Sur les automorphismes extérieurs des groupes hyperboliques

Frédéric Paulin

Abstract

We prove that an infinite nilpotent group of outer automorphisms in any word-hyperbolic group fixes projectively an action on an $\mathbb{R}$-tree. In particular, we give short proofs of the theorem that any outer automorphism of a free group has a fixed point in the compactified Culler-Vogtmann Outer Space, and of Scott's conjecture on the rank of the fixed points subgroup of a free group automorphism. [1]

Introduction

Dans [Gro2], M. Gromov définit une classe de groupes, les *groupes hyperboliques*, qui généralise largement la classe des groupes fondamentaux de variétés compactes à courbure négative. Nous renvoyons à [Gro2, Gro3, GH, Ghy] pour la définition et les premières propriétés.

Un *arbre réel* est un espace métrique tel qu'il existe un unique arc topologique entre deux points distincts donnés, et dans lequel tout arc est isométrique à un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous renvoyons à [Sha1, Sha2, Mor, Pau4] pour les motivations et les premières propriétés.

Si Γ est un groupe, notons $\mathrm{Out}(\Gamma) = \mathrm{Aut}(\Gamma)/\mathrm{Int}(\Gamma)$ le groupe de ses automorphismes extérieurs. Si H est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, nous noterons $\Gamma \rtimes H$ le produit semidirect de Γ par H pour l'action naturelle de H sur Γ. Une *action affine* d'un groupe Γ sur un espace métrique X est une action de Γ sur X pour laquelle il existe un morphisme de groupe $\lambda : \Gamma \to \mathbb{R}_+^*$ tel que $d(g.x, g.y) = \lambda(g)d(x, y)$ pour tous x, y dans X et g dans Γ. Nous renvoyons à [Lio] pour les généralités sur les actions affines de groupe sur les arbres réels. Dans ce texte, un groupe est dit *moyennable* si toute action lineaire sur un espace vectoriel topologique localement convexe, préservant un cône à base compacte y possède un rayon invariant.

Théorème A *Soit Γ un groupe hyperbolique, et H un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *dont l'image dans* $\mathrm{Out}(\Gamma)$ *est moyennable, de centre infini. Il existe un arbre réel T, muni d'une action affine de $\Gamma \rtimes H$, telle que la restriction de l'action à Γ est isométrique, sans point fixe global, et à stabilisateurs d'arc virtuellement cycliques.*

Avant de donner des applications de ce résultat, expliquons-en les origines.

Soit X une surface de Riemann compacte, connexe, de genre $g \geq 2$. Rappelons que $\Gamma = \pi_1 X$ est un exemple typique de groupe hyperbolique. L'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(X)$ de X s'identifie (voir [Thu, FLP]) à l'espace des classes de conjugaison de morphismes de groupe $\Gamma \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ injectifs d'image discrète. Le groupe $\mathrm{Out}(\Gamma)$ (plus connu sous le nom de groupe modulaire de Teichmüller ou "mapping class group") agit sur $\mathcal{T}(X)$ par précomposition.

[1]**Codes AMS :** 20 E 05, 20 E 08, 20 E 36.

W. Thurston [Thu, FLP] a construit une compactification $\overline{\mathcal{T}(X)}$ de l'espace de Teichmüller, homéomorphe à la boule fermée unité de $\mathbb{R}^{6g-6}$, sur laquelle l'action de $\mathrm{Out}(\Gamma)$ s'étend continuement. Les points du bord correspondent à des classes d'équivalence de feuilletages transversalement mesurés, à singularités isolées de type selles à $k \geq 3$ branches, sur X (voir [Thu, FLP]). Le revêtement universel $\tilde{X}$ est muni d'une pseudodistance, qui entre deux points x, y de $\tilde{X}$ vaut la borne inférieure des mesures transverses des chemins de x à y. L'espace métrique T, obtenu en identifiant deux points à pseudodistance nulle, est un arbre réel, muni d'une action isométrique de Γ, à stabilisateurs d'arc cycliques (voir [MS]).

Le théorème du point fixe de Brouwer dit alors que tout $[\phi] \in \mathrm{Out}(\Gamma)$ possède un point fixe dans $\overline{\mathcal{T}(X)}$. Si le point fixe est dans $\mathcal{T}(X)$, alors $[\phi]$ est d'ordre fini (voir [Thu][FLP]). Dire qu'un point du bord est fixé par $[\phi]$ revient à dire que l'action de Γ sur l'arbre réel T correspondant s'étend en une action affine de $\Gamma \rtimes \mathbb{Z}$, pour le groupe $\mathbb{Z}$ engendré par ϕ.

Ce fait, redémontré par le théorème A, est le résultat de base pour montrer qu'un sous-groupe virtuellement résoluble du groupe modulaire est en fait virtuellement abélien (voir [BLM]), et donc pour comprendre la structure des sous-groupes du groupe modulaire (voir [Iva]).

Nous pouvons espérer que le théorème A (ou ses variantes, voir section 3.4) sera utile pour l'étude (des sous-groupes) de $\mathrm{Out}(\Gamma)$, pour d'autres groupes hyperboliques Γ. Pour un groupe libre de type fini (qui est l'autre exemple typique ayant un $\mathrm{Out}(\Gamma)$ intéressant), nous renvoyons à [BFH]. Notons que si Γ est un groupe hyperbolique, alors $\mathrm{Out}(\Gamma)$ est infini si et seulement si Γ se décompose en extension HNN ou en somme amalgamée non triviale au-dessus d'un groupe virtuellement cyclique, comme il résulte des travaux de E. Rips, M. Bestvina-M.Feighn, F. Paulin (voir par exemple [Pau5, Théorème 3.3]).

La méthode de preuve du théorème A remonte à [Pau3]. L'article [Pau3] est aussi l'un des ingrédients utilisés par E. Rips-Z. Sela [RS1, RS2, Sel1, Sel2] pour leur étude profonde des automorphismes extérieurs de groupes hyperboliques (sans torsion). Les autres ingrédients sont les travaux de E. Rips et M. Bestvina-M. Feighn sur les actions de groupe sur les arbres réels (voir par exemple [Pau4]). Nous n'utilisons pas ces travaux dans ce papier.

Donnons maintenant quelques applications du théorème A.

M. Gromov [Gro2] (et C. Champetier [Cha], A. Ol'shanski [Ols]) ont développé une notion de généricité pour les groupes de présentation finie. Précisément, une propriété P sur les groupes à p générateurs et q relations est *asymptotiquement presque sûre* si le rapport du nombre de (classes d'isomorphismes de) groupes à p générateurs et q relations de longueurs $n_1, \cdots, n_q$, vérifiant P, sur le nombre total, tend vers 1 quand $n_1, \cdots, n_q$ tend vers $+\infty$.

Corollaire B *Asymptotiquement presque sûrement, le groupe des automorphismes extérieurs d'un groupe de présentation finie (à deux générateurs) est fini.*

L'espace de Culler-Vogtmann joue pour $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ un rôle analogue à celui de l'espace de Teichmüller pour le groupe modulaire (voir [CV1]). C'est l'espace $\mathcal{O}_n$ des graphes métriques (sans sommets de valence 1) marqués (par un isomorphisme de $\mathbb{F}_n$ sur leur groupe fondamental), modulo isométrie dans la bonne classe d'homotopie. $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ agit par précomposition du marquage.

L'espace $\mathcal{O}_n$ a été utilisé pour obtenir des informations globales sur le groupe $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ (voir [CV1, CV2, Bra] et les travaux de K. Vogtmann, dont [Vog]) et pour obtenir des informations individuelles sur les automorphismes (voir [BH, Lus1, CL]) en étudiant la dynamique de

$\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ sur une compactification $\overline{\mathcal{O}_n}$ naturelle pour l'action (voir par exemple [CV1, CV2, Sha2, Sko2]).

Dans le cas des groupes infinis cycliques, le théorème suivant est dû à M. Lustig [Lus2], connu de M. Bestvina-M. Handel (cas irréductibles : [BH], cas général : affirmation orale), et aussi montré par R. Skora (exposé, Albany Conference, 1992, qui prouve que $\overline{\mathcal{O}_n}$ possède la propriété de point fixe). Notons encore que R. Kenyon (communication orale) a construit de manière explicite, pour $\Gamma = \mathbb{F}_n$ et H engendré par un automorphisme dont l'abélianisé possède deux valeurs propres $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, un arbre réel T comme dans le théorème A, l'action étant de plus libre.

Corollaire C *Tout sous-groupe nilpotent de* $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ *admet un point fixe dans* $\overline{\mathcal{O}_n}$.

Enfin, nous donnons une preuve du théorème suivant (anciennement conjecture de Scott) qui n'utilise ni réseaux ferroviaires (comme dans [BH]), ni les méthodes de E. Rips (comme dans [Sel2]), ni le théorème de M. Lustig d'existence d'un point fixe dans $\overline{\mathcal{O}_n}$ ayant stabilisateurs d'arc triviaux (comme dans [GLL]), mais utilise l'étude de D. Gaboriau-G. Levitt [GL] du nombre d'orbites de points de branchement des arbres réels munis d'une action du groupe libre.

Corollaire D *(M. Bestvina-M. Handel [BH]) Le rang du groupe des points fixes d'un automorphisme d'un groupe libre de rang n est inférieur ou égal à n.*

Enfin, le théorème A soulève un certain nombre de questions. Nous reprenons ses notations et conclusions. Nous supposerons que H est cyclique, d'ordre infini dans $\mathrm{Out}(\Gamma)$, engendré par h. Nous noterons $\lambda = \lambda(h)$ le cœfficient de dilatation de la métrique de T par h.

Dans [Pau5, §5.2.1], nous définissons une notion de mesure sur un arbre réel T munis d'une action isometrique d'un groupe Γ, adaptée à l'absence de compacité locale. Nous munissons l'espace $M(T)$ de ces mesures d'une structure d'espace vectoriel topologique localement convexe. Cet espace contient en particulier l'espace $D(T)$ des distances géodésiques équivariantes sur T, topologiquement équivalentes à la distance originelle (voir [Lev, Chapitre IV] pour l'analogue dans le cas des surfaces). Nous dirons que T est *uniquement ergodique* (pour l'action de Γ) si $M(T)$ est de dimension 1.

Questions : λ est-il un nombre algébrique ? Peut-on majorer la dimension de $D(T)$ uniquement en fonction du groupe Γ ? Si $\lambda \neq 1$, T est-il uniquement ergodique ?

