and Hausdorff dimension of cusp excursions*, Erg. Theo. Dyn. Sys. **24** (2004) 803-824.

[HP2] S. Hersonsky, F. Paulin, *A logarithm law for tree automorphism groups*, to appear in Arkiv der Mathematik.

[Kai] V. A. Kaimanovich, *Bowen-Margulis and Patterson measures on negatively curved compact manifolds.* in "Dynamical systems and related topics" (Nagoya, 1990), 223-232, Adv. Ser. Dyn. Syst. **9**, World Sci. Pub. 1991.

[Kit] B. Kitchens, *Symbolic dynamics : one-sided, two sided and countable state Markov shifts*, Universitext, Springer Verlag, 1998.

[LP] F. Ledrappier, M. Pollicott, *Distribution results for lattices in $SL(2,\mathbb{Q}_p)$*, Bul. Braz. Math. Soc. **36** (2005) 143-176.

[LW] E. Lindenstrauss, B. Weiss, *On sets invariants under the action of the diagonal group*, Erg. Theo. Dyn. Sys. **21** (2001) 1481-1500.

[Lub] A. Lubotzky, *Lattices in rank one Lie groups over local fields*, GAFA **1** (1991) 405-431.

[Mar1] G. Margulis, *Discrete subgroups of semi-simple groupes*, Ergeb. Math. Grenz. **17**, Springer Verlag, 1991.

[Mar2] G. Margulis, *Problems and conjectures in rigidity theory*, in "Mathematics : frontiers and perspectives 2000", 161-174, Amer. Math. Soc. 2000.

[Moz] S. Mozes, *Actions of Cartan subgroups*, Israel J. Math. **90** (1995) 253-294.

[Orn] D. Ornstein, *Factors of Bernoulli shifts are Bernoulli shifts*, Adv. Math. **5** (1971) 349-364.

[Pau] F. Paulin, *Groupes géométriquement finis d'automorphismes d'arbres et approximation diophantienne dans les arbres*, Manuscripta Math. **113** (2004) 1-23.

[Rob] T. Roblin, *Ergodicité et équidistribution en courbure négative*, Mémoires Soc. Math. France, **95** (2003).

[Sel] Z. Sela, *Acylindrical accessibility for groups*, Inv. Math. **129** (1997) 528-565.

[Ser] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2*, Astérisque **46**, Soc. Math. France (1983).

[Tom] G. Tomanov, *Actions of maximal tori on homogeneous spaces*, in "Rigidity in dynamics and geometry" (Cambridge, 2000), M. Burger, A. Iozzi eds, Springer Verlag (2002), 407-424.

[Tho] J.-P. Thouvenot, *Entropy, isomorphism and equivalence in ergodic theory*, in Hand. Dyn. Sys. Vol. 1A, B. Hasselblatt, A. Katok eds., Elsevier, 2002, 205-238.

[Zim] R. J. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Birkhauser, 1984.