Sur les immeubles hyperboliques

Damien Gaboriau et Frédéric Paulin

Résumé: Le but de ce papier est de donner une approche géométrique à la "méthode des amalgames" de Tits pour construire des immeubles, et de commencer une théorie des immeubles hyperboliques, i.e. de type un système de réflexions de l'espace hyperbolique réel. Nous construisons de nombreux exemples et nous étudions leur cohomologie à l'infini. Nous construisons des complexes polyédraux CAT(-1) ayant de gros groupes paraboliques discrets d'isométries.

Abstract: The aim of this paper is to give a geometric approach to Tits' "amalgam method" to construct buildings, and to initiate a study of hyperbolic buildings, i.e. whose types are reflexion systems of the real hyperbolic space. We construct lots of examples, and study their cohomology at infinity. We construct CAT(-1) polyhedral complexes having big discrete parabolic groups of isometries.

Keywords: Immeubles hyperboliques, complexes de groupes, groupes de Coxeter, groupes discrets paraboliques.

AMS codes: 20 E 42, 51 E 24, 20 F 55, 51 M 20

Introduction

Soit P un polyèdre compact convexe (pas forcément un simplexe) de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n$ de dimension $n \geq 2$, dont chaque angle dièdre est de la forme $\frac{\pi}{k}$, avec k un entier au moins 2. Le groupe W engendré par les réflexions sur les faces de P est un sous-groupe discret du groupe des isométries de $\mathbb{H}^n$, agissant sur $\mathbb{H}^n$ avec domaine fondamental P, par un théorème de Poincaré [Har]. Un théorème de Vinberg [Vin] impose une sévère restriction sur la dimension : n est au plus 29. La dimension maximale connue est 9, par un exemple de Bugaenko [Bug].

Un *immeuble hyperbolique* de type P est un complexe polyédral X, muni d'une famille maximale de sous-complexes appelés *appartements*, polyédralement isométriques au pavage de $\mathbb{H}^n$ par les images de P sous W, tels que

- par deux cellules de X passe au moins un appartement,
- pour tous appartements A, A' de X, il existe une isométrie polyédrale de A sur A' fixant $A \cap A'$.

Notons I l'ensemble des faces de codimension 1 de P, et M la matrice de Coxeter $(m_{i,j})_{i,j \in I}$ avec $\frac{\pi}{m_{i,j}}$ l'angle dièdre entre les faces i et j si celles-ci se rencontrent (en une face de codimension 2), et $m_{i,j} = \infty$ sinon. Soit C un *immeuble de type M* (vu comme un système de chambres sur I, voir [Ron]). Les immeubles de type hyperbolique compact au sens de Bourbaki [Bour, Ch. V, §4, Ex. 12] sont précisément ceux pour lesquels P est un simplexe.

La "bonne" réalisation géométrique de C n'est pas la réalisation usuelle (par exemple décrite dans [Ron]), mais est le quotient

$$|C| = (C \times P)/\sim$$

pour $\sim$ la relation d'équivalence engendrée par $(c, x) \sim (c', x')$ s'il existe $i \in I$ tel que $x = x' \in i$ et c, c' sont des chambres i-adjacentes. On munit $|C|$ de sa structure naturelle de complexe polyédral, pour laquelle l'application $|C| \to P$ induite par la projection sur le second facteur $C \times P \to P$ est une application polyédrale, induisant une isométrie sur chaque cellule maximale.

Nous montrons (section 1) que les immeubles hyperboliques de type P sont précisément les réalisations géométriques des immeubles de type M; que cette réalisation géométrique coïncide avec celle de Davis-Moussong [Dav2] ; et que les immeubles hyperboliques sont CAT(-1), i.e. à courbure ≤ -1 au sens d'Alexandrov-Topogonov (voir [GH]). Les *immeubles fuschiens* de M. Bourdon [Bou1, Bou2] sont des immeubles hyperboliques de type P, avec P de dimension 2 et des hypothèses de finitude locale.

Dans [Tit2, Tit3], J. Tits développe une technique, appelée "méthode des amalgames" pour construire des immeubles. Dans [Hae, BH], A. Haefliger introduit une notion de *complexe de groupes*, plus générale que celle de [Tit3], dont une version simplifiée commune est la suivante (voir section 1.5 pour la définition générale).

Un *polytope de groupes* $\mathcal{C}$ est la donnée d'un polyèdre compact convexe (sphérique, euclidien ou hyperbolique) X, d'un groupe G_σ pour toute face σ de X, et d'un morphisme injectif de groupe $\psi_{\tau,\sigma} : G_\sigma \to G_\tau$ si la face σ est contenue dans la face τ, tel que le diagramme évident commute. Le *groupe fondamental* $\pi_1\mathcal{C}$ est la limite inductive des $G_\sigma, \psi_{\tau,\sigma}$. Pour toute face σ, il existe un (unique) complexe polyédral sphérique $\widetilde{lk}\ \sigma$, appelé *développement lk-local* en σ, muni d'une action polyédrale isométrique de G_σ, telle que le quotient (au sens évident) de $\widetilde{lk}\ \sigma$ par G_σ s'identifie au link de σ dans X, muni de la structure de polytope de groupes induite. Le complexe de groupes est *développable* s'il existe un complexe polyédral simplement connexe $\tilde{\mathcal{C}}$ (alors unique à isomorphisme équivariant près), appelé le *revêtement universel*, tel que $\pi_1\mathcal{C}$ agisse sur $\tilde{\mathcal{C}}$ avec pour quotient (au sens évident) $\mathcal{C}$.

Combinant des résultats de Haefliger et Tits, nous en déduisons le résultat suivant (connu en dimension 2 par P. Brown et M. Bourdon [Bou2]). Sa preuve repose sur une vérification de la simple connexité de certains résidus, par des techniques de M. Davis.

Théorème 0.1 *Soit $\mathcal{C}$ un complexe de groupes, dont le complexe polyédral sous-jacent est muni d'une application polyédrale sur P, qui est une isométrie en restriction à chaque cellule maximale. Supposons que les développements lk-locaux des cellules de codimension k sont des immeubles sphériques si $k \leq 3$, et sont à courbure ≤ 1 au sens d'Alexandrov-Topogonov si $k \geq 4$. Alors $\mathcal{C}$ est développable, de revêtement universel un immeuble hyperbolique de type P.*

L'intérêt principal d'une telle construction est qu'elle fournit des espaces localement compacts singuliers CAT(-1), dont le groupe des automorphismes est très gros (voir par exemple [HP]), et contient des sous-groupes discrets cocompacts.

En section 3, nous utilisons ce résultat pour donner de nombreux exemples explicites d'immeubles hyperboliques. Nous donnons en particulier une liste d'immeubles hyperboliques de dimension 2 à links algébriques admettant un groupe d'automorphisme discret transitif sur les chambres, que nous montrons complète dans le cas des corps de cardinaux premiers de caractéristiques assez grande. Le cas des immeubles hyperboliques triangulaires est connu (travaux de Timmesfeld-Meixner-Stroth [Mei]). Voir [Bou2] pour d'autres exemples de constructions topologiques. Une méthode algébrique de construction est la suivante (voir par exemple [Rem]). Une matrice de Cartan généralisée est une matrice $A = (A_{ij})_{i,j\in I}$ à cœfficients entiers, avec cœfficients diagonaux 2, et cœfficents non diagonaux négatifs, avec A_{ij} nul si et seulement si A_{ji} est nul. La matrice de Coxeter associé est $M = (m_{ij})_{i,j\in I}$ avec $m_{ii} = 1$ et si $i \neq j$, alors $m_{ij} = 2, 3, 4, 6, \infty$ si et seulement si $A_{ij}A_{ji} = 0, 1, 2, 3, k \geq 4$ respectivement. A toute matrice de Cartan généralisée A et tout corps fini k, J. Tits [Tit4] associe de manière fonctorielle un groupe de Kac-Moody $\mathcal{G}_{A,ad}(k)$, admettant une (en fait un jumelage de deux) BN-paire(s) de groupe de Weyl le groupe de Coxeter associé à M. Lorsque celui-ci est un groupe de réflexions hyperboliques, la réalisation géométrique (au sens ci-dessus) de l'immeuble associé à la BN-paire est un immeuble hyperbolique.

Le problème ouvert principal est celui d'une classification de tous les immeubles hyperboliques localement finis. C'est un problème délicat, car les polyèdres de Coxeter hyperboliques ne sont même pas classés. En dimension 2, c'est, comme dans le cas euclidien, une tache impossible, car nous montrons, en utilisant des techniques de Haglund [Hag1] (voir section 3.2) :

Théorème 0.2 *Si $q = p^f \geq 3$ avec p, f entiers et p premier, et si P est un polygone de Coxeter hyperbolique à un nombre pair de côtés, il existe un ensemble non dénombrable d'immeubles hyperboliques de type P, dont les links de sommets sont isomorphes à l'immeuble des drapeaux du plan projectif sur le corps fini à q éléments.*

Les isométries des espaces métriques X localement compacts complets CAT(-1) (et plus généralement des espaces hyperboliques au sens de Gromov) sont classées en trois familles, les isométries elliptiques, hyperboliques, paraboliques. Les groupes *paraboliques* d'isométries de X (i.e. fixant un point du bord et préservant les horosphères centrées en ce point) sont peu étudiés. Si une construction générale de Gromov [Gro] montre que tout groupe de type fini est un groupe discret parabolique d'isométries d'un espace hyperbolique au sens de Gromov, les exemples connus de groupes discrets paraboliques ont des restrictions importantes sur leur structure algébrique. B. Bowditch [Bow1] a montré qu'un groupe parabolique discret d'isométries d'une variété riemanienne à courbure strictement négative pincée est de type fini, donc est virtuellement nilpotent par des arguments de Margulis. La nécessité d'une borne supérieure < 0 découle des travaux de Abresch-Schroeder [AS]. La construction de Gromov fournit des espaces peu homogènes (le groupe de toutes les isométries a un point fixe global à l'infini).

Proposition 0.3 *Il existe une variété riemanienne M complète à courbure sectionnelle ≤ -1, de groupe fondamental Γ vérifiant:*

- *Γ est géométriquement fini au sens de Tukia-Bowditch [Tuk, Bow3] et hyperbolique relativement à l'ensemble de ses sous-groupes paraboliques maximaux, au sens de Gromov-Farb-Bowditch [Bow3];*

- Γ *possède un sous-groupe parabolique libre de rang* 2*;*
- *l'exposant critique de* Γ *est infini.*

Nos exemples sont construits à partir d'immeubles hyperboliques sur des polyèdres de Coxeter hyperboliques non compacts de volume fini. Ceux-ci sont des "ideal polyedra" au sens de [CT], qui ont étudiés leurs propriétés géométriques, mais sans fournir de grandes familles d'exemples. Notre construction devrait aussi donner des exemples intéressants pour l'étude dynamique de [DP] des groupes discrets d'isométries d'espaces CAT(-1) en présence de paraboliques.

Nous décrivons en section 4 la topologie de l'espace à l'infini d'un immeuble euclidien ou hyperbolique, comme limite projective de celle des sphères de rayon fini. Le résultat suivant est dû à A. Borel et J.-P. Serre [BS] dans le cas des immeubles euclidiens de Bruhat-Tits, et la construction géométrique plutot qu'algébrique de l'espace à l'infini rend sa preuve beaucoup plus facile. Nous notons $H^i_c(Y;\mathbb{Z})$ le i-ème groupe de cohomologie à support compact d'Alexander-Spanier d'un espace topologique Y à coefficients $\mathbb{Z}$.

Théorème 0.4 *Soit* X *un immeuble euclidien ou hyperbolique de dimension* n*. Alors* $H^i_c(Y;\mathbb{Z})$ *est nul pour* $i \neq n$ *et abélien libre pour* $i = n$*, de dimension infinie si* X *est épais.*

Nous remercions J.-P. Serre, qui est à l'origine à la section 4, M. Bestvina , P. Brown, F. Haglund, M. Bourdon, J.-Y. Hee et pour leurs discussions et commentaires, et tout spécialement A. Haefliger pour ses nombreuses lectures de versions successives, ayant grandement contribuées à clarifier et corriger ce papier.

1 Rappels et définitions

Dans tout cet article, pour tout entier n strictement positif, $\mathbb{X}^n$ désigne la sphère $\mathbb{S}^n$, l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ ou l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n$, muni de sa métrique riemannienne standard (à courbure constante respectivement $1, 0, -1$ si $n \geq 2$).

Les seuls faits nouveaux dans ce chapitre sont les énoncés 1.3, 1.5, 1.6, 1.8, 1.9, 1.10, et 1.11, avec le fait que l'on admet des cellules de volume fini non compactes dans les complexes polyèdraux.

1.1 Complexes polyédraux

Nous renvoyons par exemple à [BH] pour les justifications et développements sur les rappels ci-dessous. Nous renvoyons à [GH] pour la définition des espaces métriques CAT(χ) ou à courbure $\leq \chi$ au sens d'Alexandrov-Topogonov.

Un *complexe polyédral* X est un CW-complexe (resp. un CW-complexe privé d'un ensemble X_∞ de sommets) tel que

- chaque cellule ouverte $\mathring{\sigma}$ de dimension k (resp. n'appartenant pas à X_∞) est l'intérieur d'un polyèdre convexe compact (resp. polyèdre convexe de volume fini ou isométrique à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$) d'un $\mathbb{X}^k$,

- la restriction de l'application d'attachement à chaque face ouverte de codimension 1 de toute cellule σ (resp. n'appartenant pas à X_∞) est une isométrie sur une cellule ouverte de X,

- pour tout $x_\infty \in X_\infty$, toute cellule σ de X contenant x_∞ (dans son adhérence dans le CW-complexe) est de volume fini ou isométrique à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$, avec x_∞ un point à l'infini de σ.

Un complexe polyédral X est dit *sphérique, euclidien* ou *hyperbolique* (par morceaux) si, pour toute cellule, $\mathbb{X}^k$ vaut $\mathbb{S}^k, \mathbb{R}^k, \mathbb{H}^k$ respectivement.

Si X est un complexe polyédral, et $x \in X$, nous noterons $\mathrm{Lk}(x, X)$ (resp. $\mathrm{lk}(x, X)$) le *Link* (resp. *link* de x dans X), c'est-à-dire l'ensemble des germes de segments géodésiques issus de x dans les cellules contenant x (resp. et de plus orthogonaux en x à la cellule ouverte contenant x). Il possède une structure naturelle de complexe polyédral sphérique, dont les cellules sont formées des germes de géodésiques contenues dans une cellule donnée. À isométrie près, il est constant sur la cellule ouverte $\overset{\circ}{\sigma}$ contenant x, et on le note aussi $\mathrm{Lk}(\sigma, X)$ (resp. $\mathrm{lk}(\sigma, X)$). Si k est la dimension de σ, alors $\mathrm{Lk}(\sigma, X)$ est isométrique à la suspension sphérique itérée k fois de $\mathrm{lk}(\sigma, X)$. Notons que $\mathrm{lk}(x, X)$=$\mathrm{Lk}(x, X)$ si x est un sommet de X.

Les éléments de X_∞ sont appelés *points à l'infini* de X. Si $x_\infty \in X_\infty$, on définit aussi $\mathrm{lk}(x_\infty, X)$ comme l'ensemble des germes de rayons géodésiques issus de x_∞ dans les cellules de X ayant x_∞ comme point à l'infini.

Métrique des complexes polyédraux

Dans tout cet article, X sera muni de l'écart (ou pseudo-distance) d défini comme suit. Une application continue $f : [a, b] \to X$ est une *géodésique brisée* s'il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{p+1} = b$ telle que $f(]t_i, t_{i+1}[)$ est contenu dans une cellule ouverte $\overset{\circ}{C_i}$ de X, avec $f\mid_{]t_i,t_{i+1}[}$ une géodésique pour la métrique de $\overset{\circ}{C_i}$ induite de celle du $\mathbb{X}^{k_i}$ correspondant. La *longueur* de cette géodésique brisée est

$$\ell(f) = \sum_{i=0}^{p} \ell_{\overset{\circ}{C_i}}(f\mid_{]t_i,t_{i+1}[}).$$

L'*écart* $d(x, y) \in [0, +\infty]$ entre x et y dans X est la borne inférieure des longueurs des géodésiques brisées de x à y.

Si X est connexe, a toutes ses cellules compactes, et n'a qu'un nombre fini de types d'isométrie de cellules, alors M. Bridson (voir [BH]) a montré que (X, d) est un espace métrique géodésique complet. Rappelons qu'un espace métrique X est dit *géodésique* s'il existe pour tous x, y dans X une *géodésique* de x à y, i.e. une application isométrique d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans X, d'extrémités x, y.

Si P est un polyèdre de volume fini de dimension n ou une partie isométrique à $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}$ dans $\mathbb{H}^n$ et si x_∞ est un sommet à l'infini de P, nous appelerons *voisinage horosphérique* de x_∞ dans P l'intersection de P avec une horoboule centrée en x_∞ dont la distance à toute face de P ne contenant pas x_∞ est au moins 1. Un complexe polyédral hyperbolique X est dit *conique à l'infini* si pour tout sommet à l'infini x_∞ de X, il existe, pour toute cellule C contenant x_∞, un choix d'un voisinage horosphérique $N_C(x_\infty)$ de x_∞ dans C qui est compatible (i.e. si C est une face de C', alors $N_C(x_\infty) = C \cap N_{C'}(x_\infty)$). Comme les horosphères de $\mathbb{H}^n$ sont euclidiennes pour la métrique de longueur induite, si X est conique à l'infini, le link de tout sommet à l'infini de X hérite d'une structure de complexe polyédral euclidien (bien définie à homothétie près).

Le problème ne se pose essentiellement qu'en dimension 2. Si pour tout sommet à l'infini x_∞ de X, le link de toute cellule de dimension 1 ayant x_∞ comme sommet à l'infini est connexe, alors X est conique à l'infini. En effet, toute isométrie d'un polyèdre de volume fini de $\mathbb{X}^n$ (différent de $\mathbb{R}$) admet un point fixe.

Dans la suite, nous supposerons toujours qu'un complexe polyédral est conique à l'infini.