Si Γ est le groupe fondamental d'une surface X comme ci-dessus, les travaux de R. Skora [Sko1] (qui permettent de se ramener au cadre géométrique connu) et de W. Thurston [Thu, FLP] montrent le fait suivant. Si $\lambda \neq 1$, alors il existe exactement deux arbres réels T vérifiant les conclusions du théorème A (l'un avec dilatation $\lambda > 1$, l'autre avec dilatation $\mu = \frac{1}{\lambda} < 1$), ils sont uniquement ergodiques, et λ est une unité algébrique.

Il n'y a pas toujours unicité de T dans le cas du groupe libre, même si $\lambda > 1$ (voir [Lus1]). D. Gaboriau-G. Levitt [GL] ont construit un exemple d'automorphisme du groupe libre de rang n, agissant par dilatation sur deux arbres T, T' avec dilatations λ, λ' où $\lambda > 1$ n'est pas un entier algébrique, et de plus $1 > \lambda' \neq \frac{1}{\lambda}$. Il montrent toutefois ([GL] Corollary IV.5) que $\lambda(h)$ est toujours un nombre algébrique de degré inférieur ou égal à $3n - 4$.

Ce travail, commencé en 1988 lors d'un séjour au MSRI (que je remercie pour son support financier), n'existerait pas sans l'article [Sel2] de Z. Sela, qui m'a fait remarquer qu'il n'y avait pas besoin de conjuguer pour assurer la convergence. Je remercie aussi Z. Sela pour ses éclaircissements sur [Sel2], qui ont contribués à la section 5. Je remercie encore F. Bonahon, J.P. Otal pour leurs conseils d'alors, et tout particulierement D. Gaboriau et G. Levitt (la dernière section 5 découle de leurs travaux et de nombreuses discussions et corrections). Je remercie enfin l'arbitre pour ses suggestions, et M. Bestvina pour sa correction sur la notion de moyennabilité utilisée ici.

1 Rappels de notations et définitions

Sauf mention contraire, une action d'un groupe sur un espace métrique est une action isométrique à gauche.

Un espace métrique est *géodésique* si entre deux points passe une *géodésique*, i.e. un chemin de longueur (minimale) égale à la distance entre ces points. Un espace métrique est *hyperbolique* s'il existe une constante $\delta \geq 0$ telle que pour tout triangle géodésique, tout point d'un côté est à distance inférieure à δ d'un point de l'un des autres côtés. Un groupe de type fini est *hyperbolique* si l'un de ses graphes de Cayley est hyperbolique. Voir [Gro2, GH]. Rappelons la caractérisation suivante des arbres réels [AB, Theorem 3.17] : un arbre réel est un espace métrique hyperbolique pour $\delta = 0$.

Un *point de branchement* dans un arbre réel T est un point x tel que $T \setminus \{x\}$ possède au moins trois composantes connexes, appelées *branches*. Un *arbre fini* est un arbre réel, union finie d'arcs, donc n'ayant qu'un nombre fini de points de branchement.

Si g est une isométrie d'un arbre réel T, la *distance de translation* de g sur T est $\ell_T(g) = \inf\{d(x, gx)/x \in T\}$. Si un groupe Γ agit sur T, la distance de translation est constante sur ses classes de conjugaison. L'isométrie g est dite *hyperbolique* si $\ell_T(g) \neq 0$, et *elliptique* dans le cas contraire. Voir [Sha1, ???]

Si g est hyperbolique, $A_g = \{x \in T \,/\, d(x, gx) = \ell_T(g)\}$ est isométrique à $\mathbb{R}$, et appelé l'*axe de translation* de g. De plus, $x \in A_g$ si et seulement si x, gx, g^2x sont alignés.

Nous appellerons *ensemble caractéristique* de $g \in \Gamma$, et noterons A_g l'axe de translation de g si g est hyperbolique, ou le sous-arbre $\mathrm{Fix}(g)$ des points fixes de g sinon. D'après [AB], le milieu de de tout arc $[x, gx]$ appartient à A_g.

Une action d'un groupe sur un arbre réel T est dite *triviale* s'il existe un point fixe global. Elle est dite *minimale* s'il n'y a pas de sous-arbre invariant propre. Elle est dite *simpliciale* si elle est conjuguée par un homéomorphisme à une action simpliciale de Γ sur un 1-complexe. Elle est dite *à domaine faiblement fondamental fini* s'il existe un sous-arbre fini K de T tel que tout arc compact de T est recouvert par un nombre fini de translatés de K. En particulier, la réunion des translatés de K est alors T.

Toute action non triviale d'un groupe de type fini admet un unique sous-arbre non vide invariant minimal [CM, Prop. 3.1]. Une action minimale d'un groupe de type fini sur un arbre réel est à domaine faiblement fondamental fini (voir [AB][Pau1, Prop. 2.5]).

Une action d'un groupe Γ sur un arbre réel T est *petite* (voir [CM]) si le stabilisateur de toute paire de points distincts ne contient pas de groupe libre de rang 2.

Rappelons (voir par exemple [GH, Théo. 37, p. 157]) qu'un sous-groupe d'un groupe hyperbolique ne contient pas de groupe libre non-abélien si et seulement s'il est virtuellement cyclique.

Une action d'un groupe Γ sur un arbre réel T est *très petite* (voir [CL]) si elle est petite et si pour tout $g \in \Gamma$ d'ordre infini, le sous-arbre $\mathrm{Fix}(g)$ d'une part est égal à $\mathrm{Fix}(g^n)$ si $n \neq 0$, de l'autre ne contient pas de tripode. Un *tripode* est un arbre fini, réunion des arcs entre trois points non alignés.

Notons $\mathcal{LF}(\Gamma) \subset \mathbb{R}^\Gamma$ (voir [AB][CM]) l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^\Gamma$ qui sont de la forme ℓ_T pour une action de Γ sur T.

Il est montré dans [CM, Theo. 3.7] qu'une action minimale de Γ sur un arbre réel, dont les distances de translations ne sont pas les valeurs absolues d'un morphisme de Γ dans $\mathbb{R}$, est déterminé, à isométrie équivariante près, par ses distances de translation. Nous noterons $\mathcal{ILF}(\Gamma)$ l'espace de ces fonctions distances de translations, $\mathcal{SLF}(\Gamma)$ celui des actions petites, $\mathcal{VSLF}(\Gamma)$ celui des actions très petites et $\mathcal{FLF}(\Gamma)$ celui des actions libres (i.e. pour lesquelles seule l'identité a un point fixe). On a, dès que Γ est de type fini et contient un groupe libre de rang 2, (voir [AB, CM] pour les inclusions non triviales)

$$\mathcal{FLF}(\Gamma) \subset \mathcal{VSLF}(\Gamma) \subset \mathcal{SLF}(\Gamma) \subset \mathcal{ILF}(\Gamma) \subset \mathcal{LF}(\Gamma) \subset \mathbb{R}^\Gamma$$

Munissons $\mathbb{R}^\Gamma$ de la topologie produit et $\mathbb{P}(\mathbb{R}^\Gamma)$, le quotient de $\mathbb{R}^\Gamma$ par la relation d'équivalence $x \sim \lambda x$ pour $\lambda \neq 0$, de la topologie quotient. Nous dirons qu'un sous-espace X de $\mathbb{R}^\Gamma$ est *projectivement compact* si son image $\mathbb{P}(X)$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^\Gamma)$ est compacte.

Il est montré dans [CM, Theo. 5.3] (voir aussi [Pau2]) que $\mathcal{SLF}(\Gamma)$ est métrisable et projectivement compact si Γ est de type fini.

Soient $(X,d), (X',d')$ deux espace métriques et $\epsilon \geq 0, \lambda > 0$. Une application $f : X \to X'$ est une (λ,ϵ)-*quasi-isométrie* si pour tous x, y de X,

$$\frac{1}{\lambda} d(x,y) - \epsilon \leq d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y) + \epsilon.$$

Si $\epsilon = 0$, f est dite λ-bilipschitz.

2 Limite d'actions de groupes sur des espaces métriques

Fixons-nous ω un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ ([Bou] I, p. 39), plus fin que le filtre de Fréchet des complémentaires des parties finies ([Bou] I, p. 36). Un tel ultrafiltre existe par ([Bou] I, p. 39, th. 1). Pour toute suite $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bornée de réels, nous noterons $\lim_\omega r_i$ la limite de l'ultrafiltre de $\mathbb{R}$ engendré par l'image directe de ω par $i \mapsto x_i$ ([Bou] I, p. 41).

Soit $(X_i, d_i, *_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques pointés. Soit

$$X_\infty = \{x \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \ / \ \lim_\omega d_i(x_i, *_i) < +\infty\}.$$

Par passage à la limite dans l'inégalité triangulaire, nous pouvons définir $\tilde{d}_\infty : X_\infty \times X_\infty \to$ $[0+\infty[$ par

$$\tilde{d}_\infty(x,y) = \lim_\omega d_i(x_i, y_i).$$

Il est facile de voir que $\tilde{d}_\infty$ est une pseudo-distance. Nous noterons $(X_\omega, d_\omega, *_\omega)$ l'espace métrique pointé quotient de $(X_\infty, d_\infty, (*_i)_{i\in\mathbb{N}})$ par la relation d'équivalence $x \sim y$ si x, y sont à pseudo-distance nulle. Nous l'appellerons l'*ultralimite* de la suite $(X_i, d_i, *_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (voir [DW, Gro3]). Nous noterons $x = \lim_\omega x_i$ l'image x dans X_ω d'une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Soit Γ un groupe agissant par isométries sur X_i, tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\lim_\omega d_i(\gamma *_i, *_i) < \infty.$$

Alors l'action produit de Γ sur X_∞ induit une action isométrique de Γ sur X_ω.

