Groupe modulaire, fractions continues et approximation diophantienne en caractéristique p

Frédéric Paulin

Abstract : The aim of this paper is to give a geometric interpretation of the continued fraction expansion in the field $\widehat{K} = \mathbb{F}_q((X^{-1}))$ of formal Laurent series in X^{-1} over $\mathbb{F}_q$, in terms of the action of the modular group $SL_2(\mathbb{F}_q[X])$ on the Bruhat-Tits tree of $\mathrm{SL}_2(\widehat{K})$, and to deduce from it some corollaries for the diophantine approximation of formal Laurent series in X^{-1} by rational fractions in X. [1]

1 Introduction

Sur le corps fini $k = \mathbb{F}_q$, considérons $A = k[X]$ l'anneau des polynômes, $K = k(X)$ le corps des fractions rationnelles, $\widehat{K} = k((X^{-1}))$ le corps des séries formelles de Laurent en X^{-1} et $\mathcal{O} = k[[X^{-1}]]$ l'anneau des séries formelles en X^{-1}. Alors $\widehat{K}$ est un complété de K pour la valuation en l'infini v_∞, avec $v_\infty(P) = -\deg P$ pour $P \in A$, et $\mathcal{O}$ est son anneau de valuation (voir par exemple [Ser1]).

Soit $G = SL_2(\widehat{K})$, et $\Gamma = SL_2(A)$ le *groupe modulaire* de Weil. Soit $\mathbb{T}_q$ l'arbre de Bruhat-Tits de G, qui est un arbre régulier de degré $q+1$, muni d'une action par automorphismes de G, et dont les sommets sont les classes d'homothétie de $\mathcal{O}$-réseaux dans $\widehat{K} \times \widehat{K}$ (voir par exemple [Ser2]).

Le but de ce papier est de donner une interprétation géométrique du développement en série formelle de Laurent et du développement en fraction continue des éléments de $\widehat{K}$, en fonction de l'action du groupe modulaire Γ sur l'arbre de Bruhat-Tits $\mathbb{T}_q$. Nous utilisons cette interprétation pour retrouver de manière géométrique les résultats de base de l'approximation diophantienne des éléments de $\widehat{K}$ par les éléments de K (voir [Laj, BN] pour d'excellents survols).

Cette interprétation est analogue à celle de Ford-Artin pour le développement en fraction continue d'un nombre réel, en fonction de l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur le demi-plan de Poincaré, muni du pavage dual au pavage de Farey (voir par exemple [For, Seri]).

L'espaces des bouts $\partial\mathbb{T}_q$ de $\mathbb{T}_q$ s'identifie avec $\mathbb{P}_1(\widehat{K}) = \widehat{K} \cup \{\infty\}$. De même, l'ensemble $lk(x)$ des arêtes issues d'un sommet x de $\mathbb{T}_q$ s'identifie avec la droite projective $\mathbb{P}_1(k) = k \cup \{\infty\}$, de sorte que l'arête pointant vers $\infty \in \partial\mathbb{T}_q$ soit $\infty \in lk(x)$. Ainsi, les arêtes orientées de $\mathbb{T}_q$, ne pointant pas vers $\infty \in \partial\mathbb{T}_q$, sont étiquetées par un élément de k.

Proposition 1.1 *Soit $f \in \widehat{K}$, la géodésique orientée entre les bouts ∞ et f de $\mathbb{T}_q$ parcours des arêtes successives de $\mathbb{T}_q$ d'étiquettes f_i si et seulement si $f = \sum_{i>>-\infty} f_i X^{-i}$.*

1. **AMS codes:** 20 E 08, 20 G 25, 11 J 70, 11 J 61. **Keywords:** formal Laurent series field, continued fraction, diophantine approximation, Bruhat-Tits tree, modular group.

Toute série formelle de Laurent $f \in \widehat{K}$ admet un développement en fraction continue (voir par exemple [Laj, Sch])

$$f = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

avec a_n dans A et $\deg(a_n) > 0$ si $n > 0$. La fraction rationnelle P_n/Q_n obtenue en tronquant au rang n est appelée le n-ème convergent de f.

L'orbite du bout ∞ de $\mathbb{T}_q$ par le groupe modulaire est l'ensemble des points rationnels $K \cup \{\infty\}$. Le groupe modulaire admet un domaine fondamental $\mathcal{D}_\Gamma$ dans $\mathbb{T}_q$, qui est le rayon d'origine la classe du réseau standard $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ et de bout $\infty \in \partial\mathbb{T}_q$. Notons Γ_∞ le fixateur du bout ∞ dans Γ et HB_∞ l'orbite de $\mathcal{D}_\Gamma$ par Γ_∞.

Nous montrons (en section 6) que les éléments de la famille Γ-équivariante $(\gamma HB_\infty)_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_\infty}$ se rencontrent deux à deux en au plus un point et recouvrent $\mathbb{T}_q$. Chaque élément admet un unique bout, qui est un point rationnel. Pour la notion naturelle d'horoboule dans les arbres (voir section 4), ces parties sont des horoboules.

Proposition 1.2 *La suite des horoboules traversées par la géodésique orientée entre les bouts ∞ et $f \in \widehat{K}$ est exactement la suite des horoboules de bouts les convergents de f.*

En fait, le groupe des translation par élément de A agit simplement transitivement sur les arêtes sortant de HB_∞, et l'inversion $z \mapsto -\frac{1}{z}$ préserve cette famille d'horoboules. Le développement en fraction continue de f, suite d'inversions et de translations par élément de A, peut se lire sur la suite des horoboules traversées par la géodésique entre ∞ et f (voir section 6): on effectue (un conjugué de) la composition de l'inversion avec une translation par un élément de A pour passer d'une horoboule à la suivante.

Nous montrons (en section 6) que les propriétés d'approximation diophantienne des séries formelles de Laurent peuvent se lire sur l'arbre de Bruhat-Tits. Nous expliquons géométriquement comment lire la valuation à l'infini du dénominateur d'une fraction rationnelle (proposition 6.1), pourquoi les convergents sont les meilleures approximations, pourquoi le développement en fraction continue de f est périodique si et seulement si f est quadratique sur K (Proposition 6.3), ainsi que (section 6.5) la nature du développement en fraction continue des éléments algébriques de classe IA, i.e. les solutions d'équations de la forme $f = \frac{af^{p^s}+b}{cf^{p^s}+d}$ avec $a, b, c, d \in A, ad - bc = 1$, et p la caractéristique de k.

Nous concluons cette introduction par quelques remarques.

1. La restriction au corps résiduel k fini est de pure convenance, les arbres étant dans ce cas localement finis et les groupes localement compacts.

2. Avec A. Broise, nous utilisons dans [BP] le développement en fraction continue pour coder le flot géodésique sur le rayon modulaire $\Gamma \backslash\backslash \mathbb{T}_q$, nous expliquons géométriquement pourquoi la mesure de Haar est invariante par l'application d'Artin (qui à une série formelle f, non nulle et de terme constant nul, associe la partie fractionnaire de $\frac{1}{f}$), et nous étudions ses propriétés dynamiques.

3. Une analyse analogue existe (voir [Pau]) pour l'approximation des points du bord de l'arbre de Bruhat-Tits de $\underline{G}(\widehat{K})$ par l'orbite d'un bout cuspidal pour tout réseau non uniforme Γ de $\underline{G}(\widehat{K})$ (par exemple arithmétique), avec $\underline{G}$ un groupe algébrique simple de rang 1 sur $\widehat{K}$, et plus généralement pour Γ un groupe discret géométriquement fini (voir [Pau]) d'automorphismes d'arbre.

4. Nous donnons aussi dans [Pau], et dans le cadre plus général ci-dessus, des résultats en théorie métrique de l'approximation diophantienne (dimension de Hausdorff des séries formelles de Laurent mal approchables, théorèmes à la Khintchine, ...).

Je remercie Michel Waldschmidt et Alain Lasjaunias de leur aide pour les références.

2 Rappels sur le développement en fractions continues des séries formelles de Laurent

Tout ce chapitre est composé de rappels, essentiellement dus à E. Artin et K. Mahler, pour lesquels nous renvoyons par exemple à [Ser1, Laj, Sch].

Soit $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini, de cardinal $q = p^\nu$ une puissance d'un nombre premier p. Soit $A = k[X]$ l'anneau des polynômes en une variable X sur k, et $K = k(X)$ le corps des fractions rationnelles sur k, muni de la valuation (dite *en l'infini*)

$$v_\infty(P/Q) = (-\deg P) - (-\deg Q).$$

Soit $\widehat{K}$ le complété de K pour la valuation v_∞ (voir par exemple [Ser1]).