Proposition 1.1 *Si X est connexe, est conique à l'infini, et n'a qu'un nombre fini de types d'isométrie de cellules, alors (X, d) est un espace métrique géodésique complet. Si X est de plus $CAT(-1)$, alors le link de tout sommet à l'infini de X est $CAT(0)$.*

Preuve. Ceci découle d'arguments complètement analogues à ceux de M. Bridson (voir [Bri, pages 378-395]) dans le cas des cellules compactes, qui sont trop longs pour être rappelés ici. L'argument de continuité-compacité du Lemma 1.4 de [Bri] pour obtenir un minimum est remplacé par un argument de continuité-propreté. La propriété d'être conique à l'infini est exactement celle qu'il faut pour que le Lemma 1.9 de [Bri] s'étende au cas des sommets à l'infini de X. □

Automorphismes des complexes polyédraux

Par *isométrie polyédrale*, nous entendrons un isomorphisme de CW-complexes qui induise une isométrie sur chaque cellule ouverte (pour la métrique induite des $\mathbb{X}^k$). Une isométrie polyédrale préserve l'écart d. Sauf mention contraire, une action d'un groupe sur un complexe polyédral sera par isométries polyédrales.

Une isométrie polyédrale de X est *sans inversion* si elle fixe point par point chaque cellule qu'elle préserve. Le quotient d'un complexe polyédral par un groupe d'isométries polyédrales sans inversion possède une structure naturelle de complexe polyédral.

Si X est connexe et n'a qu'un nombre fini de types d'isométries de cellules, alors X est localement fini (i.e. le nombre de cellules contenant une cellule de X n'appartenant pas à X_∞ est fini) si et seulement si la topologie induite par la distance d est localement compacte, et dans ce cas la topologie de X coïncide avec celle induite par d.

Lorsque X est localement fini, nous munirons l'ensemble $\mathrm{Isom}(X)$ des isométries polyédrales de X de la topologie compacte-ouverte. Si X est connexe, deux isométries polyédrales sont proches si elles coïncident sur une boule pour d de grand rayon (de centre un point base fixé). Le groupe topologique $\mathrm{Isom}(X)$ est alors localement compact, et le fixateur d'une cellule est un groupe compact profini (car limite projective du groupe fini de ses restrictions à la boule de rayon n).

Subdivision barycentrique d'un complexe polyédral

Si P est un polyèdre convexe compact de $\mathbb{X}^n$, il possède un barycentre, une subdivision barycentrique et des coordonnées barycentriques naturelles (voir par exemple [Rat, page 283] dans le cas hyperbolique). Nous n'aurons pas besoin de coordonnées barycentriques naturelles sur les polyèdres de volume fini non compacts (ou isométriques à $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$), mais seulement des barycentres et subdivisions barycentriques.

Rappelons que le *centre de masse* d'un borné K d'un espace CAT(0) est le centre de l'unique plus petite boule contenant K. Lorsque P est de volume fini non compact, on définit le *barycentre* de P comme le centre de masse de l'ensemble borné des centres des boules maximales pour l'inclusion (de dimension la dimension de P) contenues dans P. Si P est isométrique à $\mathbb{R}$, on prend pour barycentre n'importe quel point de P. Si P est isométrique à $\mathbb{R}^+$, on prend pour barycentre de P le point à distance 1 de l'extrémité finie. Un *simplexe de la subdivision barycentrique* de P est alors défini comme l'enveloppe convexe dans P des barycentres de $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_k$, avec σ_0 une face de P ou un point à l'infini de P (dans ce dernier cas, son barycentre est par convention lui-même), et σ_i une face de P contenant σ_{i-1} pour $i \geq 1$.

La *subdivision barycentrique* X' de X est le complexe polyédral, dont les cellules sont les cellules de la subdivision barycentrique de chaque cellule de X (donc son ensemble de sommets à l'infini est le même), les applications d'attachement provenant des restrictions des applications d'attachement de X, ou des applications identité entre faces communes de deux cellules de la subdivision d'une même cellule de X. Les isométries polyédrales de X sont les isométries polyédrales de X', du moins si aucune composante connexe de X n'est réduite à une cellule isométrique à $\mathbb{R}$, et si le choix des barycentres des cellules de X isométriques à $\mathbb{R}$ est fait de manière naturelle pour les isométries polyédrales de X.

Nous identifierons tout sommet de X' avec la cellule de X lui correspondant. Une arête a de X' est naturellement orientée : si σ, σ' sont ses sommets, alors a est orientée de σ vers σ' si σ' est une face de σ. On note alors $i(a) = \sigma$ et $t(a) = \sigma'$ le sommet *initial* et *terminal* de a respectivement. Deux arêtes a et b sont *composables* si $t(b) = i(a)$ et $t(a)$ est face de $i(b)$, et on note ab l'arête entre $i(b)$ et $t(a)$.

Par exemple, si σ est une cellule de X de dimension k, alors les sommets de la subdivision barycentrique de $\mathrm{lk}(\sigma, X)$ sont exactement les cellules τ de X contenant strictement σ, comptées avec multiplicité si plusieurs faces de τ se recollent en σ. Les arêtes a de la subdivision barycentrique de $\mathrm{lk}(\sigma, X)$ sont les couples (toujours avec multiplicité) (σ', σ'') de cellules de X contenant strictement σ, avec σ' contenant strictement σ''. Leur origine est σ' et leur extrémité σ''.

Complexe polyédral typé

Soit X un complexe polyédral de dimension finie, et P un polyèdre convexe de volume fini de $\mathbb{X}^k$. Une *fonction type* de X dans P est un morphisme de CW-complexes $\tau : X \to P$ tel que la restriction de τ à toute cellule maximale (pour l'inclusion) soit une isométrie. Une isométrie polyédrale de X *préserve le type* si elle laisse τ invariante.

Si X est un complexe polyédral typé connexe, alors X est automatiquement conique à l'infini, donc par ce qui précède, est un espace géodésique complet.

Il est facile de montrer (voir par exemple [HP, §5.5]) que si pour toutes cellules maximales c, c' de X, il existe une suite $c_0 = c, c_1, \cdots, c_n, c_{n+1} = c'$ de cellules maximales avec c_j et c_{j+1} se rencontrant sur une face de codimension 1, alors deux fonctions types égales sur une cellule maximale coïncident, et que s'il est non vide, l'ensemble des fonctions types s'identifie à l'ensemble des isométries de P dans P.

Si σ est une cellule (ou un point à l'infini) de X, alors son link est un complexe polyédral sphérique (euclidien) admettant une fonction type à valeurs dans $\mathrm{lk}(\tau(\sigma), P)$, qui à un germe de segment (droite) géodésique issu(e) d'un point x de $\mathring{\sigma}$ associe son image par τ.

Si σ est une cellule de X, si J est l'ensemble des faces de codimension 1 de P contenant $\tau(\sigma)$, nous dirons que σ (ainsi que son link) est *de type* J (ou de type i si $J = \{i\}$).

Si P est un polyèdre de $\mathbb{X}^n$, nous noterons $I(P)$ l'ensemble des faces de codimension 1 de P.

1.2 Systèmes de chambres, systèmes de Coxeter et immeubles combinatoires

Nous renvoyons par exemple à [Ron] Chap. 1,2,3, [Bour] et [Dav2] pour les justifications et développements sur les rappels ci-dessous, essentiellement introduits par J. Tits.

Une *matrice de Coxeter* M sur un ensemble I est une matrice symétrique $(m_{ij})_{i,j\in I}$ à cœfficients dans $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ telle que $m_{ii}=1$ et $m_{ij}\geq 2$ pour $i\neq j$. Le *groupe de Coxeter* défini par M est le groupe W défini par générateurs s_i pour $i\in I$ et relations $(s_i s_j)^{m_{ij}}=1$ pour $i,j\in I$ avec $m_{ij}\neq\infty$. Si $S=\{s_i,\ i\in I\}$, le couple (W,S) est appelé un *système de Coxeter*. Si $J\subset I$, le sous-groupe W_J de W engendré par $\{s_j,\ j\in J\}$ est appelé le *sous-groupe spécial* de type J. Le *rang de* M *et de* (W,S) est le cardinal de I.

Un *système de chambres sur un ensemble* I est un ensemble C muni d'une famille indexée par I de partitions de C. Les éléments de C sont appelés les *chambres*. Deux chambres sont *i-adjacentes* si elles appartiennent à la même partie de la partition correspondant à $i\in I$. Le *rang* de C est le cardinal de I.

Soient C,D deux systèmes de chambres sur I. Un *morphisme* $f:C\to D$ est une application telle que $f(c),f(c')$ sont i-adjacentes pour toutes chambres i-adjacentes c,c' de C.

Soit C un système de chambres sur I. Une *galerie* est une suite finie de chambres $(c_0,c_1,\cdots,c_n)$ telle que c_j est adjacente à c_{j-1} et différente de c_{j-1}, pour tout $j=1\cdots n$. Soit I^* le monoïde libre sur I. La galerie est de *type* $\tau=i_1\cdots i_n\in I^*$ si c_j est i_j-adjacente à c_{j-1}.

Soit $J\subset I$. Un système de chambres sur I est *J-connexe* si deux chambres quelconques c,c' peuvent être jointes par une galerie de type $\tau=i_1\cdots i_n$ avec $i_j\in J$. Les composantes J-connexes de C sont appelées les J-résidus (ou résidus de type J) de C. Avec les partitions restreintes, ce sont des systèmes de chambres sur J. Une *cloison* est un résidu de rang un.

Exemples. (1) Soit G un groupe, B un sous-groupe, $(P_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes contenant B. On définit un système de chambres $C=C(G,B,(P_i)_{i\in I})$ sur I par $C=G/B$ et les chambres $gB,g'B$ sont i-adjacentes si elles ont la même image dans G/P_i. Le groupe G est naturellement un groupe d'automorphismes transitif sur les chambres de C.

(2) Soit M une matrice de Coxeter sur I, et (W,S) le système de Coxeter associé. Le système de chambres $C(W,\{1\},(W_{\{i\}})_{i\in I})$ est appelé le système de chambres de Coxeter de type M. Ainsi, son ensemble des chambres est W et deux chambres w,w' sont i-adjacentes si et seulement si $w'=w$ ou $w'=ws_i$.

(3) Soit P un polyèdre de volume fini de $\mathbb{X}^n$, et X un complexe polyédral muni d'une fonction type $\tau:X\to P$. Appelons *chambre de* X toute cellule maximale de X. Deux chambres sont dites i-adjacentes si elles se rencontrent (au moins) en une cellule de type i (au sens de la fin de la section 1.1). L'ensemble des chambres de X, muni de ces relations d'adjacence, est un système de chambres sur $I=I(P)$, dit associé au type τ, que nous noterons C_X. Une cloison de type i est exactement (l'ensemble des chambres contenant) une cellule de codimension 1 de X de type i.

Soit M une matrice de Coxeter sur un ensemble I. Un *immeuble combinatoire de type* M est (voir [Ron, page 34]) un système de chambres C sur I, muni d'une famille maximale de sous-systèmes de chambres (appelés *appartements*), isomorphes au système de chambres de Coxeter de type M, tel que

1. par deux chambres passe au moins un appartement,

2. pour tous appartements A, A' contenant une chambre commune x et une chambre ou cloison commune y, il existe un isomorphisme de A sur A' fixant x, y.

Un *morphisme* d'immeuble combinatoire est un morphisme des systèmes de chambres sous-jacents. Un J-résidu d'un immeuble combinatoire est dit *sphérique* si le sous-groupe spécial W_J est fini.

1.3 Groupes de réflexions hyperboliques

Un *polyèdre de Coxeter* de $\mathbb{X}^n$ est un polyèdre (convexe) de $\mathbb{X}^n$ de dimension n, dont chaque angle dièdre est de la forme $\frac{\pi}{k}$ pour un certain k (dépendant de l'angle dièdre).

Un *système de réflexions de* $\mathbb{X}^n$ est un couple (W, S) tel qu'il existe un polyèdre de Coxeter P de $\mathbb{X}^n$ avec S l'ensemble des réflexions de $\mathbb{X}^n$ par rapport aux faces de codimension 1 de P et W le groupe des isométries de $\mathbb{X}^n$ engendré par S (appelé *groupe de réflexions de* $\mathbb{X}^n$). Un tel polyèdre P est unique, et est appelé le polyèdre de Coxeter *associé* à (W, S). Nous dirons que (W, S) (resp. W) est un système (resp. groupe) de réflexions *sphériques, euclidiennes, hyperboliques* si $\mathbb{X}^n$ vaut $\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ respectivement. Nous dirons que (W, S) est *cocompact* (resp. *de covolume fini*) si P est compact (resp. de volume fini).

Le théorème suivant (voir par exemple [Har]) décrit les propriétés des groupes de réflexions de $\mathbb{X}^n$.

Théorème 1.2 *(H. Poincaré) Soit P un polyèdre de Coxeter de $\mathbb{X}^n$, $S = S(P)$ l'ensemble des réflexions par rapport aux faces de codimension 1 de P et $W = W(P)$ le groupe engendré par S. Alors W est un sous-groupe discret du groupe des isométries de $\mathbb{X}^n$ et P est un domaine fondamental pour l'action de W sur $\mathbb{X}^n$ (i.e. les images par W de l'intérieur de P sont disjointes, et les images de P recouvrent tout $\mathbb{X}^n$). De plus, (W, S) est isomorphe au système de Coxeter de matrice de Coxeter sur $I = I(P)$ définie par $m_{ij} = \infty$ si les faces distinctes i, j de P ne se rencontrent pas en une face de codimension 2 et $\frac{\pi}{m_{ij}}$ étant l'angle dièdre entre i et j sinon.* □

Remarque. Faisons deux remarques sur la terminologie. Nous avons essentiellement suivie celle de Vinberg [Vin]. Nous avons préféré dire système de réflexions hyperboliques, pour ne pas confondre avec les groupes de Coxeter qui sont hyperboliques au sens de Gromov.

Dans [Bour, Ch. V, §4, Ex. 12] sont définis les systèmes de Coxeter *de type hyperbolique* (resp. *de type hyperbolique compact*). Ce sont les mêmes objets que ceux appelés “système de Coxeter hyperbolique” (resp. “système de Coxeter hyperbolique compact”) dans le livre [Hum]. Ce sont précisément les systèmes de réflexions hyperboliques (W, S) dont le polyèdre associé P est un simplexe de volume fini (resp. un simplexe compact). Il est montré [Bour, Ch. V, §4, Ex. 13-14] qu'un système de Coxeter est de type hyperbolique (resp. de type hyperbolique compact) si et seulement si

- la forme quadratique associée B_M est non dégénérée et non positive, et
- pour toute partie T de S, distincte de S, la forme quadratique $B_{M(T)}$ associée au système de Coxeter (W_T, T) est positive (resp. positive non dégénérée, ou de manière équivalente W_T est fini).

La liste exacte des systèmes de Coxeter de type hyperbolique est connue (voir [Bour, Ch. V, §4, Ex. 12-19], [Kos], [VS, page 205], [Hum, page 141-144]), et due à F. Lanner pour le cas compact. Ils sont non compacts à partir du rang 6. Il n'en existe pas en rang supérieur ou égal à 11.

Soit (W, S) un système de réflexions de covolume fini de $\mathbb{X}^n$, et P son polyèdre de Coxeter associé. Nous noterons s_i la réflexion par rapport à l'hyperplan de P contenant la face i de codimension 1 de P.

Un *complexe polyédral de type* (W, S) est un complexe polyédral X muni d'une fonction type dans P. Il lui est associé (voir exemple (3) de la section précédente) un système de chambres C_X. Si $J \subset I(P)$, un J-résidu de C_X est dit *sphérique* si le sous-groupe spécial W_J est fini.

Exemple: Les images par W du polyèdre de Coxeter associé P munissent $\mathbb{X}^n$ d'une structure de complexe polyédral de type (W, S), appelé le *complexe de Coxeter* de (W, S), et noté $\Sigma(W, S)$. (Sa fonction type est la projection canonique $\mathbb{X}^n \to \mathbb{X}^n/W$, ce quotient s'identifiant à P par le théorème de Poincaré.) Le groupe W est alors le groupe des isométries polyédrales du complexe de Coxeter qui préservent le type.

Proposition 1.3 *Soit X un complexe polyédral de type (W, S). Il existe une bijection de l'ensemble des J-résidus des systèmes de chambres sur J associés aux links des cellules de X de type J dans l'ensemble des J-résidus sphériques de C_X, tel qu'un élément et son image soient naturellement isomorphes. Les links de cellules de type J sont des complexes polyédraux (sphériques) de type (W_J, S_J).*

Preuve. Le résultat étant clairement vrai pour $J = \emptyset$, nous supposerons que J est non vide. Soit σ une cellule de X de type J. Si C est une chambre de X contenant σ, notons $c_\sigma(C)$ la chambre de $lk(\sigma, X)$, formée des germes de géodésiques contenus dans C (et perpendiculaires à σ).

Soit τ le type de X. Comme $\sigma = \tau_{|C}^{-1}(\cap J)$, l'intersection $\cap J$ est non vide. Le sous-groupe spécial W_J, fixant $\cap J$, est donc fini (car W est discret et le stabilisateur d'un point dans le groupe des isométries de $\mathbb{X}^n$ est compact).

Si $\mathbb{X}^n \neq \mathbb{S}^n$ et si W_J est fini, alors W_J a un point fixe global dans $\mathbb{X}^n$. Soit H_i l'hyperplan contenant la face i de codimension 1 de P, i.e. l'ensemble des points de P fixes par s_i. Il découle des propriétés des polyèdres de Coxeter (voir [Vin, Theo. 1.3] par exemple), que, pour tout $K \subset I$, l'intersection $\bigcap_{i \in K} H_i$ est non vide si et seulement si $\cap K$ l'est. Donc si W_J est fini, toute chambre de X possède une unique face de type J. Si $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n$, cette dernière affirmation est encore vraie, et de plus tout résidu de X est sphérique.

Si C_{n-1}, C_n sont deux chambres j-adjacentes, avec $j \in J$ et $\sigma \subset C_{n-1}$, alors $C_{n-1} \cap C_n$ contient la cloison de type j de C_{n-1}, donc contient σ. Par récurrence, toute chambre jointe à une chambre contenant σ par une J-galerie contient σ. Donc, si C_0 est une chambre de X contenant σ, l'application qui à une chambre C contenant σ associe la chambre $c_\sigma(C)$ de $Lk(\sigma, X)$ est un isomorphisme du J-résidu de C_0 dans C_X, à valeurs dans le J-résidu de $c_\sigma(C_0)$ pour le système de chambres associé au link de σ.

Le résultat en découle. $\square$

1.4 Immeubles hyperboliques

Définition 1.4 *Soit (W,S) un groupe de réflexions de $\mathbb{X}^n$ de covolume fini. Un immeuble de type (W,S) est un complexe polyédral X, muni d'une famille maximale de sous-complexes polyédralement isométriques au complexe de Coxeter de (W,S), appelés appartements, tels que*

1. *par deux cellules de X passe au moins un appartement,*
2. *pour tous appartements A, A' contenant deux cellules x, y de X, il existe une isométrie polyédrale de A sur A' fixant x, y.*

Nous appelerons *chambre* de X une chambre d'un appartement de X. Si $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$, nous parlerons d'immeuble *sphérique, euclidien, hyperbolique* respectivement.

