

Minima successifs des réseaux et pentes des fibrés vectoriels sur les corps de fonctions globaux

Jean-Benoît Bost

Frédéric Paulin

28 octobre 2025

Résumé

Soient $\mathbf{C}$ une courbe projective lisse connexe sur un corps fini, et A l'algèbre affine de ses fonctions régulières hors d'une place fixée de $\mathbf{C}$. Nous donnons des relations précises entre les minima successifs de Mahler des A -réseaux normés et les pentes de Harder-Narasimhan des fibrés vectoriels sur $\mathbf{C}$ via leur équivalence de catégorie.¹

1 Introduction

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbf{C}$ une courbe projective lisse géométriquement connexe de genre g sur un corps fini k_0 , K son corps des fonctions, v une place de K de degré f , $\widehat{K}$ le complété de K en v , et A l'algèbre affine de $\mathbf{C} \setminus \{v\}$.

Un A -réseau normé est un couple $\overline{M} = (M, \|\cdot\|)$ d'un A -module M projectif de type fini et d'une norme ultramétrique $\|\cdot\|$ sur $M_{\widehat{K}} = M \otimes_A \widehat{K}$ (normalisée pour être d'ensemble des valeurs exactement $\{0\} \cup |k_0|^{\mathbb{Z}}$ si $M_{\widehat{K}} \neq \{0\}$). Comme un analogue projectif de l'équivalence de catégorie de Serre [Ser1, §48] entre la catégorie des modules projectifs de type fini sur l'anneau de coordonnées d'une variété algébrique affine V et la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur V , de nombreux travaux (de Serre, Grothendieck, Atiyah, Harder, Narasimhan, Seshadri, etc) ont établi une équivalence de catégorie $\overline{M} \mapsto E^{\overline{M}}$ (préservant le rang) entre la catégorie des A -réseaux normés et la catégorie des fibrés vectoriels (algébriques) sur $\mathbf{C}$.

Notons $\lambda_1(\overline{M}) \leq \lambda_2(\overline{M}) \leq \dots \leq \lambda_n(\overline{M})$ les minima successifs au sens de Minkovski et Mahler d'un A -réseau normé $\overline{M}$ de rang n . Nous renvoyons à la partie 2 pour la définition de ces minima successifs, voir [Mah] lorsque $g = 0$ et $f = 1$, ainsi que [Thu, RW, PR]. Notons $\mu_1(E) \geq \mu_2(E) \geq \dots \geq \mu_n(E)$ les pentes de Harder-Narasimhan d'un fibré vectoriel E sur $\mathbf{C}$ de rang n . Nous renvoyons à la partie 4 pour la définition de ces pentes, due à [HN], ainsi que par exemple à [Stu, Gra, Bos1, Gau, And, Far, Che1, Che2, Cor, Bos2, CM, Gri, Li].

1. **Keywords :** global function fields, successive minima, geometry of numbers, slopes, algebraic vector bundles. **AMS codes :** 14H05, 11H50, 14H60, 13C10, 11H99

Le but de cette note est de revisiter le dictionnaire entre A -réseaux normés et fibrés vectoriels (voir la partie 3), et d'expliciter les relations précises entre les minima successifs d'un A -réseau normé $\overline{M}$ et les pentes de Harder-Narashiman de son fibré vectoriel associé $E^{\overline{M}}$. Dans le cadre des corps de nombres, ces relations ont déjà de nombreuses applications en approximation diophantienne, voir par exemple [FalW, BdS, deS]. Pour tous les entiers $p, q \in \mathbb{Z}$, nous noterons $\llbracket p, q \rrbracket = [p, q] \cap \mathbb{Z}$ l'intervalle des entiers entre p et q .

Théorème 1. *Il existe des constantes explicites $c_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n}, c'_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n} \geq 0$ telles que pour tout A -réseau normé $\overline{M}$ de rang n , il existe des sous- A -modules normés $\overline{M}_1, \dots, \overline{M}_n$ de rang 1 de $\overline{M}$ tels que nous ayons $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,*

$$\left| \lambda_i(\overline{M}) - \lambda_1(\overline{M}_i) \right| \leq c_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n}, \quad (1)$$

$$\lambda_i(\overline{M}) \in \left[\left\lceil -\frac{1}{\mathfrak{f}} \mu_i(E^{\overline{M}}) \right\rceil - c'_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n}, \left\lfloor -\frac{1}{\mathfrak{f}} \mu_i(E^{\overline{M}}) \right\rfloor + c'_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n} \right]. \quad (2)$$

Nous renvoyons aux théorèmes 2 et 12 pour des versions précisant les constantes $c_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n}$ et $c'_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n}$. Celles-ci s'annulent lorsque $\mathfrak{g} = 0$ et $\mathfrak{f} = 1$, et les inégalités (1) et (2) deviennent alors des égalités : $\lambda_i(\overline{M}) = \lambda_1(\overline{M}_i)$ et $\lambda_i(\overline{M}) = -\mu_i(E^{\overline{M}})$. Lorsque $\mathbf{C}$ est la droite projective sur k_0 , tout fibré vectoriel sur $\mathbf{C}$ est somme directe de fibrés en droites (voir par exemple [Gro]). C'est en quantifiant de manière précise, dans le théorème 9, le défaut de véracité de cette affirmation sur des courbes générales, puis en utilisant le dictionnaire dans l'autre sens, que nous pourrions démontrer ce théorème à la fin de cette note.

En prenant dans chaque $\overline{M}_i$ un élément b_i non nul de norme minimale, le théorème 1 permet (voir la fin de la partie 2) de construire une A -base $(b_1, \dots, b_n)$ d'un sous-module libre de $\overline{M}$ d'indice contrôlé et réalisant à constante contrôlée près les minima successifs de Minkovski-Mahler de M . Ce résultat généralise la construction d'une A -base de Mahler de $\overline{M}$ lorsque $\mathfrak{g} = 0$ et $\mathfrak{f} = 1$, voir [Mah] et [Len, §1] pour une version algorithmique. Dans l'analogie entre corps de fonctions et corps de nombres, le théorème 1 est une version effective du pendant pour les corps de fonctions de la théorie de la réduction des réseaux euclidiens (dont la construction de bases réduites de Minkovski ou de Korkin-Zolotarev, voir par exemple [LaLS]). Dans l'interprétation par les normes ultramétriques des quotients d'immeubles de Bruhat-Tits sur les K -groupes réductifs (voir [Har] pour l'aspect des pentes), ce résultat s'insère donc dans l'analogie avec la théorie de la réduction des quotients arithmétiques associés aux $\mathbb{Q}$ -groupes réductifs (voir [Stu, Gra] pour l'aspect des pentes). Dans ce dernier cadre, les constructions qui sous-tendent les opérations de troncature mises en oeuvre dans la formule des traces d'Arthur-Selberg (voir [Art, §6]) apparaissent comme une généralisation du formalisme des pentes des réseaux euclidiens, comme remarqué dans [Bos2, §5.1].

Nous comprenons que cette note pourrait être généralisée au cas des complétions S -adiques pour S un ensemble fini de places de K (avec applications en géométrie des nombres S -adiques comme développé dans [KIST]) ou de manière plus générale aux courbes adéliques (comme développé dans [CM]). Mais nous avons choisi de rester dans le cadre d'une seule place afin de clarifier l'exposition en vue d'applications dans [BKLP]

en géométrie des nombres paramétrique sur des corps de fonctions globaux généraux, généralisant ceux de Roy-Waldschmidt [RW] lorsque $g = 0$ et $f = 1$ (voir aussi [PR]).

Remerciements : Nous remercions Emanuele Macri pour la démonstration du lemme 3.

2 Les minima successifs de Minkovski des réseaux

Notations sur les corps globaux de fonctions. Nous renvoyons par exemple à [Ros, Gos] pour ces rappels. Soient k_0 un corps fini et q_0 son ordre. Soient C une courbe projective lisse géométriquement connexe sur k_0 , et g son genre. Soit $K = k_0(C)$ le corps des fonctions de C . Nous fixons un point fermé P_∞ de C , appelé le *point à l'infini* de C . Notons v la valuation (discrète normalisée) associée à P_∞ , $f = \deg(P_\infty) = [k_0(P_\infty) : k_0]$ le degré de P_∞ , $\mathfrak{O}$ l'anneau local en P_∞ dans K , π une uniformisante dans $\mathfrak{O}$ de sorte que $v(\pi) = 1$, $k = \mathfrak{O}/\pi\mathfrak{O}$ le corps résiduel de $\mathfrak{O}$, $q = q_0^f$ l'ordre de k , $|\cdot| = q^{-v(\cdot)}$ la valeur absolue normalisée associée à P_∞ , $\hat{K}$ le complété de K pour $|\cdot|$, $\hat{\mathfrak{O}}$ celui de $\mathfrak{O}$, et A l'algèbre affine de la courbe affine $C^\circ = C \setminus \{P_\infty\}$. Rappelons que A est un anneau de Dedekind.

Rappels d'algèbre linéaire normée ultramétrique. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soit V un espace vectoriel de dimension n sur le corps valué $\hat{K}$. Soit $\|\cdot\|$ une norme (ultramétrique) sur V , dont nous noterons $B_{\|\cdot\|}(x, r)$ les boules fermées de centre x et de rayon r . Nous dirons que $\|\cdot\|$ est *entière* si l'ensemble de ses valeurs est $\{0\} \cup q^{\mathbb{Z}}$. Le groupe linéaire $GL(V)$ agit (à gauche) sur l'ensemble $\text{Norm}_{\mathbb{Z}}(V)$ des normes entières de V , par précomposition par l'inverse $(g, \|\cdot\|) \mapsto g\|\cdot\| : x \mapsto \|g^{-1}x\|$. Si $n \geq 2$, dans le modèle des classes d'homothéties des normes sur $\hat{K}^n$ de l'immeuble affine $\mathcal{I}(\text{PGL}_n, \hat{K})$ de Bruhat-Tits de PGL_n sur $\hat{K}$ (voir par exemple [GI, Par]), l'ensemble $\text{Norm}_{\mathbb{Z}}(V)$ (la condition d'être entière pour une norme en fait un représentant canonique de sa classe d'homothétie) est exactement l'ensemble des sommets de $\mathcal{I}(\text{PGL}_n, \hat{K})$.

En suivant [Wei, §II.1], nous dirons qu'une $\hat{K}$ -base $(e_1, \dots, e_n)$ de V est *orthonormée* pour $\|\cdot\|$ si pour tous les $x_1, \dots, x_n \in \hat{K}$, nous avons $\|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Il découle par exemple de [GI, Prop. 1.1] qu'une norme sur V admet une $\hat{K}$ -base orthonormée si et seulement si elle est entière. Notons encore $\|\cdot\|$ la norme duale de $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel dual V^* de V définie par $\|\ell\| = \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, nous noterons encore $\|\cdot\|$ la norme sur la j ème puissance extérieure $\bigwedge^j V$ de V définie, pour tout $w \in \bigwedge^j V$, par

$$\|w\| = \sup_{\ell_1, \dots, \ell_j \in V^* \setminus \{0\}} \frac{|(\ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_j)(w)|}{\|\ell_1\| \dots \|\ell_j\|}.$$

Si la norme $\|\cdot\|$ de V est entière, alors pour toute $\hat{K}$ -base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $(V, \|\cdot\|)$, la $\hat{K}$ -base $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_j})_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n}$ de $\bigwedge^j V$ est orthonormée pour la norme $\|\cdot\|$ de $\bigwedge^j V$.