Le corps $\widehat{K}$ s'identifie avec le corps $k((X^{-1}))$ des séries formelles de Laurent en X^{-1} sur k. Les éléments de $\widehat{K}$ sont des séries formelles

$$f = \sum_{i >> -\infty} f_i X^{-i}$$

avec f_i dans k, nul pour i suffisamment petit. Il est muni de la valuation étendant v_∞, que l'on notera de même, avec

$$v_\infty(f) = \sup\{j \in \mathbb{Z} \mid \forall i < j, f_i = 0\},$$

de la valeur absolue

$$|f|_\infty = q^{-v_\infty(f)}$$

et de la distance induite par cette valeur absolue.

$$d_\infty(f,g) = |f-g|_\infty\,,$$

qui est *ultramétrique*, i.e. satisfait $d_\infty(f,g) \le \sup\{d_\infty(f,h), d_\infty(h,g)\}$ pour tous f,g,h.

Comme k est fini, le corps totalement discontinu $\widehat{K}$ est localement compact. Notons que X^n converge vers $+\infty$ (i.e. sort de tout compact) et que X^{-n} converge vers 0 dans $\widehat{K}$ quand n tend vers $+\infty$.

Notons $\mathcal{O} = \{f \in \widehat{K}, v_\infty(f) \ge 0\}$ l'anneau de la valuation v_∞ dans $\widehat{K}$, c'est-à-dire le sous-espace compact-ouvert $k[[X^{-1}]]$ des séries entières formelles en X^{-1} sur k, qui est la boule fermée de rayon 1 et de centre 0 dans $\widehat{K}$. On a $\mathcal{O}/X^{-1}\mathcal{O} = k$, qui est appelé le *corps résiduel* de v_∞.

Pour tout f dans $\widehat{K}$, il existe un unique couple formé d'un polynôme en X sur k, noté $[f] \in A$, et d'une série entière formelle en X^{-1} sur k, de terme constant nul, notée $\{f\} \in X^{-1}\mathcal{O}$, tels que

$$f = [f] + \{f\}.$$

On appelle $[f]$ la *partie entière* de f et $\{f\} = f - [f]$ la *partie fractionnaire* de f. L'application $\Psi : X^{-1}\mathcal{O} - \{0\} \to X^{-1}\mathcal{O}$ définie par

$$\Psi(f) = \{\frac{1}{f}\} = \frac{1}{f} - [\frac{1}{f}]$$

est appelée *l'application d'Artin.*

Pour f dans $\widehat{K} - K$ et n dans $\mathbb{N}$, posons $a_0 = [f]$ et pour $n \geq 1$,

$$a_n = \left[\frac{1}{\Psi^{n-1}(f - a_0)}\right].$$

Nous avons $a_n \in A$ avec $\deg a_n > 0$ si $n \geq 1$. On définit par récurrence deux suites de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}, (Q_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$ dans A par

$$P_0 = a_0, \quad P_{-1} = 1, \quad Q_0 = 1, \quad Q_{-1} = 0$$

et pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$P_{n+1} = a_{n+1}P_n + P_{n-1} \quad \text{et} \quad Q_{n+1} = a_{n+1}Q_n + Q_{n-1}.$$

On a $P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n = (-1)^n$, donc P_n, Q_n sont premiers entre eux dans A. On montre que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

On convient que $\frac{P_{-1}}{Q_{-1}} = \infty$. On appelle $\frac{P_n}{Q_n}$ le *n-ème convergent* de f. Il est facile de voir que $f = \lim_{n\to+\infty} \frac{P_n}{Q_n}$, ce que l'on note

$$f = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

On appelle la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le *développement en fraction continue* de f. Le développement en fraction continue de $\Psi^k(f - a_0)$ est $(0, (a_{n+k+1})_{n\in\mathbb{N}})$ pour tout k dans $\mathbb{N}$. Si f est dans K, nous conviendrons que le développement en fraction continue de f est une suite finie.

Les deux résultats suivants disent que les convergents de f sont les meilleures approximations rationnelles possibles de f.

Proposition 2.1 *Pour tout n dans $\mathbb{N}$,*

$$\left| f - \frac{P_n}{Q_n} \right|_\infty = \frac{1}{|a_{n+1}|_\infty \, |Q_n|_\infty^2}.$$

Comme $\deg a_{n+1} \geq 1$, on a en particulier $\left| f - \frac{P_n}{Q_n} \right|_\infty \leq \frac{1}{q|Q_n|_\infty^2}$.

Proposition 2.2 *Si $P, Q \in A$ avec $Q \neq 0$ vérifient $\left| f - \frac{P}{Q} \right|_\infty < \frac{1}{|Q|_\infty^2}$, alors $\frac{P}{Q}$ est un convergent de f*

Une série de Laurent formelle $f \in \widehat{K}$ est dite *algébrique* de degré n sur K si elle est solution d'une équation polynomiale de degré n à coefficients non tous nuls dans K, avec n minimal.

Proposition 2.3 *Si $f \in \widehat{K}$, alors f est quadratique sur K si et seulement si son développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang.*

Le résultat suivant dit que les éléments de $\widehat{K}$ algébriques sur K ne sont pas très bien approchables par des éléments de K.

Théorème 2.4 *(K. Mahler [Mah]) Si $f \in \widehat{K}$ est algébrique sur K de degré $n \geq 2$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\forall P, Q \in A, \;\; Q \neq 0, \qquad \left| f - \frac{P}{Q} \right|_\infty \geq \frac{c}{|Q|_\infty^n}.$$

Le but de ce qui suit est de donner une interprétation géométrique aux trois premiers résultats ci-dessus. Le probème de comprendre de manière géométrique les développements en fraction continue des éléments de $\widehat{K}$ algébriques sur K est largement ouvert (voir toutefois [Chr] pour l'aspect algorithmique), mais nous traiterons quelques cas ci-dessous.

3 Rappels sur l'arbre de Bruhat-Tits de $\mathrm{SL}_2(\widehat{K})$

Tout ce chapitre est composé de rappels, essentiellement tirés de [Ser2].

Notons $G = SL_2(\widehat{K})$, qui est un groupe localement compact, et $\Gamma = SL_2(A)$, qui est un *réseau* dans G (i.e. un sous-groupe discret de covolume fini (pour la mesure de Haar de G)), appelé le *groupe modulaire.*

L'*arbre de Bruhat-Tits* $\mathbb{T}_q$ de $(SL_2, \widehat{K})$ est défini par

1. Les sommets de $\mathbb{T}_q$ sont les classes d'homothétie (par $\widehat{K}^\times$) $\Lambda = [L]$ de $\mathcal{O}$-réseaux (i.e. $\mathcal{O}$-sous-modules libres de rang deux) L dans $\widehat{K} \times \widehat{K}$.

2. Deux sommets Λ, Λ' sont joints par une arête si et seulement s'il existe des représentants L, L' de Λ, Λ' tels que $L' \subset L$ et L/L' est isomorphe à $\mathcal{O}/X^{-1}\mathcal{O} = k$.

Nous noterons d la distance dans $\mathbb{T}_q$. Nous noterons $x_* = [\mathcal{O} \times \mathcal{O}]$ la classe du réseau standard. On montre (voir [Ser2]) que $\mathbb{T}_q$ est un arbre régulier de degré $q+1$, que l'action naturelle de G sur les $\mathcal{O}$-réseaux s'étend en une action sans inversion sur $\mathbb{T}_q$, transitive sur les arêtes, et de stabilisateur de x_* le groupe $SL_2(\mathcal{O})$.

Pour x sommet de $\mathbb{T}_q$, notons $lk_{\mathbb{T}_q}(x)$ l'ensemble des sommets de $\mathbb{T}_q$ à distance 1 de x, identifié avec l'ensemble des arêtes orientées d'origine x.

Soit L_0 un $\mathcal{O}$-réseau et Λ_0 sa classe. Le quotient $L_0/X^{-1}L_0$ est un plan vectoriel sur le corps résiduel $\mathcal{O}/X^{-1}\mathcal{O} = k$. L'ensemble $lk_{\mathbb{T}_q}(\Lambda_0)$ s'identifie (voir [Ser2]) avec la droite projective $\mathbb{P}(L_0/X^{-1}L_0) \simeq \mathbb{P}_1(k)$, par l'application qui à la classe d'un $\mathcal{O}$-réseau $[L]$ avec $L \subset L_0$ et $L_0/L \simeq k$ associe la droite $L/X^{-1}L_0$ du plan vectoriel $L_0/X^{-1}L_0$. Notons que la droite projective $\mathbb{P}(L_0/X^{-1}L_0)$ ne dépend pas du représentant L_0 de Λ_0, et que si g est dans G, alors la bijection induite par g de $lk_{\mathbb{T}_q}(\Lambda_0)$ dans $lk_{\mathbb{T}_q}(g\Lambda_0)$ est la transformation projective sur k de $\mathbb{P}(L_0/X^{-1}L_0)$ dans $\mathbb{P}(gL_0/X^{-1}gL_0)$ induite par g.

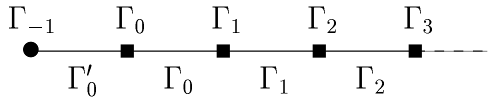
Nous identifions dans la suite l'arbre $\mathbb{T}_q$ avec sa réalisation géométrique, ainsi qu'un chemin d'arêtes de $\mathbb{T}_q$ avec le chemin associé dans la réalisation géométrique. Notons $\partial\mathbb{T}_q$ l'espace des bouts de l'espace topologique localement compact $\mathbb{T}_q$, qui est l'espace des classes d'équivalence de rayons géodésiques dans $\mathbb{T}_q$, où l'on identifie deux rayons géodésiques si leur intersection est encore un rayon géodésique. L'action de G sur $\mathbb{T}_q$ s'étend continuement en une action par homéomorphismes de G sur $\partial\mathbb{T}_q$.