Si A est un appartement et c une chambre de A, nous appelerons *rétraction de X sur A de centre c* le morphisme de CW-complexes

$$\rho_{c,A} : X \to A$$

ainsi défini. Si $x \in X$, soit A' un appartement contenant c et x, et $f : A' \to A$ une isométrie polyédrale fixant c. Alors $\rho_{c,A}(x) = f(x)$ ne dépend pas de l'appartement A' choisi, car une isométrie de A valant l'identité sur c est l'identité partout.

Un immeuble X de type (W,S) admet une structure de complexe polyédral de type (W,S). Choisissons une chambre c_0 de X, dite *fondamentale*, que l'on identifie à P. Si A est un appartement contenant c_0, soit $\tau : X \to P$ obtenue en composant la rétraction $\rho_{c_0,A}$ avec l'unique fonction type de A dans c_0 valant l'identité sur c_0. Il est immédiat de vérifier que τ ne dépend pas de A (mais dépend du choix de c_0 identifié à P).

Comme le complexe polyédral X est connexe et admet un type, c'est un espace métrique géodésique complet (voir section 1.1). La rétraction $\rho_{c,A}$ étant polyédrale, diminue les distances. En particulier, les appartements sont convexes. Comme elle induit une isométrie de A' sur A pour tout appartement A' contenant c, elle préserve la distance à tout point de c.

Proposition 1.5 *Soit X un immeuble de type (W,S). Alors X est CAT(κ), avec κ la courbure de $\mathbb{X}^n$ et ses links sont des immeubles sphériques CAT(1).*

Preuve. La preuve de la première assertion est analogue à celle de [Bro] dans le cas euclidien. Nous ne considérons ci-dessous que le cas hyperbolique, le cas sphérique se traitant de manière semblable. Soient x, y, z les sommets d'un triangle géodésique de X. Soit p un point du côté opposé à x. Soient $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ les sommets d'un triangle géodésique du plan hyperbolique ayant les mêmes longueurs de côtés, et $\overline{p}$ le point correspondant à p. Considérons la rétraction ρ sur un appartement contenant y et z, de centre une chambre contenant p. Notons $x' = \rho(x)$. Comme ρ préserve la distance à p et diminue les distances, le triangle géodésique de sommet x', y, z, qui est contenu dans un plan hyperbolique, vérifie $d(x,p) = d(x',p)$ et $d(x',y) \leq d(x,y) = d(\overline{x},\overline{y}), d(x',z) \leq d(x,z) = d(\overline{x},\overline{z})$. Rappelons que dans un triangle géodésique du plan hyperbolique, par la formule du cosinus, si les longueurs de deux côtés sont fixes, alors la longueur du troisième est croissante en fonction de son angle opposé. Par un raisonnement en deux temps, on en déduit donc que $d(x,p) = d(x',p) \leq d(\overline{x},\overline{p})$, ce qui montre que X est CAT(-1).

Les links d'un complexe polyédral CAT(κ) sont CAT(1). Soit σ une cellule de X, et J son type. Il est facile de vérifier que l'ensemble des traces sur lk(σ) des appartements de X vérifie les axiomes des immeubles sphériques de type (W_J, S_J). □

Lemme 1.6 *Soit X un complexe polyédral de type (W, S), tel que pour toutes chambres C, C' de X d'intersection σ non vide, il existe une galerie de C à C' dont toutes les chambres contiennent σ. Alors X est un immeuble de type (W, S) si et seulement si le système de chambres C_X associé à X est un immeuble combinatoire de type (W, S).*

Preuve. Il est immédiat de vérifier que si X est un immeuble de type (W, S), alors le système de chambres C_X associé à X est un immeuble combinatoire de type (W, S). Réciproquement, si C_X est un immeuble combinatoire de type (W, S), alors la surjection évidente $|C_X| \to X$ (avec la réalisation géométrique $|C_X|$ définie en introduction), est injective par l'hypothèse sur X. La réalisation géométrique de chaque appartement de C_X fournit donc un sous-complexe polyédral de X, polyédralement isométrique au complexe de Coxeter de (W, S). Muni de cette famille de sous-complexes, il est facile de vérifier que X est un immeuble de type (W, S). □

Notons qu'il n'y a pas toujours de relation entre le rang de C_X en tant que système de chambres et la dimension de X en tant que CW-complexe, comme le montre le cas de la dimension 2, où le rang est un entier quelconque au moins 3.

1.5 Complexes de groupes

Le contenu de cette section est dû à A. Haefliger [Hae, BH], auquel nous renvoyons pour les preuves et compléments.

Soit X un complexe polyédral connexe. Un *complexe de groupes* sur X est la donnée $(X, G_\sigma, \psi_a, g_{a,b})$ suivante :

1. un groupe G_σ pour tout sommet de la subdivision barycentrique X' de X qui n'est pas dans X_∞,
2. un morphisme injectif $\psi_a : G_{i(a)} \to G_{t(a)}$ pour toute arête a de X' dont le sommet terminal n'est pas dans X_∞,
3. un élément $g_{a,b}$ dans $G_{t(a)}$ pour tout couple d'arêtes composables a et b de X', dont le sommet terminal de a n'est pas dans X_∞,

de sorte que

a) (relation de commutation) $\quad g_{a,b}\psi_{ab}g_{a,b}^{-1} = \psi_a\psi_b$

b) (relation de cocycle) si a, b, c sont trois arêtes de X' composables (dans cet ordre), alors
$$\psi_a(g_{b,c})g_{a,bc} = g_{a,b}\,g_{ab,c}.$$

Nous renvoyons à [Hae] pour la définition d'un morphisme de complexes de groupes.

Un *polytope de groupes* est un complexe de groupes, dont le complexe X est réduit à une cellule, avec les $g_{a,b}$ triviaux. Si celle-ci est de dimension 2, on dit un *polygone de groupes*.

Soit G un groupe d'automorphismes sans inversion d'un complexe polyédral $\tilde{X}$, et $p : \tilde{X} \to X = G\backslash\tilde{X}$ la projection canonique. On appelle *complexe de groupes quotient* le complexe de groupes sur X construit comme suit (unique à isomorphisme près, voir [Hae]).

Pour toute cellule σ de X, choisissons une cellule $\tilde{\sigma}$ de $\tilde{X}$ se projetant sur σ. On note G_σ le fixateur de $\tilde{\sigma}$ dans G. Si a est une arête de X' d'origine σ, soit $\tilde{a}$ l'arête de $\tilde{X}'$ d'origine $\tilde{\sigma}$ dont la projection est a. Choisissons h_a dans G envoyant l'extrémité $t(\tilde{a})$ de l'arête $\tilde{a}$ sur $\widetilde{t(a)}$. On note $\psi_a : G_{i(a)} \to G_{t(a)}$ la conjugaison par h_a, avec $\psi_a(g) = h_a g h_a^{-1}$. Si a, b sont deux arêtes composables de X', on pose $g_{a,b} = h_a h_b h_{ab}^{-1}$. Les conditions $a), b)$ ci-dessus sont faciles à vérifier.

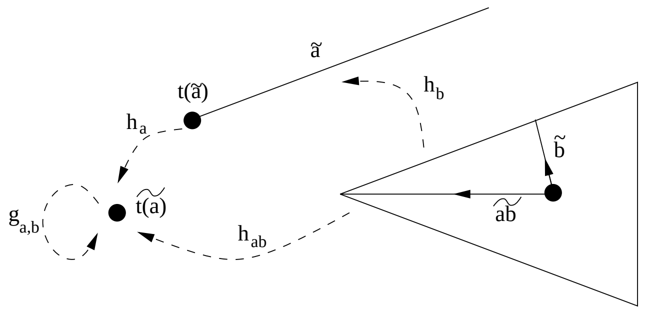


Figure 1 : Complexe de groupes associé à une action.

Un complexe de groupes est dit *développable* s'il est isomorphe au complexe de groupes quotient d'une action sans inversion d'un groupe G sur un complexe polyédral simplement connexe $\tilde{X}$. Un tel espace $\tilde{X}$ muni de cette action (unique à isométrie polyédrale équivariante près) s'appelle alors un *revêtement universel* du complexe de groupes, et le groupe G le *groupe fondamental* du complexe de groupes. Si un polytope de groupes $\mathcal{C}$ est développable, alors le groupe fondamental de $\mathcal{C}$ est exactement la limite inductive des $(\{G_\sigma\}, \{\psi_a\})$ (voir [BH]).

Développement local d'une cellule d'un complexe de groupe

Soit $\mathcal{C} = (X, G_\sigma, \psi_a, g_{a,b})$ un complexe de groupes. Nous donnons ici les candidats naturels pour être les links des cellules d'un éventuel revêtement universel de $\mathcal{C}$.

Soit σ une cellule de X. Notons $\mathcal{C}^\sigma$ le complexe de groupes sur le complexe polyédral $\mathrm{lk}(\sigma, X)$, restriction (au sens évident) de $\mathcal{C}$ à $\mathrm{lk}(\sigma, X)$. Alors (voir [Hae]) il existe un complexe polyédral $\widetilde{\mathrm{lk}(\sigma)}$ muni d'une action de G_σ (unique à isométrie polyédrale équivariante près), appelé le *développement lk-local de $\mathcal{C}$ en σ*, dont le complexe de groupes quotient est isomorphe à $\mathcal{C}^\sigma$.

Par exemple, si $\mathcal{C}$ est développable, de revêtement universel $\tilde{X}$, pour toute cellule σ de X, si $\tilde{\sigma}$ est une cellule de $\tilde{X}$ se projetant sur σ, alors $\widetilde{\mathrm{lk}(\sigma)}$ ainsi défini est polyédralement isométrique au link $\mathrm{lk}(\tilde{\sigma})$ de $\tilde{\sigma}$ dans $\tilde{X}$.

Un complexe de groupes est dit *à courbure négative* si son complexe polyédral sous-jacent est euclidien ou hyperbolique, et si le développement lk-local en chaque cellule (muni de sa métrique polyédrale) est CAT(1). Notons que le revêtement universel d'un complexe de groupes à courbure négative sur un complexe polyédral X est CAT(0), et même CAT(-1) si X est un complexe polyédral hyperbolique. Le critère géométrique principal de développabilité est le suivant.

Théorème 1.7 *(A. Haefliger [Hae, BH]) Un complexe de groupes à courbure négative est développable.* □

La preuve de ce théorème dans [BH] suppose que le complexe polyédral sous-jacent X n'a pas de point à l'infini. Montrons rapidement comment se ramener à ce cas.

Soit $\mathcal{C}$ un complexe de groupes de complexe polyédral sous-jacent X hyperbolique. Par l'hypothèse que X est conique à l'infini, enlevons autour de chaque sommet à l'infini x_∞ la réunion $\mathrm{st}(x_\infty, X)$ d'un système compatible de voisinages horosphériques pour chaque occurence de x_∞ comme sommet à l'infini d'une cellule de X. Notons que $\mathrm{st}(x_\infty, X)$ est topologiquement un cône épointé sur $\mathrm{lk}(x_\infty, X)$. L'espace $Y = X - \bigcup_{x_\infty \in X_\infty} \mathrm{st}(x_\infty, X)$ est un complexe cellulaire, dont les cellules de Y sont de deux types, les *anciennes*, i.e. les cellules éventuellement tronquées de X, et les *nouvelles*, i.e. l'intersection d'une cellule de X avec le link d'un point à l'infini. Chaque cellule de Y est munie de la métrique de longueur induite par la métrique de la cellule de X lui correspondant. Les cellules de Y ne sont plus forcément des polyèdres, mais leur métrique est CAT(0), car la métrique de longueur induite sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^k$ où l'on a enlevé une horoboule est CAT(0). Le complexe Y admet naturellement une structure de complexe de groupes $\mathcal{C}'$, héritée de celle de X, le groupe d'une nouvelle cellule étant le groupe de la cellule minimale de X qui la contient. Les développements lk-locaux de $\mathcal{C}'$ sont CAT(1), car si σ' est une nouvelle cellule de $\mathcal{C}'$, de barycentre b, obtenue par troncature d'une cellule σ de $\mathcal{C}$, et si v est le vecteur unitaire en b orthogonal à σ' et rentrant, alors le développement lk-local de $\mathcal{C}'$ en σ' est isométrique à la boule de rayon $\pi/2$ centrée en la préimage de v dans le développement lk-local de $\mathcal{C}$ en σ, qui est CAT(1). Le complexe de groupe $\mathcal{C}'$ est donc développable, par le cas sans point à l'infini (avec adaptation immédiate au cas où les cellules ne sont pas des polyèdres convexes d'un espace hyperbolique). Notons $\widetilde{Y}$ son revêtement universel. En remplaçant chaque cellule de $\widetilde{Y}$ qui se projette sur une ancienne cellule de Y par la cellule de X que l'on a tronquée pour l'obtenir, on obtient un complexe polyédral $\widetilde{Y}$, qui est un revêtement universel de $\mathcal{C}$.

Complexe de groupes typé

Un complexe de groupes $\mathcal{C}$ est dit *de type* (W, S) si son complexe polyédral sous-jacent X l'est. Pour toute cellule σ de X, le développement lk-local de $\mathcal{C}$ en σ est de type (W_J, S_J) si σ est de type J. Le revêtement universel $\tilde{X}$ d'un complexe de groupes de type (W, S), s'il existe, est naturellement un complexe polyédral de type (W, S): il suffit de composer l'application quotient $\tilde{X} \to X$ par la fonction type $\tau : X \to P$ de X.

1.6 Constructions de Davis

Rappelons une construction due à M. Davis [Dav1]. Soit I un ensemble fini. Un *espace à faces sur* I est un espace topologique F muni d'une famille $\{F_i\}_{i \in I}$ de sous-espaces indexée par I.

Exemples : (1) On note Δ_I l'espace à faces, d'espace F le simplexe euclidien standard d'ensemble de sommets I, avec F_i la face de codimension 1 opposée à i.

(2) Si P est un polyèdre de $\mathbb{X}^n$, et $I = I(P)$, on note encore P l'espace à faces sur I, dont l'espace est $F = P$, muni de la famille $\{F_i = i\}_{i \in I}$ des faces de codimension 1 de P indexée par elle-même.

Si C est un système de chambres sur I (muni de la topologie discrète) et $(F, \{F_i\}_{i\in I})$ un espace à faces sur I (par abus noté F), alors M. Davis désigne par $F(C)$ l'espace topologique quotient suivant :

$$F(C) = (C \times F)/\sim$$

avec $\sim$ la relation d'équivalence engendrée par $(c, x) \sim (c', x')$ s'il existe $i \in I$ avec c et c' i-adjacents et $x = x' \in F_i$. Soit π la projection canonique de $C \times F$ dans $F(C)$.

Si F est un complexe polyédral et les F_i sont des sous-complexes, par transport de structure, comme chaque copie $\{c\} \times F$ de F s'injecte par π, le quotient $F(C)$ hérite d'une structure naturelle de complexe polyédral. Le groupe $\mathrm{Aut}(C)$ des automorphismes de système de chambres de C agit par isométries polyédrales sur $F(C)$.

Par exemple (voir [Dav2] et la remarque 1.10), $\Delta_I(C)$ est la réalisation géométrique standard (voir [Ron, page 2]) de C, que nous noterons $||C||$ dans la suite. Si X est un immeuble euclidien ou hyperbolique, de chambre le polyèdre euclidien ou hyperbolique P, et de système de chambres associé C_X, alors $P(C_X)$ est polyédralement isométrique à X. Lorsque P est compact, pour tout système de chambres C de type $(W(P), S(P))$, le complexe polyédral $P(C)$ est ce que nous avions noté $|C|$ en introduction.

Réalisation géométrique de Davis-Moussong d'un immeuble combinatoire.

A tout immeuble combinatoire C, M. Davis associe naturellement un CW-complexe, muni d'une structure de complexe polyédral euclidien par les travaux de G. Moussong (voir [Dav2, §10]). Topologiquement, c'est la réalisation géométrique de l'ensemble, partiellement ordonné par l'inclusion, de tous les résidus sphériques de C.

De manière plus constructive (voir [Dav2, §10]), si (W, S) est un système de Coxeter, notons $P(W, S)$ le complexe polyédral euclidien construit ci-dessous, que nous appellerons la *chambre de Davis-Moussong*.

Soit Δ_S le simplexe standard d'ensemble des sommets S, dont les faces s'identifient aux parties de S. Soit $N = N(W, S)$, appelé *nerf fini* de (W, S), le sous-complexe simplicial de Δ_S, dont les simplexes sont les parties non vides T de S telles que le sous-groupe spécial W_T est fini. En particulier, N contient tous les sommets de Δ_S. Le 1-squelette de N est obtenu à partir du diagramme de Coxeter de (W, S) en enlevant les arêtes de poids ∞ et en rajoutant celles de poids 2.

En tant que CW-complexe, $P(W, S)$ est le complexe simplicial $x_0 * N'$, cône simplicial de sommet x_0 sur la subdivision barycentrique N' de N. Pour tout sommet s de N, on note F_s l'étoile de s dans N', vue comme partie de $P(W, S)$. Nous renvoyons à [Mou][Dav2, §9] pour la définition de la structure euclidienne sur les cellules de $P(W, S)$.

Maintenant, soit C un système de chambres sur I, et (W, S) un système de Coxeter avec $S = \{s_i,\ i \in I\}$. Considérons l'espace à faces $(P(W, S), \{F_{s_i}\}_{i\in I})$ sur I. La *réalisation géométrique de Davis-Moussong* de C est $|C| = P(W, S)(C)$. Nous appelerons *chambre de* $|C|$ les images par la projection canonique π des $\{c\} \times P(W, S)$ pour c chambre de C, et *cloisons de type i de* $|C|$ les images par π des $\{c\} \times F_{s_i}$ avec $c \in C$.

On montre (voir [Dav2]) que si C est un immeuble combinatoire de type (W, S), alors la métrique polyédrale de $|C|$ est CAT(0). Les chambres de $|C|$ sont alors des copies isométriques de la chambre de Davis-Moussong $P(W, S)$. Deux chambres de C sont i-adjacentes si et seulement si les chambres correspondantes de $|C|$ se rencontrent sur une cloison de type i.

Quelques lemmes sur la réalisation géométrique de Davis-Moussong.