Rappelons qu'un $\hat{\mathfrak{O}}$ -réseau L de V est un $\hat{\mathfrak{O}}$ -sous-module de type fini (donc libre car $\hat{\mathfrak{O}}$ est principal) engendrant V sur $\hat{K}$ (ou, de manière équivalente, étant compact-ouvert). Le

groupe linéaire $GL(V)$ agit transitivement sur l'ensemble $\text{Res}_{\hat{\mathfrak{S}}}(V)$ des $\hat{\mathfrak{S}}$ -réseaux de V . Si $V = \hat{K}^n$, le stabilisateur dans $GL(V) = GL_n(\hat{K})$ du $\hat{\mathfrak{S}}$ -réseau produit $\hat{\mathfrak{S}}^n$ est $GL_n(\hat{\mathfrak{S}})$. Nous notons $L_{\|\cdot\|}$ la boule unité fermée $\overline{B}_{\|\cdot\|}(0, 1)$ de $\|\cdot\|$, qui est un $\hat{\mathfrak{S}}$ -réseau de V . Nous notons alors $m_{\|\cdot\|}$ la mesure de Haar du groupe additif localement compact V normalisée par $m_{\|\cdot\|}(L_{\|\cdot\|}) = 1$. L'application $\|\cdot\| \mapsto L_{\|\cdot\|}$ est une bijection $GL(V)$ -équivariante de $\text{Norm}_{\mathbb{Z}}(V)$ dans $\text{Res}_{\hat{\mathfrak{S}}}(V)$ d'inverse l'application

$$L \mapsto (x \mapsto \|x\|_L = \inf\{|\lambda| : \lambda \in \hat{K}, x \in \lambda L\})$$

qui à un $\hat{\mathfrak{S}}$ -réseau L de V associe sa jauge de Minkovski $\|\cdot\|_L$ (voir par exemple [CM, §1.1.7], [BosC, Prop. 1.5.2]).

Rappelons qu'un A -réseau Λ de V est un A -sous-module de V discret de type fini (donc projectif car sans torsion) qui engendre V sur $\hat{K}$. Nous avons une identification canonique $\Lambda \otimes_A K = V$. L'espace topologique quotient V/Λ est compact. Nous le munissons de la mesure induite par $m_{\|\cdot\|}$ (telle que la projection canonique $V \rightarrow V/\Lambda$ préserve localement la mesure), encore notée $m_{\|\cdot\|}$. Nous appellerons *covolume* de Λ pour la norme $\|\cdot\|$ la masse totale $\text{Covol}_{\|\cdot\|}(\Lambda) = m_{\|\cdot\|}(V/\Lambda)$ de V/Λ . Le A -réseau A^n de $\hat{K}^n$, muni de la norme rendant orthonormée la $\hat{K}$ -base canonique de $\hat{K}^n$, est de covolume égal à

$$\text{Covol}(A^n) = q_0^{n(\mathfrak{g}-1)} \quad (3)$$

(voir par exemple [BPP, Lem. 14.4]). Nous appellerons *covolume normalisé* d'un A -réseau Λ de V pour la norme $\|\cdot\|$ la quantité

$$\overline{\text{Covol}}_{\|\cdot\|}(\Lambda) = \frac{\text{Covol}_{\|\cdot\|}(\Lambda)}{\text{Covol}(A^n)}.$$

Nous dirons que Λ est *unimodulaire* pour la norme $\|\cdot\|$ si $\overline{\text{Covol}}_{\|\cdot\|}(\Lambda) = 1$. Notons que pour tout $g \in GL(V)$, nous avons

$$\text{Covol}_{\|\cdot\|}(g\Lambda) = |\det g| \text{Covol}_{\|\cdot\|}(\Lambda).$$

En particulier, si la norme $\|\cdot\|$ est entière, si Λ est libre sur A , et si $(b_1, \dots, b_n)$ est une A -base de Λ , alors

$$\overline{\text{Covol}}_{\|\cdot\|}(\Lambda) = \|b_1 \wedge \dots \wedge b_n\|. \quad (4)$$

Minimaux successif des A -réseaux normés. Soient $n \in \mathbb{N}$, V un espace vectoriel sur $\hat{K}$ de dimension n muni d'une norme $\|\cdot\|$, et Λ un A -réseau de V . Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le i -ème *minimum* de Λ pour la norme $\|\cdot\|$ est

$$\lambda_i(\Lambda, \|\cdot\|) = \min\{\rho \in \mathbb{R} : \dim_{\hat{K}}(\text{vect}_{\hat{K}}(B_{\|\cdot\|}(0, \rho) \cap \Lambda)) \geq i\}.$$

Cette définition est en fait l'image par $\log_q$ de la définition la plus fréquemment utilisée (voir par exemple [Mah]). Cette convention simplifiera les liens avec les pentes, voir aussi [Thu] qui utilise la même convention (utile en particulier pour considérer des corps de constante infinis). Le premier minimum $\lambda_1(\Lambda, \|\cdot\|)$ est aussi appelé la *systole* de $(\Lambda, \|\cdot\|)$.

Le minimum ci-dessus existe par la compacité des boules de V et par la discrétude des A -réseaux. Nous avons $\lambda_i(\Lambda, \|\cdot\|) \in \mathbb{Z}$ si $\|\cdot\|$ est entière. Nous avons clairement

$$\lambda_1(\Lambda, \|\cdot\|) \leq \dots \leq \lambda_n(\Lambda, \|\cdot\|).$$

Pour tous les $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $g \in \text{GL}(V)$, nous avons $\lambda_i(g\Lambda, g\|\cdot\|) = \lambda_i(\Lambda, \|\cdot\|)$. Puisque $\text{GL}(V)$ agit transitivement sur $\text{Norm}_{\mathbb{Z}}(V)$ ainsi que sur $\text{Res}_{\widehat{\mathbb{S}}}(V)$, cette propriété d'invariance permet d'ou bien fixer le A -réseau Λ et de varier la norme entière $\|\cdot\|$, ou bien le contraire.

Si $\|\cdot\|'$ est une autre norme sur V , et si $c, c' \in \mathbb{R}$ vérifient $q^c \|x\| \leq \|x\|' \leq q^{c'} \|x\|$ pour tout $x \in V$, alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, nous avons

$$\lambda_i(\Lambda, \|\cdot\|) + c \leq \lambda_i(\Lambda, \|\cdot\|') \leq \lambda_i(\Lambda, \|\cdot\|) + c'. \quad (5)$$

Les inégalités suivantes, qui découlent de [KIST, Theo. 4.4] et de la formule (3), voir aussi [Mah, page 489] lorsque $\mathfrak{g} = 0$ et $\mathfrak{f} = 1$, [KLP, Theo. 2.1] ainsi que [PR, Theo 4.1] et ses références, sont une version pour les corps de fonctions du théorème de Minkowski sur les corps convexes des espaces euclidiens : si $\|\cdot\|$ est entière (voir [BKLP] pour l'ajustement des constantes dans le cas des normes quelconques), alors

$$\log_q \overline{\text{Covol}}_{\|\cdot\|}(\Lambda) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i(\Lambda, \|\cdot\|) \leq \log_q \text{Covol}_{\|\cdot\|}(\Lambda) + n. \quad (6)$$

Une des motivations principales de cette note, qui sera utilisée dans [BKLP], est le résultat suivant, qui donne l'existence dans tout A -réseau d'un sous- A -réseau libre muni d'une A -base bien adaptée aux minima successifs. Il est dû à Mahler [Mah, page 489] lorsque $\mathfrak{g} = 0$ et $\mathfrak{f} = 1$. Nous le démontrerons à la fin de cette note.

Théorème 2. *Si la norme $\|\cdot\|$ de V est entière, pour tout A -réseau Λ de V , il existe une décomposition en somme directe de A -modules $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \dots \oplus \Lambda_n$, où $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ sont des sous- A -modules de rang 1 de Λ tels que nous ayons $\lambda_1(\Lambda_1, \|\cdot\|_{|\widehat{K}\Lambda_1}) \leq \dots \leq \lambda_1(\Lambda_n, \|\cdot\|_{|\widehat{K}\Lambda_n})$ et, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,*

$$\left| \lambda_i(\Lambda, \|\cdot\|) - \lambda_1(\Lambda_i, \|\cdot\|_{|\widehat{K}\Lambda_i}) \right| \leq c_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n} = \left\lfloor \frac{n(n-1)}{2\mathfrak{f}} (4\mathfrak{g} + 3\mathfrak{f} - 3) \right\rfloor.$$

En notant $b_1 \in \Lambda_1, \dots, b_n \in \Lambda_n$ des éléments tels que $\|b_i\| = \lambda_1(\Lambda_i, \|\cdot\|_{|\widehat{K}\Lambda_i})$, alors $\Lambda_0 = Ab_1 + \dots + Ab_n$ est un sous- A -réseau libre de Λ (de A -base $(b_1, \dots, b_n)$), dont l'indice $[\Lambda : \Lambda_0] = \frac{\text{Covol}_{\|\cdot\|}(\Lambda_0)}{\text{Covol}_{\|\cdot\|}(\Lambda)}$ est uniformément borné (par une constante ne dépendant que de $\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n$) par la formule (6). Nous renvoyons à [BKLP] pour d'autres précisions sur ce théorème et pour des applications en géométrie des nombres paramétrique sur des corps de fonctions généraux, la A -base $(b_1, \dots, b_n)$ de Λ_0 ci-dessus remplaçant la A -base de Mahler de Λ utilisée dans [RW] lorsque $\mathfrak{g} = 0$ et $\mathfrak{f} = 1$.

3 Les liens entre réseaux normés et fibrés vectoriels

Nous renvoyons par exemple à [Ser1] et [Ser2, §II.2.1] pour cette partie. Soit $n \in \mathbb{N}$.

A-réseaux normés. Nous appelons *A-réseau normé* de rang n tout couple $\overline{M} = (M, \|\cdot\|)$ constitué d'un A -module M projectif de rang n et d'une norme entière $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel $M_{\hat{K}} = M \otimes_A \hat{K}$ de dimension n sur le corps valué localement compact $\hat{K}$. Remarquons que M est un A -réseau de $M_{\hat{K}}$ au sens de la partie 2. Nous noterons $\overline{\text{Covol}}(\overline{M})$ le covolume normalisé du A -réseau M de $M_{\hat{K}}$ pour la norme $\|\cdot\|$ sur $M_{\hat{K}}$. Si $\overline{M}' = (M', \|\cdot\|')$ est un A -réseau normé de rang n , un *morphisme* de A -réseaux normés $\phi : \overline{M} \rightarrow \overline{M}'$ est un morphisme de A -modules $\phi : M \rightarrow M'$ dont l'extension $\hat{K}$ -linéaire $\phi_{\hat{K}} : M_{\hat{K}} \rightarrow M'_{\hat{K}}$ est de norme d'opérateur $\|\phi_{\hat{K}}\| = \sup_{x \in \hat{M} \setminus \{0\}} \frac{\|\phi_{\hat{K}}(x)\|'}{\|x\|}$ au plus 1. Cette norme d'opérateur sur le $\hat{K}$ -espace vectoriel des applications linéaires de $M_{\hat{K}}$ dans $M'_{\hat{K}}$ est aussi ultramétrique. Nous noterons $\text{Hom}(\overline{M}, \overline{M}')$ le k_0 -espace vectoriel des morphismes de A -réseaux normés de $\overline{M}$ dans $\overline{M}'$.

Fibrés vectoriels sur $\mathbf{C}$. Notons $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ le faisceau structural de la courbe projective $\mathbf{C}$ sur k_0 . Un *fibré vectoriel* (algébrique) E sur $\mathbf{C}$ est un faisceau cohérent localement libre de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ -modules sur $\mathbf{C}$. Un *sous-fibré vectoriel* de E est un sous-faisceau cohérent de E ; c'est un fibré vectoriel sur $\mathbf{C}$. Le *saturé* F^{sat} d'un sous-fibré vectoriel F de E est le noyau du morphisme de faisceaux quotient composé $E \rightarrow (E/F)/M$ où M est le sous- $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ -module de torsion du faisceau quotient E/F . Un sous-fibré vectoriel F de E est *saturé* s'il est égal à son saturé, c'est-à-dire si E/F est un $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ -module sans torsion, et alors E/F est un fibré vectoriel sur $\mathbf{C}$. L'intersection de deux sous-fibrés vectoriels saturés de E est saturée, mais la somme ne l'est pas forcément. La fibre E_K de E au point générique de $\mathbf{C}$ est un K -espace vectoriel de dimension finie. Si F est un sous-fibré vectoriel de E , alors F_K est un sous-espace vectoriel de E_K , et $F_K = (F^{\text{sat}})_K$. L'application $F \mapsto F_K$ est une bijection de l'ensemble des sous-fibrés vectoriels saturés de E dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E_K .