Soit L_0 un $\mathcal{O}$-réseau et Λ_0 sa classe. L'espace $\partial\mathbb{T}_q$ s'identifie (voir [Ser2]) avec la droite projective $\mathbb{P}(\widehat{K} \times \widehat{K}) = \mathbb{P}_1(\widehat{K})$, par l'application qui à l'extrémité d'un rayon géodésique issu de Λ_0, de suite des sommets consécutifs $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, associe l'unique droite de $\widehat{K} \times \widehat{K}$ contenant l'intersection des $\mathcal{O}$-réseaux L_n, avec $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite de $\mathcal{O}$-réseaux dans $\widehat{K} \times \widehat{K}$ telle que $[L_n] = \Lambda_n$ et $L_{n+1} \subset L_n$. Notons que cette identification $\partial\mathbb{T}_q = \mathbb{P}_1(\widehat{K})$ est un homéomorphisme G-équivariant, qui ne dépend pas du choix du réseau L_0 modulo transformation projective.

Notons $\Gamma^{\pm}$ le groupe des matrices 2-2, à coefficients dans A, de déterminant ± 1. Son action sur les $\mathcal{O}$-réseaux induit une action isométrique sur l'arbre de Bruhat-Tits $\mathbb{T}_q$.

Action du groupe modulaire

Le rayon géodésique $\mathcal{D}_\Gamma$ issu de x_*, de suite des sommets consécutifs $([\mathcal{O} \times X^{-n}\mathcal{O}])_{n\in\mathbb{N}}$, est un domaine fondamental pour l'action du groupe modulaire Γ sur l'arbre de Bruhat-Tits $\mathbb{T}_q$. Nous renvoyons par exemple à [Ser2, BH, BL] pour les rappels sur les graphes de groupes. Le graphe de groupe quotient $\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q$ est



avec $\Gamma_{-1} = SL_2(k)$, $\Gamma'_0 = \Gamma_{-1} \cap \Gamma_0$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\Gamma_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \;\; a \in k^\times, b \in A, \deg b \leq n+1 \right\}.$$

Notons G_∞ le fixateur dans G du bout du rayon $\mathcal{D}_\Gamma$. C'est le sous-groupe de G formé des matrices triangulaires supérieures. Nous noterons $\Gamma_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$, qui est exactement l'intersection de Γ et de G_∞, c'est-à-dire le fixateur du bout de $\mathcal{D}_\Gamma$ dans Γ.

4 Fonctions de Buseman, horosphères et distance de Hamenstädt

Tout ce chapitre est composé de rappels, essentiellement tirés de [BH, HP1], et vient de la structure d'espace métrique CAT(−1) des arbres (loc. cit.).

Soit T un arbre localement fini, d sa distance, et ω un bout de T. Si ξ, ξ' sont deux bouts distincts de T, nous noterons $]\xi, \xi'[$ l'unique géodésique entre ξ et ξ', orientée de ξ vers ξ'.

On appelle *fonction de Buseman* en ω l'application $\beta_\omega : T \times T \to \mathbb{R}$ définie par

$$\beta_\omega(x, y) = \lim_{t \to +\infty} d(y, c(t)) - d(x, c(t))$$

avec $c : [0, +\infty[\to T$ un rayon géodésique convergeant vers ω. Elle ne dépend pas du choix de c, et vérifie la relation de cocycle

$$\beta_\omega(x, y) + \beta_\omega(y, z) = \beta_\omega(x, z).$$

En fait l'application $t \mapsto d(y, c(t)) - d(x, c(t))$ est constante à partir d'un certain temps. Le rayon géodésique $[x, \omega[$ rencontre le rayon géodésique $[y, \omega[$ en un rayon géodésique $[p, \omega[$ et $\beta_\omega(x, y) = d(y, p) - d(p, x)$.

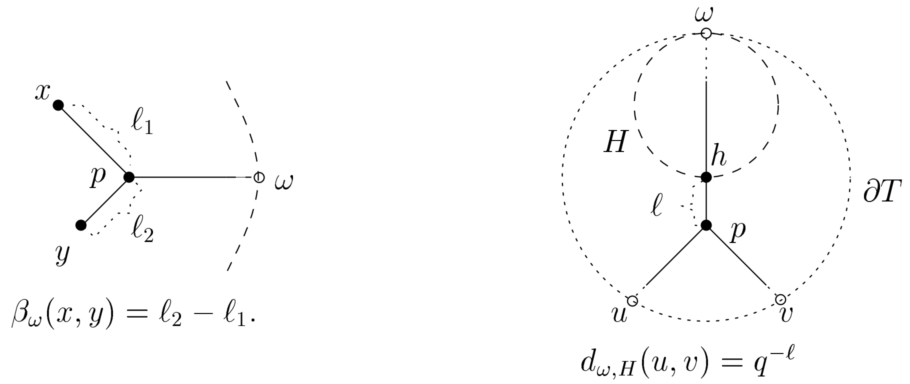


Figure 1: Fonction de Buseman et distance de Hamenstädt.

On appelle *horosphère centrée* en ω toute ligne de niveau d'une fonction $x \mapsto \beta_\omega(x, y_0)$ pour n'importe quel y_0 dans T. Par la relation de cocycle, deux points x, y sont sur une même horosphère centrée en ω si et seulement si $\beta_\omega(x, y) = 0$.

On appelle *horoboule (ouverte) (fermée) centrée* en ω toute image réciproque d'un intervalle minoré non majoré (ouvert) (fermé) de $\mathbb{R}$ par une fonction $x \mapsto \beta_\omega(x, y_0)$ pour un y_0 dans T. La frontière dans T d'une horoboule est une horosphère, dite *associée* à l'horoboule.

Soit H une horosphère centrée en ω. Pour tous points u, v du bord de T distincts de ω, la géodésique $]\omega, u[$ rencontre H en un point h et la géodésique $]\omega, v[$ en un rayon géodésique $]\omega, p]$ si $u \neq v$. On note $(u, v)_{\omega,H}$ la distance algébrique du point h au point p sur la droite orientée $]\omega, u[$ si $u \neq v$, et $+\infty$ sinon. Par la relation de cocycle, $(u, v)_{\omega,H} = (v, u)_{\omega,H}$.

On appelle alors *distance de Hamenstädt* sur $\partial T - \{\omega\}$

$$d_{\omega,H}(u, v) = q^{-(u,v)_{\omega,H}}.$$

(Le choix de la constante q vient du fait que dans la suite l'arbre T est régulier de degré $q + 1$.) Il est démontré dans [HP1] que $d_{\omega,H}$ est une distance. Il est facile de voir que c'est une distance ultramétrique induisant la topologie des bouts sur $\partial T - \{\omega\}$, et que, en posant $\beta_\omega(H, H') = \beta_\omega(x, x')$ pour toutes horosphères H, H' centrées en ω, et pour tout x dans H et x' dans H', alors

$$d_{\omega,H'} = q^{-\beta_\omega(H',H)} d_{\omega,H}.$$

5 Une interprétation géométrique des séries formelles de Laurent

Si V est un plan vectoriel sur un corps C, tout choix d'une base (e_1, e_2) de V permet d'identifier la droite projective $\mathbb{P}(V)$ avec $C \cup \{\infty\}$, en envoyant la droite (dite "à l'infini") Ce_1 sur ∞ et, pour tout $a \in C$, la droite $C(ae_1 + e_2)$ sur $a \in C$. Cette identification est équivariante pour l'action projective de $GL(V)$ sur $\mathbb{P}(V)$ et l'action par homographies de $GL_2(C)$ sur $C \cup \{\infty\}$ (le choix de la base induisant un isomorphisme de $GL(V)$ sur $GL_2(C)$). Nous appelerons une telle identification $\mathbb{P}(V) = C \cup \{\infty\}$ *projective*.

En particulier, la base canonique $((1,0),(0,1))$ du plan vectoriel $\widehat{K} \times \widehat{K}$ sur $\widehat{K}$ donne une identification $\partial \mathbb{T}_q = \mathbb{P}(\widehat{K} \times \widehat{K}) = \mathbb{P}_1(\widehat{K}) = K \cup \{\infty\}$. Remarquons que ∞ est le point de $\partial \mathbb{T}_q$, bout du rayon géodésique $\mathcal{D}_\Gamma$ (issu de x_*, de suite des sommets consécutifs $([\mathcal{O} \times X^{-n}\mathcal{O}])_{n \in \mathbb{N}}$).

Notre premier résultat dit que l'écriture d'une série formelle de Laurent en X^{-1} sur k se lit sur l'arbre de Bruhat-Tits de $SL_2(k((X^{-1})))$. Notons HB_∞ l'horoboule (fermée) de centre $\infty \in \partial \mathbb{T}_q$ dont l'horosphère associée H_∞ passe par x_*.

