Note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences
Section: Théorie des groupes/*Group theory*

Dégénérescence de sous-groupes discrets des groupes de Lie semi-simples

Frédéric PAULIN

Topologie et Dynamique, URA 1169 CNRS, Bât. 425, Université Paris-Sud,
91405 ORSAY CEDEX, FRANCE. *e-mail : paulin@topo.math.u-psud.fr*

Résumé. Nous montrons qu'une suite de représentations fidèles et discrètes (pas nécessairement de covolume fini) d'un groupe Γ de type fini dans un groupe de Lie semi-simple, qui sort de tout compact, converge vers une action isométrique de Γ sur un immeuble affine, avec un contrôle sur les stabilisateurs de germe d'appartement.

Degeneration of discrete subgroups of semi-simple groups

Abstract. *We prove that a sequence of faithful and discrete (but not necessarily with finite covolume) representations of a finitely generated group Γ in a semi-simple Lie group, that goes to infinity, converges to an isometric action of Γ on an affine building, with controlled germ of apartment stabilizers.*

Le but de cette note est de démontrer le théorème suivant.

Théorème. *Soit Γ un groupe de type fini, sans sous-groupe d'indice fini contenant un sous-groupe distingué abélien non trivial. Soit G un groupe de Lie réel connexe, semi-simple, de centre fini, de groupe de Weyl W, et d'espace symétrique X. Soit $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de représentations fidèles et discrètes de Γ dans G. Alors*

- *ou bien $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une représentation fidèle et discrète de Γ dans G (quitte à extraire et conjuguer)*
- *ou bien (quitte à extraire) il existe une suite $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $\epsilon_i > 0$ tendant vers 0, telle que $(\epsilon_i X, \rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge pour la topologie de Gromov équivariante vers une action isométrique de Γ sur un immeuble affine Δ de type $\overline{W}$, sans point fixe global, et à stabilisateurs de germe d'appartement virtuellement résolubles.*

Notons que, par les résultats de super-rigidité de Margulis [6], ce théorème ne peut être intéressant que pour les groupes Γ qui ne sont pas des réseaux de rang supérieur, comme par exemple ceux de [7]. Dans le cas du rang réel 1, ce résultat est contenu dans [8]. La possibilité d'une telle extension était connue d'un certain nombre de personnes, dont B. Farb et B. Leeb. Ce théorème était annoncé dans [9]. Je remercie Ghani Zeghib pour ses corrections.

Donnons tout d'abord quelques définitions.

Soit Γ un groupe. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des (classes d'isométrie équivariante d') espaces métriques, de cardinal au plus celui de $\mathbb{R}$, munis d'une action isométrique de Γ. Pour X dans $\mathcal{M}$, P une partie finie de Γ, K une partie finie de X et $\epsilon > 0$, on note $V_{\epsilon,K,P}(X)$ l'ensemble des éléments X' de $\mathcal{M}$ tels qu'il existe une partie finie K' de X', munie d'une bijection $x \mapsto x'$ avec K, telle que

$$\forall x, y \in K, \quad \forall g, h \in P, \qquad |\, d_X(gx, hy) - d_{X'}(gx', hy')\,| < \epsilon.$$

On montre (voir [8]) que les $V_{\epsilon,K,P}(X)$ forment un système fondamental de voisinages sur $\mathcal{M}$, pour une topologie appelée *topologie de Gromov équivariante.*

Un immeuble obtenu par dégénérescence n'est a priori ni discret, ni un immeuble de Bruhat-Tits associé à un groupe algébrique semi-simple sur un corps valué, de valuation non discrète. Notre définition est légèrement plus forte que celle de Tits (voir par exemple [11] Appendix IV) dans son dernier axiome.

Soit $\mathbb{V}$ un espace vectoriel de dimension finie, W un groupe de réflexion fini de V. Les composantes connexes des complémentaires des hyperplans fixes par les réflexions de W sont appelées les *chambres vectorielles* de $\mathbb{V}$. Soit $\mathbb{A}$ l'espace affine assocé à $\mathbb{V}$, et $\overline{W}$ le groupe des isométries affines de $\mathbb{A}$ de parties vectorielles dans W. Les translatés dans $\mathbb{A}$ des chambres vectorielles de $\mathbb{V}$ sont appelés les *chambres de* $\mathbb{A}$. Les droites de $\mathbb{A}$ de direction non contenue dans un hyperplan fixe par une réflexion de W sont dites *régulières.*

Un *immeuble affine de type* $(\mathbb{A}, \overline{W})$ (par abus $\overline{W}$) est un espace métrique Δ, muni d'un ensemble $\mathcal{A}$ d'injections isométriques de $\mathbb{A}$ dans Δ, appelées *appartement*, vérifiant les conditions $(A_1) - (A_5)$ ci-dessous. (Si f, g sont deux appartements, l'application $f^{-1} \circ g : g^{-1}(f(\mathbb{A}) \cap g(\mathbb{A})) \to f^{-1}(f(\mathbb{A}) \cap g(\mathbb{A}))$ est appelée *changement d'appartement* ; on appelle *chambre de* Δ la restriction d'un appartement à une chambre de $\mathbb{A}$; on identifie par abus un appartement et son image.)