Soient E et F deux fibrés vectoriels sur $\mathbf{C}$. Un morphisme de fibrés vectoriels de E dans F est un morphisme de faisceaux de E dans F (son faisceau image n'est pas forcément saturé). Nous définissons les opérations suivantes sur les fibrés vectoriels, correspondantes par $E \mapsto E_K$ aux opérations éponymes sur les K -espaces vectoriels de dimension finie : le dual $E^\vee$, la k -ème puissance tensorielle $E^{\otimes k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (et $E^{\otimes -k} = (E^\vee)^{\otimes k}$), la k -ème puissance extérieure $\Lambda^k E$ de E , la somme directe $E \oplus F$, le produit tensoriel $E \otimes F$ et le fibré des morphismes $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{C}}}(E, F)$. Le *rang* du fibré vectoriel E est

$$\text{rk } E = \dim_K E_K.$$

Nous avons $\text{rk}(E \oplus F) = \text{rk } E + \text{rk } F$, $\text{rk}(E \otimes F) = (\text{rk } E)(\text{rk } F)$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\text{rk } E^{\otimes k} = (\text{rk } E)^{|k|}$. Un *fibré en droites* sur $\mathbf{C}$ est un fibré vectoriel sur $\mathbf{C}$ de rang 1. Si n est le rang de E , nous notons $\det E = \bigwedge^n E$ le fibré en droites *déterminant* de E . Si $D = \sum_{i \in I} n_i P_i$ est le diviseur de n'importe quelle section rationnelle non nulle de $\det E$,

alors le *degré* de E est le degré de D , donc

$$\deg E = \deg(\det E) = \deg D = \sum_{i \in I} n_i [k_0(P_i) : k_0].$$

Si F est un sous-fibré vectoriel de E , alors $\operatorname{rk} F = \operatorname{rk} F^{\text{sat}}$,

$$\deg F \leq \deg F^{\text{sat}} \quad (7)$$

avec égalité si et seulement si $F = F^{\text{sat}}$, et si F est saturé, nous avons

$$\deg E = \deg F + \deg(E/F).$$

Lorsque E et F sont des fibrés en droites sur $\mathbf{C}$, nous avons $\deg(E \otimes F) = \deg E + \deg F$ et $\deg E^\vee = -\deg E$; pour tout $k \in \mathbb{Z}$, nous avons alors

$$\deg E^{\otimes k} = k \deg E.$$

Si m est le degré de F , nous avons $\Lambda^{nm}(E \otimes F) = (\Lambda^n E)^{\otimes m} \otimes (\Lambda^m F)^{\otimes n}$, donc

$$\deg(E \otimes F) = (\operatorname{rk} F) \deg(E) + (\operatorname{rk} E) \deg(F). \quad (8)$$

Nous utiliserons plusieurs fois le lemme classique suivant. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des points fermés de $\mathbf{C}$. Soit $\mathcal{T}$ un module de type fini de torsion sur un anneau de valuation discrète $\mathcal{A}$ d'idéal maximal $\mathcal{M}$. Par le théorème des diviseurs élémentaires, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\mathcal{T}$ soit isomorphe à $\prod_{i=1}^n \mathcal{A} / \mathcal{M}^{a_i}$. Par définition, la *longueur* $\operatorname{lg}(\mathcal{T})$ de $\mathcal{T}$ est $\operatorname{lg}(\mathcal{T}) = \sum_{i=1}^n a_i$.

Lemme 3. *Soit E' un sous-fibré vectoriel d'un fibré vectoriel E sur $\mathbf{C}$. Si E et E' ont le même rang, alors*

$$\deg E - \deg E' = \sum_{P \in \mathcal{P}} [k_0(P) : k_0] \operatorname{lg}(E_P / E'_P).$$

Démonstration. Rappelons que pour tout $P \in \mathcal{P}$, la fibre $\mathcal{O}_{\mathbf{C},P}$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ en P est un anneau de valuation discrète, dont nous noterons $\mathcal{M}_{\mathbf{C},P}$ l'idéal maximal, et que les fibres E_P de E et E'_P de E' en P sont des $\mathcal{O}_{\mathbf{C},P}$ -modules sans torsion (libre). Notons T le faisceau cohérent quotient E/E' , qui est de support de dimension 0 car $\operatorname{rk} E = \operatorname{rk} E'$. Pour tout $P \in \mathcal{P}$, notons $T_P = E_P / E'_P$ la localisation de T en P , de sorte que $T = \bigoplus_{P \in \mathcal{P}} T_P$. Pour tout faisceau cohérent F sur $\mathbf{C}$, notons $\chi(\mathbf{C}, F) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i \dim_{k_0} H^i(\mathbf{C}, F)$ la caractéristique d'Euler de F . Si F est un fibré vectoriel, alors $\deg F = \chi(\mathbf{C}, F) - (\operatorname{rk} F) \chi(\mathbf{C}, \mathcal{O}_{\mathbf{C}})$, voir par exemple [HuL, §1.2]. Puisque E et E' ont le même rang, par l'additivité de la caractéristique d'Euler et puisque le support de T est de dimension 0, nous avons

$$\begin{aligned} \deg E - \deg E' &= \chi(\mathbf{C}, E) - \chi(\mathbf{C}, E') = \chi(\mathbf{C}, T) = \dim_{k_0} H^0(\mathbf{C}, T) \\ &= \sum_{P \in \mathcal{P}} \dim_{k_0} T_P = \sum_{P \in \mathcal{P}} [k_0(P) : k_0] \dim_{k_0(P)} T_P. \end{aligned} \quad (9)$$

Si $n_P \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_{n_P} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont tels que T_P soit isomorphe à $\prod_{i=1}^{n_P} \mathcal{O}_{C,P} / \mathcal{M}_{C,P}^{a_i}$, alors $\dim_{k_0(P)} T_P = \sum_{i=1}^{n_P} a_i = \lg(T_P)$. Le résultat en découle. $\square$

Le dictionnaire entre A -modules projectifs normés et fibrés vectoriels sur C . Soit $\overline{M}$ un A -réseau normé de rang n . Notons $E = E^{\overline{M}}$ le fibré vectoriel de rang n sur C qui est le sous-faisceau cohérent localement libre du faisceau constant $M_K = M \otimes_A K$ sur C , dont la fibre E_{P_∞} au point à l'infini P_∞ est le $\mathfrak{D}$ -réseau de M_K égal à l'intersection avec M_K du $\widehat{\mathfrak{D}}$ -réseau $L_{\|\cdot\|} = B_{\|\cdot\|}(0, 1)$ de $M_{\widehat{K}}$, et dont l'espace des sections affines est $\Gamma(C^\circ, E) = M$. Nous avons alors

$$\Gamma(C, E^{\overline{M}}) = \{s \in M : \|s\| \leq 1\} = M \cap L_{\|\cdot\|}. \quad (10)$$

Réciproquement, pour tout fibré vectoriel E' de rang n sur C , notons $\overline{M}^{E'} = (M^{E'}, \|\cdot\|^{E'})$ le A -réseau normé de rang n où $M^{E'}$ est le A -module projectif $\Gamma(C^\circ, E')$ et la norme $\|\cdot\|^{E'}$ est déterminée par le fait que son $\widehat{\mathfrak{D}}$ -réseau associé $L_{\|\cdot\|^{E'}}$ soit le $\widehat{\mathfrak{D}}$ -réseau de $(M^{E'})_{\widehat{K}}$ complétion (voir par exemple [BosC, §1.5.2]) du $\mathfrak{D}$ -réseau $(E')_{P_\infty}$.

Soient F' un fibré vectoriel de rang n sur C et $\varphi : E' \rightarrow F'$ un morphisme de fibrés vectoriels entre E' et F' . Notons $\phi = \phi(\varphi) : M^{E'} = \Gamma(C^\circ, E') \rightarrow M^{F'} = \Gamma(C^\circ, F')$ le morphisme de A -modules $s \mapsto \varphi \circ s$ de post-composition par φ des sections. Il vérifie que l'application $\phi_{\widehat{K}} : (M^{E'})_{\widehat{K}} \rightarrow (M^{F'})_{\widehat{K}}$ envoie la boule unité pour $\|\cdot\|^{E'}$ dans la boule unité pour $\|\cdot\|^{F'}$, donc est de norme d'opérateur $\|\phi_{\widehat{K}}\|$ au plus 1.

Comme expliqué par exemple dans [Ser2, §II.2.1], le foncteur $E' \mapsto \overline{M}^{E'}$ et $\varphi \mapsto \phi(\varphi)$ est une équivalence de catégories d'inverse $\overline{M} \mapsto E^{\overline{M}}$, qui vérifie les propriétés suivantes pour tous les A -réseaux normés $\overline{M} = (M, \|\cdot\|)$ et $\overline{M}' = (M', \|\cdot\|')$ de rang n .

- (1) L'application de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(E^{\overline{M}}, E^{\overline{M}'})$ dans $\text{Hom}(\overline{M}, \overline{M}')$ définie par $\varphi \mapsto \phi(\varphi)$ est un isomorphisme de k_0 -espaces vectoriels de dimension finie, et les fibrés vectoriels $E^{\overline{M}}$ et $E^{\overline{M}'}$ sur C sont isomorphes si et seulement si $\overline{M}$ et $\overline{M}'$ sont isomorphes.
- (2) Pour tout $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(E^{\overline{M}}, E^{\overline{M}'})$, son image $\varphi(E^{\overline{M}})$ est un sous-fibré vectoriel saturé de $E^{\overline{M}'}$ si et seulement si
 - d'une part l'image du morphisme $\phi(\varphi) : M \rightarrow M'$ est saturée dans M' (c'est-à-dire telle que $M' / \phi(\varphi)(M)$ est un A -module sans torsion, ou de manière équivalente puisque A est un anneau de Dedekind, tel que $\phi(\varphi)(M)$ soit un facteur direct de M'), et
 - d'autre part la norme image de $\|\cdot\|$ par $\phi_{\widehat{K}}$, définie par $x' \mapsto \min_{x \in \phi_{\widehat{K}}^{-1}(x')} \|x\|$ pour tout $x' \in \phi_{\widehat{K}}(M_{\widehat{K}})$, coïncide avec la restriction à $\phi_{\widehat{K}}(M_{\widehat{K}})$ de la norme $\|\cdot\|'$.
- (3) (Voir par exemple le lemme 5 de [Ser2, §II.2.1] et l'exemple le suivant, en remarquant que le faisceau des idéaux au point $P = P_\infty$ (noté I_P dans loc. cit.) est $\mathcal{O}_C(-P_\infty)$.) Notons $\mathcal{O}_C(P_\infty)$ le fibré en droites sur C associé au diviseur P_∞ . Les conditions suivantes sont équivalentes :
 - le A -module projectif M est libre ;
 - la restriction de $E^{\overline{M}}$ à C° est triviale ;
 - la restriction de $\det(E^{\overline{M}})$ à C° est triviale ;