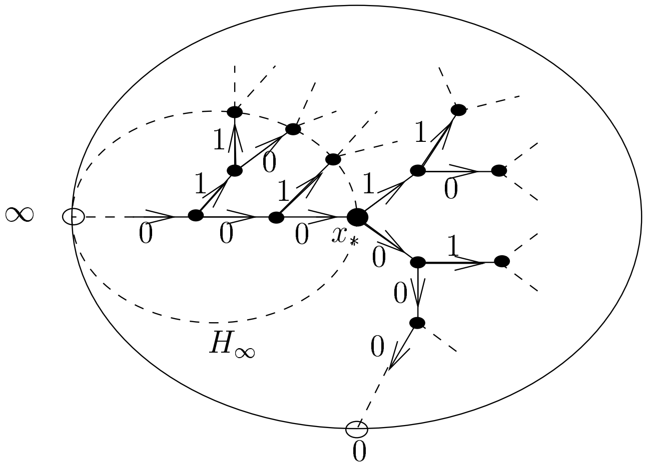


Figure 2: Etiquetage des arêtes pour q=2.

Proposition 5.1 *Il existe une et une seule identification projective de $lk_{\mathbb{T}_q}([L]) = \mathbb{P}(L/X^{-1}L)$ avec $k \cup \{\infty\}$ pour tout $\mathcal{O}$-réseau L, telle que*

1. *la droite à l'infini de $L/X^{-1}L$ est la droite correspondant à l'unique arête issue de $[L]$ et pointant vers le bout $\infty \in \partial \mathbb{T}_q$,*

2. *Si $f \in \widehat{K}$, alors $f = \sum_{i >> -\infty} f_i X^{-i}$ si et seulement si $(f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est la suite des étiquettes des arêtes orientées consécutives de la géodésique $]\infty, f[$ entre les points ∞ et f de $\partial \mathbb{T}_q = \widehat{K} \cup \{\infty\}$, de telle sorte que f_0 soit l'étiquette de l'arête de $]\infty, f[$ sortant de l'horoboule HB_∞.*

La première condition permet d'étiqueter les arêtes issues de chaque sommet et ne pointant pas vers $\infty \in \partial \mathbb{T}_q$ par un élément du corps résiduel k. C'est cet étiquetage qui est utilisé dans la deuxième condition.

Notons que ces identifications $lk_{\mathbb{T}_q}([L]) = k \cup \{\infty\}$ sont projectivement équivariantes par G, au sens que si $g \in G$, alors pour tout sommet x de $\mathbb{T}_q$, l'application $lk_{\mathbb{T}_q}(x) \to lk_{\mathbb{T}_q}(gx)$ induite par g est une homographie $k \cup \{\infty\} \to k \cup \{\infty\}$.

Notons que la suite des étiquettes de toute géodésique issue de $\infty \in \partial\mathbb{T}_q$ commence par des 0, ce qui est parfaitement compatible avec l'écriture d'une série de Laurent formelle.

Preuve. L'unicité est immédiate. Montrons l'existence.

Pour tout sommet x de $\mathbb{T}_q$, le plan vectoriel $L/X^{-1}L$ sur k ne dépend pas du choix d'un représentant L de x. Nous allons fixer une base de ce plan, ce qui donnera une identification projective $lk_{\mathbb{T}_q}(x) = \mathbb{P}(L/X^{-1}L) = k \cup \{\infty\}$.

L'anneau $k[X, X^{-1}]$ des polynômes de Laurent est un sous-anneau dense du corps $\widehat{K}$ des séries formelles de Laurent, et nous noterons v_0 sa valuation (dite "en 0")

$$v_0\Big(\sum_{-\infty << i << +\infty} f_i X^{-i}\Big) = -\inf\{j \in \mathbb{Z} \mid \forall i > j, f_i = 0\}.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, notons $U_n \subset U_{n-1}$ le sous-groupe de G, fixant le point $\infty \in \partial\mathbb{T}_q$, suivant:

$$U_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ a \in k[X, X^{-1}], v_0(a) \geq n+1 \right\}.$$

Pour n dans $\mathbb{Z}$, notons $H_{\infty,n}$ l'horosphère de centre ∞ passant par la classe du $\mathcal{O}$-réseau $\mathcal{O} \times X^{-n}\mathcal{O}$. Il est immédiat de voir que U_n agit simplement transitivement sur $H_{\infty,n}$.

Pour tout sommet x de $\mathbb{T}_q$, soit $n \in \mathbb{Z}$ l'unique entier tel que x appartient à $H_{\infty,n}$. Il existe donc un unique a dans $k[X, X^{-1}]$ avec $v_0(a) \geq n+1$ tel que l'image par $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $[\mathcal{O} \times X^{-n}\mathcal{O}]$ est x. Avec (e_1, e_2) la base canonique de $\widehat{K} \times \widehat{K}$, le $\mathcal{O}$-réseau L de base (en tant que $\mathcal{O}$-module libre) $\mathcal{B} = (e_1, X^{-n}(ae_1 + e_2))$ représente x et $\mathcal{B}$ induit une base (sur le corps $\mathcal{O}/X^{-1}\mathcal{O} = k$) de $L/X^{-1}L$. Celle-ci fournit donc une identification projective $lk_{\mathbb{T}_q}(x) = \mathbb{P}(L/X^{-1}L) = k \cup \{\infty\}$. La première propriété est immédiate à vérifier. De plus, si $a = \sum_{-\infty << i \leq n+1} f_i X^{-i}$, alors la suite des étiquettes du rayon géodésique entre $\infty \in \partial\mathbb{T}_q$ et x est exactement $(f_i)_{i \leq n+1}$.

Pour vérifier la deuxième propriété, notons U_∞ le sous-groupe de G, fixant le point $\infty \in \partial\mathbb{T}_q$, formé des matrices triangulaires supérieures unipotentes:

$$U_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ f \in \widehat{K} \right\}.$$

Remarquons que U_∞ est l'adhérence de $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U_n$ dans G et qu'il agit simplement transitivement sur $\partial\mathbb{T}_q - \{\infty\} = \widehat{K}$. Pour tout $f = \sum_{-\infty << i} f_i X^{-i}$ dans $\widehat{K}$, posons $a_n = \sum_{-\infty << i \leq n+1} f_i X^{-i}$, qui appartient à $k[X, X^{-1}]$, et $\gamma_f = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors γ_f envoie la géodésique $]\infty, 0[$ sur la géodésique entre $]\infty, f[$, et agit sur $H_{\infty,n}$ comme $\begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_n$. Ceci montre le résultat. □

Remarque. Tout ce que nous avons utilisé ci-dessus, ce sont les axiomes de BN-paire scindée de $SL_2(k((X^{-1})))$ (voir [BT]).

Le corollaire bien connu suivant découle immédiatement de cette description géométrique des séries de Laurent.

Corollaire 5.2 *Soit H_∞ l'horosphère de $\mathbb{T}_q$ de centre ∞ et passant par x_*. Alors la distance de Hamenstädt d_{∞, H_∞} sur $\partial\mathbb{T}_q - \{\infty\} = \widehat{K}$ coïncide avec la distance d_∞ sur $\widehat{K}$ induite par la valuation v_∞.* □

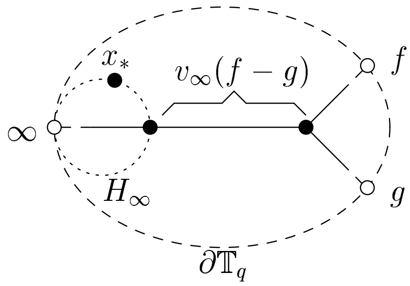


Figure 3: Comment lire la valuation sur l'arbre de Bruhat-Tits.

6 Une interprétation géométrique des fractions continues

Soit Σ le 1-squelette du pavage dual du pavage de Farey du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2$, égal à la préimage du cut locus du cusp de $SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$. Le développement en fraction continue d'un nombre réel $\xi \in \mathbb{R}$ peut se comprendre de manière géométrique par le cheminement dans $\mathbb{H}^2$ de la géodésique verticale d'extrémité ξ : la suite des composantes connexes de $\mathbb{H}^2 - \Sigma$ qu'elle rencontre est précisément celle des composantes connexes dont le point à l'infini est le n-ème convergent de ξ (voir [For]).

Nous montrons ci-dessous que l'interprétation géométrique du développement en fraction continue de $f \in \widehat{K}$ passe par la compréhension du cheminement dans $\mathbb{T}_q$ de la géodésique entre les bouts ∞ et f de $\mathbb{T}_q$.

6.1 Projection des géodésiques de $\mathbb{T}_q$ dans le rayon modulaire

Notons π la projection naturelle de $\mathbb{T}_q$ sur $\Gamma\backslash\mathbb{T}_q$. Pour tout f dans $\widehat{K}$, l'image de la géodésique $]\infty, f[$ dans $\Gamma\backslash\mathbb{T}_q$ est un chemin $c(f)$ d'arêtes partant du bout du rayon $\Gamma\backslash\mathbb{T}_q$, qui converge vers le bout de $\Gamma\backslash\mathbb{T}_q$ si et seulement si f est rationnel ($f \in K$), car l'orbite de ∞ par Γ est exactement $K \cup \{\infty\}$.