(A_1) Le système d'appartement est invariant par précomposition par $\overline{W}$.

(A_2) L'intersection de deux appartements est fermée et convexe dans chacun d'eux, et les changements d'appartements sont restrictions d'éléments de $\overline{W}$.

(A_3) Par deux points passe un appartement.

(A_4) Deux chambres contiennent des sous-chambres contenues dans un même appartement.

$(A_5)''$ Pour tout appartement A et tout point x de A, il existe une rétraction $\Delta \to A$ diminuant les distances et préservant la distance à x.

Démontrons maintenant le théorème. Soit S une partie génératrice finie de Γ. On pose pour tout x dans X,

$$f_i(x) = \max_{s \in S} d(\rho_i(s)x, x) \quad \text{et} \quad \lambda_i = 2 \inf_{x \in X} f_i(x).$$

Supposons tout d'abord $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bornée, disons par $K \geq 0$. Soit x_i dans X tel que $f_i(x_i) \leq K + 1$. Quitte à conjuguer ρ_i, on suppose que $x_i = x_0$, pour tout i. L'ensemble des éléments de G bougeant le point x_0 de moins de $K+1$ étant compact, $(\rho_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une représentation $\rho_\infty : \Gamma \to G$, quitte à extraire. Par le lemme 1.1 de

[3] et puisque Γ possède un sous-groupe d'indice fini sans torsion, la représentation ρ_∞ est encore fidèle et discrète.

Ceci implique que la première alternative de l'énoncé du théorème est satisfaite.

Supposons maintenant, quitte à extraire, que $\lambda_i \to +\infty$ quand $i \to \infty$. Nous pouvons remplacer X par l'espace symétrique de type non-compact obtenu en enlevant les facteurs compacts de X. Choisissons alors arbitrairement un point $*_i$ dans X tel que $f_i(*_i) \leq \lambda_i$. Posons $\epsilon_i = \frac{1}{\lambda_i}$. Soit $(X_i, d_i, *_i)$ l'espace X muni du point base $*_i$, et de la distance $d_i = \epsilon_i d$, avec d la métrique symétrique originelle de X. Soit ω un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$, plus fin que le filtre de Fréchet (voir par exemple [2]). Posons

$$X_\infty = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \ / \ \lim_\omega d_i(*_i, x_i) < \infty\}.$$

Par inégalité triangulaire, nous définissons sur X_∞ un écart

$$d_\infty(x,y) = \lim_\omega d_i(x_i, y_i).$$

Notons $(X_\omega, d_\omega, *_\omega)$ l'espace métrique quotient canonique de (X_∞, d_∞) (obtenu en identifiant deux points d'écart nul), pointé en l'image $*_\omega$ de $(*_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Rappelons qu'après normalisation, les générateurs de Γ ne bougent le point base de X_i que d'une distance uniformément bornée :

$$\sup_{s\in S} d_i(\rho_i(s)*_i, *_i) \leq 1.$$

L'action produit de Γ sur X_∞ induit donc une action isométrique de Γ sur X_ω. Il est facile de vérifier que X_ω est dans $\mathcal{M}$, et que $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers X_ω suivant le filtre ω pour la topologie de Gromov équivariante, donc qu'une suite extraite de $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers X_ω.

Si l'action de Γ sur X_ω admettait un point fixe global x, alors par définition de la topologie de Gromov équivariante avec $\epsilon = \frac{1}{4}, K = \{x\}, P = S$, il existerait x_i dans X tel que $d_i(\rho_i(s)x_i, x_i) < 1/4$ pour tout s dans S, donc $f_i(x_i) < \frac{1}{4}\lambda_i = \frac{1}{2}\inf_{x\in X} f_i(x)$, ce qui est impossible.

Il découle de [5] que X_ω est un immeuble affine de type $\overline{W}$ (en un sens légèrement différent du notre, mais la preuve est analogue avec notre définition). Ses appartements pointés sont les limites (au sens évident) des suites de plats maximaux pointés de X_i, dont le point base reste à distance (pour d_i) uniformément bornée du point base $*_i$ de X_i.