- il existe $z \in \mathbb{Z}$ tel que le fibré vectoriel $\det(\overline{E^M})$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(P_{\infty})^{\otimes z}$ (et alors nous avons $\deg(\overline{E^M}) = z \mathfrak{f}$).
- (4) (Voir par exemple l’affirmation ii) avant la proposition 4 de [Ser2, §II.2.1].) Pour tout $z \in \mathbb{Z}$, les fibrés $E^{(M, \|\cdot\|)} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(P_{\infty})^{\otimes z}$ et $E^{(M, q^{-z}\|\cdot\|)}$ sont isomorphes.
- (5) Notons $\overline{M} \oplus \overline{M'}$ le A -module somme directe $M \oplus M'$ de M et M' (donc projectif) muni de la norme du maximum $\|(x, x')\| = \max\{\|x\|, \|x'\|\}$ sur le $\hat{K}$ -espace vectoriel $(M \oplus M')_{\hat{K}} = M_{\hat{K}} \oplus M'_{\hat{K}}$. Alors

$$E^{\overline{M} \oplus \overline{M'}} = E^{\overline{M}} \oplus E^{\overline{M'}}.$$

- (6) Supposons qu’il existe une A -base $(b_1, \dots, b_n)$ de M orthogonale pour $\|\cdot\|$. Notons $\overline{M}_i = (A b_i, \|\cdot\|_{|\hat{K} b_i})$ le A -module libre $A b_i$ de rang 1 muni de la restriction de la norme $\|\cdot\|$ de $M_{\hat{K}}$ à la droite vectorielle $\hat{K} b_i$. Par les points (3) et (5), nous avons une décomposition $E^{\overline{M}} = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} E^{\overline{M}_i}$ de $E^{\overline{M}}$ en somme directe de fibrés en droites sur $\mathbf{C}$ de restrictions à $\mathbf{C}^{\circ}$ triviales.
- (7) (Voir la proposition 4 de [Ser2, §II.2.1].) Nous dirons que deux fibrés vectoriels sur $\mathbf{C}$ sont P_{∞} -stablement isomorphes s’il existe un entier $z \in \mathbb{Z}$ tel que les fibrés vectoriels $E \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(P_{\infty})^{\otimes z}$ et E' sur $\mathbf{C}$ soient isomorphes. Par les points (1), (3) et (4), l’ensemble des doubles classes $\mathrm{GL}_n(\hat{\mathfrak{D}}) \backslash \mathrm{GL}_n(\hat{K}) / \mathrm{GL}_n(A)$ s’identifie à l’ensemble des classes d’isomorphisme P_{∞} -stable de fibrés vectoriels de rang n sur $\mathbf{C}$ dont la restriction à $\mathbf{C}^{\circ}$ est triviale, par l’application qui à la double classe de $g \in \mathrm{GL}_n(\hat{K})$ associe la classe d’isomorphisme P_{∞} -stable de $E^{(g A^n, g \|\cdot\|_{\hat{\mathfrak{D}}})}$.

Lemme 4. Soit $\overline{M} = (M, \|\cdot\|)$ un A -réseau normé. Nous avons

$$\deg(E^{\overline{M}}) = -\log_{q_0} (\overline{\mathrm{Covol}}(\overline{M})).$$

Par conséquent, nous avons $\deg(E^{\overline{M}}) = 0$ si et seulement si $\overline{M}$ est unimodulaire. Le membre de droite de cette égalité est l’analogue pour les corps de fonctions du degré d’Arakelov $-\ln \mathrm{Covol}(\overline{R})$ d’un réseau euclidien $\overline{R}$, voir [Bos2, §1.3.2].

Démonstration. Soit $(b_1, \dots, b_n)$ une K -base de $M_K = M \otimes_A K$ constituée d’éléments de M . Notons $M' = \sum_{i=1}^n A b_i$, qui est un A -module libre de A -base $(b_1, \dots, b_n)$. Remarquons que $(M')_K = M_K$, donc $(M')_{\hat{K}} = M_{\hat{K}}$ et $\|\cdot\|$ est aussi une norme entière sur $(M')_{\hat{K}}$. Notons $\overline{M'} = (M', \|\cdot\|)$ le A -sous-module normé de $\overline{M}$ dont le A -module sous-jacent est M' . Notons pour simplifier $E' = E^{\overline{M'}}$ le sous-fibré vectoriel de $E = E^{\overline{M}}$ associé à $\overline{M'}$. Soit $(s_1, \dots, s_n)$ une $\mathcal{O}_{\mathbf{C}, P_{\infty}}$ -base de la fibre $E'_{P_{\infty}}$ (qui est un $\mathcal{O}_{\mathbf{C}, P_{\infty}}$ -module libre). Cette base est orthonormée pour $\|\cdot\|$ par la construction de la norme dans l’équivalence de catégorie $E' \mapsto \overline{M'}^{E'}$. Notons B la matrice de passage de $(s_1, \dots, s_n)$ à $(b_1, \dots, b_n)$. Nous avons en particulier $\|b_1 \wedge \dots \wedge b_n\| = |\det B|$. Puisque nous avons $M' = \Gamma(\mathbf{C}^{\circ}, E')$, l’élément $b_1 \wedge \dots \wedge b_n = (\det B) s_1 \wedge \dots \wedge s_n$ est une section rationnelle du fibré vectoriel $\det(E')$ qui le trivialise sur $\mathbf{C}^{\circ}$ par le point (3) du dictionnaire. Son diviseur D est donc de support réduit à P_{∞} et de plus $D = v(\det B) P_{\infty}$. Donc

$$\deg(E') = v(\det B) [k_0(P_{\infty}) : k_0] = -\log_q(|\det B|) \mathfrak{f} = -\log_{q_0} \|b_1 \wedge \dots \wedge b_n\|.$$

Puisque les normes de $(M')_{\widehat{K}}$ et $M_{\widehat{K}}$ coïncident, par la construction dans le dictionnaire des fibres en P_{∞} de $E' = E^{\overline{M'}}$ et $E = E^{\overline{M}}$, nous avons $(E')_{P_{\infty}} = E_{P_{\infty}}$. Puisque E et E' ont le même rang n , par le lemme 3 (et plus précisément par la formule (9)), et puisque les idéaux premiers de l'anneau de Dedekind A sont les points fermés de $\mathbf{C}$ différents de P_{∞} , nous avons

$$\begin{aligned} \deg E - \deg(E') &= \sum_{P \in \mathcal{P}} \dim_{k_0}(E_P/E'_P) = \sum_{P \in \mathcal{P} \setminus \{P_{\infty}\}} \dim_{k_0}(E_P/E'_P) \\ &= \sum_{P \in \mathcal{P} \setminus \{P_{\infty}\}} \dim_{k_0}(M_P/M'_P) = \dim_{k_0}(M/M') = \log_{q_0} \text{Card}(M/M'). \end{aligned}$$

Par la formule (4), nous avons par conséquent

$$\begin{aligned} \deg E &= \deg(E') + (\deg E - \deg(E')) \\ &= -\log_{q_0} \|b_1 \wedge \cdots \wedge b_n\| + \log_{q_0} \text{Card}(M/M') \\ &= -\log_{q_0} \overline{\text{Covol}}(\overline{M'}) + \log_{q_0} \text{Card}(M/M'). \end{aligned}$$

Par l'additivité des volumes, nous avons $\frac{\overline{\text{Covol}}(\overline{M'})}{\overline{\text{Covol}}(\overline{M})} = [M : M']$. Le lemme 4 en découle. $\square$

4 Les pentes de Harder-Narashiman des fibrés vectoriels

Le contenu de cette partie est essentiellement extrait de [HN], auquel nous renvoyons pour les démonstrations. Voir aussi [Gra], qui prend la convention des signes opposés des pentes, justifiée par le lemme 4. Voir enfin [Bos2, Appendice A] pour un cadre formel général de construction des filtrations canoniques de Harder-Narashiman, ainsi que [And, Che2].

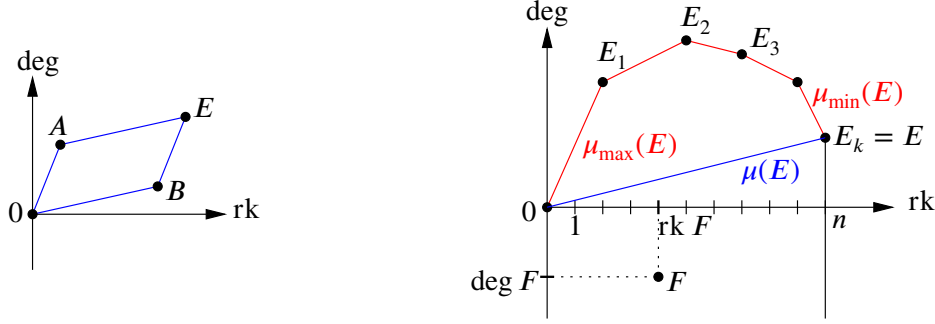
Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbf{C}$ de rang $\text{rk } E = n$. Nous appellerons *affiche* de E le couple $(\text{rk } E, \deg E) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, et si $\text{rk } E \neq 0$, nous appellerons *pente* de E la pente de la droite vectorielle passant par l'affixe de E , c'est-à-dire le rapport

$$\mu(E) = \frac{\deg E}{\text{rk } E}.$$

Si E' est un fibré vectoriel sur $\mathbf{C}$, par la formule (8), nous avons

$$\mu(E \otimes E') = \mu(E) + \mu(E'). \quad (11)$$

Si $0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow 0$ est une suite exacte de fibrés vectoriels sur $\mathbf{C}$, par l'additivité des degrés $\deg E = \deg A + \deg B$ et des rangs $\text{rk } E = \text{rk } A + \text{rk } B$, l'origine 0 de $\mathbb{R}^2$ et les affixes de A, E, B sont les sommets d'un parallélogramme, voir le dessin de gauche ci-dessous.



Supposons que $\text{rk } E \neq 0$. Le *polygone de Harder-Narasimhan* de E (voir le dessin de droite ci-dessus) est l'enveloppe convexe fermée $P(E)$ dans $\mathbb{R}^2$ des affixes de tous les sous-fibrés vectoriels F de E . Par la formule (7), prendre tous les sous-fibrés vectoriels ou seulement les sous-fibrés vectoriels saturés ne change pas le polygone de Harder-Narasimhan. Il est contenu dans la bande verticale $[0, n] \times \mathbb{R}$ et contient l'ensemble $P^-(E) = \{(x, y) \in [0, n] \times \mathbb{R} : y \leq \mu(E)x\}$ des points de cette bande en dessous du segment entre l'origine 0 et l'abscisse de E . Les ordonnées des points de $P(E)$ sont majorées (par exemple car pour tout sous-fibré vectoriel F de E de rang $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par l'inégalité de Riemann, nous avons $\deg F \leq i(\mathfrak{g} - 1) + h^0(\mathbf{C}, F) \leq n(\mathfrak{g} - 1) + h^0(\mathbf{C}, E)$). L'ensemble des points de $P(E)$ d'ordonnée maximale est une courbe polygonale entre l'origine 0 et l'abscisse de E , graphe d'une fonction concave $f_E : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$. Notons que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la valeur $f_E(i)$ est supérieure ou égale (et peut être strictement supérieure) à la borne supérieure des degrés des sous-fibrés vectoriels de rang i de E . Les pentes successives

$$\mu_i(E) = f_E(i) - f_E(i-1) \quad (12)$$

pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont décroissantes par la convexité de $P(E)$:

$$\mu_{\max}(E) = \mu_1(E) \geq \mu_2(E) \geq \dots \geq \mu_n(E) = \mu_{\min}(E).$$

Notons une différence importante entre les minima successifs λ_i et les pentes μ_i : les premiers sont croissants, les seconds décroissants, ce qui justifiera les signes les reliant. De plus, alors que le premier minimum (la systole) λ_1 est atteinte par un sous- A -module normé de rang 1 (même libre), la première pente μ_1 n'est pas forcément atteinte par un sous-fibré en droites.