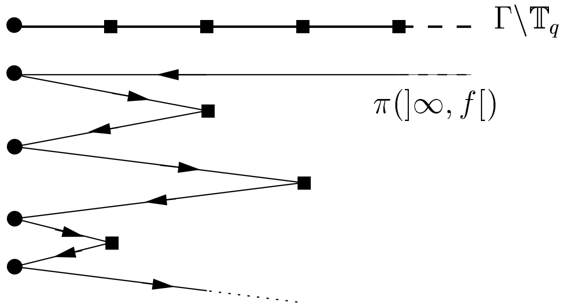


Figure 4: Aller-retours dans $\Gamma\backslash\mathbb{T}_q$.

Si $f \notin K$, alors $c(f)$ est constitué d'abord d'un rayon d'arêtes allant du bout du rayon $\Gamma\backslash\mathbb{T}_q$ jusqu'à son origine (il ne peut y avoir de demi-tour avant l'origine de $\Gamma\backslash\mathbb{T}_q$, car $]\infty, f[$ est géodésique et le fixateur d'une arête (sauf la première) de $\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q$, orientée vers le bout de $\Gamma\backslash\mathbb{T}_q$, est égal au fixateur de son origine (voir section 3)), puis d'une infinité d'aller-retours à partir de l'origine du rayon $\Gamma\backslash\mathbb{T}_q$. Nous verrons ci-dessous que les hauteurs de ces aller-retours sont exactement les degrés des coefficients (à partir de a_1) du développement $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fraction continue de f. Ceci explique aussi pourquoi le degré de a_n est au moins 1 pour $n \geq 1$.

6.2 La famille Γ-équivariante maximale d'horoboules d'intérieurs disjoints.

Rappelons que HB_∞ est l'horoboule centrée en $\infty \in \partial\mathbb{T}_q$ dont l'horosphère associée H_∞ passe par x_*. C'est l'orbite du rayon fondamental $\mathcal{D}_\Gamma$ par le fixateur Γ_∞ du point $\infty \in \partial\mathbb{T}_q$ dans le groupe modulaire Γ. Pour tout γ dans Γ, notons $HB_{\gamma\infty} = \gamma HB_\infty$, qui est l'horoboule centrée en $\gamma\infty$ dont l'horosphère associée passe par γx_*. Il est facile de voir que $(HB_{\gamma\infty})_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_\infty}$ est la famille des adhérences des composantes connexes de la préimage par π du rayon $\Gamma\backslash\mathbb{T}_q$ privé de son origine. Donc les horoboules de cette famille se rencontrent deux à deux en au plus un point (sur l'intersection des horosphères associées), et leur réunion est égale à $\mathbb{T}_q$.

Comme l'involution $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma^\pm$ préserve HB_∞, pour tout γ dans $\Gamma^\pm - \Gamma$ et α dans Γ, on a $\gamma HB_{\alpha\infty} = \gamma\alpha\tau HB_\infty$ et $\gamma\alpha\tau$ appartient à Γ. Donc $\Gamma^\pm$ préserve la famille d'horoboules $(HB_{\gamma\infty})_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_\infty}$.

Proposition 6.1 *Pour tout point rationnel $\frac{P}{Q}$ dans $\partial\mathbb{T}_q$ (avec P, Q premiers entre eux dans A, Q non nul),*

$$v_\infty(Q) = -\frac{1}{2} d(HB_\infty, HB_{\frac{P}{Q}}).$$

Preuve. La formule est évidente si $P = 0$, car alors Q est constant non nul, $v_\infty(Q) = 0$ et $d(HB_\infty, HB_0) = 0$. on suppose donc P non nul. Notons u la projection de $\frac{P}{Q}$ sur la géodésique entre les bouts ∞ et 0 de $\mathbb{T}_q$. Supposons que u soit entre x_* et 0. On se ramène à ce cas, par transitivité de l'action par translation de A sur H_∞. En effet, ajouter à P un multiple de Q ne change pas $v_\infty(Q)$, ni $d(HB_\infty, HB_{P/Q})$, car les translations par un élément de A sont des isométries qui préservent HB_∞.

Notons y le sommet de $\mathbb{T}_q$, intersection de la géodésique entre ∞ et $\frac{P}{Q}$ avec l'horosphère $H_{\frac{P}{Q}}$ associée à $HB_{\frac{P}{Q}}$. Comme le rayon géodésique entre x_* et 0 est contenu dans l'horoboule HB_0, d'intérieur disjoint de celui de $HB_{\frac{P}{Q}}$, le point y n'est pas contenu dans l'intérieur du segment entre x_* et u.

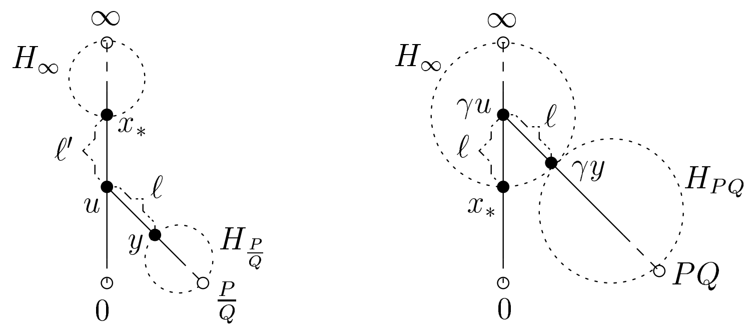


Figure 5: Distance entre horoboules et valuation du dénominateur.

Alors

$$d(HB_\infty, HB_{\frac{P}{Q}}) = d(x_*, y) = d(x_*, u) + d(u, y).$$

Notons $\ell' = d(x_*, u)$ et $\ell = d(u, y)$. Par le corollaire 5.2, $\ell' = v_\infty(\frac{P}{Q})$.

Considérons l'élément $\gamma = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & \frac{1}{Q} \end{pmatrix}$ de G, qui est un automorphisme de $\mathbb{T}_q$ fixant les bouts ∞ et 0 (donc préservant la géodésique entre ces bouts).

Montrons que γ envoie l'horoboule $HB_{\frac{P}{Q}}$ sur l'horoboule HB_{PQ}. En effet, prenons U, V dans A avec $PU - QV = 1$. Posons $\alpha = \begin{pmatrix} P & V \\ Q & U \end{pmatrix}$ et $\beta = \begin{pmatrix} PQ & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En particulier, α et β sont dans Γ, et vérifient $\alpha H_\infty = H_{\frac{P}{Q}}$ et $\beta H_\infty = H_{PQ}$. Or $\beta^{-1}\gamma\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \frac{U}{Q} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui préserve chaque horosphère centrée en ∞. Donc

$$\gamma H_{\frac{P}{Q}} = \gamma\alpha H_\infty = \beta(\beta^{-1}\gamma\alpha)H_\infty = \beta H_\infty = H_{PQ}.$$

Comme PQ est dans A, les horoboules HB_{PQ} et HB_∞ se rencontrent exactement en un point. Donc γu est contenu dans HB_∞, et $HB_{PQ} \cap HB_\infty$ est réduite à γy. Puisque γ est une isométrie, et puisque γy et x_* sont sur la même horosphère centrée en ∞,

$$\ell = d(\gamma u, \gamma y) = d(\gamma u, x_*) = -v_\infty(PQ),$$

cette dernière égalité découlant du corollaire 5.2. Donc $d(HB_\infty, HB_{\frac{P}{Q}}) = \ell' + \ell = v_\infty(\frac{P}{Q}) - v_\infty(PQ) = -2v_\infty(Q)$. □

Remarque. Soient P, Q premiers entre eux dans A, avec Q non nul et $\deg(P) \leq \deg(Q)$. Si Q est constant, on pose $U = 0$ et $V = \frac{1}{Q}$. Sinon, par le théorème de Bezout, soit (U, V) l'unique couple dans A tel que $PU - QV = 1$ et $\deg(U) < \deg(Q)$, $\deg(V) < \deg(P)$. Posons $\alpha = \begin{pmatrix} P & V \\ Q & U \end{pmatrix}$. Alors $[x_*, \alpha x_*]$ est le segment géodésique entre les horosphères (distinctes) H_∞ et $H_{\frac{P}{Q}}$.

