Dynamique sur le rayon modulaire
et
fractions continues en caractéristique p.

Anne Broise-Alamichel   Frédéric Paulin

Abstract [1]

Let $\widehat{K}$ be the field of formal Laurent series in X^{-1} over the finite field k, and let A be the ring of polynomials in X over k. One of the main results of the paper is to give a natural coding of the geodesic transformation on the quotient of the Bruhat-Tits tree $\mathbb{T}$ of $\mathrm{PGL}_2(\widehat{K})$ by $\mathrm{PGL}_2(A)$, using the continued fraction expansion of the endpoints of the geodesic lines in $\mathbb{T}$ (the space of ends of $\mathbb{T}$ identifies with $\mathbb{P}_1(\widehat{K})$). In particular, the invariance of the Haar measure by the Artin transformation can be deduced from the invariance of the Bowen-Margulis measure by the geodesic transformation.

1 Introduction

Soit $K = \mathbb{F}_q(X)$ le corps des fractions rationnelles sur le corps fini $\mathbb{F}_q$, de complété en l'infini le corps local $\widehat{K} = \mathbb{F}_q((X^{-1}))$ des séries formelles de Laurent en X^{-1} à coefficients dans $\mathbb{F}_q$, et soit $\mathcal{O} = \mathbb{F}_q[[X^{-1}]]$ le sous-anneau local de $\widehat{K}$ des séries formelles entières. On considère le groupe algébrique $\underline{G} = \mathrm{PGL}_2$ et son sous-groupe diagonal $\underline{S}$, les groupes localement compacts $G = \mathrm{PGL}_2(\widehat{K})$ et $S = \underline{S}(\widehat{K})$, et le réseau non uniforme $\Gamma = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q[X])$ de G. Nous étudions dans cet article les propriétés dynamiques de l'action de S par translations à droite sur $\Gamma\backslash G$ (voir par exemple [Mar1, Zim, Moz, Mar2, Tom, LW] pour des travaux sur d'autres $(\widehat{K}, \underline{G}, \underline{S}, \Gamma)$).

Notons $\mathbb{T}_q$ l'arbre (localement fini) de Bruhat-Tits de $(\underline{G}, \widehat{K})$. L'espace des bouts de $\mathbb{T}_q$ s'identifie avec la droite projective $\mathbb{P}_1(\widehat{K}) = \widehat{K} \cup \{\infty\}$, et on note x_* le point base standard de $\mathbb{T}_q$ (voir par exemple [Ser2] ou la partie 2 pour des rappels). Notons $\mathcal{G}(\mathbb{T}_q)$ l'espace des géodésiques de $\mathbb{T}_q$ (i.e. des isométries $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{T}_q$ d'origine $\ell(0)$ un sommet de $\mathbb{T}_q$). L'un des buts principaux de cet article, qui fait suite à [Pau1], est d'expliciter en termes arithmétiques la structure ergodique des actions commutantes

[1] **AMS codes :** 11 J 70, 20 G 25, 20 E 08, 37 A 45, 11 K 50. **Keywords :** continued fractions, Artin transformation, Laurent series field, Bruhat-Tits tree, geodesic flow, coding.

de Γ et de la transformation géodésique (l'action de $\mathbb{Z}$ par translation à la source) sur $\mathcal{G}(\mathbb{T}_q)$. Voir la fin de la partie 2.2 pour la relation bien connue entre cette action de $\mathbb{Z}$ passée au quotient sur $\Gamma\backslash\mathcal{G}(\mathbb{T}_q)$ et celle de S sur $\Gamma\backslash G$.

Nous décrivons (dans la partie 3.3) la structure de l'ensemble des géodésiques de $\mathbb{T}_q$ à extrémités irrationnelles (i.e. dans $\widetilde{K} - K$) modulo l'action de Γ. Notons $\pi : \mathbb{T}_q \to \Gamma\backslash\mathbb{T}_q$ la projection canonique, et $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$ l'ensemble des géodésiques ℓ d'origine x_*, d'extrémité négative un point irrationnel ξ_- de $J = \bigcup_{a\in\mathbb{F}_q[X]-\mathbb{F}_q}(a + X^{-1}\mathcal{O})$ et d'extrémité positive un point irrationnel ξ_+ de $X^{-1}\mathcal{O}$. Nous identifierons ℓ et (ξ_-, ξ_-). Alors (voir la partie 3.3), d'une part toute géodésique de $\mathbb{T}_q$ rencontre $\pi^{-1}(\pi(x_*))$. D'autre part, toute géodésique de $\mathbb{T}_q$, d'extrémités irrationnelles et d'origine dans $\pi^{-1}(\pi(x_*))$, est équivalente, modulo l'action d'un élément de Γ, à au moins un élément de $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$.

Soit $\widetilde{\Psi} : \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q) \to \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$ l'application induite par l'application de premier retour de la transformation géodésique sur la section globale $\pi^{-1}(\pi(x_*))$ (voir la partie 3.3). Ainsi, l'étude dynamique de la transformation géodésique sur $\mathcal{G}(\mathbb{T}_q)$ se ramène (par suspension et modulo ensemble de mesure nulle) à l'étude dynamique de $\widetilde{\Psi}$ sur $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$.

Pour ℓ dans $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$, notons $[0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ le développement en fraction continue d'Artin [Art] de ξ_+, et $[a_0; a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \ldots]$ celui de ξ_- (voir la partie 2.1 pour des rappels). Nous montrons dans la partie 3 le résultat de codage suivant :

Théorème 1.1 *L'application $\Theta_\sharp : \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q) \to (\mathbb{F}_q[X] - \mathbb{F}_q)^{\mathbb{Z}}$, définie par $\Theta_\sharp(\ell) = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, est un homéomorphisme qui rend le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta_\sharp} & (\mathbb{F}_q[X] - \mathbb{F}_q)^{\mathbb{Z}} \\ \widetilde{\Psi}\downarrow & & \downarrow\sigma \\ \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta_\sharp} & (\mathbb{F}_q[X] - \mathbb{F}_q)^{\mathbb{Z}} \end{array} ,$$

où σ est le décalage à gauche des suites bilatères de $(\mathbb{F}_q[X] - \mathbb{F}_q)^{\mathbb{Z}}$. De plus, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\widetilde{\Psi}} & \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q) \\ \mathrm{p}_+\downarrow & & \downarrow\mathrm{p}_+ \\ X^{-1}\mathcal{O}\cap(\widehat{K} - K) & \xrightarrow{\Psi} & X^{-1}\mathcal{O}\cap(\widehat{K} - K) \end{array} ,$$

où $\Psi : \xi \mapsto \frac{1}{\xi} - \left[\frac{1}{\xi}\right]$ est la transformation d'Artin (si ζ est dans $\widehat{K}$, alors $[\zeta]$ désigne sa partie entière), et $\mathrm{p}_+ : (\xi_-, \xi_+) \mapsto \xi_+$ est la projection sur la deuxième coordonnée.

Notons m la mesure de probabilité naturelle sur $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$ invariante par l'application de premier retour de la transformation géodésique $\widetilde{\Psi}$. Elle correspond à la mesure de Haar quotient normalisée sur $\Gamma\backslash G$, et, de manière classique, avec la mesure de Patterson-Sullivan-Bowen-Margulis normalisée de Γ (voir par exemple [Bou, BM] et la partie 4).