Soit (W, S) un système de réflexions de $\mathbb{X}^n \neq \mathbb{S}^n$, et P son polyèdre de Coxeter associé. Les lemmes suivants sont sans doute connus de M. Davis.

Lemme 1.8 *En tant que CW-complexe, la chambre de Davis-Moussong $P(W, S)$ se plonge de manière canonique dans la subdivision barycentrique de P, et P se rétracte par déformation forte canonique sur $P(W, S)$, de sorte que la face i de P s'envoie sur la face F_i de $P(W, S)$. Si P est compact, alors ce plongement est surjectif.*

Preuve. Soit P' la subdivision barycentrique de P. Notons $\overset{\circ}{V}(P_\infty)$ la réunion des simplexes ouverts de P' contenant (dans leur adhérence dans $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$) un point à l'infini de P. Par une rétraction le long des géodésiques issues des points à l'infini, P' (donc P) se rétracte par déformation forte sur $P' - \overset{\circ}{V}(P_\infty)$. Montrons qu'il existe un isomorphisme f de CW-complexes canonique de $P(W, S)$ sur $P' - \overset{\circ}{V}(P_\infty)$. Pour x_0 le sommet conique de $P(W, S)$, définissons $f(x_0)$ comme le barycentre de P. Rappelons que les simplexes de Δ_S s'identifient avec les parties $S_J = \{s_j,\ j \in J\}$ de S, et S_J est dans $N(W, S)$ si et seulement si $\cap J$ est non vide. Si x est un sommet de $N(W, S)'$, c'est le barycentre d'un simplexe S_J, et nous définissons $f(x)$ comme le barycentre de la face $\cap J$ de P. Si S_J est une face de S_K dans $N(W, S)$, alors $J \subset K$, donc $\cap K \subset \cap J$, donc $\cap K$ est une face de $\cap J$ dans P. Donc l'application f définie sur les sommets de $P(W, S)$ s'étend en une application simpliciale f de $P(W, S)$ dans P'. (On utilise les coordonnées barycentriques euclidiennes sur les simplexes de $P(W, S)$ et les coordonnées barycentriques hyperboliques sur les simplexes (compacts) de $P' - \overset{\circ}{V}(P_\infty)$ pour rendre f canonique.) L'application f est clairement injective. Par définition de $N(W, S)$, son image est exactement $P' - \overset{\circ}{V}(P_\infty)$. □

Lemme 1.9 *Si J est une partie de $I(P)$ et (W_J, S_J) est le sous-groupe spécial correspondant, alors $P(W, S)$ se rétracte de manière canonique sur la chambre de Davis-Moussong de (W_J, S_J), de sorte que pour $j \in J$, la face d'indice j de $P(W, S)$ s'envoie sur la face d'indice j de $P(W_J, S_J)$.*

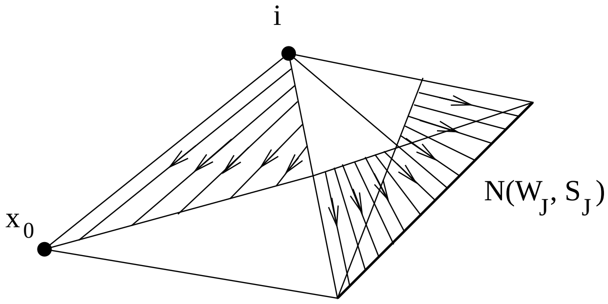


Figure 2 : Rétraction d'un polyèdre de Coxeter sur une chambre de Davis-Moussong.

Preuve. Si J est vide, cet énoncé dit juste que le cône $P(W, S)$ se rétracte canoniuement sur son sommet conique x_0. Montrons d'abord le cas $J = I - \{i\}$. Le simplexe Δ_S privé de l'étoile ouverte dans $\Delta_S{}'$ du sommet i se rétracte canoniquement sur Δ_{S_J}. Par restriction, $N = N(W, S)$ privé de l'étoile ouverte dans N' du sommet i se rétracte canoniquement sur $N_J = N(W_J, S_J)$. Par passage au cône de sommet x_0, il existe une rétraction par déformation forte canonique f_1 de $Q = P(W,S)$ privé de l'étoile ouverte dans Q du sommet i sur $P(W_J, S_J)$.

L'étoile de i dans Q se rétracte par déformation forte canonique sur le cône de sommet x_0 sur le link de i dans N'. Donc il existe une rétraction par déformation forte canonique f_2 de Q sur le cône de sommet x_0 sur N' privé de l'étoile de i dans N'. En considérant $f_1 \circ f_2$, le résultat en découle pour $J = I - \{i\}$.

Si $J = \{i_1, \cdots, i_n\}$, la composée des rétractions de $P(W_{I-\{i_1,\cdots,i_k\}}, S_{I-\{i_1,\cdots,i_k\}})$ sur $P(W_{I-\{i_1,\cdots,i_{k+1}\}}, S_{I-\{i_1,\cdots,i_{k+1}\}})$ pour $k = 1, \cdots, n-1$ ne dépend pas de la numérotation de J, et fournit la rétraction cherchée. $\square$

Remarque 1.10 *Soit (W,S) un groupe cocompact de réflexions de $\mathbb{X}^n$, X un immeuble de type (W,S) et C_X l'immeuble combinatoire des chambres de X. En tant que CW-complexe, la réalisation géométrique de Davis-Moussong $|C_X|$ de C_X est isomorphe à la subdivision barycentrique de X si $\mathbb{X}^n \neq \mathbb{S}^n$, et au cône sur celle-ci si $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n$. La réalisation géométrique standard $||C_X||$ de C_X est homéomorphe à X si $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n$.*

Preuve. Si $\mathbb{X}^n \neq \mathbb{S}^n$, ceci découle immédiatement du lemme 1.8, et de la naturalité de la réalisation de Davis-Moussong. Si $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n$, voir [Dav2]. $\square$

En choisissant de manière adéquate les structures CAT(0) ou CAT(−1) mises par G. Moussong sur la réalisation géométrique $|C_X|$, il y a en fait isométrie dans la remarque précédente.

Par contre, si (W,S) est un système de réflexions hyperboliques qui n'est pas de type hyperbolique, alors la réalisation géométrique standard $||C_X||$ de C_X est très différente de X.

Lemme 1.11 *Soit C un système de chambres de type (W,S), avec W infini. Supposons que la réalisation géométrique standard de chaque résidu propre R de rang ≥ 2 de type non sphérique est simplement connexe. Alors la réalisation géométrique standard $||C||$ et celle de Davis-Moussong $|C|$ ont le même type d'homotopie en dimension* 0 *et* 1.

Preuve. Soit Δ'_I la subdivision barycentrique du simplexe Δ_I, b_I son barycentre, $\partial\Delta'_I$ son bord, et F_i la face opposée au sommet i. On a un isomorphisme simplicial de dualité entre Δ'_S et Δ'_I qui envoie un sommet s_i de S sur le barycentre de F_i. Comme W est infini, la chambre de Davis-Moussong $P(W,S)$ se plonge naturellement dans Δ'_S (en envoyant $N(W,S)$ sur lui-même par l'identité et x_0 sur le barycentre de Δ_S). On a donc un plongement simplicial $f : P(W,S) \to \Delta'_I$, qui envoie x_0 sur b_I et le barycentre de la face S_J de $N(W,S)$ sur le barycentre de la face $F_J = \cap_{j\in J} F_j$ de Δ_I pour $J \subset I$ non vide. Identifions $P(W,S)$ avec son image par f.

Soit $\Delta_{I,*}$ la réunion des faces ouvertes de Δ_I de la forme $\bigcap_{j\in J} F_j$ avec W_J infini et $J \neq I$. Notons que $P(W,S)$ est contenu dans $\Delta'_I - \Delta'_{I,*}$ par définition du nerf fini. Il n'est pas difficile de voir qu'il existe une rétraction par déformation forte de $\Delta'_I - \Delta'_{I,*}$ sur $P(W,S)$, qui envoie la face F_i de Δ_I sur l'étoile du sommet s_i dans $N'(W,S) \subset P(W,S)$.

Par naturalité de la construction de Davis, si $||C||_*$ est l'image dans $||C||$ de $C \times \Delta_{I,*}$, alors $||C|| - ||C||_*$ se rétracte par déformation forte sur la réalisation de Davis-Moussong de C. Par le lemme bien connu suivant appliqué à $Y = ||C||$ et $Y_0 = ||C||_*$, l'inclusion $||C|| - ||C||_* \subset ||C||$ induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie de dimension 0 et 1, ce qui démontre le lemme. Notons que par définition de la réalisation géométrique standard, les links de $||C||$ sont connexes par galerie, i.e. si deux cellules maximales σ, σ' de $||C||$ se rencontrent en une cellule τ, alors il existe une suite $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_n = \sigma'$ de cellules maximales contenant τ et se rencontrant consécutivement en une cellule de codimension 1.

Lemme *Si Y est un complexe polyédral dont toutes les cellules maximales sont des simplexes de dimension n, dont les links sont connexes par galerie, et si Y_0 est un sous-complexe de Y, union de cellules ouvertes de Y de codimension ≥ 2 dont les links sont simplement connexes, alors l'inclusion de $Y - Y_0$ dans Y est un isomorphisme sur les groupes d'homotopie de dimension* 0 *et* 1*.*

Preuve. Il existe une application f, appelée *indice*, de l'ensemble des sommets de la subdivision barycentrique Y' dans $\{0, \cdots, n\}$ qui associe au sommet x de Y', barycentre de la cellule σ de X, la dimension de σ, de sorte que f est injective en restriction à l'ensemble des sommets de tout simplexe de la subdivision barycentrique.

Montrons d'abord que tout chemin dans Y entre deux sommets de $Y - Y_0$ est homotope (relativement à ses extrémités) à un chemin simplicial dans $Y' - Y_0$. Ceci montrera que $\pi_0(Y - Y_0) \to \pi_0(Y)$ est un isomorphisme, et que (avec choix indifférent d'un sommet de Y comme point base) $\pi_1(Y - Y_0) \to \pi_1(Y)$ est surjective. Tout chemin dans Y est homotope à un chemin simplicial γ dans le 1-squelette Y', de telle sorte que toute arête de γ ait au moins (donc exactement) un sommet d'indice n. On raisonne par récurrence croissante sur l'indice minimum d'un sommet de γ qui est barycentre d'une cellule de Y_0. Soient x, y, z trois sommets consécutifs de γ, d'indice respectivement n, j, n, avec y barycentre d'une cellule de Y_0. Alors x, z sont deux points du link de y dans Y', qui est simplement connexe, donc connexe. Tout chemin simplicial entre x et z dans le link de y dans Y' est homotope dans Y' au chemin $[x, y] \cup [y, z]$ et ses sommets sont d'indices strictement supérieurs à j. La première affirmation en découle.

Montrons que toute homotopie dans Y entre deux lacets simpliciaux dans $Y' - Y_0$ est homotope (relativement à son bord) à une homotopie dans $Y - Y_0$. Ceci montrera que $\pi_1(Y - Y_0) \to \pi_1(Y)$ est injective. Comme les links sont connexes par chambre, toute telle homotopie dans Y est homotope à une homotopie simpliciale γ dans le 2-squelette de Y', de telle sorte que tout 2-simplexe de γ ait un sommet d'indice n et un autre sommet ou bien d'indice $n - 1$ ou bien qui n'est pas dans Y_0. On raisonne par récurrence croissante sur l'indice minimum d'un sommet de γ qui est dans Y_0. Soit x un sommet de γ dans Y_0 d'indice $i < n - 1$. Les sommets du link ℓ de x dans γ sont d'indice n ou $n - 1$ ou ne sont pas dans Y_0. Comme Y_0 est un sous-complexe, le lacet ℓ est un lacet dans le link de x dans Y', qui est simplement connexe par hypothèse, donc borde un disque simplicial D' dans le link de x dans Y', dont tous les sommets sont d'indices strictement supérieurs à i. Par contractibilité des étoiles, le sous-disque de γ de bord ℓ est homotope à D'. La deuxième affirmation en découle. □□

2 Critères immobiliers locaux

Le but de cette section est de donner un critère "local" sur un complexe de groupes, pour qu'il soit développable avec comme revêtement universel un immeuble hyperbolique.

Soit (W, S) un système de réflexions de covolume fini de $\mathbb{X}^n \neq \mathbb{S}^n$, et P son polyèdre de Coxeter associé (voir la remarque finale de la section pour l'extension à d'autres systèmes de Coxeter).

Théorème 2.1 *Un complexe de groupes de type (W, S) est développable de revêtement universel un immeuble de type (W, S) si et seulement si ses développements lk-locaux sont $CAT(1)$ et ceux dont le type J est fini et de cardinal au plus 3 sont des immeubles sphériques.*

Preuve. La condition est nécessaire par la proposition 1.5. Montrons qu'elle est suffisante.

Soit $\mathcal{C}$ un complexe de groupes sur le complexe polyédral X de type (W, S). Supposons que le développement local en toute cellule de X soit CAT(0). Alors $\mathcal{C}$ est développable, par le théorème 1.7. Soit $\tilde{X}$ un développement universel de $\mathcal{C}$. Nous avons déjà vu que $\tilde{X}$ est un complexe polyédral de type (W, S). Le résultat découle du théorème suivant appliqué à $Y = \tilde{X}$. □

Théorème 2.1' *Soit Y un complexe polyédral euclidien $CAT(0)$ ou hyperbolique $CAT(-1)$ de type (W, S). Si, pour chaque cellule de Y dont le type J est de cardinal au plus 3, son link est un immeuble sphérique, alors Y est un immeuble de type (W, S).*

Preuve. Notons $\tau : Y \to P$ la fonction type. Soit C_Y le système de chambres sur $I = I(P)$ associé (voir exemple (3) section 1.2). Notons M la matrice de Coxeter de (W, S).

Montrons que C_Y est un système de chambres de type M au sens de [Ron, page 39]. Soit R un J-résidu de rang 2 de C_Y. Il s'agit de voir que R est un immeuble combinatoire de type (W_J, S_J).

Si R est de type sphérique, par la proposition 1.3, alors R est le système de chambres associé au link d'une cellule de type J. Par hypothèse, ce link est un immeuble sphérique, donc R est un immeuble combinatoire. Le fait que R soit de type (W_J, S_J) a déjà été vu dans 1.3.

Maintenant, si R n'est pas de type sphérique, il s'agit de montrer que R est un immeuble de type $\tilde{A}_1$, c'est-à-dire un arbre sans feuille terminale. Soit $J = \{i, j\}$ le type de R. Le résidu R est une composante connexe du graphe dont les sommets sont les cloisons de type i et j dans C_Y, avec une arête entre la cloison de type i et la cloison de type j d'une même chambre. Comme les links des faces de codimension 2 dans Y sont des immeubles sphériques, chaque cloison de C_Y est contenue dans au moins deux chambres. Donc R n'a pas de sommet terminal.

Soit α l'arc d'une perpendiculaire commune entre les faces i et j de P, si i et j ne se rencontrent pas à l'infini, ou l'arc d'un horocycle perpendiculaire entre ces faces sinon. L'existence d'un tel arc contenu dans P découle des propriétés des polyèdres de Coxeter. Tout d'abord les hyperplans contenant des faces de codimension 1 se rencontrent dans $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$) si et seulement si les faces se rencontrent de même (voir [Vin]). Par convexité et le fait que les angles dièdres sont aigus, le résultat en découle.

Géométriquement, identifions (la réalisation géométrique de) ce graphe R avec une composante connexe du sous-espace $T = \tau^{-1}(\alpha)$ de $\tilde{X}$.

Il s'agit donc de voir que chaque composante connexe de T est simplement connexe. Supposons tout d'abord que i et j ne se rencontrent pas à l'infini. Comme τ induit sur la réunion de deux chambres adjacentes la réflexion par rapport à leur cloison commune (voir par exemple [HP, section 5.5]), le sous-espace T est localement convexe dans Y. Comme Y est CAT(0), chaque composante connexe de T est donc globalement convexe, et en particulier est simplement connexe. Donc R est bien un arbre. Si i et j se rencontrent à l'infini, la preuve est la même en travaillant dans le link d'un sommet à l'infini de Y, qui est CAT(0) par la proposition 1.1.

Si le cardinal de S est au plus 2, il n'y a plus rien à montrer. Supposons donc le contraire.

Lemme 2.2 *La réalisation géométrique standard des résidus propres de rang k au moins 3 de C_Y est simplement connexe.*

Preuve. Si R est un résidu sphérique de rang ≥ 3, soit J son type, et σ une de ses chambres. Alors la réalisation géométrique standard de R est homéomorphe au link L de la face de type J de σ, car R est sphérique (voir remarque 1.10 et proposition 1.3). Puisque Y est CAT(0), ce link L est CAT(1). Rappelons que les résidus sphériques de rang 3 de R sont des immeubles combinatoires par l'hypothèse (transitivité des résidus) et la proposition 1.3. Par le théorème 4.9, page 47 de [Ron], le revêtement universel au sens des systèmes de chambres de R est donc un immeuble combinatoire sphérique de rang ≥ 3. Un revêtement au sens des systèmes de chambres induit un revêtement branché au-dessus du squelette de codimension ≥ 3 entre les réalisations géométriques standards (voir [Ron, page 42]). Soit $\overline{L}$ le revêtement branché de L correspondant. Comme $\overline{L}$ est un immeuble sphérique, il existe un ensemble dense de paires de points de $\overline{L}$ qui sont joints par une (unique) géodésique de longueur $< \pi$ ne rencontrant pas le squelette de codimension 2 de $\overline{L}$. Considérons l'image d'une telle géodésique dans L. Puisque $\overline{L} \to L$ ne plie pas sur les cloisons, cette image est une courbe localement injective localement géodésique de longueur $< \pi$. Comme L est CAT(1), cette courbe est une géodésique minimisante. D'où $\overline{L} \to L$ est une isométrie sur un ensemble dense de paires de points, donc c'est une isométrie. En particulier L est un immeuble sphérique. Comme son rang est au moins 3, il est alors simplement connexe.

Supposons maintenant que R est le J-résidu d'une chambre c de Y, avec J non sphérique. Supposons d'abord que les faces de P dans J n'ont pas de point commun à l'infini dans l'espace hyperbolique.