Preuve. Notons tout d'abord que le point d'intersection avec H_∞ de la géodésique entre ∞ et $\frac{P}{Q}$ est x_* si et seulement si $\deg(P) \leq \deg(Q)$. Nous procédons par récurrence sur $n = \deg(P) + \deg(Q)$. Si $n \leq 0$, c'est immédiat. Sinon, effectuons la division euclidienne de Q par P, avec $Q = PS - R$ et $\deg(R) < \deg(P)$. Posons $U' = V$ et $V' = SV - U$. Alors $\deg(R) \leq \deg(P)$, $RU' - PV' = 1$, $\deg(U') < \deg(P)$ et $\deg(V') < \deg(R)$. Cette dernière inégalité découle de l'égalité $PV' = RV - 1$, en remarquant que $V \neq 0$ car $\deg(Q) > 0$, et que si R et V sont constants, alors $S = \frac{U}{V}$ et $V' = 0$. Comme $\deg(R) + \deg(P) < n$, par l'hypothèse de récurrence, on en déduit, en posant $\alpha' = \begin{pmatrix} R & V' \\ P & U' \end{pmatrix}$, que $[x_*, \alpha' x_*]$ est le segment géodésique entre les horosphères H_∞ et $H_{\frac{R}{P}}$. Notons $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & S \end{pmatrix}$, qui est dans Γ et fixe x_*. Comme $\alpha = \beta\alpha'$, on en déduit que β envoie l'horosphère $H_{\frac{R}{P}}$ sur l'horosphère $H_{\frac{P}{Q}}$, donc le segment géodésique entre x_* et $H_{\frac{R}{P}}$ sur celui entre x_* et $H_{\frac{P}{Q}}$. Par conséquent, $[x_*, \alpha x_*]$ est le segment géodésique entre les horosphères H_∞ et $H_{\frac{P}{Q}}$. □

6.3 Cheminement des géodésiques dans la famille d'horoboules

La géodésique entre ∞ et f traverse successivement des horoboules de la famille $(HB_{\gamma\infty})_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_\infty}$. La première est HB_∞, il y en a au moins deux, car une horoboule ne contient pas de géodésique, et les horoboules traversées sont en nombre fini si et seulement si f est dans K, car si un rayon géodésique est contenu dans une horoboule, alors il converge vers le centre de cette horoboule.

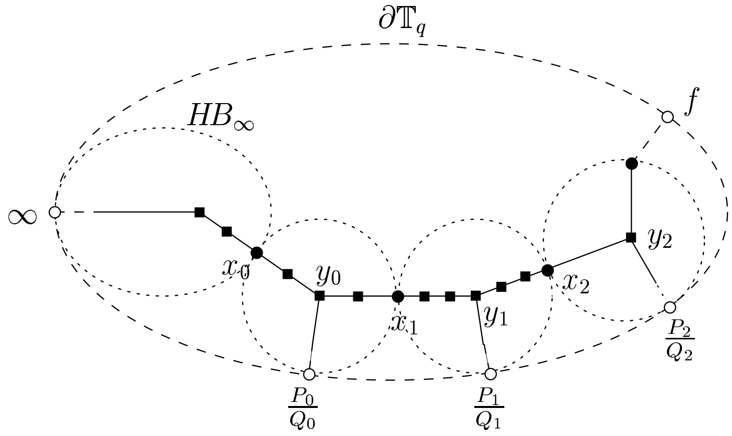


Figure 6: Parcours des géodésiques dans les horoboules.

Proposition 6.2 *Si $f \in \widehat{K}$, alors la géodésique $]\infty, f[$ traverse successivement les horoboules de la famille $(HB_{\gamma\infty})_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_\infty}$ centrées en les convergents de f.*

Preuve. Comme $\frac{P_n}{Q_n}$ converge vers f, la géodésique $]\infty, \frac{P_n}{Q_n}[$ converge (uniformément sur les compacts de $\mathbb{T}_q$) vers la géodésique $]\infty, f[$. De plus, pour $k < n$, le k-ème convergent de $\frac{P_n}{Q_n}$ est défini et coïncide avec le k-ème convergent de f. Il suffit donc de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (finie) des horoboules traversées par la géodésique entre ∞ et $\frac{P_n}{Q_n}$ est celle des horoboules centrées en les convergents de $\frac{P_n}{Q_n}$.

Nous raisonnons par récurrence sur la longueur n du développement en fraction continue d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$. Si $n = 0$ (i.e. si $\frac{P}{Q}$ est dans A), alors comme les horoboules de la famille centrées aux éléments de A rencontrent HB_∞ en un point, le résultat est clair. Supposons le résultat vrai pour $n-1$, et soit $\frac{P}{Q}$ dans K de développement en fraction continue $(a_i)_{i=0,\cdots,n}$, avec $n \geq 1$. Notons $\infty, \frac{P_0}{Q_0}, \cdots, \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P}{Q}$ les convergents de $\frac{P}{Q}$. Soit $\frac{P'}{Q'}$ l'élément de K de développement en fraction continue $(a_{i+1})_{i=0,\cdots,n-1}$, qui est de longueur $n-1$. Par récurrence, la géodésique entre ∞ et $\frac{P'}{Q'}$ traverse la suite des horoboules centrées en les convergents $\infty, \frac{P'_0}{Q'_0}, \cdots, \frac{P'_{n-1}}{Q'_{n-1}} = \frac{P'}{Q'}$ de $\frac{P'}{Q'}$. Posons $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_0 \end{pmatrix} \in \Gamma^\pm$. Par définition de a_0, l'isométrie γ envoie $\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \cdots, \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P}{Q}$ sur $\infty, \frac{P'_0}{Q'_0}, \cdots, \frac{P'_{n-1}}{Q'_{n-1}} = \frac{P'}{Q'}$, donc la géodésique entre $\frac{P_0}{Q_0}$ et $\frac{P}{Q}$ sur celle entre ∞ et $\frac{P'}{Q'}$. En appliquant γ^{-1}, on voit donc que la suite des horoboules traversées par la géodésique entre $\frac{P_0}{Q_0}$ et $\frac{P}{Q}$ est celle des horoboules centrées en les convergents non infinis de $\frac{P}{Q}$. La géodésique entre ∞ et $\frac{P}{Q}$ est contenue dans la réunion de la géodésique entre ∞ et $\frac{P_0}{Q_0}$ et de celle entre $\frac{P_0}{Q_0}$ et $\frac{P}{Q}$. La projection de $\frac{P_0}{Q_0}$ sur la géodésique entre ∞ et $\frac{P}{Q}$ est contenue dans l'intérieur de l'horoboule HB_∞, car $\deg a_1 > 0$. Ceci démontre le résultat. $\square$

Remarque 1. Notons $\gamma_{-1} = id$ et, pour tout $n \geq 0$, $\gamma_n = \gamma_{n-1}[a_n]$ avec $[a_n] = \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui sont des éléments de $\Gamma^\pm$. Par définition des P_n, Q_n, on montre par récurrence que, pour

$n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix} = \gamma_n.$$

En particulier, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\gamma_{n+1}\gamma_n^{-1} = \gamma_n[a_{n+1}]\gamma_n^{-1}$ est l'unique (par simple transitivité de $\mathrm{PGL}_2(\widehat{K})$ sur les triplets de points de $\mathbb{P}_1(\widehat{K})$) élément de $\Gamma^{\pm}$ (modulo $\pm id$) qui envoie $HB_{\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}}$ sur $HB_{\frac{P_n}{Q_n}}$, $HB_{\frac{P_n}{Q_n}}$ sur $HB_{\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}}$ et $HB_{\frac{P_{n-1}+P_n}{Q_{n-1}+Q_n}}$ sur $HB_{\frac{P_n+P_{n+1}}{Q_n+Q_{n+1}}}$. Notons que $HB_{\frac{P_n}{Q_n}}$ est la $(n+2)$-ème horoboule traversée par la géodésique entre ∞ et f (la première étant celle centrée en ∞).

Remarque 2. Soit x_n le sommet de $\mathbb{T}_q$ intersection de $HB_{\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}}$ et $HB_{\frac{P_n}{Q_n}}$, et y_n le point de pénétration maximale de la géodésique $]\infty, f[$ dans l'horoboule $HB_{\frac{P_n}{Q_n}}$, c'est-à-dire tel que le maximum sur la géodésique $]\infty, f[$ de la fonction de Buseman $\beta_{\frac{P_n}{Q_n}}(\cdot, x_*)$ centrée en $\frac{P_n}{Q_n}$ est précisément atteint en y_n (voir figure 6). Notons que y_n est le milieu du segment géodésique entre x_n et x_{n-1}. Avec les notations de la remarque précédente, $\gamma_n = (\gamma_n\gamma_{n-1}^{-1})...(\gamma_1\gamma_0^{-1})\gamma_0$ envoie la classe du réseau standard sur x_n. Notons $t_u = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout u dans $\widehat{K}$. Remarquons que $[a_n] = t_{a_n}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ préserve la classe du réseau standard. Alors $x_{n+1} = \gamma_{n+1}x_* = \gamma_n t_{a_{n+1}}x_* = \gamma_n t_{a_{n+1}}\gamma_n^{-1}x_n$. La translation par a_{n+1} sur l'horosphère H_∞ préserve cette horosphère et envoie la classe du $\mathcal{O}$-réseau standard x_* sur une classe à distance $-2v_\infty(a_{n+1})$ de x_*. On en déduit que $\gamma_n\ t_{a_{n+1}}\ \gamma_n^{-1}$ préserve l'horosphère centrée en $\frac{P_n}{Q_n}$ en envoyant x_n sur x_{n+1}, et que $d(x_n, y_n) = \frac{1}{2}d(x_n, x_{n+1}) = -v_\infty(a_{n+1})$.