Soit w un filtre sur $\mathbb{N}$, et soient $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ des espaces métriques munis d'une action isométrique d'un groupe Γ. Nous dirons que la suite $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge pour la *topologie de Hausdorff-Gromov équivariante* vers Y_∞ pour le filtre w, si l'assertion suivante est vérifiée. Pour toute partie finie K de Y_∞, pour toute partie finie P de Γ, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un élément Ω du filtre w tel que pour tout i dans Ω, il existe une partie finie K_i de Y_i, et une relation $\mathcal{R}_i \subset K \times K_i$, dont les projections sur K, K_i sont surjectives, telles que pour tous $g, h \in P$, si $x\mathcal{R}_i x_i$ et $y\mathcal{R}_i y_i$,

$$|d_i(gx_i, hy_i) - d_\infty(gx, hy)| < \epsilon.$$

Une modification de ceci permet de munir d'une topologie tout ensemble d'actions isométriques de Γ sur des espaces métriques [Pau5, Chapitre 1]. Pour plus d'informations sur cette topologie, voir [Pau1, Pau2], où la définition contient une légère erreur, comme nous l'a signalé R. Skora, tous les résultats restant vrais avec la définition ci-dessus. Rappelons que cette topologie n'est en général pas séparée. En particulier, toute partie invariante de Y_∞ est aussi limite de $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Il faut donc imposer au moins des conditions de type minimalité pour avoir des propriétés de séparabilité.

Comme nous l'a fait remarquer G. Levitt, la différence heuristique entre la convergence forte (au sens de [GS]) et la convergence de Gromov équivariante est que si T est la limite des T_i, alors dans le premier cas, on peut relever isométriquement toute partie finie de T dans T_i avec n assez grand, tandis que pour la seconde, on ne peut relever qu'"isométriquement à ϵ près".

La proposition suivante est immédiate. Voir par exemple [KL, Prop. 3.6] pour les assertions (1), (2) et [KL, Prop. 3.12] pour l'assertion (3)

Proposition 2.1 *(1) Si X_i est géodésique pour tout i, alors X_ω l'est.*

(2) Si X_i est δ_i-hyperbolique avec $\delta = \lim_\omega \delta_i < \infty$, alors X_ω est δ-hyperbolique (donc un arbre si $\delta = 0$).

(3) Si $f_i : X_i \to Y_i$ est une suite de (λ_i, ϵ_i)-quasi-isométries avec $\lambda = \lim_\omega \lambda_i < \infty$, $\epsilon = \lim_\omega \epsilon_i < \infty$, et si $\lim_\omega d(f_i(*_i), *_i) < \infty$, alors l'application $f_\omega : X_\omega \to Y_\omega$ induite par $(x_i) \mapsto (f_i(x_i))$ est une (λ, ϵ)-quasi-isométrie.

(4) Soit Γ un groupe agissant par isométries sur X_i, tel que $\lim_\omega d_i(\gamma *_i, *_i) < \infty$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Alors l'action de Γ sur X_i converge (pour le filtre ω) pour la topologie de Hausdorff-Gromov équivariante vers l'action de Γ sur X_ω. $\square$

Il est montré dans [Pau2, p. 198] que la topologie de Gromov équivariante sur $\mathcal{ILF}(\Gamma)$ (vu comme l'espace des actions minimales de Γ sur des arbres réels, dont les distances de translations ne sont pas les valeurs absolues d'un morphisme de Γ dans $\mathbb{R}$, modulo isométries équivariantes) coïncide avec la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^\Gamma$.

De la même manière, nous pouvons donner une preuve très courte du théorème suivant de M. Cohen-M. Lustig [CL] (voir aussi [RS1, Lemma 4.1]) :

Théorème 2.2 *$\mathcal{VSLF}(\Gamma)$ est compact.*

Preuve. D'après la section 1, il suffit de montrer que $\mathcal{VSLF}(\Gamma)$ est (séquentiellement) fermé dans $\mathcal{SLF}(\Gamma)$. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{VSLF}(\Gamma)$ qui converge (pour la topologie de Gromov équivariante et le filtre de Fréchet) vers $T \in \mathcal{SLF}(\Gamma)$.

Si x, y, z sont les sommets d'un tripode dans T fixe par $g \in \Gamma$, soit $\epsilon > 0$ suffisamment petit devant la longueur des branches de ce tripode. Pour n assez grand, il existe x_n, y_n, z_n dans T_n tels que $d(gx_n, x_n), d(gy_n, y_n),\ d(gz_n, z_n) \le \epsilon$ et $|d(x_n, y_n) - d(x, y)|, |d(z_n, y_n) - d(z, y)|, |d(x_n, z_n) - d(x, z)| \le \epsilon$, donc les milieux des arcs $[x_n, gx_n], [y_n, gy_n], [z_n, gz_n]$ sont les sommets d'un tripode. Comme ces points appartiennent à l'ensemble caractéristique de g, on en déduit que g n'est pas hyperbolique (les axes de translation sont des droites), donc possède un tripode fixe dans T_n, ce qui est impossible.

Si x est un point fixe par g^k, qui n'est pas fixe par g, soit y le point fixe de g le plus proche de x (c'est le milieu de $[x, gx]$, voir [AB]). Posons $z = gx$. Pour n assez grand, il existe x_n, y_n, z_n dans T_n tels que $d(g^k x_n, x_n), d(gx_n, z_n), d(gy_n, y_n) \le \epsilon$ et $|d(x_n, y_n) - d(x, y)|, |d(z_n, y_n) - d(z, y)|, |d(x_n, z_n) - d(x, z)| \le \epsilon$. Donc le milieu m de $[x_n, g^k x_n]$, qui est fixe par g^k et proche de x_n, n'est pas proche du milieu m' de $[m, gm]$, car gm est proche de gx_n. Puisque m' est le point fixe de g le plus proche de m, ceci montre que g^k possède un point fixe dans T_n qui n'est pas fixe par g, contradiction. $\square$

3 Limites d'automorphismes de groupes hyperboliques

3.1 Démonstration du théorème A

Soit Γ un groupe hyperbolique et H un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. Notons $\pi : \mathrm{Aut}(\Gamma) \to \mathrm{Out}(\Gamma)$ la projection canonique.

Supposons le centre de $\pi(H)$ infini. Notons $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite infinie d'éléments de H, avec les $\pi(\psi_i)$ deux à deux distincts, et dans le centre de $\pi(H)$.

Notons $S = \{s_1, \cdots, s_k\}$ une partie génératrice finie de Γ, stable par passage à l'inverse. Le groupe des automorphismes extérieurs d'un groupe virtuellement cyclique est fini. Donc Γ n'est pas virtuellement cyclique. Donc Γ contient un groupe libre non abélien (voir section 1). Nous pouvons donc supposer que s_1, s_2 engendrent un groupe libre non abélien.

Nous noterons $||g||$ la longueur minimale d'un mot en S représentant $g \in \Gamma$ (avec 0 pour l'élément neutre). Nous munirons Γ de la métrique des mots associée à S, i.e. $d(g, g') = ||g^{-1}g'||$. Rappelons que pour tout automorphisme ϕ de Γ, si

$$C = C_\phi = \sup_{s \in S} \sup\{||\phi(s)||, ||\phi^{-1}(s)||\},$$

alors par inégalité triangulaire, ϕ est C-bilipschitz.

Posons

$$\lambda_i = \inf_{x \in G} \sup_{s \in S} d(x, \psi_i(s)x).$$

Puisque d prend des valeurs entières, cette borne inférieure est atteinte. Nous choisissons arbitrairement un point $*_i$ réalisant le minimum. Remarquons que par l'inégalité triangulaire, pour tout $g \in \Gamma$,

$$d(*_i, \psi_i(g)*_i) \le ||g||\lambda_i. \tag{1}$$

D'après [Pau3, Case 1, p. 338], comme les ψ_i sont deux à deux distincts dans $\mathrm{Out}(\Gamma)$, la suite (λ_i) tend vers $+\infty$ quand $i \to \infty$.

Notons X_i l'ensemble Γ muni de la distance $d_i = \frac{1}{\lambda_i}$, pointé en x_i, muni de l'action de Γ par translation à gauche tordue par ψ_i

$$g \mapsto \{x \mapsto \psi_i(g) \cdot x\}.$$

Notons $(X_\omega, d_\omega, *_\omega)$ l'ultralimite de la suite $(X_i, d_i, *_i)$ (voir section 2). D'après l'équation (1) et la section 2, l'action $g \mapsto \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (gx_i)_{i\in\mathbb{N}}\}$ induit une action isométrique de Γ sur X_ω.

Si X_S est le graphe de Cayley de Γ pour S, alors X_S est géodésique. De plus, si on remplace Γ par X dans la construction ci-dessus, l'ultralimite obtenue est la même, puisque $\lim_\omega \lambda_i = \infty$. Donc par la proposition 2.1 (1),(2), X_ω est un arbre réel, puisque $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_i} = 0$.

D'après la proposition 2.1 (4) et [Pau3, p. 340], [Pau3, Prop. 2.4], l'action de Γ sur X_ω est non triviale, et à stabilisateurs d'arc virtuellement cycliques.

Nous allons maintenant montrer que l'action (isométrique) de Γ s'étend en une action de $\Gamma \rtimes H$ par homéomorphismes bilischitz.

Soit $\varphi \in H$. Puisque les $\pi(\psi_i)$ sont dans le centre de $\pi(H)$, il existe un élément $\gamma_i = \gamma_{\varphi,i} \in \Gamma$ tel que

$$\psi_i \circ \varphi = I_{\gamma_i} \circ \varphi \circ \psi_i \tag{2}$$

avec $I_{\gamma_i} : g \mapsto \gamma_i g \gamma_i^{-1}$ la conjugaison par γ_i.

Considérons l'application $f_i = f_{\varphi,i} : X_i \to X_i$ définie par

$$f_i(x) = \gamma_i \varphi(x).$$

Alors f_i est C_φ-bilipschitz pour la distance d_i. Nous allons montrer que f_i ne bouge le point base $*_i$ que d'une distance majorée uniformément en i. Par la proposition 2.1 (3), l'application $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (f_i(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ induira un homéomorphisme C_φ-bilipschitz $f_\varphi : X_\omega \to X_\omega$.

Lemme 3.1 *Il existe une constante D, ne dépendant que de Γ et φ, telle que $d(f_i(*_i), *_i) \leq D\lambda_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Nous allons tout d'abord montrer qu'il existe une constante $D' \geq 1$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{s\in S} d(f_i(*_i), \psi_i(s) f_i(*_i)) \leq D'\lambda_i.$$

En effet, par la relation de commutation (2), puisque γ_i est une isométrie, puisque φ est C_φ-bilipschitz, et par l'équation 1, il vient, pour $s \in S$,

$$d(f_i(*_i), \psi_i(s) f_i(*_i)) = d(\gamma_i\varphi(*_i), \psi_i \circ \varphi(\varphi^{-1}(s))\gamma_i\varphi(*_i))$$

$$= d(\gamma_i\varphi(*_i), \gamma_i\varphi \circ \psi_i(\varphi^{-1}(s))\varphi(*_i)) \leq C_\varphi d(*_i, \psi_i(\varphi^{-1}(s))*_i) \leq C_\varphi ||\varphi^{-1}(s)||\lambda_i.$$

Ceci montre notre première affirmation.