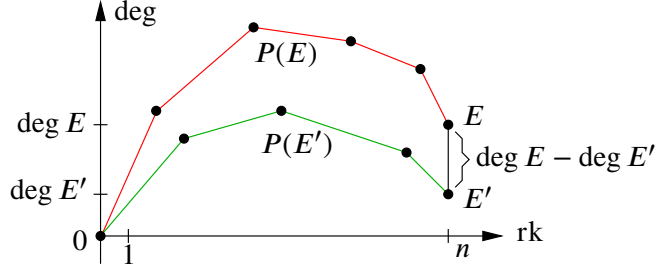
Les *pentés de Harder-Narasimhan* de E sont les valeurs distinctes des pentes successives $\mu_i(E)$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Les sommets de $P(E)$ sont les affixes d'une unique filtration (appelée la *filtration de Harder-Narasimhan* de E) de sous-fibrés vectoriels saturés

$$0 = E_0^{HN} \subset E_1^{HN} \subset E_2^{HN} \subset \dots \subset E_{k-1}^{HN} \subset E_k^{HN} = E$$

où $k \leq n$, et le fibré vectoriel E est dit *semi-stable* si $k = 1$, c'est-à-dire si $P(E)$ est réduit à $P^-(E)$. Nous renvoyons par exemple à [HuL, §1.3] pour des compléments.

Par exemple, si $E = \bigoplus_{i=1}^n L_i$ est une somme directe de fibrés en droites sur $\mathbf{C}$ de degrés ordonnés de sorte que $\deg(L_1) \geq \deg(L_2) \geq \dots \geq \deg(L_n)$, alors

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mu_i(E) = \deg(L_i). \quad (13)$$



Si E' est un sous-fibré vectoriel de E de même rang n , alors nous avons $P(E') \subset P(E)$. En effet, tout sous-fibré vectoriel F' de E' de rang i est un sous-faisceau cohérent de E , dont le saturé dans E est un sous-fibré vectoriel F de E de même rang i tel que $\deg(F') \leq \deg F$. Donc en passant à l'enveloppe convexe, nous avons $f_{E'} \leq f_E$. En particulier, puisque $f_E(i) = \sum_{j=1}^i \mu_j(E)$ par la formule (12), nous avons $\mu_1(E') \leq \mu_1(E)$,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^i \mu_j(E') \leq \sum_{j=1}^i \mu_j(E),$$

et

$$\sum_{j=1}^n \mu_j(E') = f_{E'}(n) = f_E(n) - (\deg E - \deg(E')) = \sum_{j=1}^n \mu_j(E) - (\deg E - \deg(E')).$$

Lemme 5. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout fibré en droites L sur $\mathbf{C}$, nous avons

$$\mu_i(E \otimes L) = \mu_i(E) + \deg L. \quad (14)$$

Démonstration. Pour tout fibré vectoriel E' de rang n sur $\mathbf{C}$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons $\deg \max_i(E')$ le degré maximum d'un sous-fibré vectoriel de rang i de E' . Pour tout sous-fibré vectoriel F de E de rang i de degré maximal (donc saturé), le fibré vectoriel $F \otimes L$ est un sous-fibré vectoriel de rang i de $E \otimes L$, et $\deg(F \otimes L) = \deg F + i \deg L$. Donc nous avons $\deg \max_i(E \otimes L) \geq \deg \max_i(E) + i \deg L$. Par la linéarité de l'application $t \mapsto t \deg L$ et par passage à l'enveloppe convexe, nous avons donc $f_{E \otimes L}(i) \geq f_E(i) + i \deg L$. En remplaçant dans cette inégalité (E, L) par $(E \otimes L, L^\vee)$ où $L^\vee$ est le dual de L , et puisque $\deg(L^\vee) = -\deg L$, nous avons $f_{E \otimes L}(i) = f_E(i) + i \deg L$. Le résultat découle donc de la formule (12) par différence. $\square$

5 Pentas et minima

Relation entre pente maximale et systole. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\overline{M} = (M, \|\cdot\|)$ un A -réseau normé de rang n dont la norme est entière, et $E = E^{\overline{M}}$ son fibré vectoriel sur $\mathbf{C}$ associé.

Lemme 6. Nous avons $\lambda_1(\overline{M}) \in \left[\left\lceil \frac{-\mu_{\max}(E)}{\mathfrak{f}} \right\rceil, \left\lfloor \frac{\mathfrak{g} - \mu_{\max}(E) - 1}{\mathfrak{f}} \right\rfloor + 1 \right]$.

En particulier, si $\mathfrak{g} = 0$ et $\mathfrak{f} = 1$, alors $\lambda_1(\overline{M}) = -\mu_{\max}(E^{\overline{M}})$.

Démonstration. Montrons d'abord la borne supérieure. Soit F un sous-fibré vectoriel non nul (forcément saturé) de E tel que $\mu_{\max}(E) = \mu(F)$. Par le dictionnaire, il existe un sous- A -module normé $\overline{N} = (N, \|\cdot\|_{|N_{\hat{K}}})$ de $\overline{M}$ tel que le sous-fibré vectoriel F soit isomorphe à $E^{\overline{N}}$. Posons $z = \left\lfloor \frac{\mathfrak{g} - \mu_{\max}(E) - 1}{\mathfrak{f}} \right\rfloor + 1$ et $F' = F \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(P_{\infty})^{\otimes z}$. Par la formule (11), puisque $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(P_{\infty})^{\otimes z}$ est un fibré en droites sur $\mathbf{C}$ de degré $\mathfrak{f}z$ et puisque $\lfloor t \rfloor + 1 > t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\mu(F') = \mu(F) + \mathfrak{f}z > \mu(F) + \mathfrak{g} - \mu_{\max}(E) - 1 = \mathfrak{g} - 1.$$

Par l'inégalité de Riemann, nous avons donc

$$h^0(\mathbf{C}, F') \geq \deg(F') + \text{rk}(F')(1 - \mathfrak{g}) = \text{rk}(F')(\mu(F') + 1 - \mathfrak{g}) > 0.$$

Par le point (4) du dictionnaire et la formule (10), nous avons donc

$$\Gamma(\mathbf{C}, F') = \{s \in N : q^{-z}\|s\| \leq 1\} \neq \{0\},$$

donc $\lambda_1(\overline{M}) \leq \lambda_1(\overline{N}) \leq z$.

Montrons maintenant la borne inférieure. Soit $v \in M$ un plus court vecteur non nul de $\overline{M}$, de sorte que $\|v\| = q^{\lambda_1(\overline{M})}$. Notons $\overline{N} = (N = Av, \|\cdot\|_{|N_{\hat{K}}})$, qui est un sous- A -réseau normé de $\overline{M}$ de rang 1 dont la norme est entière, et $F = E^{\overline{N}}$ le sous-fibré vectoriel de E de rang 1 associé. Alors par le lemme 4 et la formule (4) appliquée à $\Lambda = Av$ et $n = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \mu_{\max}(E) &\geq \mu(F) = \deg F = -\log_{q_0}(\overline{\text{Covol}}(\overline{N})) = -\log_{q_0}\|v\| \\ &= -\mathfrak{f} \log_q \|v\| = -\mathfrak{f} \lambda_1(\overline{M}). \end{aligned}$$

Donc $\lambda_1(\overline{M}) \geq -\frac{\mu_{\max}(E)}{\mathfrak{f}}$, ce qui montre le résultat, sachant que $\lambda_1(\overline{M}) \in \mathbb{Z}$ puisque la norme $\|\cdot\|$ est entière. $\square$

Quasi-décalage des pentes. Soient E un fibré vectoriel sur $\mathbf{C}$ de rang n , et L un sous-fibré en droites de E de degré maximal, donc saturé.

Lemme 7. Pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, nous avons

$$|\mu_{i-1}(E/L) - \mu_i(E)| \leq 2\mathfrak{g} + 2\mathfrak{f} - 2.$$

Pour $i = 2$, la démonstration (voir les formules (18) et (19) pour $i = 2$) montre que nous avons la légère amélioration

$$|\mu_1(E/L) - \mu_2(E)| \leq \mathfrak{g} + \mathfrak{f} - 1. \quad (15)$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que nous avons

$$\mu_{\max}(E) - \mathfrak{g} - \mathfrak{f} + 1 \leq \deg L = \mu(L) \leq \mu_{\max}(E). \quad (16)$$

Notons $\overline{M}^E = (M, \|\cdot\|)$ le A -réseau normé associé à E . Soit b un élément de M tel que $\|b\| = q^{\lambda_1(\overline{M}^E)}$. Soit $\overline{M}' = (A b, \|\cdot\|_{|\hat{K} b})$ le sous- A -réseau normé de $\overline{M}^E$ engendré par b , et $E^{\overline{M}'}$ le sous-fibré en droites de E associé. Par la formule (4) appliquée à $\Lambda = A b$ et $n = 1$, nous avons $\overline{\text{Covol}}(\overline{M}') = \|b\|$. Par les lemmes 6 et 4, nous avons alors

$$\begin{aligned} \mu_{\max}(E) - g - f + 1 &= -f \left(\frac{g - \mu_{\max}(E) - 1}{f} + 1 \right) \leq -f \left(\left\lfloor \frac{g - \mu_{\max}(E) - 1}{f} \right\rfloor + 1 \right) \\ &\leq -f \lambda_1(\overline{M}^E) = -f \log_q \|b\| = -\log_{q_0} \|b\| \\ &= -\log_{q_0} \overline{\text{Covol}}(\overline{M}') = \deg(E^{\overline{M}'}). \end{aligned}$$

Ceci démontre donc la formule (16) par la maximalité du degré de L .

Maintenant, soit $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Notons $p : E \rightarrow E/L$ la projection canonique. Pour tout sous-fibré vectoriel F de E/L de rang $i - 1$, l'image réciproque $p^{-1}(F)$ est un sous-fibré vectoriel de E de rang i et L est saturé dans $p^{-1}(F)$. Par l'additivité des degrés dans la suite exacte de fibrés vectoriels $0 \rightarrow L \rightarrow p^{-1}(F) \rightarrow F \rightarrow 0$, nous avons $\deg F = \deg(p^{-1}(F)) - \deg L$. En passant à l'enveloppe convexe et en rappelant que f_E désigne la fonction concave dont le graphe est le bord supérieur du polygone de Harder-Narasimhan de E , nous avons donc

$$f_{E/L}(i - 1) \leq f_E(i) - \deg L.$$

Puisque $f_E(i) = \sum_{j=1}^i \mu_j(E)$ par la formule (12), et puisque

$$\deg L \geq \mu_1(E) - g - f + 1 \quad (17)$$

par la formule (16), nous avons donc

$$\sum_{j=2}^i \mu_{j-1}(E/L) \leq \sum_{j=2}^i \mu_j(E) + g + f - 1. \quad (18)$$

Réciproquement, soient F un sous-fibré vectoriel de E de rang i , et F' le sous-fibré vectoriel de E/L saturé du sous-faisceau $p(F)$. Si F contient L , alors L est saturé dans F , nous avons $p(F) = F/L$, le fibré vectoriel F' est de rang $i - 1$ et

$$\begin{aligned} \deg F &= \deg L + \deg(F/L) \leq \deg L + \deg(F') \\ &\leq \mu_1(E) + f_{E/L}(i - 1) = \mu_1(E) + \sum_{j=2}^i \mu_{j-1}(E/L). \end{aligned}$$

Si F ne contient pas L , alors F' est de rang i . Par la formule (18) avec $i = 2$ et par la décroissance des pentes de Harder-Narashiman, nous avons

$$\begin{aligned} \deg F &\leq \deg(F') \leq f_{E/L}(i) = \mu_1(E/L) + \sum_{j=2}^i \mu_j(E/L) \\ &\leq (\mu_2(E) + g + f - 1) + \sum_{j=2}^i \mu_j(E/L) \leq \mu_1(E) + g + f - 1 + \sum_{j=2}^i \mu_{j-1}(E/L). \end{aligned}$$