Nous montrons dans la partie 4 que l'image de m par $\Theta_\sharp$ est une mesure de Bernoulli sur $(\mathbb{F}_q[X]-\mathbb{F}_q)^{\mathbb{Z}}$. Ceci implique en particulier que si M est le sous-groupe compact maximal de S, alors l'action à droite de S/M sur $\Gamma\backslash G/M$ est lâchement Bernoulli (donc mélangeante, mais ceci était déjà connu, par le théorème de Howe-Moore [Zim], voir aussi [BN]). Dans [BP], nous étudions le cas général des réseaux des groupes algébriques semi-simples de rang 1 sur un corps local non archimédien, et montrons que l'on peut remplacer lâchement Bernoulli par Bernoulli (d'entropie finie). En fait, nous donnons des codages markoviens de transformations géodésiques sur des arbres munis d'actions très générales de groupes. Ces codages permettent de contourner l'abondance de torsion dans les réseaux non-uniformes d'arbres, dont on ne peut se débarrasser par passage à un sous-groupe d'indice fini.

Nous montrons dans la partie 5 que l'image de m par la deuxième projection est un multiple de la mesure de Haar sur $X^{-1}\mathcal{O}$. Ceci explique de manière dynamique l'invariance de cette mesure de Haar par la transformation d'Artin.

Ces résultats sont analogues aux résultats qui relient la transformation géodésique sur la courbe modulaire $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$ avec le développement en fraction continue des nombres réels (et qui expliquent, en particulier, l'invariance de la mesure de Gauss $\frac{1}{\log 2}\frac{dx}{1+x}$ par la transformation de Gauss $x \mapsto \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$) (voir par exemple [Seri]).

Cet article fait suite à [Pau1], où une partie de l'analogie ayant trait aux géodésiques individuelles, est développée. Mais un codage global de la transformation géodésique n'est pas contenu (même pas entre les lignes) dans [Pau1], car une approche globale suivant de trop près [Pau1] conduit à des discontinuités. La présence du corps résiduel $\mathbb{F}_q$, absent dans le cas réel, est une des sources de problèmes. C'est, entre autre, le travail de "naturalité" du présent article qui permet le codage global. Il ne s'agit pas de construire n'importe quel codage, mais un qui soit intimement lié à la structure arithmétique du réseau $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_q[X])$ (celui-ci n'est pas de type fini et contient des sous-groupes infini de torsion), et qui permette une correspondance entre propriétés dynamiques et arithmétiques. Nous montrons dans la partie 3.4 la naturalité par extension de corps de ce codage. Le travail de "naturalité" de cet article est assuré en particulier par la notion de géodésique "décorée" (définie dans la partie 3.1). Introduire une "décoration" sur les géodésiques revient à munir, de manière naturelle, chaque géodésique d'un point à l'infini différent de ses extrémités, pour pouvoir utiliser la simple transitivité de l'action projective de G sur les triplets de points de $\mathbb{P}_1(\widehat{K})$, voir par exemple le lemme 3.1.

Remerciements : Nous remercions le rapporteur d'une version précédente de cet article pour ses corrections cruciales, en particulier concernant la définition de $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$.

2 Notations et rappels

Toute cette partie est composé de rappels, pour lesquels nous renvoyons par exemple à [Ser1, Spr, Sch, Laj, BN, Ser2, Pau1]. Elle n'est écrite que pour éviter au lecteur qui ne connaîtrait pas les notations et résultats de [Ser1, Pau1] d'avoir à lire le présent article en ayant à côté ces deux références. Les autres lecteurs peuvent se reporter directement au chapitre 3.

2.1 Le corps des séries formelles de Laurent

Soit $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini, d'ordre q (où q est une puissance d'un nombre premier). On note $A = k[X]$ l'anneau des polynômes en une variable X sur k, et $K = k(X)$ le corps des fractions rationnelles en X sur k. Soit $\widehat{K} = k((X^{-1}))$ le complété de K pour la valuation v_∞ définie par

$$v_\infty(P/Q) = (-\deg P) - (-\deg Q) \ .$$

Le corps $\widehat{K}$ est muni de l'unique valuation qui étend v_∞ (que l'on notera de la même manière), de la valeur absolue

$$|f|_\infty = q^{-v_\infty(f)}$$

et de la distance ultramétrique définie par cette valeur absolue

$$d_\infty(f,g) = |f-g|_\infty \, .$$

Tout élément de $\widehat{K}$ s'écrit de manière unique comme série convergente

$$f = \sum_{i>>-\infty} f_i X^{-i}$$

avec f_i dans k, nul pour i suffisamment petit. On a

$$v_\infty(f) = \sup\{j \in \mathbb{Z} \mid \ \forall i < j, f_i = 0\} \ .$$

On note $\mathcal{O} = \{f \in \widehat{K}, v_\infty(f) \geq 0\}$ l'anneau de la valuation v_∞ dans $\widehat{K}$. C'est le sous-espace compact-ouvert $k[[X^{-1}]]$ des séries entières en X^{-1} sur k, c'est aussi la boule fermée de rayon 1 et de centre 0 dans $\widehat{K}$.

Pour tout f dans $\widehat{K}$, il existe un unique couple formé d'un polynôme en X sur k, noté $[f] \in A$, et d'une série entière en X^{-1} sur k, de terme constant nul, notée $\{f\} \in X^{-1}\mathcal{O}$, tels que

$$f = [f] + \{f\}.$$

On appelle $[f]$ la *partie entière* de f et $\{f\} = f - [f]$ la *partie fractionnaire* de f. *La transformation d'Artin* est l'application $\Psi : X^{-1}\mathcal{O} - \{0\} \to X^{-1}\mathcal{O}$ définie par

$$\Psi(f) = \{\frac{1}{f}\} = \frac{1}{f} - [\frac{1}{f}] \ .$$

Remarquons que $\Psi(-f) = -\Psi(f)$. On note ${}^cK$ l'ensemble $\widehat{K} - K$ des points irrationnels de $\widehat{K}$. Pour f dans ${}^cK$, on pose $a_0 = a_0(f) = [f]$ et pour $n \geq 1$ entier,

$$a_n = a_n(f) = \left[\frac{1}{\Psi^{n-1}(f - a_0)}\right] .$$

Alors a_n est dans A. Si $n \geq 1$, le degré de a_n est strictement positif et

$$f = \lim_{n \to +\infty} [a_0; a_1, \dots, a_n] \quad \text{où} \quad [a_0; a_1, \dots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}} .$$

On appelle *développement en fraction continue d'Artin* d'un élément f de ${}^cK$ la suite $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$.

2.2 L'arbre de Bruhat-Tits

On rappelle que pour tout corps commutatif κ, l'action par homographies du groupe $\mathrm{PGL}_2(\kappa)$ sur la droite projective $\mathbb{P}_1(\kappa)$ est simplement transitive sur les triplets de points de $\mathbb{P}_1(\kappa)$.

On reprend les notations $G = \mathrm{PGL}_2(\widehat{K})$ et $\Gamma = \mathrm{PGL}_2(A)$ de l'introduction, et on appele *groupe modulaire* le groupe Γ. Dans toute la suite, on note de la même manière une matrice de $\mathrm{GL}_2(\widehat{K})$ et son image dans G. On note $\mathrm{GL}(2, \widehat{K})^+$ le groupe des matrices carrées de taille 2 à coefficients dans $\widehat{K}$, dont la valeur absolue du déterminant est égale à 1, et G^+ son image dans G, qui contient Γ.