Soit $\bigcup R$ la réunion des chambres de R. C'est un sous-complexe de Y, qui est évidemment un complexe polyédral de type P. Comme les angles dièdres de P sont au plus $\frac{\pi}{2}$ (voir aussi [Vin, Theo. 1.5]), le sous-espace $\bigcup R$ est localement convexe dans Y. Comme Y est CAT(0), on en déduit que $\bigcup R$ est globalement convexe, donc en particulier simplement connexe. Notons que R est un système de chambres de type (W_J, S_J). Par les lemmes 1.8 et 1.9, le polyèdre P se rétracte naturellement sur la chambre de Davis-Moussong de (W_J, S_J), de sorte que si $j \in J$, alors la face j de codimension 1 de P s'envoie sur la face F_j de la chambre de Davis-Moussong de (W_J, S_J). Nous en déduisons que la réalisation de Davis-Moussong de R a même type d'homotopie que $\bigcup R$, donc est simplement connexe. Par le lemme 1.11 et par récurrence, comme R est non sphérique, il en découle que $||R||$ est simplement connexe.

Si les faces de P dans J ont un point commun à l'infini dans l'espace hyperbolique, le raisonnement est semblable, en utilisant le fait que le link d'un point à l'infini de Y est CAT(0) (voir proposition 1.1). □

Soit $\widetilde{C}_Y$ un revêtement universel au sens des systèmes de chambres (voir [Ron, page 44]) du système de chambres C_Y de type M. Les résidus sphériques de rang 3 de C_Y sont des immeubles combinatoires, car ce sont les systèmes de chambres associés aux links de cellules de type J dans Y, avec J de cardinal 3, par la proposition 1.3 et l'hypothèse. Par le théorème 4.9, page 47 de [Ron], nous en déduisons que $\widetilde{C}_Y$ est un immeuble combinatoire de type (W, S).

Par le lemme 1.8, le complexe polyédral Y a le même type d'homotopie que la réalisation géométrique de Davis-Moussong $|C_Y|$ de son système de chambres associé C_Y. Or Y est simplement connexe, donc $|C_Y|$ aussi. Par le lemme 1.11 dont l'hypothèse est satisfaite par le lemme 2.2 et le fait que nous avons déja vu que les résidus non sphériques de rang 2 sont simplement connexes, on en déduit que $||C_Y||$ est simplement connexe.

Lemme 2.3 *(Exercice 9 page 52 de [Ron]) Si C est un système de chambres de rang $n \geq 3$, si la réalisation géométrique standard de chaque résidu propre de rang $k \geq 3$ est simplement connexe, si $\overline{C} \to C$ est un revêtement au sens des systèmes de chambres, alors l'application canonique $||\overline{C}|| \to ||C||$ entre les réalisations géométriques standards est un revêtement.* □

Appliquons ce résultat à $C = C_Y$ et $\overline{C} = \widetilde{C}_Y$, qui vérifient bien les hypothèses du lemme 2.3. Comme $||C_Y||$ est simplement connexe, nous en déduisons que $\widetilde{C}_Y$ et C_Y sont isomorphes, donc que C_Y est un immeuble combinatoire, de type (W, S). Par conséquent (voir lemme 1.6), Y est un immeuble de type (W, S). □

Dans le cas où (W, S) est le groupe de Coxeter fini de type $\tilde{A}_2$, le corollaire suivant est dû à [Bar]. Il était connu de Kleiner et Leeb dans le cas euclidien.

Corollaire 2.4 *Si X est un complexe polyédral de type (W, S), dont les links sont $CAT(1)$ et tel que, par deux points quelconques d'un link de type J de cardinal au plus trois passe une sphère de dimension $|J| - 1$ isométriquement plongée, alors le revêtement universel de X est un immeuble de type (W, S).*

Preuve. Ce résultat découle du théorème précédent en mettant la structure de complexe de groupes triviaux sur X, par la caractérisation suivante des immeubles sphériques. □

Théorème 2.5 *(B. Kleiner, A. Lytchak) Un complexe polyédral sphérique $CAT(1)$ de dimension n est un immeuble sphérique si et seulement si par deux points passe une sphère de dimension n isométriquement plongée.* □

Corollaire 2.6 *(S. Barré) Soit X un 2-complexe hyperbolique $CAT(-1)$, dont les polygones sont isométriques à un même polygone de Coxeter P, tel que tout germe de géodésique soit contenu dans un germe de plan hyperbolique. Alors le revêtement universel de X est un immeuble hyperbolique.* □

Remarque. Ce même théorème et son corollaire sont valables pour un groupe de Coxeter (W, S) quelconque. Il suffit de remplaçer "immeuble de type (W, S)" par "réalisation géométrique de Davis-Moussong d'un immeuble combinatoire de type (W, S)", de remplacer les complexes polyédraux de type (W, S) par les complexes formés de recollements convenables de chambres de Davis-Moussong $P(W, S)$, et de définir les complexes de groupes sur ces complexes de manière naturelle en utilisant le fait que les arêtes d'un tel complexe sont naturellement orientées (il n'y a pas besoin de prendre de subdivision barycentrique). Le langage des ensembles partiellement ordonnés de [Hae, BH] est ici parfaitement bien adapté. Il rend la preuve de cette extension tout à fait semblable. Mais pour des raisons de lisibilité, et parce que les seuls exemples auxquels nous appliquerons le théorème 2.1 sont bien dans notre cadre, nous avons préféré nous restreindre aux groupes de réflexions euclidiennes ou hyperboliques.

3 Exemples d'immeubles hyperboliques

3.1 Polygones de groupes

3.1.1 La construction générale

Si m est un entier au moins 2, rappelons qu'un *m-gone généralisé* est un graphe biparti (connexe) de diamètre m et de maille (la longueur du plus petit cycle non trivial) $2m$. Si chaque arête est munie de la longueur $\frac{\pi}{m}$, ce sont exactement les immeubles sphériques de rang 2 (i.e. de type un système de réflexions du cercle $\mathbb{S}^1$ — un groupe diédral d'ordre $2m$ avec ses générateurs standards —) voir [Ron]. Rappelons que par un théorème de Feit-Higman, un m-gone généralisé fini épais (i.e. de valence au moins 3 en chaque sommet) ne peut exister que si $m = 2, 3, 4, 6$ ou 8. Par exemple, avec les notations de l'exemple 1 de la section 1.2, les m-gones généralisés admettant un groupe d'automorphismes transitif sur les chambres sont de la forme $C(G, B; P_1, P_2)$.

Soit $k \geq 3$ un entier. Soit P un polygone hyperbolique de Coxeter, compact, de sommets numérotés cycliquement de 1 à k, d'angles aux sommets $\frac{\pi}{m_1}, \cdots, \frac{\pi}{m_k}$ respectivement. Pour tout entier i modulo k, soit G_i un groupe fini d'automorphismes d'un m_i-gone généralisé, transitif sur les chambres, de stabilisateur d'une chambre B_i, et stabilisateurs des cloisons de cette chambre $P_{1,i}, P_{2,i}$. Supposons donné un isomorphisme de paires

$$(P_{2,i}, B_i) \simeq (P_{1,i+1}, B_{i+1})$$

de sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \\ \nearrow & & & & \searrow \\ B_n & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & B_3 \end{array}$$

Identifions tous les groupes B_i par les isomorphismes précédents, en un groupe noté B, ainsi que $P_{2,i}$ avec $P_{1,i+1}$ en un groupe Q_i. Soit $\mathcal{C}$ le polygone de groupes, de polygone P, de groupe de i-ème sommet G_i, de groupe d'arête Q_i entre les sommets i et $i+1$, et de groupe de polygone B avec les inclusions évidentes.

Proposition 3.1 *Le complexe $\mathcal{C}$ construit ci-dessus est développable, et son revêtement universel est un immeuble hyperbolique de type $(W(P), S(P))$.*

Preuve. C'est une simple application du théorème 2.1, car le développement lk-local du sommet i est combinatoirement le m_i-gone généralisé $C(G_i, B_i; P_{1,i}, P_{2,i})$, la condition sur les angles de P assurant que la métrique est celle d'immeuble sphérique. □

Remarquons que tout immeuble hyperbolique de type $(W(P), S(P))$, muni d'un groupe discret d'automorphismes transitif sur les chambres est de cette forme. La classification des tels immeubles hyperboliques se ramène donc à la classification des suites finies de quadruplets de groupes $(G_i, B_i; P_{1,i}, P_{2,i})$ avec B_i sous-groupe de $P_{1,i}, P_{2,i}$, eux-mêmes sous-groupes de G_i, munis d'isomorphismes de paires $(P_{2,i}, B_i) \simeq (P_{1,i+1}, B_{i+1})$ faisant commuter le diagramme des B_i, de sorte que $C(G_i, B_i; P_{1,i}, P_{2,i})$ soit un m_i-gone généralisé, avec $\frac{\pi}{m_i}$ l'angle du i-ème sommet de P.

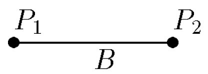
Remarque 3.2 *Si P est un polygone hyperbolique de Coxeter, d'aire finie, non compact, on obtient de même un immeuble hyperbolique de type $(W(P), S(P))$. On prend le revêtement universel d'un polygone de groupes finis sur P, qui vérifie, pour tout sommet fini s d'angle $\frac{\pi}{m}$, d'arêtes incidentes a^+, a^-, la condition suivante : le groupe G_s admet une action sur un m-gone généralisé, transitive sur les chambres, pour laquelle $G_P \subset G_s$ est le stabilisateur d'une chambre, et G_{a^-}, G_{a^+} sont les stabilisateurs des cloisons de cette chambre.*

3.1.2 Rappels sur les groupes de type de Lie finis de rang 2

Nous rappelons ci-dessous la liste des groupes G de type de Lie (i.e. de Chevalley ou de Chevalley tordus), finis et de rang 2, au sens suivant (voir [CSM, Car]).

Un groupe de Chevalley fini correspond à un couple d'une algèbre de Lie $\mathbf{g}$ simple non triviale sur $\mathbb{C}$ et d'un corps fini $\mathbb{F}_q$ (q puissance non nulle d'un nombre premier). Nous dirons qu'il est de rang 2 si le diagramme de Dynkin de $\mathbf{g}$ a deux sommets (donc de type A_2, B_2 ou G_2). Un groupe de Chevalley tordu fini correspond à un triplet d'une algèbre de Lie $\mathbf{g}$ simple non triviale sur $\mathbb{C}$, d'un automorphisme α d'ordre $n \geq 2$ du diagramme de Dynkin de $\mathbf{g}$ et d'un corps fini $\mathbb{F}_{q^n}$. Nous dirons qu'il est de rang 2 si le quotient du diagramme de Dynkin de $\mathbf{g}$ par α possède deux sommets (donc est de type ${}^2A_3, {}^2A_4, {}^3D_4$ ou ${}^2F_4$; dans ce dernier cas, comme α ne préserve pas l'orientation des arêtes, il faut prendre pour ordre du corps 2^{2e+1}, et on pose par convention $q^2 = 2^{2e+1}$).

Rappelons que tous les groupes de Chevalley ([Car] Prop. 8.2.1 page 108) et groupes de Chevalley tordus ([Car] Theo. 13.5.4 page 230), possèdent une (B, N)-paire. Ils agissent donc sur l'immeuble sphérique associé à cette (B, N)-paire, de manière transitive sur les paires (C, Σ), avec C une chambre et Σ un appartement contenant C (voir par exemple [Car] page 299). Si le rang est 2, alors cet immeuble sphérique est de rang 2 et B est le fixateur d'une arête. Nous noterons P_1, P_2 les fixateurs des deux sommets de cette arête, de sorte que le quotient de l'immeuble par G soit le graphe de groupes suivant :



Définition 3.3 *Nous appellerons $(G, B; P_1, P_2)$ un quadruplet de Chevalley, et noterons $C(G, B; P_1, P_2)$ l'immeuble sphérique associé, appelé graphe de Chevalley.*

L'exemple qu'il faut garder en tête est celui de $G = PGL_3(\mathbb{F}_q)$, avec B le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, P_1 le sous-groupe des matrices dont les coefficients 1,3 et 2,3 sont nuls et P_2 le sous-groupe des matrices dont les coefficients 1,2 et 1,3 sont nuls. L'immeuble associé $C(G, B; P_1, P_2)$ est l'immeuble des drapeaux du plan projectif sur le corps $\mathbb{F}_q$, dont les sommets sont les points P et les droites L de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ avec une arête entre P et L si et seulement si P appartient à L.

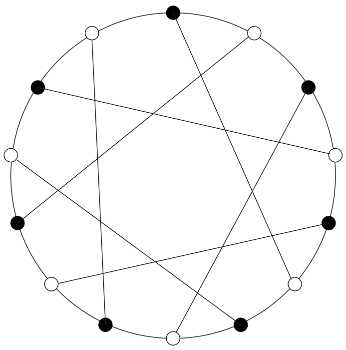


Figure 3 : Graphe d'incidence du plan projectif sur $\mathbb{F}_2$.

Dans la table ci-dessous, la notation (n, m) désigne le pgcd de n et m. Si s est le nombre en dessous d'un sommet du diagramme, la valence de ce sommet est $s+1$. Le nombre au-dessus d'un sommet du diagramme est le nombre de sommets de l'immeuble ayant le même type que ce sommet.

Les formules pour les ordres des groupes sont issues de [Car] en utilisant le Theorem 9.4.10 (page 144) et les pages 122, 155, pour les groupes de Chevalley, et le Theorem 14.3.2 (page 262) pour les groupes de Chevalley tordus.

Groupe	Cardinal du groupe	Cardinal de B
$A_2(q) = PSL_3(\mathbb{F}_q)$	$\frac{1}{(3,q-1)}q^3(q^2-1)(q^3-1)$	$\frac{1}{(3,q-1)}q^3(q-1)^2$
$C_2(q) = PSp_4(\mathbb{F}_q)$	$\frac{1}{(2,q-1)}q^4(q^2-1)(q^4-1)$	$\frac{1}{(2,q-1)}q^4(q-1)^2$
${}^2A_3(q^2) = PSU_4(\mathbb{F}_{q^2})$	$\frac{1}{(4,q+1)}q^6(q^2-1)(q^3+1)(q^4-1)$	$\frac{1}{(4,q+1)}q^6(q-1)(q^2-1)$
${}^2A_4(q^2) = PSU_5(\mathbb{F}_{q^2})$	$\frac{1}{(5,q+1)}q^{10}(q^2-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^5+1)$	$\frac{1}{(4,q+1)}q^{10}(q^2-1)^2$
$G_2(q)$	$q^6(q^2-1)(q^6-1)$	$q^6(q-1)^2$
${}^3D_4(q^3)$	$q^{12}(q^2-1)(q^6-1)(q^8+q^4+1)$	$q^{12}(q^2-q+1)$
${}^2F_4(q^2)$ $(q^2 = 2^{2e+1})$	$q^{24}(q^2-1)(q^6+1)(q^8-1)(q^{12}+1)$	$q^{24}(q^2-1)^2$

Type de l´immeuble	Paramètres de l´immeuble
A_2	$\overset{q^2+q+1}{\underset{q}{\bullet}} \text{———} \overset{q^2+q+1}{\underset{q}{\bullet}}$
C_2	$\overset{(q^2+1)(q+1)}{\underset{q}{\bullet}} \text{===} \overset{(q^2+1)(q+1)}{\underset{q}{\bullet}}$
C_2	$\overset{(q^3+1)(q+1)}{\underset{q^2}{\bullet}} \text{===} \overset{(q^2+1)(q^3+1)}{\underset{q}{\bullet}}$
C_2	$\overset{(q^3+1)(q^5+1)}{\underset{q^2}{\bullet}} \text{===} \overset{(q+1)(q^2+1)(q^5+1)}{\underset{q^3}{\bullet}}$
G_2	$\overset{(q+1)(q^4+q^2+1)}{\underset{q}{\bullet}} \underset{6}{\text{———}} \overset{(q+1)(q^4+q^2+1)}{\underset{q}{\bullet}}$
G_2	$\overset{(q^3+1)(q^8+q^4+1)}{\underset{q^3}{\bullet}} \underset{6}{\text{———}} \overset{(q+1)(q^8+q^4+1)}{\underset{q}{\bullet}}$
$I_2(8)$	$\overset{(q+1)(q^3+1)(q^6+1)}{\underset{q}{\bullet}} \underset{8}{\text{———}} \overset{(q+1)(q^3+1)(q^6+1)}{\underset{q^2}{\bullet}}$

Table 1: Immeubles sphériques finis de rang 2 provenant des groupes de type de Lie.

Si N est le nombre de racines positives, et d le nombre de caractères de Q/P avec Q (resp. P) le sous-groupe additif engendré par un système fondamental de poids (resp. racines), alors le cardinal du sous-groupe de Borel d'un groupe de Chevalley est, en rang 2, voir [Car] page 121 :

$$|B| = \frac{1}{d} q^N (q-1)^2.$$

Pour un groupe de Chevalley tordu, si τ est l'isométrie du système de racines, si N est le nombre de racines positives, et d le nombre de caractères auto-conjugués de Q/P, et si $\eta_1, \cdots, \eta_l$ sont les valeurs propres de τ, alors le cardinal du sous-groupe de Borel est, voir [Car] page 251 :

$$|B| = \frac{1}{d} q^N (q-\eta_1) \cdots (q-\eta_l).$$

Les tables page 43, 122 et 46-47 de [Car] permettent alors de calculer $|B|$ dans le tableau ci-dessus.

Les deux dernières données sont extraites de l'appendice 6 (page 191) de [Ron].

Rappelons que les formes hermitiennes sur $\mathbb{F}_{q^2}$ pour l'involution $\lambda \mapsto \lambda^q$ de $\mathbb{F}_{q^2}$ sont équivalentes. Nous n'avons pas fait figurer les groupes de type B_2 ni de type ${}^2D_3$, à cause des isomorphismes de dualité :

$$P\Omega_5(\mathbb{F}_q) = PSp_4(\mathbb{F}_q) \text{ et } P\Omega_6^-(\mathbb{F}_{q^2}) = PSU_4(\mathbb{F}_{q^2})$$

(voir respectivement [Tay] pages 196 et 198). Tous les groupes sont simples sauf $C_2(2) \simeq S_6$, $G_2(2)$ et ${}^2F_4(2)$ (voir [Car] pages 172 et 262).

Cette table montre en particulier que toutes les possibilités permises par le théorème de Feit-Higmann apparaissent effectivement.

3.1.3 L'exemple de Aschbacher-Smith

L'exemple suivant [AB] de triangle hyperbolique de groupes finis, de revêtement universel un immeuble hyperbolique de dimension 2, nous a été communiqué par P. Brown. La liste complète des triangles de groupes finis, de revêtement universel un immeuble hyperbolique de dimension 2 épais classique, est donnée par exemple dans [Mei].