Par passage à l'enveloppe convexe, nous avons donc

$$f_E(i) \leq \max\{\mu_1(E) + f_{E/L}(i-1), f_{E/L}(i)\} \leq \mu_1(E) + \mathfrak{g} + \mathfrak{f} - 1 + \sum_{j=2}^i \mu_{j-1}(E/L).$$

En enlevant $\mu_1(E)$ des deux côtés de cette inégalité, nous avons

$$\sum_{j=2}^i \mu_j(E) \leq \sum_{j=2}^i \mu_{j-1}(E/L) + \mathfrak{g} + \mathfrak{f} - 1. \quad (19)$$

Avec la convention usuelle des sommes vides, les formules (19) et (18) donnent

$$\begin{aligned} \mu_i(E) &= \sum_{j=2}^i \mu_j(E) - \sum_{j=2}^{i-1} \mu_j(E) \\ &\leq \left(\sum_{j=2}^i \mu_{j-1}(E/L) + \mathfrak{g} + \mathfrak{f} - 1 \right) - \left(\sum_{j=2}^{i-1} \mu_{j-1}(E/L) - \mathfrak{g} - \mathfrak{f} + 1 \right) \\ &= \mu_{i-1}(E/L) + 2\mathfrak{g} + 2\mathfrak{f} - 2, \end{aligned}$$

et de même $\mu_{i-1}(E/L) \leq \mu_i(E) + 2\mathfrak{g} + 2\mathfrak{f} - 2$. Le résultat en découle. $\square$

Rappels sur les modules de type fini sur les anneaux de valuation discrète. Soient $\mathcal{A}$ un anneau de valuation discrète, v sa valuation, $\mathcal{M}$ son idéal maximal, ϖ une uniformisante de sorte que $\mathcal{M} = \varpi\mathcal{A}$, $|\cdot| = q^{-v(\cdot)}$ sa valeur absolue normalisée par $|\varpi| = q^{-1}$, $\mathcal{K}$ le corps des fractions de $\mathcal{A}$, et T, T', T'' trois $\mathcal{A}$ -modules de type fini.

Supposons que les $\mathcal{A}$ -modules T et T' soient sans torsion. Ils sont donc libres. Nous munissons le $\mathcal{K}$ -espace vectoriel $T_{\mathcal{K}} = T \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K}$ (respectivement $T'_{\mathcal{K}} = T' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{K}$) de la norme du maximum dans n'importe quelle $\mathcal{A}$ -base de T (respectivement T'), et le $\mathcal{K}$ -espace vectoriel $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(T_{\mathcal{K}}, T'_{\mathcal{K}})$ de la norme d'opérateur $\|\cdot\|$ correspondante.

Supposons que le $\mathcal{A}$ -module T'' soit de torsion, donc isomorphe à $\prod_{i=1}^n \mathcal{A}/\mathcal{M}^{a_i}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (uniques si ordonnés décroissants). Rappelons que la longueur de T'' est $\text{lg}(T'') = \sum_{i=1}^n a_i$ et par définition, l'ordre d'annulation $\text{ann}(T'')$ de T'' est la borne inférieure des entiers $a \in \mathbb{N}$ tels que $\varpi^a T'' = \{0\}$, de sorte que $\text{ann}(T'') = \max_{1 \leq i \leq n} a_i$. Notons qu'alors

$$\text{lg}(T'') \geq \text{ann}(T'').$$

Lemme 8. Soit $\psi : T \rightarrow T'$ un morphisme de $\mathcal{A}$ -modules de type fini. Supposons T et T' sans torsion. L'extension $\mathcal{K}$ -linéaire $\psi_{\mathcal{K}} : T_{\mathcal{K}} \rightarrow T'_{\mathcal{K}}$ de ψ est un isomorphisme de $\mathcal{K}$ -espaces vectoriels si et seulement si ψ est injectif et si le $\mathcal{A}$ -module $T'/\text{im}(\psi)$ est de torsion, et alors nous avons $\|(\psi_{\mathcal{K}})^{-1}\| = q^{\text{ann}(T'/\text{im}(\psi))} \leq q^{\text{lg}(T'/\text{im}(\psi))}$.

Démonstration. L'équivalence étant immédiate, montrons la dernière affirmation. Le morphisme d'extension $\psi \mapsto \psi_{\mathcal{K}}$ de $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, T')$ dans $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(T_{\mathcal{K}}, T'_{\mathcal{K}})$ est injectif. Son image est égale à $\{\psi' \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}(T_{\mathcal{K}}, T'_{\mathcal{K}}) : \|\psi'\| \leq 1\}$ car les boules unités des normes de $T_{\mathcal{K}}$ et $T'_{\mathcal{K}}$ sont exactement T et T' .

Notons $\mu : T' \rightarrow T'$ le morphisme de $\mathcal{A}$ -modules de multiplication par $\varpi^{\text{ann}(T'/\text{im}(\psi))}$. Son image est contenue dans l'image $\text{im}(\psi)$ de ψ , par la définition de l'ordre d'annulation. Donc il peut être postcomposé par le morphisme inverse de l'isomorphisme de $\mathcal{A}$ -modules $\psi : T \rightarrow \psi(T)$. Puisque la composition $\psi^{-1} \circ \mu$ est un morphisme de $\mathcal{A}$ -modules, son extension $\mathcal{K}$ -linéaire, qui est $\varpi^{\text{ann}(T'/\text{im}(\psi))}(\psi_{\mathcal{K}})^{-1}$, est de norme d'opérateur au plus 1 par ce qui précède. Ceci montre que nous avons $\|(\psi_{\mathcal{K}})^{-1}\| \leq q^{\text{ann}(T'/\text{im}(\psi))}$, et l'inégalité réciproque (dont nous n'aurons pas besoin) est laissée au lecteur. $\square$

Quasi-scindage de fibrés vectoriels sur $\mathbf{C}$. Lorsque $\mathbf{C}$ est la droite projective, il est bien connu (voir par exemple [Gro] dont la démonstration est en fait indépendante du corps de base, ainsi que [HuL, Theo. 1.3.1]) que tout fibré vectoriel sur $\mathbf{C}$ est somme directe de fibrés en droites. Le résultat suivant donne une estimation optimale du défaut d'un tel scindage.

Théorème 9. *Pour tout fibré vectoriel E sur $\mathbf{C}$ de rang n , il existe des sous-fibrés vectoriels $L_1, \dots, L_n$ de E de rang 1 tels que le morphisme de faisceau somme $\Sigma : L_1 \oplus \dots \oplus L_n \rightarrow E$ soit un isomorphisme sur $\mathbf{C}^\circ$ et que le $\mathcal{O}_{\mathbf{C}, P_\infty}$ -module de type fini de torsion $E_{P_\infty}/\text{im}(\Sigma)_{P_\infty}$ vérifie*

$$\mathfrak{f} \lg(E_{P_\infty}/\text{im}(\Sigma)_{P_\infty}) = \deg E - \sum_{i=1}^n \deg(L_i) \leq \frac{n(n-1)}{2} (4\mathfrak{g} + 3\mathfrak{f} - 3). \quad (20)$$

Lorsque $\mathfrak{g} = 0$ et $\mathfrak{f} = 1$, nous retrouvons le fait que E est somme directe de sous-fibrés en droites, voir [HuL, Theo. 1.3.1]).

Démonstration. L'égalité à droite dans la formule (20), qui utilise le fait que Σ soit un isomorphisme sur $\mathbf{C}^\circ$, découle du lemme 3. La démonstration de l'inégalité à gauche dans la formule (20) procède par récurrence sur n . Le résultat si $n = 1$ est immédiat, avec $L_1 = E$, $\Sigma = \text{id}$ et donc $E = \text{im}(\Sigma)$. L'outil clef est le lemme suivant.

Lemme 10. *Soient S, E, Q des fibrés vectoriels sur $\mathbf{C}$ et $\mathcal{E}$ une suite exacte de faisceaux $0 \rightarrow S \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} Q \rightarrow 0$. Si*

$$k = \max \left\{ 0, \left\lfloor \frac{1}{\mathfrak{f}} (2\mathfrak{g} - 2 - \deg S + \mu_{\max}(Q)) \right\rfloor + 1 \right\}$$

et si S est de rang 1, alors il existe un scindage $s^\circ : Q|_{\mathbf{C}^\circ} \rightarrow E|_{\mathbf{C}^\circ}$ de $\mathcal{E}$ au-dessus de $\mathbf{C}^\circ$ de pôle d'ordre au plus k en P_∞ , c'est-à-dire telle que la post-composition par l'inclusion $E \rightarrow E \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(P_\infty)^{\otimes k}$ de l'extension sur $\mathbf{C}$ de s° soit régulière.

Démonstration. La suite exacte $0 \rightarrow S|_{\mathbf{C}^\circ} \xrightarrow{i} Q|_{\mathbf{C}^\circ} \xrightarrow{p} E|_{\mathbf{C}^\circ} \rightarrow 0$ scinde car la variété $\mathbf{C}^\circ$ est affine.

Notons $j : Q(-kP_\infty) = Q \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(P_\infty)^{\otimes -k} \rightarrow Q$ l'inclusion dans Q de son sous-faisceau saturé de ses éléments ayant un pôle d'ordre au plus k en P_∞ . Notons E_k l'extension de $Q(-kP_\infty)$ par S tirée en arrière de $\mathcal{E}$ par j , et $\mathcal{E}_k$ la suite exacte de faisceaux associée, de sorte que nous avons un diagramme commutatif de lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & S & \longrightarrow & E & \xrightarrow{p} & Q & \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow_j & \\ 0 & \rightarrow & S & \longrightarrow & E_k & \xrightarrow{p_k} & Q(-kP_\infty) & \rightarrow 0. \end{array}$$

La conclusion du lemme est vérifiée si et seulement s'il existe un morphisme de faisceaux $s'_k : Q(-kP_\infty) \rightarrow E$ tel que $p \circ s'_k = j$, donc si et seulement s'il existe un morphisme de faisceaux $s_k : Q(-kP_\infty) \rightarrow E_k$ tel que $p_k \circ s_k = \text{id}_{Q(-kP_\infty)}$, donc si et seulement si la classe de $\mathcal{E}_k$ dans $\text{Ext}_{\mathcal{O}_C}^1(Q(-kP_\infty), S) \simeq H^1(C, Q^\vee \otimes S \otimes \mathcal{O}_C(P_\infty)^{\otimes k})$ est nulle.