L'*arbre de Bruhat-Tits* $\mathbb{T}_q$ de $(\mathrm{PGL}_2, \widehat{K})$ est le graphe défini ainsi (voir [Ser2]) :

1. les sommets de $\mathbb{T}_q$ sont les classes d'homothétie (par $\widehat{K}^\times$) $\Lambda = [L]$ de $\mathcal{O}$-réseaux (i.e. $\mathcal{O}$-sous-modules libres de rang deux) L dans $\widehat{K} \times \widehat{K}$;
2. deux sommets Λ, Λ' sont joints par une arête si et seulement s'il existe des représentants L, L' de Λ, Λ' tels que L' soit contenu dans L et L/L' soit isomorphe à $\mathcal{O}/X^{-1}\mathcal{O} = k$.

On note $V\mathbb{T}_q$ l'ensemble des sommets de $\mathbb{T}_q$ et $E\mathbb{T}_q$ l'ensemble de ses arêtes. On note $x_* = [\mathcal{O} \times \mathcal{O}]$ la classe du réseau standard. Le graphe $\mathbb{T}_q$ est un arbre régulier de degré $q + 1$. L'action naturelle de $\mathrm{GL}_2(\widehat{K})$ sur les $\mathcal{O}$-réseaux induit une action (avec inversion) de G sur $\mathbb{T}_q$, transitive sur les arêtes. Le stabilisateur de x_* est le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathcal{O})$.

On identifie dans la suite l'arbre $\mathbb{T}_q$ avec sa réalisation géométrique et on note d la distance dans $\mathbb{T}_q$. On note $\mathbb{T}_q \cup \partial\mathbb{T}_q$ la compactification par ses bouts de l'espace topologique localement compact $\mathbb{T}_q$. Un *rayon géodésique* dans $\mathbb{T}_q$ est une isométrie $[0, +\infty[\to \mathbb{T}_q$. Un bout de $\mathbb{T}_q$ peut être défini comme une classe d'équivalence de rayons géodésiques dans $\mathbb{T}_q$, où deux rayons géodésiques sont équivalents si leur intersection est encore un rayon géodésique. L'action de G sur $\mathbb{T}_q$ s'étend continuement en une action par homéomorphismes de G sur $\mathbb{T}_q \cup \partial\mathbb{T}_q$.

L'espace $\partial\mathbb{T}_q$ s'identifie, de manière G-équivariante et homéomorphique, avec la droite projective $\mathbb{P}(\widehat{K} \times \widehat{K}) = \mathbb{P}_1(\widehat{K})$, par l'application qui, à l'extrémité d'un rayon géodésique issu de $\Lambda_0 = x_*$, de suite des sommets consécutifs $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, associe l'unique droite de $\widehat{K} \times \widehat{K}$ contenant l'intersection des $\mathcal{O}$-réseaux L_n, avec $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite de $\mathcal{O}$-réseaux dans $\widehat{K} \times \widehat{K}$ telle que $[L_n] = \Lambda_n$, $L_0 = \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ et $L_{n+1} \subset L_n$.

En choisissant la droite $\widehat{K} \times \{0\}$ de $\widehat{K} \times \widehat{K}$ comme point à l'infini de $\mathbb{P}_1(\widehat{K})$, on identifie $\partial\mathbb{T}_q = \mathbb{P}_1(\widehat{K})$ avec $\widehat{K} \cup \{\infty\}$. On note v_* l'arête d'origine du rayon géodésique d'origine x_* et d'extrémité le point 1 de $\widehat{K} \subset \partial\mathbb{T}_q$. L'action de G sur $\partial\mathbb{T}_q = \mathbb{P}_1(\widehat{K})$ correspond à l'action de G par homographies sur $\widehat{K} \cup \{\infty\}$.

On note $\pi : \mathbb{T}_q \to \Gamma\backslash\mathbb{T}_q$ la projection canonique et Γ_∞ le fixateur dans Γ du point ∞ de $\partial\mathbb{T}_q$. Le rayon géodésique $\mathcal{D}_\Gamma$ issu de x_* et d'extrémité ∞, donc de suite des sommets consécutifs $([\mathcal{O} \times X^{-n}\mathcal{O}])_{n\in\mathbb{N}}$, est un domaine fondamental pour l'action (sans inversion) du groupe modulaire Γ sur l'arbre de Bruhat-Tits $\mathbb{T}_q$, au sens où ses images par Γ recouvrent $\mathbb{T}_q$. La restriction $\pi\,|_{\mathcal{D}_\Gamma}$ est un isomorphisme simplicial de $\mathcal{D}_\Gamma$ sur $\Gamma\backslash\mathbb{T}_q$. Le graphe $\Gamma\backslash\mathbb{T}_q$ hérite par π d'une structure de graphe de groupes, que l'on note $\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q$, et que l'on appelle le *rayon modulaire* (voir [Ser2] pour les définitions et la construction).

Relation avec l'action du sous-groupe diagonal S.
L'action de G sur l'espace des géodésiques $\mathcal{G}(\mathbb{T}_q)$ de $\mathbb{T}_q$ est transitive, et continue quand $\mathcal{G}(\mathbb{T}_q)$ est muni de la topologie compacte-ouverte. Le stabilisateur de la géodésique d'origine x_* et d'extrémités $\infty, 0$ (orientée de ∞ vers 0) est le sous-groupe compact-ouvert abélien $M = \underline{S}(\mathcal{O})$ de S. L'élément $\begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ de S, dont l'image engendre S/M, agit par translation de distance $+1$ sur cette géodésique. L'action par translations à droite du groupe S/M sur G/M est donc topologiquement conjuguée à celle de la transformation géodésique sur $\mathcal{G}(\mathbb{T}_q)$. Nous étudierons donc cette dernière dans tout l'article.

Voir par exemple [Ser2] pour des justifications et compléments.

2.3 La famille Γ-équivariante maximale d'horoboules d'intérieurs disjoints.

Pour tout ξ dans $\partial\mathbb{T}_q$, on appelle *fonction de Buseman* de $\mathbb{T}_q$ l'application $\beta_\xi : \mathbb{T}_q \times \mathbb{T}_q \to \mathbb{R}$ définie par $\beta_\xi(x, y) = d(x, z) - d(y, z)$ où $[x, \xi[\cap [y, \xi[= [z, \xi[$. On appelle *horosphère* centrée en $\xi \in \partial\mathbb{T}_q$ et passant par $x \in \mathbb{T}_q$ l'ensemble des points y de $\mathbb{T}_q$ tels que $\beta_\xi(x, y) = 0$. Son *horoboule* associée est l'ensemble des points y de $\mathbb{T}_q$ tels que $\beta_\xi(x, y) \geq 0$.