Dans ce diagramme, $(G_2(2), B; P_1, P_2)$ est le quadruplet de Chevalley de type G_2 sur le corps $\mathbb{F}_2$, avec B le 2-Sylow de $G_2(2)$, d'ordre 64, d'indice 3 dans P_1 et P_2. Le groupe H d'ordre $576 = 64.3^2$ agit transitivement sur les arêtes d'un graphe biparti complet à $3+3$ sommets, de fixateur d'arête B, et fixateurs de sommets deux copies de P_2.

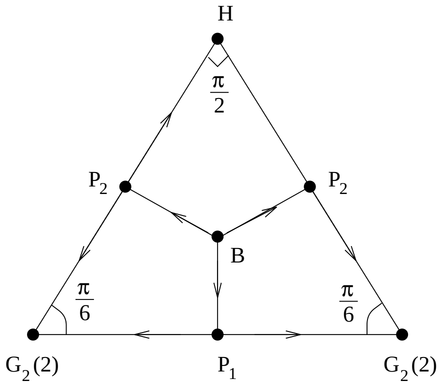


Figure 4 : Triangle hyperbolique de groupes.

D'après le résultat de A. Zuk [Zuk] (voir aussi [BS]), le groupe fondamental de ce triangle de groupes a la propriété T de Kazhdan. Nous ne savons pas s'il est un quotient d'un réseau uniforme du groupe des isométries de l'espace hyperbolique quaternionien ou du plan hyperbolique octonien.

3.1.4 Vers une classification des immeubles fuschiens homogènes

Les exemples ci-dessous donnent une liste d'immeubles hyperboliques de dimension 2 *homogènes* (i.e. admettant un groupe discret d'automorphismes transitif sur les chambres) et *classiques* i.e. dont les links sont des bigones généralisés ou des polygones généralisés *algébriques* (i.e. associés à un quadruplet de Chevalley).

Si $C(G, B; P_1, P_2)$ est un graphe de Chevalley, le groupe $\mathrm{Aut}_0\, C(G, B; P_1, P_2)$ des automorphismes préservant le type de $C(G, B; P_1, P_2)$ est, d'après [Tit1, cor. 5.9], extension de G par le groupe des automorphismes du corps $\mathbb{F}_q$ sous-jacent. Plus précisement, G. Seitz a montré :

Théorème 3.4 *(G. Seitz [Sei]) Si $(G, B; P_1, P_2)$ est un quadruplet de Chevalley, si H est un sous-groupe de $Aut_0\, C(G, B; P_1, P_2)$ agissant transitivement sur les chambres, alors ou bien H contient G, ou bien (G, H) est de la forme suivante :*

$G = PSL_3(2)$ et $|H| = 3.7$
$G = PSL_3(8)$ et $|H| = 3^2.73 \quad (H \subset P\Gamma L_3(8))$
$G = PSp_4(2) \simeq S_6$ et $H \simeq A_6$
$G = G_2(2)$ et $H = G_2(2)'$
$G = {}^2F_4(2)$ et $H = {}^2F_4(2)'$
$G = PSp_4(3) \simeq PSU_4(2^2)$ et H est un sous – groupe parabolique maximal de $PSU_4(2^2)$ d'ordre $2^6.3.5$. □

En mettant de côté les éventuelles possibilités d'isomorphismes venant des automorphismes des corps, et les cas particuliers précédents, nous pouvons donc supposer que les groupes de sommet d'un polygone de groupes finis dont le revêtement universel est un immeuble hyperbolique sont des groupes finis de type de Lie.

(A) Cas où les groupes de sommets sont des groupes finis de type de Lie

Si $(G, B; P_1, P_2)$ et $(G', B'; P'_1, P'_2)$ sont deux quadruplets de Chevalley distincts (y compris modulo permutation des deux derniers groupes), la paire (P_1, B) n'est jamais isomorphe à la paire (P'_1, B'). En effet, un simple calcul de l'ordre de P_1/B (qui vaut $q^\alpha + 1$ d'après la table 1, avec $\alpha = 1, 2$ ou 3 et q l'ordre du corps) montre que la caractéristique p doit être la même. Alors le p-Sylow U de B doit être isomorphe à celui pour B'. En utilisant que l'ordre de U est la puissance de q dans l'expression de l'ordre de B (voir [Car]), et en examinant les ordres des groupes B (voir table 1), on en déduit que B et B' ne peuvent pas être isomorphes.

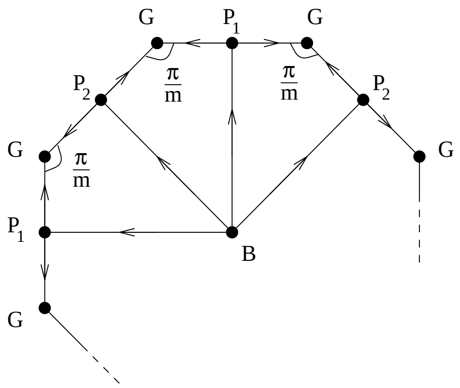


Figure 5 : Exemples (A): Polygones hyperboliques réguliers de groupes.

De plus, il n'existe pas d'isomorphisme de P_1 sur P_2 fixant point par point B. En effet, notons $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ les racines positives dans l'ordre croissant et U_{α_i} les groupes de racine correspondants, de sorte que P_1 est engendré par B et $U_{-\alpha_1}$, et P_2 par B et $U_{-\alpha_m}$. Un isomorphisme de P_1 sur P_2 fixant B envoie le centralisateur de U_{α_m} dans P_1 sur celui dans P_2. Comme $U_{-\alpha_1}$ centralise U_{α_m}, mais que le centralisateur de U_{α_m} dans P_2 est contenu dans B, ceci est impossible.

Donc si les groupes de sommet d'un polygone de groupes sont tous des groupes finis de type de Lie, alors le polygone P a un nombre pair $2p$ de côtés, et les groupes de sommet sont constants (voir figure 5 ci-dessus).

Si toutes les flèches sont les inclusions évidentes, on obtient bien un polygone de groupes, que nous appelerons *exemples (A)*. Si le cardinal du corps est premier, F. Haglund [Hag2] a récemment montré que le revêtement universel d'un polygone de groupes sur P ayant les mêmes groupes est le même que lorsque les flèches sont les inclusions.

Pour résumer les discussions précédentes, énonçons le résultat suivant, qui est aussi un cas particulier des résultats de [Hag2].

Proposition 3.5 *Les immeubles hyperboliques de dimension 2 homogènes, de links algébriques sur un corps de cardinal premier d'ordre au moins 5 sont les revêtements universels des exemples (A) (voir figure 5).* $\square$

Rappelons que tout automorphisme σ du corps fini $\mathbb{F}_q$ sous-jacent induit un automorphisme de G qui préserve B, P_1, P_2. Pour toute partie A de l'ensemble des sommets, on peut remplacer les trois inclusions arrivant dans le groupe de sommet de A par les inclusions composées par l'automorphisme induit par σ.

(B) Autre présentation pour certains des cas où les groupes de sommets sont des groupes finis de type de Lie

Supposons qu'il existe $\sigma : G \to G$ un isomorphisme de type graphe de G, d'ordre 2 avec $\sigma(P_1) = P_2$ et $\sigma(B) = B$. Par exemple, si $G = PSL_3(\mathbb{F}_q)$, on peut prendre σ la composée de l'inverse et de la transposition par rapport à l'antidiagonale. Alors l'immeuble hyperbolique donné par le polygone de groupes de la figure 5 ci-dessus (avec pour flèches les inclusions) peut aussi être défini par un triangle de groupes.

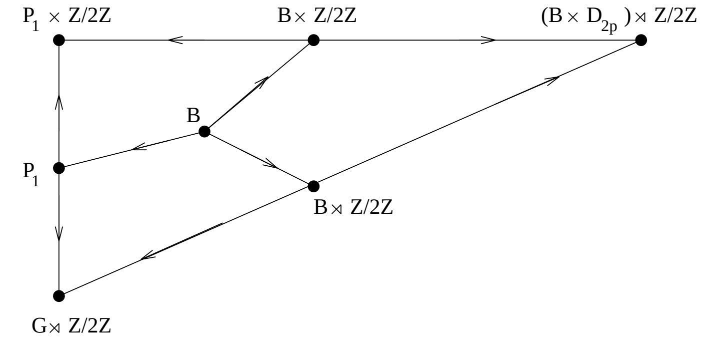


Figure 6 : Un triangle non épais de groupes.

En effet, si $2p$ est le nombre de côtés du polygone, alors le polygone de groupes a une symétrie évidente par un groupe d'ordre $4p$, de quotient le triangle de groupes ci-dessus. Le groupe D_{2p} est le groupe diédral d'ordre $2p$, de présentation $\langle a, b | a^2 = b^2 = (ab)^p = 1\rangle$. Dans les produits semi-directs, le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur G et B par σ et sur D_{2p} par permutation de a et b. L'inclusion de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans D_{2p} est celle envoyant le générateur sur a. Les morphismes sont alors ceux évidents.

(C) Cas où certains links de sommets sont des bigones généralisés

Il reste donc à comprendre quand une paire (P_1, B) d'un quadruplet de Chevalley $(G, B; P_1, P_2)$ est isomorphe à une paire (P_1, B) d'un groupe agissant transitivement sur les chambres d'un bigone généralisé (voir section précédente pour un exemple).

Un cas particulier important est quand B est trivial, car la commutativité du diagramme au-dessus de la proposition 3.1 est triviale. Par le théorème de Seitz 3.4 ci-dessus, il existe exactement deux groupes d'automorphismes H agissant simplement transitivement sur les chambres d'un m-gone généralisé classique avec $m \geq 3$, celui associé à $G = PSL_3(2)$ (voir figure 3) et $G = PSL_3(8)$, où H est respectivement d'ordre 3.7 et $3^2.73$.

Si G_i agit simplement transitivement sur les chambres d'un m_i-gone généralisé, avec stabilisateurs de sommets $P_{1,i}, P_{2,i}$, on obtient par la figure ci-dessous d'autres familles de polygones de groupes du modèle cherché (toujours avec un nombre pair de côtés).

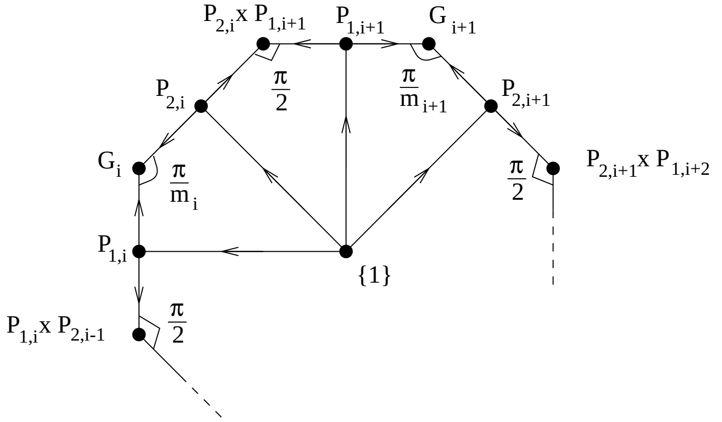


Figure 7 : Polygone hyperbolique de groupes avec angles droits.

Enfin, considérons $\mathcal{T}$ un triangle de groupes finis, de revêtement universel un immeuble hyperbolique de dimension 2 épais classique (voir la classification de Timmesfeld-Meixner-Stroth [Mei]), de groupes de sommets respectivement G_1, G_2, G_3, dont les angles sont nécessairement de la forme $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{m}$ respectivement, avec $m = 6$ ou 8, et la caractéristique ne peut être que 2 ou 3. Considérons une partition de $p = p_1 + \cdots p_{3s}$ avec $s \geq 1$ et les p_i entiers impairs. Soit P un polygone hyperbolique d'angles $\frac{\pi}{2}$ aux premiers p_1 sommets, d'angles $\frac{\pi}{m}$ aux $p_2 + p_3$ sommets suivants, d'angles $\frac{\pi}{2}$ aux p_4 sommets suivants, d'angles $\frac{\pi}{m}$ aux $p_5 + p_6$ sommets suivants, etc (dans un ordre cyclique). On munit alors P de la structure de polygones de groupes, de groupes des p_1 premiers sommets G_1, des p_2 sommets suivants G_2, des p_3 sommets suivants G_3, des p_4 sommets suivants G_1, etc, avec les groupes d'arête donnés par ceux de $\mathcal{T}$ (ce qui est cohérent, car p_i est impair).

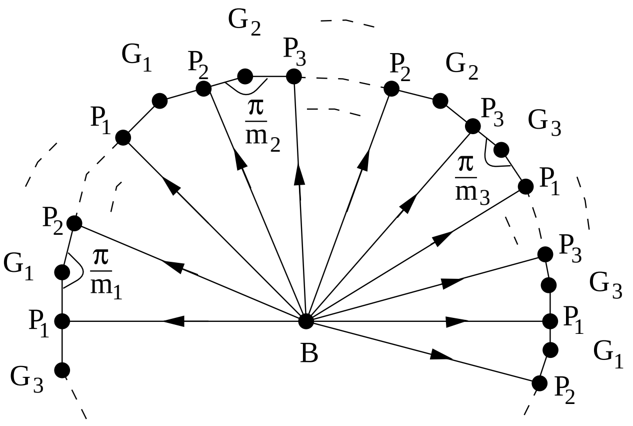


Figure 8 : Polygone hyperbolique de groupes exotiques.

3.2 Déformations d'immeubles fuschiens et revêtements branchés d'immeubles euclidiens

Si X est un immeuble hyperbolique de dimension 2, de chambre un polygone régulier P à un nombre pair de côtés, alors les techniques de F. Haglund [Hag1] (voir aussi [BB]) vont nous permettre ci-dessous de construire de nombreux exemples (qui n'admettent en général pas de sous-groupe discret cocompact d'isométries).

Théorème 3.6 *Soit P un polygone hyperbolique régulier d'angle π/m avec $m \geq 3$, ayant un nombre pair de côtés. Soit L un m-gone généralisé algébrique de cardinal du corps assez grand. Alors il existe une infinité non dénombrable d'immeubles hyperboliques de type $(W(P), S(P))$, dont tous les links sont isomorphes à L.*

Preuve. Cette preuve n'est qu'une adaptation des arguments de F. Haglund [Hag1]. Faisons d'abord une remarque préliminaire.

Si L est un m-gone généralisé algébrique de cardinal du corps assez grand, pour tout sommet s de L et arête a de L dont un sommet est s, il existe un automorphisme ϕ de l'étoile de s dans L, fixant a, qui ne s'étend pas en un automorphisme de L. Par exemple, pour le graphe d'incidence du plan projectif sur $\mathbb{F}_q$, c'est vrai dès que $q \geq 3$ car l'inclusion du groupe affine de la droite affine sur $\mathbb{F}_q$ dans le groupe de toutes les bijections de cette droite affine est propre.

Soit X l'immeuble hyperbolique de type $(W(P), S(P))$, dont tous les links sont isomorphes à L, construit comme revêtement universel du polygone de groupes de la figure 5 (exemples (A)). Soit C une chambre fixée de X, $[u, v]$ un côté de C de sommets u, v, et d le segment géodésique de C, perpendiculaire commun à $[u, v]$ et au côté opposé de $[u, v]$ dans C. Soit T la réunion des droites géodésiques de X contenant d. Soit $q + 1$ le nombre de polygones contenant $[u, v]$.

Le sous-espace T est un arbre, plongé de manière totalement géodésique dans X. Il est régulier de valence $q+1$ si le nombre de côtés de P est divisible par 4, birégulier sinon. Pour simplifier, nous ne traiterons que le cas divisible par 4, l'autre se traitant de facon analogue.

On oriente l'arête $T \cap C$ de T pour que son extrémité soit $T \cap [u, v] = \{s_1\}$. On se fixe un rayon géodésique R dans T commencant par $T \cap C$, et on note $s_0, s_1, s_2, \cdots$ ses sommets de sorte que $T \cap C = [s_0, s_1]$. On note C_i la chambre de X contenant $[s_i, s_{i+1}]$. En particulier, $C_0 = C$. On note T^+ (resp. T^-) la composante connexe de $T -]s_0, s_1[$ contenant s_1 (resp. s_0). On numérote arbitrairement de 1 à q les q arêtes de T issues d'un point de T^+ et ne pointant pas vers s_0. En particulier, l'ensemble des sommets de T^+ s'identifie à l'ensemble $\{1, \cdots, q\}^{(\mathbb{N})}$ des suites finies dans $\{1, \cdots, q\}$, de sorte que la suite vide corresponde à s_1.

L'arbre T sépare X en deux composantes connexes, d'adhérences notées X_+, X_-. On note $u_0, u_1, \cdots$ les sommets de X dans X_- tels qu'une arête de X issue de u_i contienne s_i. Pour $i \geq 1$, on identifie le link L_i de u_i dans X avec L, de sorte que l'arête de ce link correspondant à C_{i-1} soit a et le sommet de ce link correspondant à $[u_i, s_i]$ soit s.

Le link de s_i dans L_i s'identifie au link de s_i dans T, donc par la numérotation choisie avec $\{1, \cdots, q+1\}$ de sorte que $q+1$ corresponde au polygone C_{i-1}. Par la remarque préliminaire, il existe un automorphisme ϕ_i de $\{1, \cdots, q+1\}$ fixant $q+1$ et qui ne s'étend pas en un automorphisme de L_i.

Considérons une suite $\epsilon = (\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N} - \{0\}}$ avec $\epsilon_1 = \phi_1$, et ϵ_i valant soit l'identité du link de s_i dans T, soit ϕ_i pour $i \geq 2$, et qui n'est pas constante à partir d'un certain rang. On note $\theta_\epsilon : T \to T$ l'automorphisme fixant le sous-arbre T^- et vérifiant $\theta_\epsilon((a_i)_{i \in (\mathbb{N})}) = (\epsilon_i(a_i))_{i \in (\mathbb{N})}$ pour tout sommet $(a_i)_{i \in (\mathbb{N})}$ de T^+.

Notons $X_\epsilon = X_- \coprod_{\theta_\epsilon} X_+$ le recollement de X_- et X_+ par l'isomorphisme θ_ϵ de T vu dans X_- sur T vu dans X^+. Alors le complexe polygonal X_ϵ, qui est CAT(-1), est un immeuble hyperbolique de dimension 2 de même type que X (ses links n'ont pas changé et on applique le corollaire 2.4).