Montrons maintenant le lemme, par un argument inspiré de [Sel2]. Soit $\delta \geq 0$ tel que le graphe de Cayley X_S de Γ pour la partie génératrice S est δ-hyperbolique. Notons $v_{8\delta}$ le cardinal de la boule de rayon 8δ dans Γ. Supposons par l'absurde que

$$d(*_i, f_i(*_i)) \geq 2(4v_{8\delta} + 8)D'\lambda_i.$$

Par ce qui précède, les isométries $\psi_i(s_1), \psi_i(s_2)$ bougent les points $*_i, f_i(*_i)$ de moins de $D'\lambda_i$. Notons I le segment géodésique $[*_i, f_i(*_i)]$ dans X_S. Soit m le milieu de I. Par δ-hyperbolicité de X_S, un sous-segment de I centré en m, de longueur au moins $2(4v_{8\delta} + 5)D'\lambda_i$ (pour i assez grand) reste à distance au plus 2δ de $\psi_i(s_1)I$ et $\psi_i(s_2)I$. En particulier, (rappelons que des translations commutent), le milieu du segment I est bougé par les commutateurs $[\phi_i(s_1)^r, \phi_i(s_2)^r] = \phi_i([s_1^r, s_2^r])$ de moins de 8δ pour tout $r = 1, \cdots, v_{8\delta} + 1$. Comme le groupe engendré par s_1, s_2 est libre, les commutateurs $[s_1^r, s_2^r]$ sont deux à deux distincts. Comme ψ_i est injective, et Γ agit transitivement et librement sur lui-même par translation à gauche, ceci contredit la définition de $v_{8\delta}$. $\square$

Montrons maintenant que l'application $H \to \mathrm{Homo}(X_\omega)$ définie par $\varphi \mapsto f_\varphi$ est un morphisme de groupe.

Soient $\varphi, \varphi' \in H$. Par la relation de commutation (2), il vient

$$\psi_i \circ \varphi \circ \varphi' = I_{\gamma_{\varphi,i}} \circ \varphi \circ \psi_i \circ \varphi' = I_{\gamma_{\varphi,i}} \circ \varphi \circ I_{\gamma_{\varphi',i}} \circ \varphi' \circ \psi_i = I_{\gamma_{\varphi,i} \cdot \varphi(\gamma_{\varphi',i})} \circ \varphi \circ \varphi' \circ \psi_i.$$

Puisque $\psi_i \circ \varphi \circ \varphi'$ est inversible, $I_{\gamma_{\varphi\circ\varphi',i}} = I_{\gamma_{\varphi,i} \cdot \varphi(\gamma_{\varphi',i})}$. Donc $z = \gamma_{\varphi\circ\varphi',i}^{-1} \cdot \gamma_{\varphi,i} \cdot \varphi(\gamma_{\varphi',i})$ est dans le centre de Γ. Maintenant, pour tout $x \in \Gamma$, et puisque z est central,

$$d(f_{\varphi\circ\varphi',i}(x), f_{\varphi,i} \circ f_{\varphi',i}(x)) = d\left(\gamma_{\varphi\circ\varphi',i} \cdot \varphi \circ \varphi'(x), \gamma_{\varphi,i} \cdot \varphi(\gamma_{\varphi',i} \cdot \varphi'(x))\right)$$

$$= d\left(\gamma_{\varphi\circ\varphi',i} \cdot \varphi \circ \varphi'(x), \gamma_{\varphi\circ\varphi',i} \cdot z \cdot \varphi \circ \varphi'(x)\right) = ||(\varphi \circ \varphi'(x))^{-1} \cdot z \cdot \varphi \circ \varphi'(x)|| = ||z||.$$

Mais il découle de [GH, Théo. 37, p. 157] que le centre d'un groupe hyperbolique non virtuellement cyclique est fini. Donc $||z||$ est uniformément borné. Puisque $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_i} = 0$, on en déduit que $f_{\varphi\circ\varphi'} = f_\varphi \circ f_{\varphi'}$. Donc H opère par homéomorphismes bilipschitz sur X_ω.

Montrons ensuite que le groupe $\Gamma \rtimes H$ opère par homéomorphismes bilipschitz. Il s'agit de montrer que les actions de Γ et H sont compatibles, au sens que pour tout $\varphi \in H$, $x \in X_\omega$ et $\gamma \in \Gamma$,

$$f_\varphi(\gamma x) = \varphi(\gamma) f_\varphi(x). \tag{3}$$

Par passage à la limite, ceci découle des égalités suivantes, pour tout $x \in \Gamma$ et $i \in \mathbb{N}$,

$$f_{\varphi,i}(\psi_i(\gamma)x) = \gamma_{\varphi,i} \cdot \varphi(\psi_i(\gamma)x) = \gamma_{\varphi,i} \cdot \varphi \circ \psi_i(\gamma) \cdot \gamma_{\varphi,i}^{-1} \cdot \gamma_{\varphi,i} \cdot \varphi(x) = \psi_i(\varphi(\gamma)) f_{\varphi,i}(x).$$

Notons T' le sous-arbre de X_ω invariant minimal pour l'action de Γ (voir section 1). Pour tout $\varphi \in H$, $f_\varphi(T')$ est un sous-arbre de X_ω, car f_φ est un homéomorphisme. Il est invariant par Γ par l'équation (3). Donc $f_\varphi(T')$ contient T' par minimalité de T'. En utilisant φ^{-1}, il vient $f_\varphi(T') = T'$. Donc T' est invariant par $\Gamma \rtimes H$.

Montrons enfin comment changer T' de sorte que l'action de $\Gamma \rtimes H$ devienne affine. Considérons pour cela la partie $D(T')$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{T' \times T'}$, formé des applications $\delta : T' \times T' \to \mathbb{R}$ telles que

(i) δ est une distance géodésique, dont la topologie induite coïncide avec la topologie induite par la distance $d' = d_\omega|_{T'}$ de T',

(ii) δ est invariante par l'action diagonale de Γ sur $T' \times T'$.

Il est clair que $D(T')$ est un cône convexe épointé. Tout $\delta \in D(T')$ munit l'ensemble T' d'une structure d'arbre réel, pour laquelle l'action de Γ est isométrique, non triviale et à stabilisateurs d'arc virtuellement cycliques (car les arcs topologiques de (T', δ) sont précisément ceux de (T', d')). Un élément de Γ a le même ensemble caractéristique (voir section 1) pour (T', δ) que pour (T', d'). En effet, l'axe de translation d'un élément γ a une caractérisation purement topologique : c'est l'ensemble des points x tels que $x, \gamma x, \gamma^2 x$ sont alignés.

Notons $\theta : D(T') \to \mathcal{SLF}(\Gamma)$ l'application qui à (T', δ) associe sa fonction distance de translation $\ell_{(T',\delta)}$. Notons que θ est linéaire, car $\ell_{(T',\delta)}(g) = \delta(x, gx)$ pour tout point x dans l'ensemble caractéristique de g. Donc $C(T') = \theta(D(T'))$ est un cône convexe épointé (non vide) dans $\mathbb{R}^\Gamma$.

Le groupe H agit sur $D(T')$ de la manière suivante: si $\varphi \in H$, alors

$$\delta \mapsto \{\varphi \cdot \delta : (a,b) \mapsto \delta(f_\varphi(a), f_\varphi(b))\}.$$

Le fait que $\varphi\cdot\delta$ vérifie la condition (i) vient de ce que f_φ est un homéomorphisme. L'invariance de $\varphi \cdot \delta$ (condition (ii)) vient de ce que f_φ conjugue l'action à gauche de Γ à celle tordue par l'automorphisme φ (voir l'équation (3)).

L'action de H sur $D(T')$ correspond à l'action naturelle de H sur $C(T') \subset \mathbb{R}^\Gamma$ par précomposition. En effet, par la caractérisation topologique des axes de translation, par le fait que f_φ est un homéomorphisme, et par l'équation (3), f_φ envoie l'axe de translation de $g \in \Gamma$ sur l'axe de translation de $\varphi(g)$. Donc, pour tout x sur l'axe de translation de $g \in \Gamma$,

$$\ell_{(T',\varphi\cdot\delta)}(g) = \varphi \cdot \delta(x, gx) = \delta(f_\varphi(x), f_\varphi(gx)) = \delta(f_\varphi(x), \varphi(g) f_\varphi(x)) = \ell_{(T',\delta)}(\varphi(g)).$$

Le cône convexe épointé $\overline{C(T')}$ de l'espace vectoriel topologique localement convexe $\mathbb{R}^\Gamma$ (muni de la topologie produit), est projectivement compact, d'après la section 1. Le groupe moyennable H agit par applications linéaires continues sur $\mathbb{R}^\Gamma$ en préservant $\overline{C(T')}$ par ce qui précède. Donc par le théorème de point fixe [Gre, Theo. 3.3.5], il existe un élément ℓ dans $\overline{C(T')}$ projectivement fixe par H.

Ceci signifie que pour tout $\varphi \in H$, il existe $\lambda(\varphi) > 0$ tel que pour tout $g \in \Gamma$,

$$\ell \circ \varphi^{-1}(g) = \lambda(\varphi)\ell(g). \tag{4}$$

Il est facile de voir que $\varphi \mapsto \lambda(\varphi)$ est un morphisme de H dans $\mathbb{R}_+^*$.

Rappelons (voir [CM, Theo. 3.7] et la section 1) que tout élément de $\mathcal{SLF}(\Gamma)$ est la fonction distance de translation d'une action de Γ sur un arbre réel, unique à isométrie équivariante près. Soit donc T un arbre réel, de distance d, muni d'une action isométrique de Γ, de fonction distance de translation ℓ. Par unicité et par l'équation (4), il existe pour tout $\varphi \in H$, une isométrie équivariante h_φ de (T,d), muni de l'action de Γ tordue par φ^{-1}, dans $(T, \lambda(\varphi)d)$, muni de l'action de Γ. Ceci signifie précisément que $h_\varphi : T \to T$ est affine de cœfficient de dilatation $\lambda(\varphi)$, et vérifie, pour tout $g \in \Gamma$ et $x \in T$,

$$h_\varphi(gx) = \varphi(g) h_\varphi(x).$$

Ceci termine la preuve du théorème A. □

3.2 Compléments généraux au théorème A

Faisons quelques remarques sur cette preuve, dont nous conservons les notations, en particulier $\Gamma, H, \psi_i, \lambda_i, (T', d'), (T, d), h_\varphi$ et $\lambda(\varphi)$, le cœfficient de dilatation de l'application affine h_φ de (T,d).