On note H_∞ l'horosphère centrée au point ∞ de $\partial\mathbb{T}_q$ et passant par x_*, et HB_∞ son horoboule associée. C'est l'orbite du rayon fondamental $\mathcal{D}_\Gamma$ par le fixateur Γ_∞ du point ∞ (de $\partial\mathbb{T}_q$) dans le groupe modulaire Γ. Pour tout γ dans Γ, on note $H_{\gamma\infty} = \gamma H_\infty$, c'est l'horosphère centrée en $\gamma\infty$ et passant par γx_*, et on note $HB_{\gamma\infty} = \gamma HB_\infty$ son horoboule associée. Il est facile de voir que la famille $\mathcal{HB} = (HB_{\gamma\infty})_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_\infty}$ est la famille des adhérences des composantes connexes de la préimage par π du rayon $\Gamma\backslash\mathbb{T}_q$ privé de son origine. Les horoboules de cette famille se rencontrent deux à deux en au plus un point (dans l'intersection des horosphères associées), et leur réunion est égale à $\mathbb{T}_q$. Notons $\mathcal{H}$ la famille d'horosphères $(H_{\gamma\infty})_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_\infty}$.

Voir par exemple [Pau1, Pau2] pour des justifications et compléments.

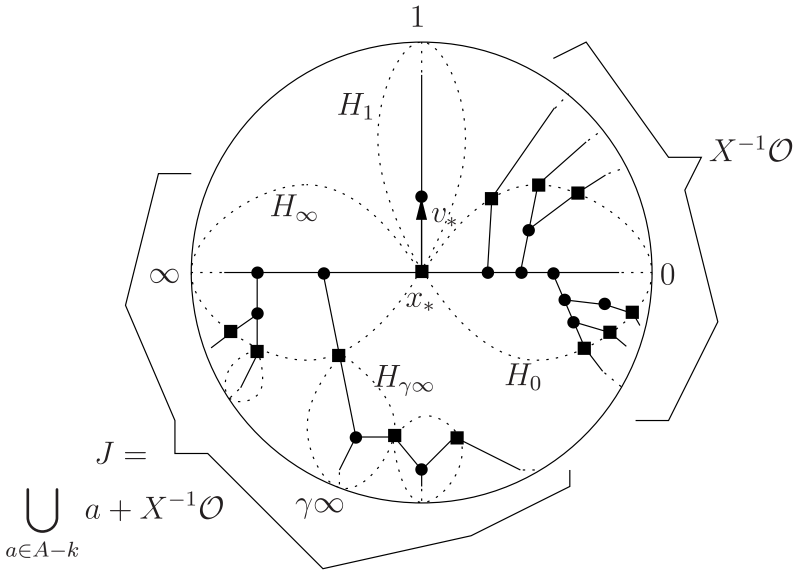

Figure 1 : Trajet des géodésiques dans la famille d'horoboules $\mathcal{HB}$.

Remarque 2.1 *Soient x_1, x_2, x_3 (resp. x'_1, x'_2, x'_3) trois points deux à deux distincts dans $\mathbb{P}_1(K) = \Gamma\infty$.*

(1) Si $H_{x_1} \cap H_{x_2} \neq \emptyset$ et $H_{x_1} \cap H_{x_3} \neq \emptyset$, alors il existe un unique γ dans Γ fixant x_1 et échangeant x_2 et x_3.

(2) Si $H_{x_1} \cap H_{x_2} \cap H_{x_3} \neq \emptyset$ et $H_{x'_1} \cap H_{x'_2} \cap H_{x'_3} \neq \emptyset$, alors il existe un unique γ dans Γ tel que $\gamma x_j = x'_j$ pour $j = 1, 2, 3$.

Preuve. Les unicités viennent du fait que $\mathrm{PGL}_2(K)$ agit simplement transitivement sur les triplets de points deux à deux distincts de $\mathbb{P}_1(K)$. Montrons l'existence d'un tel γ.

(1) Par transitivité de Γ sur $\Gamma\infty$ et par invariance de la famille $\mathcal{H}$, on peut supposer que $x_1 = \infty$. Alors (voir par exemple [Pau1, théo. 5.1]) x_2 et x_3 sont dans A. Comme le groupe des matrices unipotentes supérieures à coefficients dans A, qui est contenu dans Γ_∞, agit transitivement sur A et préserve $\mathcal{H}$, on peut suposer que $x_2 = 0$. Alors l'homographie définie par $z \mapsto x_3 - z$ convient.

(2) De même, on peut supposer que $x_1 = x'_1 = \infty$ et $x_2 = x'_2 = 0$. Alors x_3 et x'_3 appartiennent à $k - \{0\}$ (voir par exemple [Pau1, théo. 5.1]). Comme $\mathrm{PGL}_2(k)$, qui est contenu dans Γ, agit transitivement sur les triplets de points de $\mathbb{P}_1(k)$, le résultat en découle. $\square$

3 Codage de la transformation géodésique sur le rayon modulaire

3.1 L'espace des géodésiques décorées sur le rayon modulaire

Appelons *géodésique décorée de* $\mathbb{T}_q$ une géodésique ℓ de $\mathbb{T}_q$ (i.e. une isométrie $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{T}_q$ telle que $\ell(0) \in V\mathbb{T}_q$), dont l'origine $x_0 = x_0(\ell) = \ell(0)$ est sur l'une des horosphères de la famille $\mathcal{H}$ (i.e. est un point de $\pi^{-1}(\pi(x_*))$), et qui est munie d'une arête $v_0 = v_0(\ell)$ issue de x_0 non contenue dans ℓ, appelée *décoration*. Remarquons que pour $q = 2$, la décoration est unique.

Notons $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ l'ensemble des géodésiques décorées *totalement irrationnelles* de $\mathbb{T}_q$, c'est-à-dire celles qui ont leurs deux extrémités dans $\partial\mathbb{T}_q - \mathbb{P}_1(K) = {}^c\!K$. Le groupe Γ préserve $\mathbb{P}_1(K)$ et la famille $\mathcal{H}$. Il agit donc sur $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$: l'image par un élément γ de Γ d'une géodésique ℓ de décoration v_0 est la géodésique $\gamma\ell$ de décoration γv_0.

L'ensemble $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ est muni de la topologie (métrisable) définie par le système fondamental d'entourages $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, où V_n est l'ensemble des couples de géodésiques décorées qui coïncident entre les instants $-n$ et n et qui ont même décoration.

L'application d'oubli de la décoration, de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ dans $\mathcal{G}(\mathbb{T}_q)$, est un revêtement à $q-1$ feuillets sur son image (car un homéomorphisme local sur son image, à fibres vides ou de cardinal constant $q-1$), qui est Γ-équivariant.

Lemme 3.1 *Le groupe* Γ *agit librement et proprement sur* $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$.

Preuve. Comme Γ agit proprement sur $\mathbb{T}_q$, l'action de Γ sur $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ est propre. Cette action est aussi libre, car G agit simplement transitivement sur les triplets de points de $\partial\mathbb{T}_q$, et si un élément γ de Γ fixe une géodésique décorée, d'extrémités (distinctes) ξ_-, ξ_+ et de décoration v_0, alors γ fixe aussi le point à l'infini η_0 de l'horoboule de la famille $\mathcal{HB}$ qui contient v_0, et η_0 est distinct de ξ_- et de ξ_+. $\square$

Notons $\mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q)$ l'espace topologique quotient $\Gamma\backslash\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$.