Remarque 3. Par le corollaire 5.2, on a, puisque les géodésiques de ∞ à $\frac{P_n}{Q_n}$ et de ∞ à f se séparent en le point y_n,

$$v_\infty(f - \frac{P_n}{Q_n}) = d(x_0, y_n) = d(x_0, x_n) + d(x_n, y_n).$$

On a vu ci-dessus que $d(x_n, y_n) = -v_\infty(a_{n+1})$. Par la proposition 6.1, on a $d(x_0, x_n) = -2v_\infty(Q_n)$. Ceci remontre bien la formule d'approximation diophantienne

$$\left| f - \frac{P_n}{Q_n} \right|_\infty = \frac{1}{|a_{n+1}|_\infty\, |Q_n|_\infty^2}.$$

Remarque 4. Comme la géodésique entre ∞ et f ne rentre strictement dans aucune autre horoboule $HB_{\frac{P}{Q}}$ que celles centrées en les convergents, si u est la projection de $\frac{P}{Q}$ sur $]\infty, f[$, que l'on suppose par exemple entre x_0 et f, alors $v_\infty(f - \frac{P}{Q}) = d(x_0, u) \leq d(x_0, HB_{\frac{P}{Q}}) = -2v_\infty(Q)$ (par la proposition 6.1), donc $\left| f - \frac{P}{Q} \right|_\infty \geq \frac{1}{|Q|_\infty^2}$. Ceci explique géométriquement pourquoi les convergents de f sont les meilleures approximations diophantiennes de f.

6.4 Éléments quadratiques et fractions continues périodiques

Rappelons (voir par exemple [Ser2]) qu'un automorphisme g d'un arbre T est ou bien *elliptique* (i.e. fixe un point de l'arbre), ou bien *hyperbolique* (i.e. translate non trivialement une unique géodésique de l'arbre; les deux bouts de la géodésique sont alors les seuls bouts fixes de l'arbre). Nous appelons $\ell(g)=\min_{x\in T} d(x,gx)$ la *distance de translation* de g, le minimum étant atteint exactement sur l'ensemble des points fixes de g si g est elliptique, ou sur l'axe de translation de g sinon. Des méthodes géométriques permettent de remontrer le résultat bien connu suivant.

Proposition 6.3 *Pour tout f dans $\widehat{K}$, les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. *f est quadratique sur K,*

2. *le développement en fraction continue de f est périodique à partir d'un certain rang,*

3. *f est un point fixe d'un élément hyperbolique γ de Γ.*

Si ℓ est la distance de translation de γ, alors pour $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ le développement en fraction continue de f, il existe un entier p tel que pour tout N assez grand,

$$\ell=\sum_{i=1}^{p}-2v_\infty(a_{i+N}).$$

Preuve. Il est bien connu que f est quadratique sur K si et seulement s'il existe a,b,c,d dans A avec $ad-bc=1$, $c\neq 0$, $v_\infty(a+d)<0$ et $f=\frac{af+b}{cf+d}$. Ce qui signifie exactement que f est un point fixe de $\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$, avec γ hyperbolique de distance de translation $-2v_\infty(tr\ \gamma)>0$ (voir par exemple [Ser2]).

Supposons le développement en fraction continue de f périodique, de période p à partir d'un certain rang. Par définition de γ_n, il existe donc un entier n_0 et un élément α dans $\Gamma^\pm$ tel que $\gamma_{n_0+np}=\gamma_{n_0}\alpha^n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. En particulier, pour tout n, $\gamma_{n_0+(n+1)p}\gamma_{n_0+np}^{-1}=\gamma_{n_0}\alpha\gamma_{n_0}^{-1}$. Par la remarque 1, comme

$$\gamma_{n_0+(n+1)p}\gamma_{n_0+np}^{-1}=(\gamma_{n_0+(n+1)p}\gamma_{n_0+(n+1)p-1}^{-1})\cdots(\gamma_{n_0+np+1}\gamma_{n_0+np}^{-1}),$$

on en déduit qu'un sous-rayon du rayon entre x_* et f est envoyé strictement dans lui-même par $\gamma=\gamma_{n_0}\alpha\gamma_{n_0}^{-1}$. Donc γ est hyperbolique et fixe f. Comme γ^2 est dans Γ, ceci montre que f est un point fixe de l'élément hyperbolique γ^2 de Γ.

Réciproquement, si f est un point fixe de l'élément hyperbolique γ de Γ, alors le rayon entre x_* et f rencontre l'axe de translation de Γ en un rayon. Comme γ préserve la famille des horosphères $(HB_{\alpha\infty})_{\alpha\in\Gamma/\Gamma_\infty}$, il existe donc un entier r tel que γ envoie $\frac{P_n}{Q_n}$ sur $\frac{P_{n+r}}{Q_{n+r}}$ pour tout entier n assez grand. Quitte à remplacer γ par γ^2, on peut supposer que r est pair. Soit $\lambda_n\in A-\{0\}$ tel que $\gamma\begin{pmatrix} P_n\\ Q_n\end{pmatrix}=\lambda_n\begin{pmatrix} P_{n+r}\\ Q_{n+r}\end{pmatrix}$. Comme le déterminant de $\begin{pmatrix} P_i & P_{i+1}\\ Q_i & Q_{i+1}\end{pmatrix}$ est $(-1)^{i+1}$, on en déduit que $\lambda_n\lambda_{n+1}=1$. En particulier, λ_n appartient à $k-\{0\}$ et $\lambda_n=1/\lambda_{n+1}=\lambda_{n+r}$. Comme tout élément de $k^\times$ est d'ordre fini, quitte à remplacer γ par une puissance γ^s et r par rs, on en déduit que $\gamma\begin{pmatrix} P_n\\ Q_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_{n+r}\\ Q_{n+r}\end{pmatrix}$ pour tout n assez grand. Donc γ envoie aussi $\frac{P_n+P_{n+1}}{Q_n+Q_{n+1}}$ sur $\frac{P_{n+r}+P_{n+r+1}}{Q_{n+r}+Q_{n+r+1}}$. Par la remarque 1, on en déduit que $\gamma\gamma_n[a_{n+1}]\gamma_n^{-1}\gamma^{-1}=\gamma_{n+k}[a_{n+k+1}]\gamma_{n+k^{-1}}$ et que $\gamma'=\gamma_{n+k}^{-1}\gamma\gamma_n\in\Gamma^\pm$ fixe les bouts $\infty,0,1$. Donc γ' vaut $\pm id$, et comme $\gamma'[a_{n+1}]\gamma'^{-1}=[a_{n+k+1}]$, on a $a_n=a_{n+r}$ pour tout n assez grand.

Par la remarque 2, on a $d(x_n,x_{n+1})=-2v_\infty(a_{n+1})$. La dernière formule en découle. □

6.5 Développement en fraction continue des éléments algébriques de classe IA

Soit p la caractéristique de k. Notons $\sigma : x \mapsto x^p$ l'automorphisme de Frobénius de k. Il s'étend en un endomorphisme (non surjectif) du corps $\widehat{K}$, encore noté σ, préservant A. Nous noterons aussi σ l'application $\widehat{K}^2 \to \widehat{K}^2$ définie par $(f,g) \mapsto (\sigma(f), \sigma(g))$, qui est un endomorphisme σ-linéaire du plan vectoriel $\widehat{K}^2$ sur $\widehat{K}$. Notons que σ normalise $G = SL_2(\widehat{K})$ et $\Gamma = SL_2(A)$. En effet, si γ est dans G (resp. Γ), en notant γ^σ la matrice γ où l'on a appliqué σ à tous les coefficients, alors γ^σ est dans G (resp. Γ) et

$$\sigma\gamma = \gamma^\sigma \sigma.$$

Notons $\widetilde{G}$ le sous-monoïde des endomorphismes σ-linéaires de $\widehat{K}^2$, engendré par G et σ, et $\widetilde{\Gamma} \subset G$ celui engendré par Γ et σ. On a des suites exactes de monoïdes

$$G \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \Gamma \longrightarrow \widetilde{\Gamma} \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Notons ϕ le morphisme $\widetilde{G} \longrightarrow \mathbb{N}$ (ainsi que sa restriction à $\widetilde{\Gamma}$), de sorte que $\phi(\sigma) = 1$.

Notons que σ envoie base de $\widehat{K}^2$ sur base de $\widehat{K}^2$, et que si deux bases de $\widehat{K}^2$ engendrent le même $\mathcal{O}$-réseau, alors, comme σ normalise Γ, leurs images par σ engendrent aussi le même $\mathcal{O}$-réseau. Donc σ induit une application de l'ensemble des classes d'homothétie de $\mathcal{O}$-réseaux dans lui-même, que nous noterons encore σ. Notons que $\sigma([\mathcal{O} \times X^{-n}\mathcal{O}]) = [\mathcal{O} \times X^{-pn}\mathcal{O}]$ (en particulier σ fixe le réseau standard). Pour tout couple de sommets (x,y) de $\mathbb{T}_q$, il existe un élément de G qui envoie x sur x_* et y sur la géodésique entre ∞ et 0. Puisque σ normalise G, et comme G agit par isométrie sur $\mathbb{T}_q$, on a donc, pour tous sommets x, y de $\mathbb{T}_q$,

$$d(\sigma x, \sigma y) = pd(x,y).$$

En particulier, σ s'étend en une application continue injective de $\mathbb{T}_q$ dans lui-même, en envoyant une arête par une homothétie de rapport p sur le segment géodésique entre les images par σ des sommets de l'arête. Cette extension vérifie encore $d(\sigma x, \sigma y) = pd(x,y)$ pour tous x, y dans $\mathbb{T}_q$. Nous dirons que σ est un *endomorphisme affine* de $\mathbb{T}_q$.