Remarque 3.2 *Si $g \in \Gamma$ est elliptique dans T', alors g est elliptique dans T.*

Preuve. Par continuité des fonctions distances de translations, ceci vient du fait que les ensembles caractéristiques dans $D(T')$ sont constants. □

Remarque 3.3 *Pour tout $\varphi \in H$ et $g \in \Gamma$, l'axe de translation de $\varphi(g)$ est l'image par h_φ de l'axe de translation de g.*

Preuve. Pour tout x dans l'axe de translation de g et tout y dans T,

$$d(\varphi(g)h_\varphi(x), h_\varphi(x)) = d(h_\varphi(gx), h_\varphi(x)) = \lambda d(gx, x) \leq \lambda d(gy, y) = d(\varphi(g)h_\varphi(y), h_\varphi(y)).$$

Le résultat découle alors du fait que h_φ est une bijection. $\square$

Remarque 3.4 *L'action de Γ sur T est en fait très petite.*

Preuve. Montrons tout d'abord que l'action de Γ sur T' est très petite.

Si g est une isométrie d'ordre infini d'un groupe hyperbolique Γ, alors g possède exactement deux point fixes dans le bord $\partial\Gamma$ de Γ (voir [GH, Chap. 8]). Nous appelerons *quasi-axe de translation* n'importe quelle géodésique dans un graphe de Cayley X_S de Γ entre ces deux points fixes. Deux telles géodésiques sont à distance de Hausdorff inférieure à 4δ si X est δ-hyperbolique. Le lemme suivant est laissé en exercice.

Lemme 3.5 *Il existe une constante $c = c(\Gamma, S)$ telle que pour tout $g \in \Gamma$ d'ordre infini, pour tout $x \in X_S$, le milieu de toute géodésique entre x et gx est à distance inférieure à c d'un quasi-axe de translation de g.* $\square$

Supposons par l'absurde que T' contienne un tripode fixe par g d'ordre infini. Notons $x = gx, y = gy, z = gz$ les sommets de ce tripode. Nous pouvons supposer, quitte à le réduire, que x, y, z sont à la même distance $d > 0$ du sommet du tripode. Soit $\epsilon > 0$ petit devant d. Puisque T' est limite de X_i (voir proposition 2.1 (4)), il existe $\Omega \in \omega$ tel que pour tout $i \in \Omega$, il existe x_i, y_i, z_i dans Γ tels que $|d(x_i, y_i) - 2d\lambda_i| < \epsilon\lambda_i$ et $d(x_i, \psi_i(g)x_i) \leq \epsilon\lambda_i$ (et de même par permutation circulaire de x_i, y_i, z_i). Puisque λ_i tend vers ∞ et par hyperbolicité de Γ, tout quasi-axe de translation de $\psi_i(g)$, devant passer à distance au plus c du milieu de $[x_i, gx_i]$ et $[y_i, gy_i]$ ne peut passer à distance inférieure à c du milieu de $[z_i, gz_i]$. Ceci donne une contradiction.

La démonstration du fait que tout point de T' fixe par g^k pour $k \neq 1$ est encore fixe par g, se fait de manière analogue à celui dans la preuve du théorème 2.2, en utilisant le lemme précédent.

Pour passer de T à T', il suffit remarquer que puisque les ensembles caractéristiques sont constants sur $D(T')$, le convexe $C(T')$ est contenu dans $\mathcal{VSLF}(\Gamma)$. Par compacité de $\mathcal{VSLF}(\Gamma)$ (théorème 2.2), le reste de l'argument montre alors que T est dans $\mathcal{VSLF}(\Gamma)$. $\square$

Si Γ est un groupe muni une partie génératrice finie, rappelons que la *longueur stable* $|||\gamma|||$ de $\gamma \in \Gamma$ est la limite quand n tend vers l'infini de $\frac{||\gamma^n||}{n}$. Cette limite existe par sous-additivité ($||\gamma^{n+m}|| \leq ||\gamma^n|| + ||\gamma^m||$). Si Γ est un groupe δ-hyperbolique, alors $|||\gamma||| = 0$ si et seulement si γ est d'ordre fini. Et si γ est d'ordre infini, alors $|||\gamma|||$ vaut, à quelques δ près, la distance de translation $\inf_{x\in\Gamma} d(x, \gamma x) = \inf\{||\alpha|| \,/ \alpha \text{ conjugué à } \gamma\}$. Pour cela, voir par exemple [GS].

Remarque 3.6 *Si $g \in \Gamma$, alors la distance de translation $\ell_{T'}(g)$ de g dans T' vérifie :*

$$\ell_{T'}(g) = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_i} \inf_{x\in\Gamma} d(x, \psi_i(g)x) = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_i} |||\psi_i(g)|||.$$

En particulier, si $\psi_i(g) = g$ pour tout i, alors la distance de translation de g dans T' est nulle. Et si $\ell_{T'}(g), \ell_{T'}(g') \neq 0$, alors

$$\frac{\ell_{T'}(g)}{\ell_{T'}(g')} = \lim_\omega \frac{|||\psi_i(g)|||}{|||\psi_i(g')|||}\ .$$

Preuve. La deuxième égalité dans la première équation découle de la discussion précédente et du fait que λ_i tend vers ∞.

Supposons d'abord que g est elliptique dans T'. Soit x un point fixe de g, avec $x = \lim_\omega x_i$. Alors $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_i} d(x_i, \psi_i(g)) = 0$ puisque $d'(x, gx) = 0$. Comme $\ell_{T'}(g) = 0$ par hypothèse, le résultat en découle.

Supposons donc g hyperbolique (en particulier d'ordre infini). Soit x un point de l'axe de translation de g dans T'. Alors $d(x, gx) + d(gx, g^2x) = d(x, g^2x)$, puisque x, g_x, g^2x sont alignés dans cet ordre sur l'axe de g. Si $x = \lim_\omega x_i$, alors pour tout $\epsilon > 0$, petit devant $\ell_{T'}(g) = d(x, gx) > 0$, il existe $\Omega \in \omega$ tel que pour tout $i \in \Omega$,

$$|d(x_i, \psi_i(g)x) + d(gx, g^2x) - d(x_i, \psi_i(g)^2x)| < \lambda_i \epsilon$$

et

$$|d(x_i, \psi_i(g)x) - \ell_{T'}(g)\lambda_i| \leq \lambda_i \epsilon.$$

Or par hyperbolicité, il existe une constante $c' > 0$ (ne dépendant que de la constante d'hyperbolicité δ) telle que pour tout $y \in \Gamma$, et $\gamma \in \Gamma$ d'ordre infini, si A_γ est un quasi-axe de translation de γ dans X_S,

$$|d(y, \gamma y) - 2d(y, A_\gamma) - |||\gamma||| \,| \leq c'.$$

Comme $|||g^2||| = 2|||g|||$, la première des équations précédentes entraîne que $\frac{1}{\lambda_i} d(x_i, A_{\psi_i(g)})$ tend vers 0. La deuxième entraîne alors le résultat.

Les deux dernières affirmations de la remarque découlent aisément de la première, comme $\lambda_i \to \infty$. □

Si ϕ est un automorphisme du groupe Γ et $\gamma \in \Gamma$, alors la *croissance stable* de γ par ϕ est

$$w(\gamma) = w_\phi(\gamma) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log |||\phi^n(\gamma)||| \,.$$

Le gros avantage de cette croissance stable par rapport à la croissance obtenue en remplacant longueur stable par longueur est qu'elle ne dépend que de la classe de ϕ dans $\mathrm{Out}(\Gamma)$.

Remarque 3.7 *(G. Levitt) Pour tout $g \in \Gamma$ tel que $\ell_T(g) \neq 0$, pour tout $\varphi \in H$, on a $\log \lambda(\varphi) \leq w_\varphi(g)$.*

Preuve. Soit $g \in \Gamma$ tel que $\ell_T(g) \neq 0$, en particulier g est d'ordre infini. Prenons x_0 un point base dans T. Alors

$$\ell_T(g) \leq d(x_0, gx_0) \leq c||g||$$

avec $c = \sup_{s \in S} d(x_0, sx_0) > 0$ une constante dépendant de T mais pas de g. Rappelons que ℓ_T est constante sur les classes de conjugaison, et que $|||g|||$ vaut à quelques δ près la borne inférieure des $||h||$ pour h conjugué à g. Il existe donc des constantes $c > 0, c' \geq 0$ telles que pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\ell_T(\varphi^i(g)) \leq c|||\varphi^i(g)||| + c'.$$

Or $\ell_T(\varphi^i(g)) = \lambda(\varphi)^i \ell_T(g)$. Le résultat en découle. □

Un sous-groupe H' de $\mathrm{Out}(\Gamma)$ est dit *à dilatation sous-exponentielle des mots* si pour tout élément γ de Γ, pour tout $[\varphi] \in H'$, la croissance stable $w_\varphi(\gamma)$ de γ par φ (définie section 3.2) est nulle. Il suffit bien sûr de le vérifier pour les γ éléments de la partie génératrice S de Γ.

Corollaire 3.8 *Si l'image H' de H dans* $\mathrm{Out}(\Gamma)$ *est à dilatation sous-exponentielle des mots, alors l'action de* $\Gamma \rtimes H$ *sur* T *est isométrique.*

Preuve. Puisque T n'a pas de point fixe global pour l'action de Γ, il existe $g \in \Gamma$ tel que $\ell_T(g) \neq 0$. Pour $\varphi \in H$, en appliquant la remarque 3.7 à φ et φ^{-1}, on a donc $\lambda(\varphi) = 1$. Ceci montre le résultat. □

Notons que la dynamique de l'arbre T obtenu dans le théorème A est en général très riche.