Pour ℓ une géodésique de $\mathbb{T}_q$, on note $\xi_- = \xi_-(\ell)$ et $\xi_+ = \xi_+(\ell)$ ses extrémités négative et positive. On munit $V\mathbb{T}_q$ et $E\mathbb{T}_q$ de la topologie discrète, et $\partial\mathbb{T}_q \times \partial\mathbb{T}_q \times V\mathbb{T}_q \times E\mathbb{T}_q$ de la topologie produit. L'application qui à un élément ℓ de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ associe le quadruplet (ξ_-, ξ_+, x_0, v_0) de $\partial\mathbb{T}_q \times \partial\mathbb{T}_q \times V\mathbb{T}_q \times E\mathbb{T}_q$ est alors un homéomorphisme de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ sur son image, qui est un borélien B, contenu dans $\widehat{K} \times \widehat{K} \times V\mathbb{T}_q \times E\mathbb{T}_q$. Nous appellerons cette application le *paramétrage* de l'espace des géodésiques décorées totalement irrationnelles de $\mathbb{T}_q$. Par la suite, nous identifierons une géodésique décorée ℓ et son quadruplet (ξ_-, ξ_+, x_0, v_0). L'action de Γ sur

$\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ s'identifie alors avec la restriction au borélien B de l'action diagonale de Γ sur l'espace produit $\partial\mathbb{T}_q \times \partial\mathbb{T}_q \times V\mathbb{T}_q \times E\mathbb{T}_q$.

3.2 Codage de la transformation géodésique décorée

L'application de premier retour $\widetilde{T}$ sur $\pi^{-1}(\pi(x_*))$ de la transformation géodésique $\ell \mapsto (t \mapsto \ell(t+1)$ sur $\mathcal{G}(\mathbb{T}_q)$ est définie, sur l'ensemble des géodésiques d'origine dans $\pi^{-1}(\pi(x_*))$ et repassant au moins une fois dans $\pi^{-1}(\pi(x_*))$, par $\ell \mapsto \{t \mapsto \ell(t+\tau_\ell)\}$, où τ_ℓ est le temps de premier retour de ℓ dans $\pi^{-1}(\pi(x_*))$. Nous allons en définir une version décorée $\widetilde{T}_0 : \mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q) \to \mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$, c'est-à-dire, une application rendant le diagramme suivant commutatif, avec $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q) \to \mathcal{G}(\mathbb{T}_q)$ l'application d'oubli de la décoration, dont l'image est contenue dans le domaine de définition de $\widetilde{T}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\widetilde{T}_0} & \mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}(\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\widetilde{T}} & \mathcal{G}(\mathbb{T}_q)\ . \end{array} \qquad (*)$$

Soit $\ell = (\xi_-, \xi_+, x_0, v_0)$ dans $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$. Notons $\xi_n = \xi_n(\ell)$ les points de $\mathbb{P}_1(K)$ tels que $(HB_{\xi_n})_{n\in\mathbb{Z}}$ soit la suite des horoboules de $\mathcal{HB}$ traversées consécutivement par ℓ, avec $HB_{\xi_{-1}} \cap HB_{\xi_0} = \{x_0\}$. Soit $x_n = x_n(\ell)$ le point de $V\mathbb{T}_q$ tel que $HB_{\xi_{n-1}} \cap HB_{\xi_n} = \{x_n\}$ (voir la figure de gauche suivant l'énoncé du théorème 3.3). Il faut remarquer que les suites (ξ_n) et (x_n) sont bien indexées par $\mathbb{Z}$. En effet, par définition, une géodésique décorée de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ a ses deux extrémités irrationnelles. Or toute géodésique qui rentre dans une horoboule de la famille $\mathcal{HB}$ ou bien en ressort, ou bien converge vers le point à l'infini de cette horoboule, qui est rationnel.

Notons $\eta_0 = \eta_0(\ell)$ le point de $\mathbb{P}_1(K)$ tel que l'horoboule HB_{η_0} contienne l'arête v_0. Notons $\gamma_0 = \gamma_0(\ell)$ l'unique élément de Γ envoyant $\infty, 1, 0$ sur ξ_{-1}, η_0, ξ_0 respectivement (voir la remarque 2.1 (2) et la figure suivant l'énoncé du théorème 3.3). Notons $i_- : z \mapsto -\frac{1}{z}$ l'inversion (dans Γ) échangeant ∞ et 0, ainsi que 1 et -1.

Soit $s_0 = s_0(\ell) = \gamma_0 i_- \gamma_0^{-1}$, qui est un élément (d'ordre 2) de Γ qui fixe x_0 et échange ξ_{-1} et ξ_0. Soit $s_{\frac{1}{2}} = s_{\frac{1}{2}}(\ell)$ l'unique élément (d'ordre 2) de Γ qui fixe ξ_0 et échange ξ_{-1} et ξ_1 (voir la remarque 2.1 (1)).

Notons $v_1 = s_{\frac{1}{2}} s_0 v_0$ et $\eta_1 = s_{\frac{1}{2}} s_0 \eta_0$. Comme $s_{\frac{1}{2}}$ envoie la géodésique entre ξ_0 et ξ_{-1} sur la géodésique entre ξ_0 et ξ_1, l'élément $s_{\frac{1}{2}} s_0$ de Γ envoie x_0 sur x_1 et v_0 sur v_1, qui est une arête issue de x_1 qui ne rentre ni dans HB_{ξ_0} ni dans HB_{ξ_1}.

Remarque 3.2 *Pour usage ultérieur, notons que si* $\xi_{-1} = \infty, \eta_0 = 1, \xi_0 = 0$*, alors* $\gamma_0 = \mathrm{id}$ *et* $s_{\frac{1}{2}}$ *est l'homographie* $z \mapsto \frac{z}{\frac{z}{\xi_1} - 1}$*, donc* $s_0 = i_-$ *et* $\eta_1 = \frac{1}{\frac{1}{\xi_1} + 1}$.

De même, notons $s_{-\frac{1}{2}} = s_{-\frac{1}{2}}(\ell)$ l'unique élément (d'ordre 2) de Γ qui fixe ξ_{-1} et échange ξ_0 et ξ_{-2}. Posons $v_{-1} = s_{-\frac{1}{2}} s_0 v_0$, c'est une arête issue de x_{-1} qui ne rentre ni dans $HB_{\xi_{-2}}$, ni dans $HB_{\xi_{-1}}$.

Posons $\widetilde{T}_0(\ell) = (\xi_-, \xi_+, x_1, v_1)$. Il est immédiat que le diagramme $(*)$ commute. L'application $\widetilde{T}_0 : \mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q) \to \mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ est un homéomorphisme (dont l'inverse est, par un petit calcul, $\ell \mapsto (\xi_-, \xi_+, x_{-1}, v_{-1})$). Pour tout γ dans Γ, on a par unicité $\gamma_0(\gamma\ell) = \gamma\gamma_0(\ell)$, donc $s_0(\gamma\ell) = \gamma s_0(\ell)\gamma^{-1}$, et $s_{\frac{1}{2}}(\gamma\ell) = \gamma s_{\frac{1}{2}}(\ell)\gamma^{-1}$. Donc $\widetilde{T}_0$ est équivariante, et induit par passage au quotient un homéomorphisme

$$T_0 : \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) \to \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) .$$

qui est appelé *application de premier retour dans* $\mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q)$.

Appelons *renversement du temps sur* $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ l'involution $\widetilde{\tau} : \mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q) \to \mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ définie par $\widetilde{\tau}(\xi_-, \xi_+, x_0, v_0) = (\xi_+, \xi_-, x_0, v_0)$. Clairement, l'application $\widetilde{T}_0$ anti-commute avec $\widetilde{\tau}$ (i.e. $\widetilde{\tau} \circ \widetilde{T}_0 \circ \widetilde{\tau} = \widetilde{T}_0^{-1}$), et $\widetilde{\tau}$ est équivariante sous l'action de Γ. Elle induit donc par passage au quotient une involution $\tau : \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) \to \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q)$, que nous appellerons *renversement du temps sur* $\mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q)$. L'application T_0 anti-commute avec τ.