Puisque le degré du fibré en droites canonique Ω_C^1 est $\deg(\Omega_C^1) = 2g - 2$, puisque $\deg(\mathcal{O}_C(P_\infty)^{\otimes -k}) = -k\mathfrak{f}$, par la formule (14) car S est de rang 1, par la définition de k , et puisque $\lfloor t \rfloor + 1 > t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\mu_{\max}(Q \otimes S^\vee \otimes \mathcal{O}_C(P_\infty)^{\otimes -k} \otimes \Omega_C^1) = \mu_{\max}(Q) - \deg S - k\mathfrak{f} + 2g - 2 < 0.$$

Puisque sa première pente est strictement négative et que les pentes sont décroissantes, tous les degrés des sous-fibrés vectoriels non triviaux de $Q \otimes S^\vee \otimes \mathcal{O}_C(P_\infty)^{\otimes -k} \otimes \Omega_C^1$ sont strictement négatifs, donc ce fibré n'a pas de section régulière non nulle. Par la dualité de Serre, nous avons par conséquent

$$h^1(C, Q^\vee \otimes S \otimes \mathcal{O}_C(P_\infty)^{\otimes k}) = h^0(C, Q \otimes S^\vee \otimes \mathcal{O}_C(P_\infty)^{\otimes -k} \otimes \Omega_C^1) = 0.$$

Le résultat en découle. $\square$

Supposons maintenant que $n \geq 2$ et soit L_1 un sous-fibré en droites de E de degré maximal, donc saturé. Par récurrence, il existe des sous-fibrés en droites $L'_2, \dots, L'_n$ du fibré vectoriel E/L_1 tels que le morphisme somme $\Sigma' : L'_2 \oplus \dots \oplus L'_n \rightarrow E/L_1$ soit un isomorphisme sur C° et que

$$\mathfrak{f} \lg((E/L_1)_{P_\infty} / \text{im}(\Sigma')_{P_\infty}) = \deg(E/L_1) - \sum_{i=2}^n \deg(L'_i) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} (4g + 3\mathfrak{f} - 3).$$

Notons $k \in \mathbb{N}$ l'entier défini dans le lemme 10 appliqué à l'inclusion $\iota : S = L_1 \rightarrow E$ et à la projection canonique $p : E \rightarrow Q = E/L_1$ (de sorte que S est bien de rang 1). Par les formules (17) et (15) et par la décroissance des pentes, nous avons

$$\begin{aligned} k &= \max \left\{ 0, \left\lfloor \frac{1}{\mathfrak{f}} (2g - 2 - \deg(L_1) + \mu_{\max}(E/L_1)) \right\rfloor + 1 \right\} \\ &\leq \max \left\{ 0, \frac{1}{\mathfrak{f}} (2g - 2 - (\mu_1(E) - g - \mathfrak{f} + 1) + (\mu_2(E) + g + \mathfrak{f} - 1)) + 1 \right\} \\ &\leq \max \left\{ 0, \frac{1}{\mathfrak{f}} (4g + 3\mathfrak{f} - 4) \right\} \leq \frac{1}{\mathfrak{f}} (4g + 3\mathfrak{f} - 3). \end{aligned}$$

Pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, soit L_i un sous-fibré en droite de E tel que $(L_i)_{C^\circ} = s^0((L'_i)_{C^\circ})$. Par le lemme 10, l'ordre d'annulation, en tant que $\mathcal{O}_{C, P_\infty}$ -module de torsion monogène, de la fibre en P_∞ du faisceau quotient $L'_i/p(L_i)$ est au plus k . Donc, par le lemme 3, nous avons

$$\begin{aligned} \deg(L'_i) - \deg(L_i) &= \mathfrak{f} \lg((L'_i)_{P_\infty} / (p(L_i))_{P_\infty}) = \mathfrak{f} \text{ann}((L'_i)_{P_\infty} / (p(L_i))_{P_\infty}) \\ &\leq \mathfrak{f} k \leq 4g + 3\mathfrak{f} - 3. \end{aligned}$$

Le morphisme somme $\Sigma : L_1 \oplus \cdots \oplus L_n \rightarrow E$ est un isomorphisme sur $\mathbf{C}^\circ$ et nous avons

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} \lg((E_{P_\infty} / \text{im}(\Sigma)_{P_\infty})) &= \deg E - \sum_{i=1}^n \deg(L_i) \\ &= \deg(E/L_1) - \sum_{i=2}^n \deg(L'_i) + \sum_{i=2}^n (\deg(L'_i) - \deg(L_i)) \\ &\leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} (4\mathfrak{g} + 3\mathfrak{f} - 3) + (n-1)(4\mathfrak{g} + 3\mathfrak{f} - 3) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} (4\mathfrak{g} + 3\mathfrak{f} - 3). \end{aligned}$$

Le résultat en découle. $\square$

Corollaire 11. *Pour tout fibré vectoriel E sur $\mathbf{C}$ de rang n , il existe des sous-fibrés vectoriels $L_1, \dots, L_n$ de E de rang 1 tels que le morphisme de faisceau somme $L_1 \oplus \cdots \oplus L_n \rightarrow E$ soit un isomorphisme sur $\mathbf{C}^\circ$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, nous ayons*

$$| \deg(L_i) - \mu_i(E) | \leq (n-1)(6\mathfrak{g} + 5\mathfrak{f} - 5).$$

Démonstration. Posons $c_n = (n-1)(6\mathfrak{g} + 5\mathfrak{f} - 5)$. Montrons le résultat par récurrence sur n . C'est immédiat si $n = 1$, en prenant $L_1 = E$. Supposons donc $n \geq 2$. Soit L_1 un sous-fibré en droites de E de degré maximal, donc saturé. Par la formule (17) et puisque $n \geq 2$, nous avons

$$| \deg(L_1) - \mu_1(E) | \leq \mathfrak{g} + \mathfrak{f} - 1 \leq c_n.$$

Par récurrence, il existe des sous-fibrés vectoriels $L'_2, \dots, L'_n$ de rang 1 du fibré vectoriel E/L_1 tels que le morphisme somme $L'_2 \oplus \cdots \oplus L'_n \rightarrow E/L_1$ soit un isomorphisme sur $\mathbf{C}^\circ$ et pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, nous ayons

$$| \deg(L'_i) - \mu_{i-1}(E/L_1) | \leq c_{n-1}.$$

Comme dans la démonstration du théorème 9, il existe des sous-fibrés vectoriels $L_2, \dots, L_n$ de E de rang 1 tels que le morphisme somme $L_1 \oplus \cdots \oplus L_n \rightarrow E$ soit un isomorphisme sur $\mathbf{C}^\circ$ et pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, nous ayons

$$| \deg(L'_i) - \deg(L_i) | \leq 4\mathfrak{g} + 3\mathfrak{f} - 3.$$

Donc pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, par le lemme 7, nous avons

$$\begin{aligned} &| \deg(L_i) - \mu_i(E) | \\ &= | (\deg(L_i) - \deg(L'_i)) + (\deg(L'_i) - \mu_{i-1}(E/L_1)) + (\mu_{i-1}(E/L_1) - \mu_i(E)) | \\ &\leq (4\mathfrak{g} + 3\mathfrak{f} - 3) + | \deg(L'_i) - \mu_{i-1}(E/L_1) | + (2\mathfrak{g} + 2\mathfrak{f} - 2) \\ &\leq c_{n-1} + (6\mathfrak{g} + 5\mathfrak{f} - 5) = c_n. \end{aligned}$$

Le résultat en découle. $\square$

Relation entre pentes et minima successifs. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\overline{M} = (M, \|\cdot\|)$ un A -réseau normé de rang n de norme entière, et $E = E^{\overline{M}}$ son fibré vectoriel sur $\mathbf{C}$ associé. Le résultat suivant compare les minima successifs $\lambda_1(\overline{M}) \leq \lambda_2(\overline{M}) \leq \cdots \leq \lambda_n(\overline{M})$ de $\overline{M}$ aux pentes de Harder-Narashiman $\mu_1(E) \geq \mu_2(E) \geq \cdots \geq \mu_n(E)$ de E .

Théorème 12. *Il existe une permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, nous ayons*

$$\lambda_i(\overline{M}) \in \left[\left\lfloor \frac{-\mu_{\sigma(i)}(\overline{E^M}) - (n-1)(6g+5f-5) - \frac{n(n-1)}{2}(4g+3f-3)}{f} \right\rfloor, \left\lceil \frac{-\mu_{\sigma(i)}(\overline{E^M}) + (n-1)(6g+5f-5) + g-1}{f} \right\rceil + 1 \right] .$$

En particulier, si $g = 0$ et $f = 1$, alors par les propriétés de croissance des λ_i et de décroissance des μ_i pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, nous pouvons prendre $\sigma = \text{id}$ de sorte que nous ayons $\lambda_i(\overline{M}) = -\mu_i(\overline{E^M})$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Nous ne savons pas si les constantes qui apparaissent ci-dessus sont optimales pour (g, f) quelconque. En utilisant le fait que les suites $(\lambda_i(\overline{M}))_{1 \leq i \leq n}$ et $(-\mu_j(\overline{E^M}))_{1 \leq j \leq n}$ sont croissantes, et en posant

$$c'_{g,f,n} = \max \left\{ \left\lfloor \frac{(n-1)(6g+5f-5) + \frac{n(n-1)}{2}(4g+3f-3)}{f} \right\rfloor, \left\lceil \frac{(n-1)(6g+5f-5) + g-1}{f} \right\rceil + 1 \right\} ,$$

la formule (2) du théorème 1 de l'introduction en découle. Remarquons que $c'_{0,1,n} = 0$.

Démonstration. Par le corollaire 11 appliqué à $E = \overline{E^M}$, soient $L_1, \dots, L_n$ des sous-fibrés vectoriels de E de rang 1 tels que le morphisme somme $\varphi : L_1 \oplus \dots \oplus L_n \rightarrow E$ soit un isomorphisme sur $\mathbf{C}^\circ$ et $|\deg(L_i) - \mu_i(E)| \leq (n-1)(6g+5f-5)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par l'équivalence de catégorie, soient $\overline{M}_1 = (M_1, \|\cdot\|_1), \dots, \overline{M}_n = (M_n, \|\cdot\|_n)$ des A -réseaux normés de rang 1 de norme entière tels que $\overline{E^M}_i = L_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Puisque φ est un isomorphisme sur $\mathbf{C}^\circ$, nous pouvons supposer que $M_1, \dots, M_n$ sont des sous- A -modules de M tels que le morphisme associé (voir le début de la partie 3) $\phi = \phi(\varphi) : M_1 \oplus \dots \oplus M_n \rightarrow M$ soit un isomorphisme de A -modules. Notons

$$\overline{M'} = (M' = M_1 \oplus \dots \oplus M_n, \|\cdot\|' : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_i)$$

le A -module normé somme directe orthogonale. Soit σ une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que

$$\lambda_1(\overline{M_{\sigma(1)}}) \leq \lambda_1(\overline{M_{\sigma(2)}}) \leq \dots \leq \lambda_1(\overline{M_{\sigma(n)}}) . \quad (21)$$

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrons que

$$\lambda_i(\overline{M'}) = \lambda_1(\overline{M_{\sigma(i)}}) . \quad (22)$$

En effet, puisque l'application $m \mapsto \lambda_1(\overline{M_{\sigma(m)}})$ est croissante sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et comme le A -module $M_1 \oplus \dots \oplus M_i$ est de rang i , nous avons $\lambda_i(\overline{M'}) \leq \lambda_1(\overline{M_{\sigma(i)}})$. Réciproquement, notons $\pi_\ell : M' \rightarrow M_{\sigma(\ell)}$ la projection canonique. La projection canonique somme

$$\bigoplus_{\ell=i}^n \pi_\ell : M' \rightarrow M_{\sigma(i)} \oplus \dots \oplus M_{\sigma(n)}$$

est surjective, de noyau de rang $i-1$. Donc si $x_1, \dots, x_i \in M'$ sont K -linéairement indépendants, alors il existe $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket i, n \rrbracket$ tels que $\pi_\ell(x_j) \neq 0$. Puisque la norme de $\overline{M'}$ est la norme du maximum et comme $m \mapsto \lambda_1(\overline{M_{\sigma(m)}})$ est croissante, nous avons donc

$$\log_q \|x_j\|' = \max_{1 \leq m \leq n} \log_q \|\pi_m(x_j)\|_{\sigma(m)} \geq \log_q \|\pi_\ell(x_j)\|_{\sigma(\ell)} \geq \lambda_1(\overline{M_{\sigma(\ell)}}) \geq \lambda_1(\overline{M_{\sigma(i)}}) .$$

En prenant la borne inférieure sur les tels i -uplets $(x_1, \dots, x_i)$, ceci montre que nous avons $\lambda_i(\overline{M'}) \geq \lambda_1(\overline{M_{\sigma(i)}})$ et la formule (22) en découle.