Remarque 3.9 *Si T est un arbre simplicial, alors $\lambda(\varphi) = 1$ pour tout $\varphi \in H$. En fait, si l'action de $\Gamma \rtimes H$ n'est pas isométrique, alors toute orbite de Γ dans T est dense*

Preuve. La première assertion, qui découle de la seconde, peut se montrer directement ainsi. Soient x, y deux points quelconques de branchement. Ceux-ci existent, car l'action étant petite et le groupe dérivé de Γ non virtuellement cyclique, T n'est pas isométrique à $\mathbb{R}$. Si $\lambda(\varphi)^{\pm n} < 1$, il suffit d'itérer $d(h_\varphi^{\pm n}(x), h_\varphi^{\pm n}(y)) = \lambda(\varphi)^{\pm n} d(x, y)$ pour voir qu'il existe des paires de points de branchement à distances arbitrairement proches, ce qui empêche T d'être simplicial.

La deuxième assertion découle de la proposition suivante, car l'action de Γ sur T dans la construction de la preuve du théorème A est minimale.

Proposition 3.10 *Si T est un arbre réel muni d'une action minimale d'un groupe de type fini Γ, si φ est un automorphisme de Γ tel qu'il existe une application affine $f : T \to T$ de rapport $\lambda > 1$ qui conjugue l'action sur T à celle tordue par φ, alors toute orbite pour Γ est dense.*

Preuve. (G. Levitt) Si une boule de centre x et de rayon $r > 0$ ne rencontre pas l'orbite d'un point y, alors la boule de centre $f^n(x)$ et de rayon $\lambda^n r$ ne rencontre pas l'orbite de $f^n(y)$. Mais l'existence d'un domaine faiblement fondamental de rayon borné (voir section 1) donne une contradiction. □ □

3.3 Compléments au théorème A pour les automorphismes individuels

Dans la suite de cette section, φ est un automorphisme de Γ d'ordre infini dans $\mathrm{Out}(\Gamma)$. Voyons ce que la preuve du théorème A nous permet de dire sur l'automorphisme individuel φ. Nous notons H le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ engendré par φ, et $\psi_i = \varphi^i$. La preuve du théorème A fournit une action minimale petite de Γ sur un arbre réel T, et une application affine $h = h_\varphi : T \to T$ de cœfficient de dilatation $\lambda = \lambda(\varphi)$, telle que $h(gx) = \varphi(g)h(x)$ pour $g \in \Gamma$ et $x \in T$.

Notons encore $\mathrm{Fix}(\varphi)$ le sous-groupe de Γ des points fixes de φ et $\mathrm{Stab}_\Gamma(P)$ (resp. $\mathrm{Fix}_\Gamma(P)$) le stabilisateur (resp. fixateur) d'une partie P de T par Γ.

Proposition 3.11 *Si Fix(φ) n'est pas virtuellement cyclique, il existe un point x de T, fixe par h, tel que*

1. $\mathrm{Fix}(\varphi) \subset \mathrm{Stab}_\Gamma(x)$
2. $\varphi(\mathrm{Stab}_\Gamma(x)) = \mathrm{Stab}_\Gamma(x)$.

Preuve. (G. Levitt) D'après les remarques 3.6 et 3.2, tout élément de $\mathrm{Fix}(\varphi)$ est elliptique. Comme $\mathrm{Fix}(\varphi)$ est de type fini (voir [Pau4, p. 651], aussi prouvé indépendamment par D. Cooper), d'après un argument bien connu (voir par exemple [Sha1]), le groupe $\mathrm{Fix}(\varphi)$ possède un point fixe commun x.

Pour tout $g \in \mathrm{Fix}(\varphi)$, il vient $gh(x) = \varphi(g)h(x) = h(gx) = h(x)$ donc si $h(x) \neq x$, l'arc non trivial $[x, h(x)]$ est fixe par le sous-groupe non virtuellement cyclique $\mathrm{Fix}(\varphi)$, ce qui contredit le fait que l'action soit très petite.

Maintenant, si $g \in \mathrm{Stab}_\Gamma(x)$, alors $\varphi(g)x = \varphi(g)h(x) = h(gx) = h(x) = x$, ce qui montre la dernière assertion. □

Remarque 3.12 *Si $Fix(\varphi)$ n'est pas virtuellement cyclique, si h n'est pas une isométrie elliptique avec $Fix_\Gamma(\mathrm{Fix}(h))$ fini, alors le point x ci-dessus est l'unique point fixe de h.*

Preuve. Supposons qu'il existe x, y des points fixes distincts de h. Alors

$$d(x, y) = d(h(x), h(y)) = \lambda d(x, y).$$

Donc $\lambda = 1$ et h est une isométrie.

Supposons tout d'abord que h est elliptique. L'ensemble des points fixes K de h contenant le segment $[x, y]$, son fixateur est contenu dans le fixateur du segment $[x, y]$. Puisque l'action est petite (et qu'un sous-groupe d'un groupe virtuellement cyclique est virtuellement cyclique), $\mathrm{Fix}_\Gamma(K)$ est virtuellement cyclique. Puisque $\mathrm{Fix}_\Gamma(K)$ est distingué dans $\mathrm{Stab}_\Gamma(K)$, et que Γ est hyperbolique, on en déduit (voir [GH, Chap. 8, §2]) que les ensembles limites de $\mathrm{Fix}_\Gamma(K)$ et de $\mathrm{Stab}_\Gamma(K)$ coïncident, donc que $\mathrm{Stab}_\Gamma(K)$ est virtuellement cyclique. Si $\gamma \in \mathrm{Fix}(\varphi)$ et $x \in K$, alors $h(\gamma x) = \varphi(\gamma)h(x) = \gamma x$, donc $\gamma x \in K$. Par conséquent, $\mathrm{Fix}(\varphi)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Stab}_\Gamma(K)$, donc est virtuellement cyclique.

Supposons maintenant que h est hyperbolique. Si A est l'axe de translation de h, alors son stabilisateur $\mathrm{Stab}_\Gamma(A)$ est virtuellement cyclique. Si $\gamma \in \mathrm{Fix}\,(\varphi)$ et $x \in A$, alors $d(\gamma x, h(\gamma x)) = d(\gamma x, \varphi(\gamma)h(x)) = d(\gamma x, \gamma h(x)) = d(x, h(x))$, donc $\gamma x \in A$. Par conséquent, $\mathrm{Fix}\,(\varphi) \subset \mathrm{Stab}_\Gamma(A)$ est virtuellement cyclique. □

Lemme 3.13 *Si A est un arc de T et g un générateur de $Fix_\Gamma(A)$, alors $Fix_\Gamma(h(A))$ est engendré par $\varphi(g)$.*

Preuve. Si $y \in A$ et $\gamma \in G$, alors $\gamma y = y$ équivaut à $h(\gamma y) = h(y)$, qui équivaut à $\varphi(\gamma)h(y) = h(y)$. □

3.4 Variation sur le théorème A

Nous indiquons ici un énoncé analogue au théorème A, qui en est un corollaire.

Théorème 3.14 *Soit Γ un groupe hyperbolique, et H un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ dont l'image dans $\mathrm{Out}(\Gamma)$ est infinie, nilpotente, de type fini. Il existe un arbre réel T, muni d'une action affine de $\Gamma \rtimes H$, telle que la restriction de l'action à Γ est isométrique, sans point fixe global, minimale et très petite.*

Preuve.

Lemme 3.15 *(P. Hall, voir par exemple [Bau, Lem. 0.1, p. 3]) Un groupe nilpotent, dont le centre est de torsion, est de torsion. Un groupe nilpotent de type fini et de centre fini est fini.*

Preuve. Soit $(G_k)_{k=1\cdots s}$ la série centrale ascendante, définie par récurrence par G_1 est le centre $Z(G)$ de G, et $G_{k+1}/G_k = Z(G/G_k)$, avec $G_s = G$ (par définition de la nilpotence de G). Remarquons que $[G_{k+1}, G] \subset G_k$.

Montrons la première assertion par récurrence sur s. C'est clair si $s = 1$. Supposons $s > 1$. Soit $a \in G_2$ et $x \in G$. Alors $[x, a] \in G_1$. Soit n l'ordre de $[x, a]$. Rappelons la formule universelle $[a, bc] = [a, b]b[a, c]b^{-1}$. Alors,

$$[x, a^n] = [x, a]^n = 1.$$

Donc $a^n \in G_1$. Donc G_2/G_1 est de torsion. Comme G_2/G_1 est le centre de G/G_1, qui est nilpotent de longueur $s-1$, le résultat en découle par récurrence.

La deuxième assertion découle du fait qu'un groupe nilpotent de type fini est polycyclique et qu'un groupe polycyclique de torsion est fini (voir [Bau, p. 1]). □

Un groupe nilpotent est moyennable (voir par exemple [Gre]). Donc le théorème 3.14 découle du théorème A et de la deuxième assertion du lemme précédent. □

Remarque. L'hypothèse de type fini dans le théorème 3.14 est en fait inutile. Il découle en effet des travaux de [RS1, Sel1] qu'il n'y a pas de groupe de torsion infini dans $\mathrm{Out}(\Gamma)$ pour Γ un groupe hyperbolique. Dans le cas d'un groupe libre $\Gamma = \mathbb{F}^n$, ceci nous a été communiqué par K. Vogtmann : d'après le théorème de forme normale des automorphismes extérieurs d'ordre fini (premier) [Cul, Theo. 5.2], tout sous-groupe de torsion de $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ s'injecte dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ par l'application canonique $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ induite par l'abélianisation $\mathbb{F}_n \to \mathbb{Z}^n$. Or il n'y a pas de groupe infini de torsion linéaire.

3.5 Démonstration du corollaire B

Nous terminons la section par la preuve du corollaire B de l'introduction. Elle repose sur le résultat de C. Champetier suivant.

Théorème 3.16 *(C. Champetier [Cha]) Asymptotiquement presque sûrement, un groupe de présentation finie (à deux générateurs) est hyperbolique au sens de Gromov, de bord une courbe de Menger.* □

Voir par exemple [Gro2, GH] pour la définition du bord d'un groupe hyperbolique. Une courbe de Menger est un espace topologique compact, métrisable de dimension 1, connexe par arcs, localement connexe par arcs, sans point de coupure local (i.e. sans point qui sépare tout voisinage suffisamment petit), et non plongeable dans $\mathbb{R}^2$. Tous ces espaces sont homéomorphes.