Notons $\Gamma_{\infty,\sharp}$ l'ensemble des éléments de Γ_∞ qui ne fixent pas x_*. Donc $\Gamma_{\infty,\sharp} = \Gamma_\infty - (\mathrm{PGL}_2(k) \cap \Gamma_\infty)$. On munit $\Gamma_{\infty,\sharp}$ de la topologie discrète et $(\Gamma_{\infty,\sharp})^{\mathbb{Z}}$ de la topologie produit.

Le résultat suivant est un premier théorème de codage de la transformation géodésique sur le quotient de l'arbre de Bruhat-Tits de $(\mathrm{PGL}_2, \widehat{K})$ par le sous-groupe arithmétique $\mathrm{PGL}_2(A)$. Même si ce n'est pas la version utilisée pour les applications arithmétiques, nous le donnons sous cette forme, car il est généralisé (de manière moins concrète) dans [BP, prop. 5.3] en remplaçant PGL_2 par n'importe quel groupe algébrique linéaire connexe semi-simple $\underline{G}$ défini sur $\widehat{K}$, de $\widehat{K}$-rang 1, et $\mathrm{PGL}_2(A)$ par n'importe quel sous-groupe arithmétique Γ' de $\underline{G}(\widehat{K})$ (quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini). Nous utilisons dans [BP] le théorème de structure du graphe de groupes $\Gamma'\backslash\backslash T'$, quotient de T' par Γ', avec T' l'arbre de Bruhat-Tits de $(\underline{G}, \widehat{K})$. Ce graphe de groupes $\Gamma'\backslash\backslash T'$ est obtenu à partir d'un graphe fini de groupes finis, en rajoutant un nombre fini de rayons de groupes finis, analogues au rayon modulaire $\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q$ (voir par exemple [Ser2]).

Théorème 3.3 *Il existe un homéomorphisme* $\Theta : \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) \to (\Gamma_{\infty,\sharp})^{\mathbb{Z}}$ *tel que les diagrammes suivants commutent :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta} & (\Gamma_{\infty,\sharp})^{\mathbb{Z}} \\ \downarrow T_0 & & \downarrow \sigma \\ \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta} & (\Gamma_{\infty,\sharp})^{\mathbb{Z}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta} & (\Gamma_{\infty,\sharp})^{\mathbb{Z}} \\ \downarrow \tau & & \downarrow \kappa\circ\sigma \\ \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta} & (\Gamma_{\infty,\sharp})^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

avec σ *le décalage à gauche et* κ *la transformation de* $(\Gamma_{\infty,\sharp})^{\mathbb{Z}}$ *définie par* $\kappa((\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (\beta'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *avec* $\beta'_n = \beta_{-n}^{-1}$.

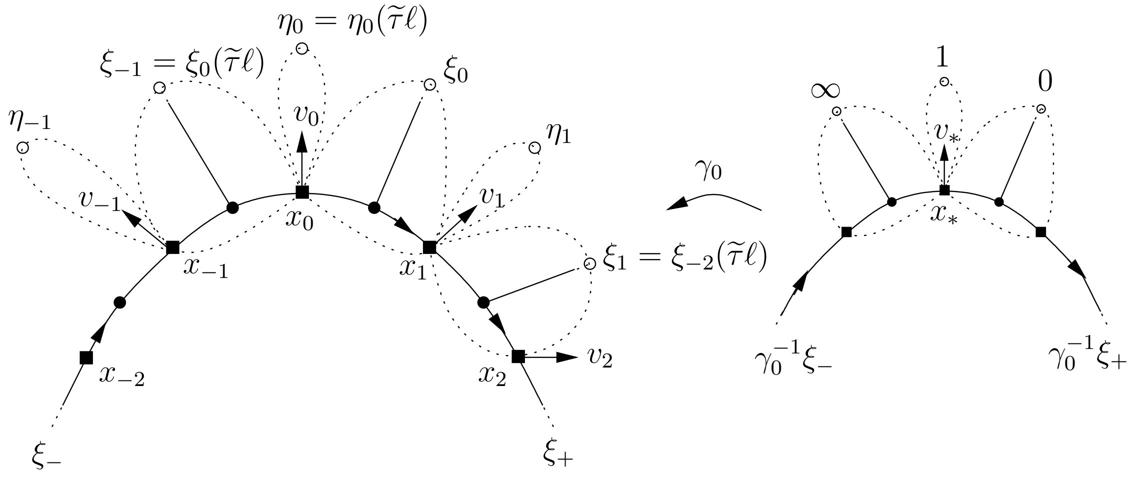

Figure 2 : Codage des géodésiques.

Preuve. Pour tout n dans $\mathbb{Z}$ et pour tout élément ℓ de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$, notons $\eta_n = \eta_n(\ell) = \eta_0(\widetilde{T}_0^n\ell)$ et $v_n = v_n(\ell) = v_0(\widetilde{T}_0^n\ell)$. Soit $\gamma_n = \gamma_n(\ell)$ l'unique élément de Γ envoyant $\infty, 1, 0$ sur respectivement ξ_{n-1}, η_n, ξ_n (voir la remarque 2.1 (2)). Les notations v_1, v_{-1}, γ_0 coïncident avec celles déjà introduites. Notons i l'unique élément (d'ordre 2) de Γ fixant 1 et échangeant 0 et ∞, donc fixant x_*. Posons

$$\beta_n = \beta_n(\ell) = i\gamma_{n-1}^{-1}\gamma_n \quad \text{et} \quad \widetilde{\Theta}(\ell) = (\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}} \;.$$

Comme $i\gamma_{n-1}^{-1}\gamma_n\infty = i\gamma_{n-1}^{-1}\xi_{n-1} = i0 = \infty$, l'élément β_n de Γ appartient à Γ_∞. De plus, $\beta_n(x_*) = i\gamma_{n-1}^{-1}\gamma_n(x_*) = i\gamma_{n-1}^{-1}(x_n)$, donc $\beta_n(x_*)$ ne peut pas valoir x_*, car x_{n-1} est différent de x_n et $i\gamma_{n-1}^{-1}(x_{n-1}) = x_*$. Ainsi β_n est dans $\Gamma_{\infty,\sharp}$.

Pour tout γ de Γ, on a la relation de naturalité $\gamma_n(\gamma\ell) = \gamma\gamma_n(\ell)$. L'application $\widetilde{\Theta} : \mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q) \to (\Gamma_{\infty,\sharp})^{\mathbb{Z}}$ est constante sur chaque orbite de Γ dans $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$. Elle induit donc par passage au quotient une application $\Theta : \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) \to (\Gamma_{\infty,\sharp})^{\mathbb{Z}}$.