Maintenant, par le lemme 8 que nous appliquons au morphisme de $\mathcal{O}_{C, P_\infty}$ -modules $\psi = \varphi_{P_\infty} : (L_1)_{P_\infty} \oplus \dots \oplus (L_n)_{P_\infty} \rightarrow E_{P_\infty}$ induit par φ en P_∞ , et par le théorème 9, l'extension $\hat{K}$ -linéaire $\phi_{\hat{K}} : M'_{\hat{K}} \rightarrow M_{\hat{K}}$ de ϕ vérifie

$$\| \phi_{\hat{K}} \| \leq 1 \quad \text{et} \quad \| (\phi_{\hat{K}})^{-1} \| \leq q^{\lg(E_{P_\infty}/\text{im}(\varphi_{P_\infty}))} \leq q^{\frac{n(n-1)}{2\mathfrak{f}}(4\mathfrak{g}+3\mathfrak{f}-3)}. \quad (23)$$

Respectivement par l'inégalité de gauche dans la formule (23) et la formule (5), par la formule (22), par le lemme 6 puisque $E^{\overline{M}_i} = L_i$ et L_i est de rang 1 donc nous avons $\mu_{\max}(L_i) = \mu_1(L_i) = \deg(L_i)$, et, par le corollaire 11, nous avons

$$\begin{aligned} \lambda_i(\overline{M}) &\leq \lambda_i(\overline{M'}) = \lambda_1(\overline{M_{\sigma(i)}}) \leq \left\lfloor \frac{\mathfrak{g} - \mu_{\max}(L_{\sigma(i)}) - 1}{\mathfrak{f}} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{\mathfrak{g} - \deg(L_{\sigma(i)}) - 1}{\mathfrak{f}} \right\rfloor + 1 \\ &\leq \left\lfloor \frac{-\mu_{\sigma(i)}(E) + (n-1)(6\mathfrak{g} + 5\mathfrak{f} - 5) + \mathfrak{g} - 1}{\mathfrak{f}} \right\rfloor + 1. \end{aligned}$$

Réciproquement, en posant $c_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n} = \left\lfloor \frac{n(n-1)}{2\mathfrak{f}}(4\mathfrak{g} + 3\mathfrak{f} - 3) \right\rfloor$, par l'inégalité de droite dans la formule (23) et la formule (5), par la formule (22), par le lemme 6 puisque $E^{\overline{M}_i} = L_i$ et par le corollaire 11, nous avons

$$\begin{aligned} \lambda_i(\overline{M}) &\geq \lambda_i(\overline{M'}) - c_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n} = \lambda_1(\overline{M_{\sigma(i)}}) - c_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n} \geq \left\lfloor \frac{-\mu_{\max}(L_{\sigma(i)})}{\mathfrak{f}} \right\rfloor - c_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n} \\ &= \left\lfloor \frac{-\deg(L_{\sigma(i)})}{\mathfrak{f}} \right\rfloor - c_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n} \geq \left\lfloor \frac{-\mu_{\sigma(i)}(E) - (n-1)(6\mathfrak{g} + 5\mathfrak{f} - 5)}{\mathfrak{f}} \right\rfloor - c_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n}. \end{aligned}$$

Le théorème 12 en découle. $\square$

Démonstration du théorème 2. Soient $n, V, \| \|, \Lambda$ les termes qui apparaissent dans l'énoncé du théorème 2, de sorte que nous ayons $\Lambda \otimes_A \hat{K} = V$. Conservons les notations $\overline{M}_1 = (M_1, \| \|_1), \dots, \overline{M}_n = (M_n, \| \|_n)$ et $\overline{M'} = (M', \| \|')$, ainsi que la permutation σ , de la démonstration ci-dessus appliquée au A -réseau normé $\overline{M} = (\Lambda, \| \|)$. Posons $\Lambda_1 = M_{\sigma(1)}, \dots, \Lambda_n = M_{\sigma(n)}$. Alors $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ sont des sous- A -modules de rang 1 de Λ et nous avons $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \dots \oplus \Lambda_n$. Posons $c_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n} = \left\lfloor \frac{n(n-1)}{2\mathfrak{f}}(4\mathfrak{g} + 3\mathfrak{f} - 3) \right\rfloor$. Respectivement par la définition de $\overline{M}$, par l'inégalité de gauche dans la formule (23) et la formule (5), par la formule (22), puisque la norme de $\overline{M'}$ est la norme maximum des normes des $\overline{M}_i$, et enfin par l'inégalité de droite dans la formule (23) et la formule (5), nous avons

$$\begin{aligned} \lambda_i(\Lambda, \| \|) &= \lambda_i(\overline{M}) \leq \lambda_i(\overline{M'}) = \lambda_1(\overline{M_{\sigma(i)}}) = \lambda_1(\Lambda_i, \| \|'_{|\hat{K}\Lambda_i}) \\ &\leq \lambda_1(\Lambda_i, \| \|_{|\hat{K}\Lambda_i}) + c_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n}. \end{aligned}$$

Réciproquement, nous avons de même

$$\begin{aligned} \lambda_i(\Lambda, \| \|) &= \lambda_i(\overline{M}) \geq \lambda_i(\overline{M'}) - c_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n} = \lambda_1(\overline{M_{\sigma(i)}}) - c_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n} = \lambda_1(\Lambda_i, \| \|'_{|\hat{K}\Lambda_i}) - c_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n} \\ &\geq \lambda_1(\Lambda_i, \| \|_{|\hat{K}\Lambda_i}) - c_{\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, n}. \end{aligned}$$

Donc nous avons $|\lambda_i(\Lambda, \|\cdot\|) - \lambda_1(\Lambda_i, \|\cdot\|_{|\hat{K}\Lambda_i})| \leq c_{g,f,n}$. Par la formule (21), nous avons $\lambda_1(\Lambda_1, \|\cdot\|_{|\hat{K}\Lambda_1}) \leq \dots \leq \lambda_1(\Lambda_n, \|\cdot\|_{|\hat{K}\Lambda_n})$. Ceci termine la démonstration du théorème 2. $\square$

Références

- [And] Y. André. *Slope filtrations*. Confluentes Math. **1** (2009) 1–85.
- [Art] J. G. Arthur. *A trace formula for reductive groups. I. Terms associated to classes in $G(\mathbf{Q})$* . Duke Math. J. **45** (1978) 911–952.
- [BKLP] G. Bang, T. Kim, S. Lim and F. Paulin. *Parametric geometry of number over general function fields*. In preparation.
- [Bos1] J. B. Bost. *Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres*. Astérisque **237** (1996), Séminaire Bourbaki Vol. 1994/1995. Exp. No 795, 115–161.
- [Bos2] J. B. Bost. *Réseaux euclidiens, séries thêta et pentes [d’après W. Banaszczyk, O. Regev, D. Dadush, N. Stephens-Davidowitz, ...]*. Astérisque **422** (2020), Séminaire Bourbaki Vol. 2018/2019. Exp. No. 1151, 1–59.
- [BosC] J. B. Bost and F. Charles. *Infinite Dimensional Geometry of Numbers : Hermitian Quasi-coherent Sheaves and Theta Finiteness*. Book preprint, available on https://www.math.ens.psl.eu/~charles/inf_dim_1.
- [BdS] E. Breuillard, N. de Saxcé. *A subspace theorem for manifolds*. J. Eur. Math. Soc. **26** (2023) 4273–4313.
- [BPP] A. Broise-Alamichel, J. Parkkonen and F. Paulin. *Equidistribution and counting under equilibrium states in negative curvature and trees. Applications to non-Archimedean Diophantine approximation*. With an Appendix by J. Buzzi. Prog. Math. **329**, Birkhäuser, 2019.
- [Che1] Huayi Chen. *Convergence des polygones de Harder-Narasimhan*. Mémoires Soc. Math. France **120** (2010).
- [Che2] Huayi Chen. *Harder-Narasimhan categories*. J. Pure Appl. Algebra **214** (2010) 187–200.
- [CM] Huayi Chen and A. Moriwaki. *Arakelov geometry over adelic curves*. Lecture Notes in Math. **2258**, Springer, 2020.
- [Cor] C. Cornut. *On Harder–Narasimhan filtrations and their compatibility with tensor products*. Confluentes Math. **10** (2018) 3–49.
- [deS] N. de Saxcé. *Non-divergence in the space of lattices*. Groups Geom. Dyn. **17** (2023) 993–1003.
- [FalW] G. Faltings and G. Wüstholz. *Diophantine approximations on projective spaces*. Inventiones Mathematicae **116** (1994) 109–138.
- [Far] L. Fargues. *La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats*. J. reine angew. Math. [Crelle’s Journal] **645** (2010) 1–39.
- [Gau] É. Gaudron. *Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global*. Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **119** (2008) 21–95.
- [GI] O. Goldman and N. Iwahori. *The space of p -adic norms*. Acta Math. **109** (1963) 137–177.
- [Gos] D. Goss. *Basic structures of function field arithmetic*. Erg. Math. Grenz. **35**, Springer Verlag 1996.

- [Gra] D. Grayson. *Reduction theory using semistability*. Comm. Math. Helv **59** (1984) 600–634.
- [Gri] N. Grieve. *Vertices of the Harder and Narasimhan polygons and the laws of large numbers*. Can. Math. Bull. **66** (2023) 340–357.
- [Gro] A. Grothendieck. *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*. Amer. J. Math. **79** (1957) 121–138.
- [Har] G. Harder. *Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörpern*. Invent. Math. **7** (1969) 33–54.
- [HN] G. Harder and M. S. Narasimhan. *On the Cohomology Groups of Moduli Spaces of Vector Bundles on Curves*. Math. Ann **212** (1975) 215–248.
- [HuL] D. Huybrechts and M. Lehn. *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*. 2nd ed. Cambridge Univ. Press 2010.
- [KLP] T. Kim, S. Lim and F. Paulin. *On Hausdorff dimension in inhomogeneous Diophantine approximation over global function fields*. J. Numb. Theo. **251** (2023) 102–146.
- [KIST] D. Kleinbock, R. Shi and G. Tomanov. *S-adic version of Minkowski’s geometry of numbers and Mahler’s compactness criterion*. J. Numb. Theo. **174** (2017) 150–163.
- [LaLS] J. Lagarias, H. Lenstra, Jr. and C.-P. Schnorr. *Korkin-Zolotarev bases and successive minima of a lattice and its reciprocal lattice*. Combinatorica **10** (1990) 333–348.
- [Len] A. K. Lenstra. *Factoring multivariate polynomials over finite fields*. J. Comput. System Sci. **30** (1985) 235–248.
- [Li] Yao Li. *Categorification of Harder–Narasimhan theory via slope functions valued in totally ordered sets*. Manuscripta Math. **173** (2024) 1233–1271.
- [Mah] K. Mahler. *An analogue to Minkowski’s geometry of numbers in a field of series*. Ann. of Math. **42** (1941) 488–522.
- [Par] A. Parreau. *Immeubles affines : construction par les normes et étude des isométries*. Contemp. Math. **262**, Amer. Math. Soc. 2000, 263–302.
- [PR] A. Poëls and D. Roy. *Parametric geometry of numbers over a number field and extension of scalars*. Bull. Soc. Math. France **151** (2023) 257–303.
- [Ros] M. Rosen. *Number theory in function fields*. Grad. Texts Math. **210**, Springer Verlag, 2002.
- [RW] D. Roy and M. Waldschmidt. *Parametric geometry of numbers in function fields*. Mathematika **63** (2017) 1114–1135.
- [Ser1] J.-P. Serre. *Faisceaux Algébriques Cohérents*. Ann. of Math. **61** (1955) 197–2783.
- [Ser2] J.-P. Serre. *Arbres, amalgames, SL_2* . 3ème éd. corr., Astérisque **46**, Soc. Math. France, 1983.
- [Stu] U. Stuhler. *Eine Bemerkung zur Reduktionstheorie quadratischer Formen*. Arch. Math. **27** (1976) 604–610.
- [Thu] J. L. Thunder. *Siegel’s lemma for function fields*. Michigan Math. J. **42** (1995) 147–162.
- [Wei] A. Weil. *Basic number theory*. Classics in Math, Springer Verlag, 1995.

Laboratoire de mathématique d’Orsay, UMR 8628 CNRS
 Université Paris-Saclay, 91405 ORSAY Cedex, FRANCE
jean-benoit.bost@universite-paris-saclay.fr
frederic.paulin@universite-paris-saclay.fr