Comme rappelé dans l'introduction, si Γ est un groupe hyperbolique et si $\mathrm{Out}(\Gamma)$ est infini, alors Γ se décompose en extension HNN ou en (non somme amalgammée non triviale au-dessus d'un groupe virtuellement cyclique G. Si G est fini, alors le bord de Γ n'est pas connexe (via le théorème de Stallings sur les bouts des groupes, voir [GH, p. 134]). Si G est infini, alors le bord de Γ possède un point de coupure local (par exemple les points fixes d'un élément d'ordre infini dans $G \subset \Gamma$) (voir par exemple [Bow]). □

4 Points fixes dans l'espace de Culler-Vogtmann

Soit $\mathbb{F}_n$ un groupe libre de rang n. L'espace de Culler-Vogtmann $\mathcal{O}_n$ est l'ensemble des actions simpliciales, libres et minimales de $\mathbb{F}_n$ sur des arbres réels, modulo isométries équivariantes (voir [CV1][Sha2]). $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ agit sur $\mathcal{O}_n$ de la manière suivante : si φ est un automorphisme de $\mathbb{F}_n$ et $T \in \mathcal{O}_n$ un arbre avec une action $\cdot$ de $\mathbb{F}_n$, alors φT est l'arbre réel T muni de l'action $g \mapsto \{x \in T \mapsto \varphi(g) \cdot x \in T\}$. Notons que les automorphismes intérieurs agissent trivialement, car induisent une isométrie équivariante de l'arbre.

Cette action permet d'apporter des informations sur la structure de $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$. M. Culler et K. Vogtmann [CV1] ont montré par exemple que $\mathcal{O}_n$ est un $(3n-4)$-complexe cellulaire contractile, se rétractant de manière équivariante sur un $(2n-3)$-complexe cellulaire de quotient compact, ce qui implique en particulier que la dimension cohomologique virtuelle de $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ est $2n-3$.

Il découle des rappels (section 1) que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n & \rightarrow & \mathbb{R}^\Gamma \\ T & \mapsto & \{g \mapsto \ell_T(g)\} \end{array}$$

est injective et que l'adhérence $\overline{\mathcal{O}_n}$ de $\mathcal{O}_n$ dans $\mathbb{R}^\Gamma$ est projectivement compacte. En fait, M. Bestvina et M. Feighn [BF2] ont montrés que $\overline{\mathcal{O}_n}$ est précisément l'espace $\mathcal{VSLF}(\mathbb{F}_n)$ des fonctions distances de translation des actions très petites de $\mathbb{F}_n$ sur les arbres réels. En restriction aux actions simpliciales, ceci est dû à M. Cohen-M. Lustig [CL].

La technique d'itération permet de donner une preuve très courte du théorème suivant, dû à M. Bestvina-M. Handel, R. Skora, M. Lustig dans le cas infini cyclique.

Théorème 4.1 *Tout sous-groupe moyennable de centre infini de* $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ *admet un point fixe dans* $\mathbb{P}(\overline{\mathcal{O}_n})$. *Tout sous-groupe nilpotent de* $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ *admet un point fixe dans* $\mathbb{P}(\overline{\mathcal{O}_n})$.

Preuve. Le cas des groupes finis découle de [Cul, Theo. 2]. Sinon, nous appliquons le théorème A et la remarque de la section 3.4. Nous pourrions alors invoquer le théorème de Bestvina-Feighn ci-dessus pour dire que l'action T obtenue, étant très petite (remarque 3.4), est dans le bord de l'espace de Culler-Vogtmann.

Mais ceci peut se voir directement en reprenant la démonstration du théorème A (avec ses notations). Nous supposons que la partie génératrice S de $\Gamma = \mathbb{F}^n$ est libre. Donc le graphe de Cayley X_S est un arbre simplicial. L'action de $\mathbb{F}^n$ par translation à gauche tordue par l'automorphisme ψ_i sur $X_i = \frac{1}{\lambda_i} X_S$ est encore libre, minimale et simpliciale. Rappelons que T' est limite de ces actions pour le filtre ω (pour la topologie de Gromov équivariante, donc pour la topologie de $\mathbb{R}^\Gamma$). Donc T' est dans $\overline{\mathcal{O}_n}$. Il n'est pas difficile de montrer que tout (T', δ) avec $\delta \in D(T')$, est encore limite des T_i où l'on a modifié les longueurs des arêtes. □

5 Sur la conjecture de Scott

M. Bestvina et M. Handel [BH] ont montré la conjecture de Scott, à savoir que le rang du groupe des points fixes d'un automorphisme de groupe libre de rang n est inférieur ou égal à n. Le fait qu'une preuve de ce théorème puisse être déduit d'arguments de convergence équivariante de Gromov est dû à Z. Sela [Sel2]. La démonstration ci-dessous, bien sûr inspirée de [Sel2], évite tout recours aux méthodes de E. Rips et offre certains raccourcis et éclaircissements sur la preuve de [Sel2]. Elle découle de conversations avec D. Gaboriau et G. Levitt dans les couloirs du Séminaire Bourbaki de Novembre 1992, de leurs travaux [GL], et de ceux avec M. Lustig [GLL].

Théorème 5.1 *(Bestvina-Handel) Le rang du groupe des points fixes d'un automorphisme de groupe libre de rang n est inférieur ou égal à n.*

L'argument principal de la preuve est le suivant :

Proposition 5.2 *(Levitt) Soit T un arbre réel muni d'une action minimale très petite du groupe libre $\mathbb{F}_n$. Supposons qu'il existe un point x dans T tel que le rang de $Stab_{\mathbb{F}_n}(x)$ soit n. Alors T est un arbre simplicial, isomorphe à l'arbre de Bass-Serre d'un bouquet de k cercles, avec stabilisateur de sommet $\mathbb{F}_n$ et stabilisateurs d'arêtes $\mathbb{Z}$.*

Preuve. Rappelons les résultats suivants de [GL]. Si x est un point d'un arbre réel T muni d'une action de $\mathbb{F}_n$, posons

$$i(x) = 2\text{rg Stab}_{\mathbb{F}_n}(x) + v_1(x) - 2$$

où $v_1(x)$ est le nombre (qui pourrait a priori être infini) d'orbites sous $\text{Stab}(x)$ de branches en x dont le stabilisateur est trivial. Notons (voir [GL] Proposition III.1) que si x est un point de branchement, alors $i(x) > 0$.

Théorème 5.3 *([GL] Theorem III.2) Si T est un arbre réel muni d'une action minimale très petite du groupe libre $\mathbb{F}_n$, alors*

$$\sum_{x \in T/\Gamma} i(x) \leq 2n - 2$$

avec égalité si et seulement si l'action est une action géométrique (voir [GL]). □

Proposition 5.4 *(E.Rips, [BF2] Remark 1.9, [GL] Proposition I.10) Soit T un arbre réel muni d'une action géométrique petite de $\mathbb{F}_n$. S'il existe une unique orbite de points de branchement, et si toutes les branches en un point de branchement ont un stabilisateur infini cyclique, alors l'action de $\mathbb{F}_n$ sur T est simpliciale. De plus, T est isométrique à l'arbre de Bass-Serre d'un bouquet de k cercles (de longueurs éventuellement différentes de 1), avec stabilisateur de sommet F_k avec $k \leq n$ et stabilisateurs d'arêtes $\{1\}$ ou $\mathbb{Z}$.*

Preuve. Soit T_K une action géométrique de $\mathbb{F}_n$. Si l'action n'est pas simpliciale, les points de branchement doivent s'accumuler sur $x \in T_K$, donc (voir [GL] Proposition I.10) sur un arc non trivial A issu de x. Soit g un générateur de $\text{Stab}_{\mathbb{F}_n}(A) - \{1\}$. Si hx est un point de branchement différent de x suffisamment proche de x, alors hgh^{-1} fixe un voisinage de hx dans A (voir [GL] Proposition I.10), donc commute avec g. Puisque g, h sont dans un groupe libre, avec g primitif (l'action est très petite), ceci implique que h est une puissance de g. Ceci contredit l'accumulation des points de branchement sur x dans E.

La dernière assertion est alors claire, $k \leq n$ découlant du théorème 5.3. □

Ceci termine la preuve de la proposition 5.2. □

Preuve. (de 5.1) Soit φ un automorphisme de $\mathbb{F}_n$. Si φ est d'ordre fini dans $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$, alors le résultat est connu (par un théorème de Dyer-Scott, voir [Cul, Coro. 3.2]). Sinon, considérons la paire $(T, h = h_\varphi)$ obtenue par application du théorème A au groupe $H \subset \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ engendré par φ (voir le premier paragraphe de la section 3.3). D'après la proposition 3.11, nous pouvons supposer que le sous-groupe des points fixes de φ est contenu dans le stabilisateur, préservé par φ, d'un point x de T. Si le rang r de ce stabilisateur est strictement inférieur à n, le résultat est obtenu par récurrence. Si $r \geq n$, alors le théorème 5.3 montre que $r = n$, qu'il y a une unique orbite de points de branchement, et que tous les stabilisateurs des branches issues d'un point de branchement sont infini cycliques. La remarque 3.9 et la proposition 5.4 donnent donc la situation suivante :

$T = T_0$ est un arbre simplicial, munie d'une action simpliciale de $\mathbb{F}_n$ et d'une isométrie h telle que $h(\gamma x) = \varphi(\gamma)h(x)$. De plus $\mathcal{G}_0 = T_0/\mathbb{F}_n$ est un bouquet de k_0 cercles, de sommet la projection de x, de stabilisateur de sommet G_0 libre de rang n et de stabilisateurs d'arêtes $\mathbb{Z}$. Notons que $1 \leq k_0 \leq n$, car l'action est non triviale, et le groupe fondamental d'un graphe de groupes se surjecte sur le groupe fondamental du graphe sous-jacent.

Itérons la construction (comme dans [Sel2]), en supposant par l'absurde que le rang de $\mathrm{Fix}(\varphi)$ est au moins $n+1$. Ainsi G_0 (qui est préservé par φ et contient $\mathrm{Fix}(\varphi)$) est de la même manière le groupe fondamental d'un graphe de groupes, de graphe un bouquets de k_1 cercles, de stabilisateur de sommet G_1 libre de rang n et avec stabilisateurs d'arêtes $\mathbb{Z}$. Montrons que *les images dans G_0 des générateurs des groupes d'arêtes de $\mathcal{G}_0$ sont en fait contenues dans G_1*. Ceci montrera que $\mathbb{F}_n$ s'écrit comme groupe fondamental de graphe de groupe, de graphe un bouquet de $k_0 + k_1$ cercles. Ceci donnera une contradiction, en itérant $n+1$ fois.