Soit γ un élément de $\widetilde{G}$ tel que $\phi(\gamma) \neq 0$. Une adaptation au cas des endomorphismes affines de l'arbre $\mathbb{T}_q$ qui est localement fini (donc complet) des résultats de [Lio] pour les automorphismes affines des arbres réels complets (voir par exemple [Sha1] pour la définition d'un arbre réel) montre que γ possède un unique point fixe x_γ dans $\mathbb{T}_q$ (pas forcément un sommet).

Soit γ un élément de $\widetilde{\Gamma}$ tel que $\phi(\gamma) \neq 0$, et $f \in \widehat{K}$ un bout de $\mathbb{T}_q$ fixé par γ. Nous supposerons de plus que $v_\infty(tr(\gamma)) \neq 0$. Ceci équivaut exactement à dire que f est un élément de $\widehat{K}$ algébrique sur K de classe IA, i.e. solution d'une équation de la forme

$$f = \frac{af^{p^w} + b}{cf^{p^w} + d}$$

où $a, b, c, d \in A$, $w \in \mathbb{N} - \{0\}$ avec $ad - bc = 1$ et $a + d \notin k$. Comme σ normalise Γ eet $\sigma HB_\infty \subset HB_\infty$, la famille des horoboules $(HB_{\alpha\infty})_{\alpha \in \Gamma/\Gamma_\infty}$ est préservée par les éléments de $\widetilde{\Gamma}$. Comme le rayon entre x_γ et f est invariant par γ, la suite des horoboules de cette famille rencontrées par ce rayon est aussi invariante par γ. De plus, γ agit sur ce rayon comme une homothétie de rapport $p^{\phi(\gamma)}$. La géodésique entre ∞ et f rencontre le rayon entre x_γ et f en un rayon. Il existe donc $s \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que pour tout n assez grand, γ envoie l'horoboule centrée au n-ème convergent de f sur celle centrée au $(n+s)$-ème. Comme dans la partie réciproque de la preuve de la proposition 6.3, quitte à remplacer γ par une puissance, en utilisant le fait que σ est d'ordre fini sur $k^\times$, on peut prendre s pair, et on montre que γ envoie non seulement $\frac{P_n}{Q_n}$ sur $\frac{P_{n+s}}{Q_{n+s}}$ et $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ sur $\frac{P_{n+s+1}}{Q_{n+s+1}}$, mais aussi $\frac{P_n+P_{n+1}}{Q_n+Q_{n+1}}$ sur $\frac{P_{n+s}+P_{n+s+1}}{Q_{n+s}+Q_{n+s+1}}$. Par la remarque 1, on en déduit que $\gamma\gamma_n[a_{n+1}]\gamma_n^{-1}$ et $\gamma_{n+s}[a_{n+s+1}]\gamma_{n+s}^{-1}\gamma$ sont deux éléments de $\widetilde{\Gamma}$ ayant même image par $\widetilde{\Gamma} \to \mathbb{N}$ et donnant même image à $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n}, \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, donc coïncident. Or $\gamma' = \gamma_{n+s}^{-1}\gamma\gamma_n$ est un élément de $\widetilde{\Gamma}$ (car s est pair), fixant les bouts $\infty, 0, 1$, avec $\phi(\gamma') = \phi(\gamma)$, et vérifiant $\gamma'[a_{n+1}] = [a_{n+s+1}]\gamma'$. On en déduit, en écrivant $\gamma' = \gamma''\sigma^{\phi(\gamma')}$ avec $\gamma'' \in \Gamma$, que γ'' fixe $\infty, 0, 1$, donc vaut l'identité. Par conséquent $\sigma^{\phi(\gamma)}(a_{n+1}) = a_{n+s+1}$ pour tout n assez grand.

Ceci montre que le développement en fraction continue de f vérifie les propriétés suivantes de "périodicité" (voir par exemple [Sch]) :

Proposition 6.4 *Soit f un élément de $\widehat{K}$ algébrique sur K de classe IA, et $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son développement en fraction continue. Alors il existe des entiers r, s, w dans $\mathbb{N} - \{0\}$ tels que $a_{r+is+j} = \sigma^{iw}(a_{r+j})$ pour tous i dans $\mathbb{N}$ et $j = 1, \dots, s$.* □

Remarque. Pour travailler avec des automorphismes, on peut étendre le corps $\widehat{K}$ en lui rajoutant les racines p^s-èmes de X pour tout $s \in \mathbb{N}$, et en étendant la valuation v_∞ par $v_\infty(\sqrt[p]{X}) = -\frac{1}{p}$. Notons $\widehat{\widehat{K}}$ le corps valué obtenu. La nouvelle valuation n'est pas une valuation discrète (l'ensemble de ses valeurs est $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ qui est dense dans $\mathbb{R}$). L'arbre de Bruhat-Tits $\widehat{\mathbb{T}}_q$ associé à $SL_2(\widehat{\widehat{K}})$ n'est plus un arbre simplicial mais un arbre réel (ses sommets forment un ensemble dense), voir par exemple [Sha1, Sha2]. L'automorphisme de Frobénius de k induit un automorphisme du corps $\widehat{\widehat{K}}$ et un homéomorphisme affine de l'arbre réel $\widehat{\mathbb{T}}_q$, auquel cas les résultats de [Lio] s'appliquent sans adaptation, en utilisant le fait que le sous-arbre $\mathbb{T}_q$ de $\widehat{\mathbb{T}}_q$ est localement fini et invariant par σ.

Références

[BL] H. Bass, A. Lubotzky, *Tree lattices*, Prog. Math. **176**, Birkhäuser, 2001.

[BN] V. Berthé, H. Nakada, *On continued fraction expansions in positive characteristic: equivalence relations and some metric properties*, Expo. Math. **18** (2000) 257-284.

[BH] M.R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces with non-positive curvature*, Grund. math. Wiss. **319**, Springer Verlag (1998).

[BP] A. Broise, F. Paulin, en préparation.

[BT] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local (données radicielles valuées)*, Pub. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 5-252.

[Chr] G. Christol, *Ensembles presques périodiques k-reconnaissables*, Theo. Comp. Sci **9** (1979) 141-145.

[For] L. Ford, *Rational approximations to irrational complex numbers*, Trans. Amer. Math. Soc. **99** (1918), 1-42.

[HP1] S. Hersonsky, F. Paulin, *On the rigidity of discrete isometry groups of negatively curved spaces*, Comm. Math. Helv. **72** (1997) 349-388.

[HP2] S. Hersonsky, F. Paulin, *Diophantine approximation for negatively curved manifolds, I*, preprint Univ. Orsay, Sept. 1999.

[Laj] A. Lasjaunias, *A survey of diophantine approximation in fields of power series*, Monat. Math. **130** (2000) 211-229.

[Lio] I. Liousse, *Feuilletages affines de surfaces et actions affines sur les arbres réels*, Thèse, Toulouse (Fev. 1994).

[Mah] K. Mahler, *On a theorem of Liouville in Fields of positive characteristic*, Math. Can. J. Math. **1** (1949), 397–400.

[Pau] F. Paulin, *Approximation diophantienne non-archimédienne et actions de groupes sur les arbres*, en préparation.

[Sch] W. Schmidt, *On continued fractions and diophantine approximation in power series fields*, Acta Arith. **XCV** (2000) 139-166.

[Ser1] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1962.

[Ser2] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames,* SL_2, Astérisque **46** , Soc. Math. France (1983).

[Seri] C. Series, *The modular surface and continued fractions*, J. Lond. Math. Soc. **31** (1985) 69-80.

[Sha1] P. Shalen, *Dendrology of groups : an introduction*, Essays in group theory (S.M. Gersten ed.), pp 265-319 M.S.R.I Pub. **8**, Springer Verlag, 1987.

[Sha2] P. Shalen, *Dendrology and its applications*, in "Group theory from a geometrical viewpoint " (E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky eds.), pp 543-616, World Scientific, 1991.

Laboratoire de Mathématiques UMR 8628 CNRS
Equipe de Topologie et Dynamique (Bât. 425)
Université Paris-Sud
91405 ORSAY Cedex, FRANCE.
e-mail: Frederic.Paulin@math.u-psud.fr

Nouvelle adresse:
Département de Mathématiques et Applications UMR 8553 CNRS
École Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS Cedex 05, FRANCE.
e-mail: Frederic.Paulin@ens.fr