Commutativité des diagrammes. Par construction de $\widetilde{T}_0$ et par définition des η_n, pour tout n dans $\mathbb{Z}$, on a $\xi_n(\ell) = \xi_0(\widetilde{T}_0^n\ell)$ et $\eta_n(\ell) = \eta_0(\widetilde{T}_0^n\ell)$. Donc

$$\xi_n(\widetilde{T}_0\ell) = \xi_{n+1}(\ell) \quad \text{et} \quad \eta_n(\widetilde{T}_0\ell) = \eta_{n+1}(\ell) \;.$$

Par conséquent, $\gamma_n(\widetilde{T}_0\ell) = \gamma_{n+1}(\ell)$, d'où $\beta_n(\widetilde{T}_0\ell) = \beta_{n+1}(\ell)$. Donc $\Theta \circ T_0 = \sigma \circ \Theta$, ce qui montre la commutativité du diagramme de gauche du théorème 3.3.

Par définition des ξ_n, on a $\xi_n(\widetilde{\tau}\ell) = \xi_{-n-1}(\ell)$. Comme $\eta_0(\widetilde{\tau}\ell) = \eta_0(\ell)$, et comme $\widetilde{T}_0$ et $\widetilde{\tau}$ anti-commutent, par définition des η_n, on a $\eta_n(\widetilde{\tau}\ell) = \eta_{-n}(\ell)$. La définition des γ_n montre que $\gamma_n(\widetilde{\tau}\ell)$ et $\gamma_{-n}(\ell)i$ coïncident en $\infty, 1, 0$. Donc $\gamma_n(\widetilde{\tau}\ell) = \gamma_{-n}(\ell)i$. D'où

$$\beta_n(\widetilde{\tau}\ell) = i\gamma_{n-1}(\widetilde{\tau}\ell)^{-1}\gamma_n(\widetilde{\tau}\ell) = \gamma_{-(n-1)}(\ell)^{-1}\gamma_{-n}(\ell)i = \beta_{-(n-1)}(\ell)^{-1} \;.$$

Ceci montre la commutativité du diagramme de droite du théorème 3.3.

Continuité de Θ. Montrons que l'application $\ell \mapsto \beta_1(\ell)$ est localement constante. Soit ℓ un élément de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$. Si ℓ' est une géodésique décorée, ayant mêmes origine et décoration que ℓ, et coïncidant avec ℓ sur le 1-voisinage du segment $[x_0(\ell), x_1(\ell)]$, alors $\eta_0(\ell) = \eta_0(\ell')$ et $\xi_k(\ell) = \xi_k(\ell')$ pour $k = -1, 0, 1$. Donc $\eta_1(\ell) = \eta_1(\ell')$ par définition de η_1. Par définition des γ_n, on a alors $\gamma_k(\ell) = \gamma_k(\ell')$ pour $k = 0, 1$. Par conséquent $\beta_1(\ell) = \beta_1(\ell')$. Donc $\ell \mapsto \beta_1(\ell)$ est continue. Comme $\beta_n(\ell) = \beta_1(\widetilde{T}_0^{n-1}\ell)$ et puisque $\widetilde{T}_0$ est un homéomorphisme, l'application $\ell \mapsto \beta_n(\ell)$ est continue sur $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ pour tout n dans $\mathbb{Z}$. Donc $\widetilde{\Theta}$ est continue sur $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$, et par passage au quotient, Θ est continue sur $\mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q)$.

Injectivité de Θ. Soient ℓ et ℓ' deux éléments de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ tels que $\widetilde{\Theta}(\ell) = \widetilde{\Theta}(\ell')$. Montrons que ℓ et ℓ' sont dans la même orbite sous Γ. Ceci montrera l'injectivité de Θ. Quitte à remplacer ℓ par $\gamma_0(\ell)^{-1}\ell$ et ℓ' par $\gamma_0(\ell')^{-1}\ell'$, on peut supposer que $\xi_{-1}(\ell) = \xi_{-1}(\ell') = \infty$, $\eta_0(\ell) = \eta_0(\ell') = 1$ et $\xi_0(\ell) = \xi_0(\ell') = 0$. En particulier, ℓ et ℓ' ont mêmes origine et décoration. De plus, $\gamma_0(\ell) = \gamma_0(\ell') = \mathrm{id}$. Pour $n \geq 0$, on a

$$\gamma_n = \gamma_0(\gamma_0^{-1}\gamma_1)\cdots(\gamma_{n-1}^{-1}\gamma_n) = \gamma_0 i\beta_1 i\beta_2 \cdots i\beta_n$$

et

$$\gamma_{-n} = \gamma_0(\gamma_{-1}^{-1}\gamma_0)^{-1}(\gamma_{-2}^{-1}\gamma_{-1})^{-1}\cdots(\gamma_{-n}^{-1}\gamma_{-(n-1)})^{-1} = \gamma_0\beta_0^{-1}i\beta_{-1}^{-1}i\cdots\beta_{-(n-1)}^{-1}i \ .$$

Donc pour tout n dans $\mathbb{Z}$, on a $\gamma_n(\ell) = \gamma_n(\ell')$. Comme $\gamma_n\infty = \xi_{n-1}$, les points $\xi_{n-1}(\ell)$ et $\xi_{n-1}(\ell')$ coïncident. Or deux géodésiques décorées ayant mêmes origine et décoration et traversant les mêmes horoboules de $\mathcal{HB}$ sont égales. Donc $\ell = \ell'$.

Surjectivité de Θ. Soit $(\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $(\Gamma_{\infty,\sharp})^{\mathbb{Z}}$. Posons $\gamma_0 = \mathrm{id}$. Par récurrence pour tout n dans $\mathbb{Z}$, posons $\gamma_n = \gamma_{n-1}i\beta_n$, qui appartient à Γ. Notons $x_n = \gamma_n x_*$. Comme les β_n sont dans $\Gamma_{\infty,\sharp}$, les points x_n et x_{n+1} sont différents. Considérons la courbe ℓ, géodésique par morceaux, obtenue en recollant consécutivement les segments $[x_n, x_{n+1}]$ (qui ne sont pas réduits à des points). Posons

$$\xi_{n-1} = \gamma_n\infty \quad \text{et} \quad \eta_n = \gamma_n 1 \ ,$$

qui sont des points de $\mathbb{P}_1(K)$, avec $\xi_n \neq \xi_{n+1}$. Alors $\xi_n = \gamma_{n+1}\infty = \gamma_n i\beta_{n+1}\infty = \gamma_n 0$. Comme $\{x_*\} = HB_\infty \cap HB_1 \cap HB_0$, on a $\{x_n\} = HB_{\xi_{n-1}} \cap HB_{\eta_n} \cap HB_{\xi_n}$. Par convexité, le segment $[x_n, x_{n+1}]$ est contenu dans l'horoboule HB_{ξ_n}. Comme deux horoboules distinctes de $\mathcal{HB}$ sont d'intérieurs disjoints, il vient donc $[x_n, x_{n+1}] \cap [x_{n+1}, x_{n+2}] = \{x_{n+1}\}$. Par conséquent ℓ est une géodésique. Il est alors immédiat que, munie de la décoration v_*, la géodésique ℓ a pour image $(\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par $\widetilde{\Theta}$. Donc $\widetilde{\Theta}$ est surjective, et, par passage au quotient, Θ aussi. $\square$

3.3 Lien avec la transformation d'Artin

Notons $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$ l'ensemble des géodésiques décorées ℓ de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ telles que $\gamma_0(\ell) = \mathrm{id}$. (Nous verrons ci-dessous que ceci correspond bien à la définition de l'introduction.)