Enfin, supposons par l'absurde que le stabilisateur d'un germe d'appartement de X_ω ne soit pas virtuellement résoluble. Par un théorème de Tits ([12]), il contient alors un sous-groupe libre sur deux générateurs, disons α, β. Soit $[x,y]$ un segment de direction régulière contenu dans un germe d'appartement fixé par α, β. Soient $\eta, \epsilon > 0$, avec ϵ suffisamment petit par rapport à η, à $D = d(x,y)$, et à la distance de la direction de $[x,y]$ aux directions singulières. Soit P la partie finie de Γ, formée de tous les sous-mots des commutateurs $[\alpha,\beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ et $[\alpha,\beta^2] = \alpha\beta^2\alpha^{-1}\beta^{-2}$. Pour i assez grand, il existe un segment $[x_i, y_i]$ dans X_i, de direction régulière à distance (dans l'espace des directions de l'unique plat maximal F_i la contenant) uniformément minorée des directions non régulières, tel que

$$d(\rho_i(g)x_i, x_i) < \epsilon\lambda_i \ , \ \ d(\rho_i(g)y_i, y_i) < \epsilon\lambda_i \quad \text{et} \quad d(x_i, y_i) > \frac{1}{2}D\lambda_i$$

pour tout g dans P.

Rappelons que la courbure sectionnelle le long d'une direction régulière est strictement négative transversalement à l'unique plat maximal la contenant. Donc pour i assez grand, tout point de l'image par chaque élément g de $\rho_i(P)$ du sous-segment de $[x_i, y_i]$, de longueur $200\epsilon\lambda_i$ centré au milieu m_i de $[x_i, y_i]$, est à distance au plus η de F_i. Sinon en effet, en raisonnant par l'absurde, en rendant constant par conjugaison le point m_i, en passant à une suite extraite, par le théorème de la bande plate (voir par exemple [1]), puisque l'angle en m_i entre x_i et gx_i tend vers 0 quand ϵ tend vers 0, il y aurait, le long d'une direction régulière de X, une bande plate (ou un demi-plan plat si la distance de gm_i à F_i tend vers l'infini), non contenue dans le plat maximal contenant la direction, ce qui est impossible.

Par conséquent, sur un segment dans $[x_i, y_i]$ de longueur $10\epsilon\lambda_i$ centré en m_i, les éléments de $\rho_i(P)$ agissent presque comme des translations euclidiennes dans le plat F_i, en particulier commutent presque. Donc les commutateurs $\rho_i([\alpha, \beta])$ et $\rho_i([\alpha, \beta^2])$ bougent le point m_i d'au plus 10η. Par le lemme de Zassenhaus-Kazhdan-Margulis [10], un sous-groupe discret de G engendré par des éléments bougeant un point fixé de X de moins d'une constante universelle $\mu = \mu_X > 0$, est virtuellement nilpotent. Ceci est une contradiction, car $[\alpha, \beta]$ et $[\alpha, \beta^2]$ engendrent un groupe libre, qui conclut la preuve du théorème.

Corollaire. *Soit Γ un groupe de type fini, ayant la propriété T de Kazhdan, ne contenant pas de sous-groupe d'indice fini contenant un sous-groupe distingué nilpotent non trivial, et G un groupe de Lie réel connexe semi-simple, de centre fini, de facteurs non compacts de rang réel un. Alors l'espace des représentations fidèles et discrètes de Γ dans G, modulo conjugaison par G, est (séquentiellement) compact.*

En effet (en omettant les facteurs compacts de G), W étant un produit de copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, tout immeuble affine de type $\overline{W}$ est un produit d'arbres réels, et toute action isométrique d'un groupe de Kazhdan sur un arbre réel admet un point fixe global (voir par exemple [4]).

Cette note est le fruit de recherches effectuées à l'UMPA, UMR 128 CNRS, Ecole Normale Supérieure de Lyon, que je remercie de tout mon cœur, pour son ambiance chaleureuse et ses conditions de travail exceptionnelles.

References

[1] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder, *Manifolds of nonpositive curvature*, Progress in Math. **61**, Birkhäuser 1985.

[2] N. Bourbaki, *Topologie générale*, chap. 1 à 4, Hermann, Paris, 1971.

[3] W. Goldman, J. Millson, *Local rigidity of discrete groups acting on complex hyperbolic space"*, Inv. Math. **88** (1987) 495-520.

[4] P. de la Harpe, A. Valette, *La propriété T de Kazhdan pour les groupes localement compacts*, Astérisque **175**, Soc. Math. France (1989).

[5] B. Kleiner, B. Leeb, *Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces of higher rank*, Prépublication, Jan. 1995.

[6] G. Margulis, *Discrete subgroups of semi-simple groups*, Ergeb. Math. Grenz. **17**, Springer Verlag, 1991.

[7] G. Margulis, G. Soifer, *Maximal subgroups of infinite index in finitely generated groups*, J. Alg. **69** (1981) 1-23.

[8] F. Paulin, *Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels*, Invent. Math. **94** (1988) 53-80.

[9] F. Paulin, *De la géométrie et la dynamique des groupes discrets*, Mémoire d'habilitation, ENS Lyon (Juin 1995).

[10] M. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer Verlag, 1972.

[11] M.A. Ronan, *Lectures on buildings*, Persp. Math. **7**, Academic Press, 1989.

[12] J. Tits, *Free subgroups in linear goups*, J. Algebra **20** (1972) 250-270.