On identifie X_- avec ses images dans chaque X_ϵ. Supposons qu'il existe deux suites ϵ, ϵ' telles que $X_\epsilon, X_{\epsilon'}$ soient isomorphes. Par considération de type d'isomorphisme des voisinages d'arêtes, un tel isomorphisme envoie l'arête de X_ϵ issue de u_i sur celle de $X_{\epsilon'}$ issue de u_i, et les suites ϵ, ϵ' coïncident. Comme il existe un ensemble non dénombrable de telles suites, le résultat en découle. □

Remarque. (1) Le graphe biparti complet $K_{q,q}$ étant trop flexible, cette preuve ne marche pas pour $L = K_{q,q}$. Au contraire, M. Bourdon [Bou1] a montré que tout immeuble hyperbolique, de chambre le polygone hyperbolique régulier à p côtés et à angles droits et de links de sommets isomorphes au graphe biparti complet $K_{q,q}$, est isométrique à l'immeuble de Bourdon $I_{p,q}$.

(2) Le résultat analogue est beaucoup plus difficile dans le cas des immeubles triangulaires euclidiens d'ordre 2, voir [Bar].

Proposition 3.7 *Si X est un immeuble euclidien ou hyperbolique de dimension 2, et n un entier au moins 2, alors un revêtement de X branché d'ordre n au centre de chaque chambre de X admet une structure d'immeuble hyperbolique $\tilde{X}(n)$ de dimension 2. Si X admet un sous-groupe discret cocompact d'automorphismes, alors $\tilde{X}(n)$ aussi.*

Preuve. Notons X^* l'espace métrique X privé du barycentre de chacune de ses chambres. Par contractibilité de X, avec un choix de point base arbitraire, le groupe fondamental $\pi_1 X^*$ de X^* est un produit libre infini de groupes infinis cycliques, avec un générateur pour chaque chambre de X. Notons N le sous-groupe normal de $\pi_1 X^*$ normalement engendré par la puissance n-ème du bord de chaque chambre. Soit $\tilde{X}(n)$ le complété du revêtement $\widetilde{X^*}$ de X^* défini par N.

Comme le groupe fondamental de $\widetilde{X^*}$ est N, et que les générateurs de N sont triviaux en homotopie par passage au complété, nous en déduisons que $\tilde{X}(n)$ est simplement connexe. Si C est une chambre de X, alors le revêtement d'ordre $n \geq 2$ branché au barycentre de C admet une structure de polygone hyperbolique, dont les angles correspondent à ceux de C par l'application de revêtement. En munissant les 2-cellules de $\tilde{X}(n)$ de cette structure, le fait que $\tilde{X}(n)$ est un immeuble hyperbolique de dimension 2 découle alors du corollaire 2.4, les links n'ayant pas changé.

Par construction, $\mathrm{Aut}(\tilde{X}(n))$ contient un sous-groupe $G(n)$ qui s'insère dans une suite exacte

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G(n) \longrightarrow \mathrm{Aut}(X) \longrightarrow 1.$$

Si $\mathrm{Aut}(X)$ agit transitivement sur les chambres de X, alors $G(n)$ agit aussi transitivement sur les chambres de $\tilde{X}(n)$. Les fixateurs dans $G(n)$ de points de $\tilde{X}(n)$ s'envoient isomorphiquement sur les fixateurs correspondants dans $\mathrm{Aut}(X)$. La dernière assertion s'en déduit. □

Nous renvoyons à [Bou2] pour un autre procédé d'hyperbolisation des immeubles euclidiens. Comme dans [Bou2], en tirant en arrière par revêtement branché, nous en déduisons que tout réseau dans un groupe algébrique semi-simple de rang 2 sur un corps local (comme $PSL_3(K)$ avec K égal à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}((t))$ ou à une extension finie de $\mathbb{Q}_p$) admet une extension (de noyau un produit libre infini) qui est un réseau dans un immeuble fuschien.

3.3 Polyèdres hyperboliques à angles droits

Les constructions dans cette section sont essentiellement dues à J. Meier et à M. Davis (voir par exemple [Dav2]).

Soit P un polyèdre hyperbolique de volume fini, à angles dièdres droits (de dimension est au moins 2), et soit P_∞ l'ensemble de ses sommets à l'infini.

En dimension 2, il est facile de classer ces polyèdres (il y a des modules). En dimension 3, le théorème d'Andreev [And] permet de les caractériser par la combinatoire de leur bord. (Dans le cas compact, ce sont exactement les cellulations duales des triangulations de la sphère de dimension 2 différentes du simplexe et du dual du prisme, telles que tout cycle d'arêtes de longueur trois dans cette triangulation borde une face, et tout cycle de longueur quatre borde la réunion de deux faces recollées le long d'une arête.) Par exemple, il existe un dodécaèdre hyperbolique régulier à angles droits. D'après une communication personnelle d'I. Rivin, il y a une infinité de P en dimension 4, et aucun en dimension au moins 5.

Si $I = I(P)$ est l'ensemble des faces de codimension 1 de P, soit G_i un groupe fini de cardinal $n_i \geq 2$ pour tout i dans I (par exemple $G_i = \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$). Si σ est une face de P différente d'un sommet à l'infini, disons que $\sigma = \cap J$ pour $J \subset I$ (avec par convention $J = \emptyset$ si $\sigma = P$), et posons $G_\sigma = \prod_{j\in J} G_j$. Comme P est un polyèdre de Coxeter, les links de ses faces (différentes d'un sommet à l'infini) sont des simplexes (voir [Vin]). Donc l'écriture $\sigma = \cap J$ existe et est unique.

Si $\sigma = \cap J$ est une face propre de $\tau = \cap K$ (avec $\sigma \notin P_\infty$) et a est l'arête de la subdivision barycentrique de P d'origine τ et d'extrémité σ, posons $\psi_a : G_\tau = \prod_{i\in K} G_i \to G_\sigma = \prod_{i\in J} G_i$ le morphisme de groupes injectif évident donné par l'inclusion $K \subset J$.

Il est immédiat de vérifier que $\mathcal{C} = (P, \{G_\sigma\}, \{\psi_a\})$ est un polytope de groupes dont le développement lk-local d'une face $\sigma = \cap J \notin P_\infty$ de dimension k est un joint sphérique itéré d'ensembles finis à n_j éléments pour j parcourant J. En particulier $\mathcal{C}$ est à courbure négative.

Par la section 1.5, la limite inductive Γ des $(\{G_\sigma\}, \{\psi_a\})$ est un groupe discret d'isométries d'un complexe polyédral CAT(-1) localement fini $\tilde{X}$ (le revêtement universel de $\mathcal{C}$).

3.4 Polyèdres idéaux

Nous construisons ci-dessous des exemples de gros groupes paraboliques d'isométries de complexes polyédraux CAT(-1), qui sont contenus dans des groupes discrets de covolume fini.

Soient X un complexe polyédral hyperbolique fini, avec X_∞ non vide (i.e. dont au moins l'une des cellules a au moins un point à l'infini) et $\mathcal{C}$ un complexe de groupes finis sur X. Supposons $\mathcal{C}$ à courbure négative (au sens de la section 1.5).

Notons $\tilde{X}$ le revêtement universel de $\mathcal{C}$ (qui existe par le théorème 1.7). Alors $\tilde{X}$ est un complexe polyédral CAT(-1) localement compact. L'action sur $\tilde{X}$ du groupe fondamental de $\mathcal{C}$ est discrète, car les fixateurs de cellules sont finis, et de covolume fini, car X est de volume fini.

Soit $x_0 \in X_\infty$. Nous avons vu dans la section 1.5 que le link de x_0 dans X hérite de $\mathcal{C}$ une structure de complexe de groupes, notée $\mathcal{C}_{x_0}$, qui est développable. Soit G_{x_0} le groupe fondamental de $\mathcal{C}_{x_0}$.

Alors il découle des résultats de [Hae] que G_{x_0} s'injecte dans le groupe fondamental de $\mathcal{C}$, d'image le stabilisateur d'un point à l'infini de $\tilde{X}$ (au-dessus de x_0). Une horosphère de $\tilde{X}$ suffisamment petite centrée en ce point est isométrique (pour la métrique de longueur induite) au revêtement universel de $\mathcal{C}_{x_0}$. Comme G_{x_0} préserve ces horosphères, c'est un groupe parabolique.

Comme X n'a qu'un nombre fini de cellules et est conique à l'infini, en prenant dans X une horosphère suffisamment petite centrée en chaque point de X_∞, et en prenant l'image réciproque dans le revêtement universel $\tilde{X}$, on obtient une famille équivariante d'horoboules centrées en tous les points paraboliques, ces horosphères étant de plus à distance minorée par une constante strictement positive. Il découle alors de la proposition 5.12 de [Bow3] que le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{C})$ est un groupe géométriquement fini au sens de Tukia-Bowditch [Tuk, Bow2] et est hyperbolique relativement à l'ensemble de ses sous-groupes paraboliques maximaux, au sens de Gromov-Farb-Bowditch [Bow3].

Supposons que G_{x_0} contienne un groupe libre de rang 2. Par la proposition 1.6 de [BM], puisqu'un groupe qui contient un groupe libre de rang 2 n'est pas moyennable, l'exposant critique de G_{x_0} est infini. Donc l'exposant critique de $\pi_1(\mathcal{C})$ est infini.

Exemple 1 : Considérons un triangle hyperbolique idéal de groupes finis, de groupe du triangle trivial, et groupes des arêtes les groupes finis A, B, C. Il est clairement à courbure négative, donc développable, de revêtement universel noté $\tilde{X}$. Le groupe fondamental G est le produit libre $A * B * C$, les sous-groupes paraboliques maximaux sont les conjugués de $A * B, A * C$ et $B * C$, qui contiennent un groupe libre de rang 2 si A, B, C sont de cardinal au moins 3. Les horosphères sont isométriques pour la distance de longueur induite aux arbres de Bass-Serre des produits libres $A*B$, $A*C$ et $B*C$. Mais toute droite géodésique dans un tel arbre est contenue dans une copie d'un plan hyperbolique, et y est une horosphère, donc est exponentiellement distordue pour la distance induite. Dans ce cas, il est facile de montrer directement que la série de Poincaré diverge en tout exposant fini et que la dimension de Hausdorff du bord est infinie. Le bord est une courbe (compact connexe métrisable, de dimension topologique 1), dont les seuls points de coupure locaux sont les points fixes paraboliques. Il est homéomorphe à l'espace topologique quotient du Cantor des bouts de l'arbre de Bass-Serre du produit libre $A * B * C$ par la relation d'équivalence qui écrase en un point l'ensemble limite de chaque conjugué de $A * B, A * C$ ou $B * C$.

Montrons comment épaissir $\tilde{X}$ de manière équivariante sous G pour obtenir une variété riemanienne complète $\tilde{M}$ à courbure inférieure ou égale à -1 (mais non minorée). Pour simplifier, supposons $A = B = C = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Soit Δ un triangle hyperbolique idéal de $\mathbb{H}^2$. Il existe sur $\Delta \times [0, +\infty[$ une métrique riemanienne complète, ayant une symétrie d'ordre trois autour du rayon $\{x\} \times [0, +\infty[$ où x est le barycentre de Δ, telle que $\Delta \times \{0\}$ et $c \times [0, +\infty[$ pour chaque côté c de Δ sont totalement géodésiques et isométriques à respectivement Δ et un demi-plan hyperbolique, et tel que les angles dièdres le long de $c \times \{0\}$ entre $\Delta \times \{0\}$ et $c \times [0, +\infty[$ soient $\frac{\pi}{3}$ pour chaque côté c de Δ. Montrons brièvement comment obtenir une telle métrique.

Le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ sépare l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ en deux composantes connexes d'adhérences $\mathbb{H}^3_-, \mathbb{H}^3_+$. L'intersection entre $\mathbb{H}^3_+$ et les trois demi-espaces contenant Δ et dont le bord fait un angle $\frac{\pi}{3}$ avec $\mathbb{H}^2$ ne convient pas, car les trois demi-plans dans $\mathbb{H}^3_+$ contenant les trois côtés de Δ et faisant un angle $\frac{\pi}{3}$ avec Δ se rencontrent. Mais en faisant tendre la courbure vers $-\infty$ en s'approchant des pointes de Δ, on obtient l'exemple souhaité.

En doublant $\Delta \times [0, +\infty[$ (avec la métrique décrite ci-dessus) le long de $\Delta \times \{0\}$, on obtient un triangle épaissi. En recollant une copie de ce triangle épaissi pour chaque triangle de $\tilde{X}$ suivant la combinatoire de $\tilde{X}$, de sorte que chaque conjugué de A, B, C agisse comme une symétrie d'ordre 3 autour de chaque arête, on obtient la variété $\tilde{M}$ cherchée. Notons que $\tilde{X}$ est plongé de manière quasi-convexe dans $\tilde{M}$, et invariante par G.

En prenant pour M la variété $\tilde{M}/G$, la proposition 0.3 s'en déduit.

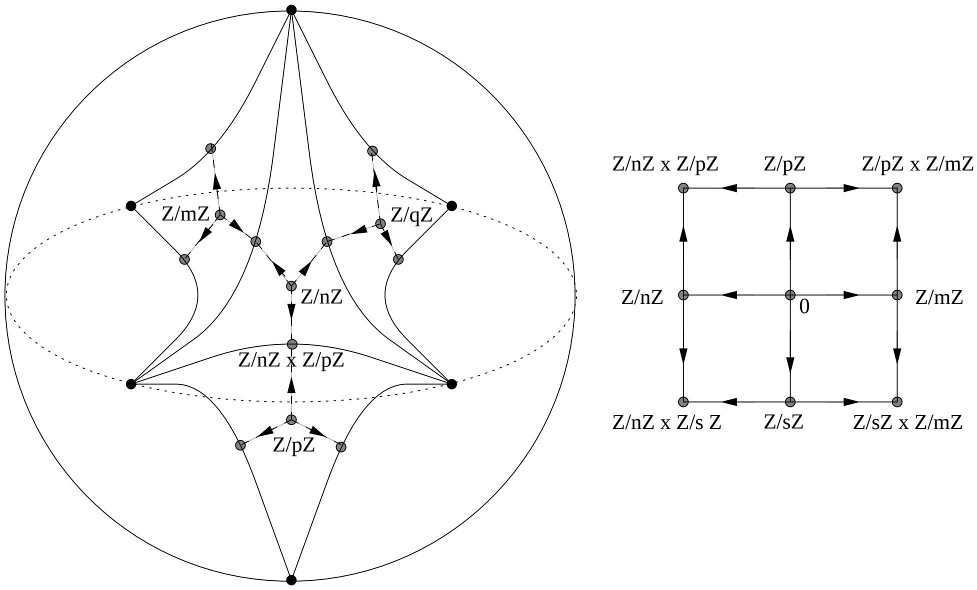


Figure 9 : Octaèdre hyperbolique idéal à angles droits.

Exemple 2 : Soit P un polyèdre hyperbolique idéal (i.e. tous ses sommets sont à l'infini) à angles dièdres droits, par exemple l'octaèdre hyperbolique idéal régulier de la figure 9. Reprenons la construction et les notations de la section 3.3.

Par le raisonnement précédent l'exemple 1, la limite inductive Γ des $(\{G_\sigma\}, \{\psi_a\})$ est un groupe discret non élémentaire d'isométries d'un complexe polyédral CAT(-1) localement fini $\tilde{X}$. Soit x un sommet de P. Si Γ_x est la limite inductive des $(\{G_\sigma\}, \{\psi_a\})$ pour σ parcourant l'ensemble des faces de P contenant strictement x, alors Γ_x est un sous-groupe de Γ fixant un point à l'infini de $\tilde{X}$.

Si, pour une face i de codimension 1 contenant x, l'un des n_i, disons n_{i_0}, est au moins 3, alors le groupe de type fini G_x contient un groupe libre de rang 2. En effet, G_x a pour présentation

$$G_x = \langle *_{\{i,\, x \in i\}} G_i \ \mid \ [G_i, G_j] = 1 \ \text{ si } \ i \cap j \neq \{x\} \rangle.$$

Comme le link de x dans P est combinatoirement un cube (c'est un polyèdre euclidien à angles droits), si j_0 est la face de codimension 1 de P opposée à i_0 dans le link de x, alors les applications canoniques (la première injective, la seconde surjective) de composée l'identité

$$G_{i_0} * G_{j_0} \to *_{\{i,\, x\in i\}} G_i \to G_{i_0} * G_{j_0}$$

induisent des applications

$$G_{i_0} * G_{j_0} \to G_x \to G_{i_0} * G_{j_0}$$

de composée l'identité. Donc G_x contient un produit libre de deux groupes finis d'ordre l'un au moins 2, l'autre au moins 3, donc contient un groupe libre de rang 2.

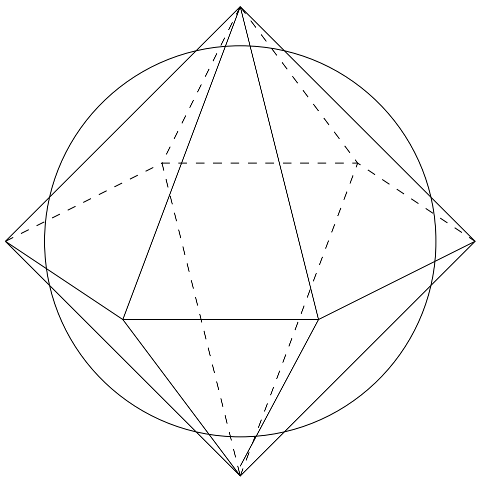
3.5 Polyèdres hyperidéaux tronqués

Certains polyèdres hyperboliques hyperidéaux P (i.e. dans le modèle projectif de $\mathbb{H}^n$, ce sont des polyèdres dont les sommets sont contenus dans le complémentaire de l'adhérence de $\mathbb{H}^n$, et dont les arêtes rencontrent $\mathbb{H}^n$), une fois tronqués par les hyperplans polaires des sommets, sont des polyèdres de Coxeter (voir [VS]). Nous en donnons ci-dessous une famille (à quatre paramètres k, m, q, s) en dimension 3, munie d'une structure de polytope de groupes.

Pour tous entiers $k \geq 4$ et $m \geq 2$, avec k pair et $m \geq 3$ si $k = 4$, il existe un (unique) polyèdre hyperbolique hyperidéal de dimension 3, dont les angles dièdres sont $\frac{\pi}{m}$ et qui est combinatoirement la suspension d'un k-gone (voir figure de gauche ci-dessous si $k = 6$). En tronquant par les hyperplans polaires des sommets, on obtient un polyèdre hyperbolique de Coxeter $P = P(k, m)$, dont les angles dièdres aux arêtes intersections avec les hyperplans polaires sont $\pi/2$. L'existence découle ou bien d'arguments de continuité à partir du polyèdre hyperbolique idéal correspondant, ou bien du théorème d'Andréev sur le polyèdre combinatoire tronqué (voir [And]). Nous appelerons *nouvelles* les faces et arêtes de P contenues dans des hyperplans polaires, et *originelles* les autres.