Soit A une arête de T_0 d'origine x. Notons g un générateur du groupe cyclique $\mathrm{Fix}_{\mathbb{F}_n}(A)$. L'isométrie h, fixant x induit une permutation des germes d'arêtes au sommet de $\mathcal{G}_0$. Donc il existe $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $\gamma \in G_0$ tels que $h^p(A) = \gamma A$. Donc $\mathrm{Fix}_{\mathbb{F}_n}(h^p(A)) = \gamma \mathrm{Fix}_{\mathbb{F}_n}(A)\gamma^{-1}$. Par le lemme 3.13, il vient $\varphi^p(g) = \gamma g \gamma^{-1}$. La classe de conjugaison de g dans G_0 est donc périodique sous $\varphi_{|G_0}$.

Notons T_1', T_1 les arbres obtenus dans la preuve du théorème A pour $\Gamma = G_0$, $H \subset \mathrm{Aut}(G_0)$ le sous-groupe engendré par $\varphi_{|G_0}$, et ψ_i de la forme $(\varphi_{|G_0})^{n_i}$, avec n_i une sous-suite de la suite des périodes de la classe de conjugaison de g. (Ceci est possible, par finitude du nombre de germes d'arêtes au sommet de $\mathcal{G}_0$.) Par la deuxième assertion de la remarque 3.6, nous en déduisons donc que g est elliptique dans T_1'. Il en est de même dans l'arbre T_1 d'après la remarque 3.2. Comme il y a unicité de l'orbite des sommets, cela termine la preuve. □

Corollaire 5.5 *Si φ est un automorphisme du groupe libre de rang n, dont le rang du sous-groupe des points fixes est n, alors il existe une décomposition de $\mathbb{F}_n$ en groupe fondamental de graphe de groupes, de graphe le bouquet de $k < n$ cercles, de stabilisateur de sommet libre de rang n et de stabilisateurs d'arêtes $\mathbb{Z}$, la restriction de φ au stabilisateur de sommet étant l'identité, les classes de conjugaison des groupes d'arêtes étant fixées.*

Preuve. J. Dyer et G. Scott (voir par exemple [Cul, Coro. 3.2]) ont montré qu'un automorphisme du groupe libre de rang n, dont le rang du sous-groupe des points fixes est n, et qui est d'ordre fini dans le groupe des automorphismes extérieurs, est l'identité. Le résultat découle alors de la récurrence ci-dessus. □

References

[AB] R. Alperin, H. Bass, *Length functions of group actions on Λ-trees*, in "Combinatorial group theory and topology", S. Gersten, J. Stallings eds, (1987), 265-378.

[Bau] G. Baumslag, *Lecture notes on nilpotent groups*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math. **2**, Amer. Math. Soc. 1971.

[Bes] M. Bestvina, *Degenerations of the hyperbolic space*, Duke Math. J., **56** (1988), 143-161.

[BF1] M. Bestvina, M. Feighn, *Stable actions of groups on real trees*, Inv. Math. **121** (1995) 287-321.

[BF2] M. Bestvina, M. Feighn, *Outer limits*, prépublication (Oct. 1992).

[BFH] M. Bestvina, M. Feighn, M. Handel, *The Tits alternative for* $Out(\mathbb{F}_n)$, en préparation.

[BH] M. Bestvina, M. Handel, *Train tracks and automorphisms of free groups*, Ann. Math. **135** (1992), 1-51.

[BLM] J. Birman, A. Lubotzky, J. McCarthy, *Abelian and solvable subgroups of the mapping class group*, Duke Math. J. **50** (1983) 1107-1120.

[Bou] N. Bourbaki. *Topologie générale*, chap. 1 à 4, Hermann, Paris, 1971.

[Bow] B. Bowditch, *Group actions on trees and dendrons*, Prépublication Univ. Southampton (Nov. 1995).

[Bra] T. Bradly, *The integral cohomology of* $Out_+(F_3)$, à paraître dans J. Pure App. Alg.

[Cha] C. Champetier, *Propriétés statistiques des groupes de présentation fini*, à paraître dans Adv. Math.

[CL] M. Cohen, M. Lustig, *Very small group actions on* $\mathbb{R}$*-trees and Dehn twist automorphisms*, Topology **34** (1995) 575-617.

[CM] M. Culler, J. Morgan, *Groups actions on* $\mathbb{R}$*-trees*, Proc. Lond. Math. Soc **55** (1987) 571-604.

[CV1] M. Culler, K. Vogtmann, *Moduli of graphs and automorphisms of free groups*, Invent. Math. **84** (1986) 91-119.

[CV2] M. Culler, K. Vogtmann, *The boundary of Outer Space in rank* 2, in "Arboreal group theory", R. Alperin ed., pp 189-230, Pub. M.S.R.I. **19**, Springer Verlag 1991.

[Cul] M. Culler, *Finite groups of outer automorphisms of a free group*, in "Contributions to group theory", K. Appel, J. Ratcliffe, P. Schupp, eds, pp 197-207, Contemp. Math. Amer. Math. Soc.

[DW] L. van den Dries, A. Wilkie. *On Gromov's theorem concerning groups of polynomial growth and elementary logic*, J. Alg. **89** (1984) 349-374.

[FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque **66-67**, Soc. Math. France 1979.

[GH] E. Ghys, P. de la Harpe, *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Prog. in Math. **83**, Birkhäuser 1990.

[Ghy] E. Ghys, *Les groupes hyperboliques*, Séminaire Bourbaki **722**, Astérisque , Soc. Math. France (1991).

[GL] D. Gaboriau, G. Levitt, *The rank of actions on* $\mathbb{R}$*-trees*, Ann. Scien. Ec. Norm. Sup. (4) **28** (1995) 549-570.

[GLL] D. Gaboriau, G. Levitt, M. Lustig, *A dendrological proof of the Scott conjecture for automorphisms of free groups*, prépublication Toulouse, Mars 1993.

[Gre] F.P. Greenleaf, *Invariant means on topological groups*, Van Nostrand Math. Stud. **16**, Van Nostrand 1969.

[Gro1] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Pub. I.H.E.S. **53** (1981) 53-78.

[Gro2] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in "Essays in group theory", S. Gersten ed., pp. 75-263, MSRI Pub. **8**, Springer Verlag 1987.

[Gro3] M. Gromov, *Asymptotics invariants of infinite groups*, Vol. 2 de "Geometric group theory", A. Niblo, M. Roller eds, LMS LNS **182**, Cambridge Univ. Press, 1993.

[GS] H. Gillet, P. Shalen, *Dendrology of groups in low $\mathbb{Q}$-ranks*, J. Diff. Geom. **32** (1990) 605-712.

[Iva] N. Ivanov, *Subgroups of Teichmüller modular groups*, Transl. Math. Mono. **115**, Amer. Math. Soc. 1992.

[KL] M. Kapovich, B. Leeb, *On asymptotic cones and quasi-isometry classes of fundamental groups of 3-manifolds*, GAFA **5** (1995) 582-603.

[Lev] G. Levitt, *Feuilletages des surfaces*, Thèse d'Etat, Univ. Orsay, 1983.

[Lio] I. Liousse, *Feuilletages affines de surfaces et actions affines sur les arbres réels*, Thèse, Toulouse (Fev. 1994).

[Lus1] M. Lustig, *Habilitationsschrift*, Bochum, 1992.

[Lus2] M. Lustig, *Automorphisms, train tracks, and non-simplicial $\mathbb{R}$-tree actions*, Prépublication Bochum, 1993.

[Mor] J. Morgan, *Λ-trees and their applications*, Bull. Amer. Math. Soc. **26** (1992) 87-112.

[MS] J. Morgan, P. Shalen, *Free actions of surface groups on $\mathbb{R}$-trees*, Topology **30** (1991) 143-154.

[Ols] A.Yu. Ol'shanskii, *Almost every group is hyperbolic*, Int. J. Alg. Comp. **2** (1992) 1-17.

[Pau1] F. Paulin, *The Gromov topology on $\mathbb{R}$-trees*, Topology and its App. **32** (1989) 197-221.

[Pau2] F. Paulin, *Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels*, Invent. Math. **94** (1988) 53-80.

[Pau3] F. Paulin, *Outer automorphisms of hyperbolic groups and small actions on $\mathbb{R}$-trees*, in "Arboreal group theory", R. Alperin ed., pp 331-343, Pub. M.S.R.I. **19**, Springer Verlag 1991.

[Pau4] F. Paulin, *Points fixes des automorphismes de groupe hyperbolique*, Ann. Inst. Fourier **39** (1989) 651-662.

[Pau5] F. Paulin, *De la géométrie et la dynamique des groupes discrets*, Mémoire d'Habilitation, ENS Lyon (Juin 1995).

[RS1] E. Rips, Z. Sela, *Structure and rigidity in hyperbolic groups I*, Geom. and Func. Ana. **4** (1994) 337-371.

[RS2] E. Rips, Z. Sela, *Cyclic splittings of finitely presented groups and the canonical JSJ decomposition*, Prépublication Columbia (Avril 1995).

[Sel1] Z. Sela, *Structure and rigidity in (Gromov) hyperbolic groups and discrete groups in rank 1 Lie groups II*, Prépublication Princeton, 1993.

[Sel2] Z. Sela, *On the Nielsen-Thurston classification and automorphisms of free groups I, II*, Prépublications Princeton (March 1993), Columbia (July 1995).

[Sha1] P. Shalen, *Dendrology of groups : an introduction*, Essays in group theory (S.M. Gersten ed.), M.S.R.I Pub. **8**, Springer Verlag, 1987.

[Sha2] P. Shalen, *Dendrology and its applications*, Group theory from a geometrical viewpoint (E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky eds.), World Scientific, 1991.

[Sko1] R. Skora, *Splittings of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **23** (1990) 85-90.

[Sko2] R. Skora, *Deformations of length functions*, prépublication, 1989.

[Thu] W. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1988) 417-432.

[Vog] K. Vogtmann, *End invariants of the group of outer automorphisms of a free group*, Topology **34** (1995) 533-545.

F. Paulin: Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, UMR 128 C.N.R.S.
Ecole Normale Supérieure de Lyon
46 allée d'Italie, 69364 LYON CEDEX 07, FRANCE
paulin@umpa.ens-lyon.fr