Pour tout quadruplet de Chevalley $(G, B; P_1, P_2)$ dont l'immeuble est un m-gone généralisé, et tout entier $s \geq 2$, donnons une structure de polytope de groupes sur P (voir figure de droite ci-dessous pour $k = 4$).

Le groupe de P lui-même est B. Le groupe d'une face originelle est P_1 ou P_2, de sorte que deux telles faces se rencontrant en une arête n'ont pas le même groupe. Ceci est possible car k est pair. Le groupe d'une face nouvelle est $B \times \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$. Le groupe d'une arête originelle est G. Le groupe d'une arête nouvelle est $P_i \times \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$, où P_i est le groupe d'une face originelle qui la contient. Enfin, le groupe d'un sommet est le groupe $H = G \times \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$. Les morphismes de groupes sont les inclusions évidentes. Le groupe H agit naturellement sur l'immeuble sphérique qui est le joint sphérique d'un ensemble de cardinal s et du graphe de Chevalley $C(G, B; P_1, P_2)$. L'action est transitive sur les chambres, et le quotient est bien le triangle sphérique de groupes induit sur le link d'un sommet de P.



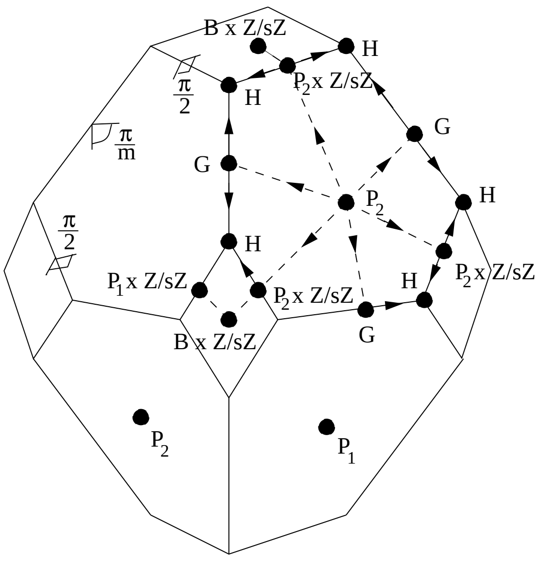


Figure 10 : Octaèdre hyperidéal tronqué.

Par le théorème 2.1, ce polytope de groupes est développable, de revêtement universel un immeuble hyperbolique de type $(W(P), S(P))$. Le groupe fondamental du polytope de groupes est un sous-groupe discret cocompact d'isométries polyèdrales de l'immeuble, préservant le type, et il agit transitivement sur les chambres.

4 Cohomologie à l'infini des immeubles

Soit X un espace métrique CAT(0) complet localement compact. Rappelons que l'on note ∂X l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques $r : [0, +\infty[\rightarrow X$ pour la relation d'équivalence $r \sim r'$ si les images de r et r' restent à distance de Hausdorff finie. Il existe (voir [GH, BH]) sur la réunion disjointe $\overline{X}$ de X et de ∂X une et une seule topologie qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\overline{X}$ est métrisable, compact, contractile,
- la topologie induite sur X est la topologie originelle de X, et X est un ouvert dense dans $\overline{X}$,
- l'action du groupe des isométries de X s'étend continuement en une action continue sur $\overline{X}$,
- une suite de points $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de X converge vers un point a de ∂X si et seulement si la suite des x_i sort de tout compact et la suite des segments géodésiques entre x_0 et x_i reste à distance bornée de l'image d'un rayon géodésique représentant a.

Pour tout point x de X et toute suite croissante de réels $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, considérons la suite des sphères $S(x, r_i)$ de centre x et rayon r_i, et la suite des applications $p_i : S(x, r_{i+1}) \rightarrow S(x, r_i)$ qui à un point y de $S(x, r_{i+1})$ associe l'unique point à distance r_i de x sur l'unique géodésique entre x et y. Par inégalité CAT(0), les applications p_i sont continues.

Pour tout i, considérons l'application $f_i : \partial X \rightarrow S(x, r_i)$, qui à un point a associe l'unique point à distance r_i de x sur l'unique rayon géodésique issu de x représentant a. Il est clair par inégalité CAT(0) que les f_i sont continues, et que $f_i = p_i \circ f_{i+1}$.

Considérons $S(x, \infty) = \varprojlim S(x, r_i)$ la limite projective de $((S(x, r_i))_{i\in\mathbb{N}}, (p_i)_{i\in\mathbb{N}})$, munie de la topologie limite projective. Comme les $S(x, r_i)$ sont compacts, $S(x, \infty)$ l'est aussi.

Les applications f_i induisent une application continue $f_\infty : \partial X \rightarrow S(x, \infty)$. Il est immédiat qu'elle est injective (si deux rayons géodésiques coïncident sur tous les segments $[0, r_i]$, ils sont égaux) et surjective. Comme les espaces ∂X et $S(x, \infty)$ sont compacts, l'application f_∞ est un homéomorphisme.

Supposons maintenant que X est un immeuble euclidien ou hyperbolique localement fini (de dimension ≥ 2). Fixons-nous x un point de X, intérieur à une chambre c_0. Remarquons que la fonction distance à x est une fonction C^∞ en restriction à tout appartement contenant c_0 (privé de x). Par locale finitude, et puisque que pour toute chambre c, il existe au moins un appartement contenant c_0 et c, il existe une suite strictement croissante de réels s_i, avec $s_0 = 0$, telle que pour s différent d'un s_i, la sphère $S(x, s)$ n'est tangente à aucune cellule de X (de codimension non nulle). Par un argument de dénombrabilité et par convexité stricte des sphères dans l'espace euclidien ou hyperbolique, quitte à bouger un peu x, nous pouvons supposer que les points de tangence des sphères $S(x, s_i)$ avec une cellule sont à l'intérieur de cette cellule. Posons $r_i = \frac{1}{2}(s_i + s_{i+1})$. Notons que pour $s_i < r \leq r' < s_{i+1}$, les sphères $S(x, r')$ sur $S(x, r)$ sont homéomorphes.

Proposition 4.1 *L'espace topologique $S(x, r_i)$ a le type d'homotopie d'un bouquet fini de sphères de dimension $n-1$, si les appartements de X sont de dimension n. Si X est épais, alors le nombre de sphères du bouquet tend vers l'infini quand $i \rightarrow \infty$.*

Preuve. Rappelons (voir [Ron]) qu'un immeuble sphérique I fini de dimension p a le type d'homotopie d'un bouquet fini de sphères de dimension p, et que toute boule ouverte de rayon $< \frac{\pi}{2}$ est contractile. De plus, si c est une chambre de I, alors le complémentaire dans I des intérieurs des chambres opposées à c se rétracte canoniquement sur tout point de c, donc le bouquet de sphères contient exactement une sphère pour toute chambre opposée à c.

Considérons un petit voisinage convexe V d'un point de tangence y entre la sphère $S(x, s_i)$ et une cellule ouverte de X. Notons v le point du Link $\mathrm{Lk}(y)$ de X en y correspondant au germe de segment géodésique de y vers x, et c la chambre de $Lk(y)$ contenant v (unique par l'hypothèse sur le choix de x). Identifions $\mathrm{Lk}(y)$ avec la sphère $S(y, \eta_0)$ de centre y et de rayon η_0, avec $\eta_0 > 0$ suffisamment petit (avec en particulier $B(y, \eta_0)$ contenue dans V).

Soit $\epsilon > 0$ suffisament petit, et en particulier petit devant η_0. La sphère $S(x, s_i - \epsilon)$ sépare $S(y, \eta_0)$ en deux composantes connexes, d'adhérence S_-, S_+ avec disons S_- contenant v. Notons que S_- est contenue dans une boule de ce Link de centre v et de rayon $< \frac{\pi}{2}$. Alors $S(x, s_i + \epsilon)$ est obtenue (dans ce voisinage V) à partir de $S(x, s_i - \epsilon)$ en faisant une somme connexe avec le Link de y, au sens suivant : l'intersection de $S(x, s_i + \epsilon)$ et de V est homéomorphe à la réunion de $V \cap (S(x, s_i - \epsilon) - B(y, \eta_0))$ et de S^+. Comme $S(x, s_i - \epsilon) \cap \overline{B}(y, \eta_0)$ se rétracte (relativement au bord $S(x, s_i - \epsilon) \cap S(y, \eta_0)$) sur S_- par la rétraction le long des rayons géodésiques issus de y, les parties $S(x, s_i - \epsilon) \cap \overline{B}(y, \eta_0)$ et S_- sont contractiles. Donc en trace dans V, le type d'homotopie de $S(x, s_i + \epsilon)$ est obtenu à partir de celui de $S(x, s_i - \epsilon)$ par somme connexe pointée avec un bouquet de sphères de dimension $n - 1$, une par chambre opposée à c dans $\mathrm{Lk}(y)$. Le résultat en découle. $\square$

Théorème 4.2 *Soit X un immeuble euclidien ou hyperbolique localement fini de dimension n. Alors $H_c^k(X; \mathbb{Z})$ est nul pour $k \neq n$ et abélien libre pour $k = n$, de dimension infinie si X est épais.*

Preuve. Notons $\tilde{H}^k(Y; \mathbb{Z})$ le k-ème groupe de cohomologie réduite d'Alexander-Spanier d'un espace topologique Y à coefficients $\mathbb{Z}$. Comme $\overline{X}$ est compact contractile et ∂X fermé dans $\overline{X}$, on a par la suite exacte de cohomologie à support compact relative

$$H_c^k(X; \mathbb{Z}) \simeq \tilde{H}^{k-1}(\partial X; \mathbb{Z}).$$

Notons $\tilde{\check{H}}^k(Y; \mathbb{Z})$ le k-ème groupe de cohomologie réduite de Cěch d'un espace topologique Y à coefficients $\mathbb{Z}$. Comme ∂X est compact, on a

$$\tilde{H}^k(\partial X; \mathbb{Z}) \simeq \tilde{\check{H}}^k(\partial X; \mathbb{Z}).$$

Comme ∂X est homéomorphe à la limite projective des sphères $S(x, r_i)$, on en déduit

$$\tilde{\check{H}}^k(\partial X; \mathbb{Z}) \simeq \varinjlim \tilde{\check{H}}^k(S(x, r_i); \mathbb{Z}).$$

Les $\tilde{\check{H}}^k(S(x, r_i); \mathbb{Z})$ sont des groupes abéliens libres, triviaux si $k \neq n - 1$, et l'application $p_i^* : \tilde{\check{H}}^{n-1}(S(x, r_i); \mathbb{Z}) \to \tilde{\check{H}}^{n-1}(S(x, r_{i+1}); \mathbb{Z})$ est l'inclusion dans un facteur abélien libre, propre si X est épais, par la proposition précédente. Le résultat en découle. $\square$

Bibliographie

[AS] U. Abresch, V. Schroeder, *Graph manifolds, ends of negatively curved manifolds and the hyperbolic 120-cell space*, J. Diff. Geom. **35** (1992), 299-336.

[And] E.M. Andreev, *On convex polyhedra in Lobachevskii space*, Math. USSR Sb. **12** (1970), 413–440.

[AB] M. Ashbacher, S. Smith, *Tits geometries over GF*(2) *defined by groups over GF*(3), Comm. Alg. **11** (1983) 1675–1684.

[BB] W. Ballmann, M. Brin, *Polygonal complexes and combinatorial group theory*, Geom. Dedicata **50** Serie I (1994) 165-191.

[BS] W. Ballmann, J. Swiatkowski, *On* L^2*-cohomologie and property* (T) *for automorphism groups of polyedral cell complexes*, GAFA **7** (1997) 615-645.

[Bar] S. Barré, *Polyèdres finis de dimension* 2 *à courbure* ≤ 0 *et de rang* 2, Ann. Inst. Four. Grenoble **45** (1995) 1037-1059.

[Bour] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 4,5,6, Hermann, Paris, 1968.

[Bou1] M. Bourdon, *Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow*, GAFA **7** (1997) 245-268.

[Bou2] M. Bourdon, *Sur les immeubles fuschiens et leur type de quasi-isométrie*, à paraître dans Erg. Theo. Dyn. Syst.

[Bow1] B. Bowditch, *Discrete parabolic groups*, J. Diff. Geom. **38** (1993), 559-583.

[Bow2] B. Bowditch, *Geometrical finiteness with variable negative curvature*, Duke Math. J. **77** (1995), 229-274.

[Bow3] B. Bowditch, *Relatively hyperbolic groups*, prépublication Univ. Southampton 1997.

[Bri] M.R. Bridson, *Geodesics and curvature in metric simplicial complexes*, dans "Group theory from a geometrical viewpoint" E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky eds, ICTP, Trieste, 26 Mars-6 Avril 1990, World Scientific (1991), 373-463.

[BH] M.R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces with non-positive curvature*, Grund. math. Wiss. **319**, Springer Verlag (1999).

[Bro] K. Brown, *Buildings*, Springer Verlag, 1989.

[Bug] V. Bugaenko, *Groups of automorphisms of unimodular hyperbolic quadratic forms over the ring* $\mathbb{Z}[(\sqrt{5}+1)/2]$, Moscow Univ. Math. Bull. **39** (1984) 6-14.

[BM] M. Burger, S. Mozes, *CAT(−1) spaces, divergence groups and their commensurators*, J. Amer. Math. Soc **9** (1996) 57-94.

[Car] R.W. Carter, *Simple groups of Lie type*, Pure Appl, Math. **28**, Wiley (1972).

[CSM] R.W. Carter, G. Segal, I. MacDonald, *Lectures on Lie algebras and Lie groups*, Lond. Math. Soc. Student Texts **32**, Cambridge Univ. Press, 1995.

[CT] C. Charitos, G. Tsapongas, *Geodesic flow on ideal polyedra*, Can. J. Math. **49** (1997) 696-707.

[CD] R. Charney, M. Davis, *Singular metrics of nonpositive curvature on branched covers of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **115** (1993), 929-1009.

[DP] F. Dal'bo, M. Peigné, *Géodésiques fermées et pointes en courbure variable*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I **322** (1996) 939-944.

[Dav1] M. Davis, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. of Math. **117** (1983) 293-324.

[Dav2] M. Davis, *Buildings are CAT(0)*, dans "Geometry and cohomology in group theory", P. Kropholler et al (ed.), Lond. Math. Soc. Lect. Notes Ser. **252**, Camb. Univ. Press. (1998) 108-123.

[GH] E. Ghys, P. de la Harpe, eds. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Prog. in Math. **83**, Birkhäuser 1990.

[Gro] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in "Essays in group theory", S. Gersten ed., pp. 75-263, MSRI Pub. **8**, Springer Verlag 1987.

[Hae] A. Haefliger, *Complexes of groups and orbihedra*, dans "Group theory from a geometrical viewpoint" (E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky eds.), 504-540 World Scientific, 1991.

[Hag1] F. Haglund, *Les polyèdres de Gromov*, Thèse, ENS Lyon, 1992.

[Hag2] F. Haglund, *Existence, unicité et homogénéité de certains immeubles hyperboliques*, Prépublication Orsay Sep. 1999.

[HP] F. Haglund, F. Paulin, *Simplicité de groupes d'automorphismes d'espaces à courbure négative*, Geometry and Topology Monographs Vol 1: The Epstein Birthday Schrift, I. Rivin, C. Rourke, C. Series, eds, (1998) 181-248, International Press.
`http://www.maths.warwick.ac.uk/gt/gtmcontents1.html`

[Har] P. de la Harpe, *An invitation to Coxeter groups*, dans "Group theory from a geometrical viewpoint " (E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky eds.), pp 193-253, World Scientific, 1991.

[Hum] J.E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Kos] J.-L. Koszul, *Lectures on hyperbolic Coxeter groups*, Univ. Notre Dame, 1967.

[Mei] T. Meixner, *Groups acting transitively on locally finite classical Tits Chamber systems*, dans "Finite geometries, buildings and related topics", W. Kantor, R. Liebler, S. Payne, E. Shult, Oxford Univ. Press. 1990.

[Mou] G. Moussong, *Hyperbolic Coxeter groups*, Doctoral Dissertation, Ohio State University, 1988.

[Rat] J. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*, GTM **149**, Springer Verlag, 1994.

[Rem] B. Remy, *Immeubles à courbure négative et théorie de Kac-Moody*, prépublication Nancy 1998.

[Ron] M.A. Ronan, *Lectures on buildings*, Persp. Math. **7**, Academic Press, 1989.

[Sei] G. Seitz, *Flag transitive subgroups of Chevalley groups*, Ann. Math. **97** (1973) 27-56.

[Tay] D.E. Taylor, *The geometry of the classical groups*, Sigma Ser. Pure Math. **9**, Heldermann 1992.

[Tit1] J. Tits, *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Lect. Notes **386**, Springer Verlag, 1974.

[Tit2] J. Tits, *Building and group amalgamations*, Proc. Groups - St-Andrew 1985, Lond. Math. Soc. Lect. Notes Ser. **121**, Camb. Univ. Press 1987, pp. 110-127.

[Tit3] J. Tits, *Ensembles ordonnés, immeubles et sommes amalgamées*, Bull. Soc. Math. Belgique, Sér. A **38** (1986) 367-387.

[Tit4] J. Tits, *Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields*, J. Alg **105** (1987) 542-573.

[Tuk] P. Tukia, *Conical limit points and uniform convergence groups*, prépublication, Univ. Helsinki 1996.

[Vin] E.B. Vinberg, *Hyperbolic reflection groups*, Russian Math. Surv. **40** (1985), 31-75.

[VS] E. Vinberg, O. Shvartsman, *Discrete groups of motions of spaces of constant curvature*, in "Geometry II: Spaces of constant curvature", E. Vinberg ed., Enc. Math. Scien **29**, Springer Verlag 1993, 139-248.

[Zuk] A. Zuk, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (1996), no. 5, 453–458

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, UMR 128 CNRS
Ecole Normale Supérieure de Lyon
46 allée d'Italie, 69364 LYON CEDEX 07, FRANCE
gaboriau@umpa.ens-lyon.fr `http://umpa.ens-lyon.fr/~gaboriau`

Laboratoire de Topologie et Dynamique, URA 1169 CNRS
Bât. 425, Université Paris XI
91405 ORSAY, FRANCE
Frederic.Paulin@math.u-psud.fr `http://math.u-psud.fr/~paulin`