Remarque 3.4 *Soit ℓ un élément de $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$, alors l'origine de ℓ est x_* et la décoration de ℓ est v_*.*

Preuve. Par définition de γ_0, on a $\xi_{-1}(\ell) = \infty, \eta_0(\ell) = 1, \xi_0(\ell) = 0$. Comme $x_0(\ell)$ est le point d'intersection des horosphères H_∞ et H_0, il n'est autre que x_*. De même, $v_0(\ell)$ est l'arête issue de x_* qui rentre dans HB_1, donc c'est v_*, par définition de v_*. $\square$

Lemme 3.5 *L'application φ de $\mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q)$ dans $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$, définie par $\varphi(\overline{\ell}) = \gamma_0(\ell)^{-1}\ell$ où ℓ est un représentant de l'élément $\overline{\ell}$ de $\mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q)$, est un homéomorphisme, qui est une section de la projection canonique $\pi_0 : \mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q) \to \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q)$, que nous appelerons la* section canonique.

Preuve. Si ℓ est une géodésique décorée de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$, alors $\ell' = \gamma_0(\ell)^{-1}\ell$ est dans $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$, car $\gamma_0(\ell') = \mathrm{id}$. Comme deux géodésiques décorées, qui ont même décoration et qui coïncident entre -1 et 1, ont même γ_0, l'application $\tilde{\varphi}$ de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ dans $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$ définie par $\ell \mapsto \gamma_0(\ell)^{-1}\ell$ est continue. Elle est surjective car $\gamma_0(\ell) = \mathrm{id}$ si ℓ est dans $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$. Comme $\gamma_0(\gamma\ell) = \gamma\gamma_0(\ell)$ pour tout γ dans Γ, deux éléments ℓ, ℓ' de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ sont dans la même Γ-orbite si et seulement si $\gamma_0(\ell)^{-1}\ell = \gamma_0(\ell')^{-1}\ell'$. L'application $\tilde{\varphi}$ induit donc par passage au quotient une application continue bijective $\varphi : \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) \to \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$. Comme $\gamma_0(\ell)^{-1}\ell$ est dans la même Γ-orbite que ℓ, on a $\pi_0 \circ \varphi = \mathrm{id}$. Si $j : \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q) \to \mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ est l'inclusion, alors $\varphi^{-1} = \pi_0 \circ j$, donc φ^{-1} est continue. $\square$

Posons
$$J = \bigcup_{a \in A-k} (a + X^{-1}\mathcal{O}) \; .$$
Si ℓ est dans $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$, alors ses extrémités $\xi_- = \xi_-(\ell)$ et $\xi_+ = \xi_+(\ell)$ appartiennent respectivement à $J \cap {}^cK$ et $X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^cK$ (voir par exemple [Pau1, théo. 5.1 (2)] et la figure 1). L'application de $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$ dans $(J \cap {}^cK) \times (X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^cK)$ définie par $\ell \mapsto (\xi_-, \xi_+)$ est un homéomorphisme (et nous retrouvons bien la définition de $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$ donnée dans l'introduction). Nous identifierons dans la suite une géodésique ℓ de $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$ avec son couple d'extrémités irrationnelles (ξ_-, ξ_+) dans $(J \cap {}^cK) \times (X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^cK)$.

Nous allons modifier le codage obtenu dans le théorème 3.3 pour obtenir un nouveau codage, relié cette fois-ci à la transformation d'Artin Ψ. Pour cela nous allons préciser les homographies γ_n qui sont apparues au cours de la démonstration précédente. On appelle t_a (translation de a) et λ_α (homothétie de rapport α) les homographies de matrices $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ avec a dans A et α dans $k^\times$.

Tout élément β de Γ_∞ s'écrit alors de manière unique sous la forme $\beta = t_a\lambda_\alpha$ avec a dans A et α dans $k^\times$. Si β est de plus dans $\Gamma_{\infty,\sharp}$ alors a ne peut pas être dans k sinon β serait un élément de $\mathrm{PGL}_2(k)$. Donc tout élément β de $\Gamma_{\infty,\sharp}$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $\beta = t_a\lambda_\alpha$ avec a dans $A - k$ et α dans $k^\times$.

On remarque qu'on a les relations élémentaires suivantes : $t_a^{-1} = t_{-a}$, $\lambda_\alpha^{-1} = \lambda_{1/\alpha}$, $t_a\lambda_\alpha = \lambda_\alpha t_{a/\alpha}$ et $i\lambda_\alpha = \lambda_{1/\alpha} i$, où $i : z \mapsto \frac{1}{z}$ est l'inversion déjà définie.

Montrons maintenant le résultat suivant :

Proposition 3.6 *Soit $\ell = (\xi_-, \xi_+)$ un élément de $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$. On note $[0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ le développement en fraction continue d'Artin de ξ_+ et $[a_0; a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \dots]$ celui de ξ_-. Alors pour tout entier $n > 0$:*

- *il existe α_n dans $k^\times$ tel que $\gamma_n(\ell) = it_{a_1}it_{a_2}\dots it_{a_n}\lambda_{\alpha_n}$,*
- *il existe α_{-n} dans $k^\times$ tel que $\gamma_{-n}(\ell) = t_{a_0}it_{a_{-1}}\dots it_{a_{-(n-1)}}i\lambda_{\alpha_{-(n-1)}}$.*

Preuve. Soit $\ell = (\xi_-, \xi_+)$ une géodésique de $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$, et notons $\gamma_n = \gamma_n(\ell)$. Nous définissons des éléments a_n dans $A - k$ pour $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant les deux conclusions de la proposition, dont nous montrerons à la fin que ce sont bien les bons coefficients des développements en fraction continue de ξ_+ et ξ_-.

Procédons par récurrence sur n. Comme $\gamma_0 = \mathrm{id}$, la démonstration du théorème 3.3 montre qu'il existe une suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $\Gamma_{\infty,\sharp}$ telle que pour tout $n > 0$, on ait :

$$\gamma_n = i\beta_1 i\beta_2 \dots i\beta_n \;\text{ et }\; \gamma_{-n} = \beta_0^{-1} i\beta_{-1}^{-1} i \dots \beta_{-(n-1)}^{-1} i\ .$$

La transformation β_1 est dans $\Gamma_{\infty,\sharp}$. Elle s'écrit donc de manière unique sous la forme $t_{a_1}\lambda_{\alpha_1}$ avec a_1 dans $A - k$ et α_1 dans $k^\times$. Nous avons donc bien $\gamma_1 = it_{a_1}\lambda_{\alpha_1}$. Supposons que γ_n s'écrive $it_{a_1}it_{a_2}\dots it_{a_n}\lambda_{\alpha_n}$. Alors

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n i\beta_{n+1} = it_{a_1}it_{a_2}\dots it_{a_n}\lambda_{\alpha_n} i\beta_{n+1} = it_{a_1}it_{a_2}\dots it_{a_n} i\lambda_{1/\alpha_n}\beta_{n+1}\ .$$

La transformation $\lambda_{1/\alpha_n}\beta_{n+1}$ est dans $\Gamma_{\infty,\sharp}$, elle s'écrit donc sous la forme $t_{a_{n+1}}\lambda_{\alpha_{n+1}}$ avec a_{n+1} dans $A - k$ et α_{n+1} dans $k^\times$. Ainsi $\gamma_{n+1} = it_{a_1}it_{a_2}\dots it_{a_n}it_{a_{n+1}}\lambda_{\alpha_{n+1}}$.

De façon analogue, traitons les γ_{-n}. On a $\gamma_{-1} = \beta_0^{-1} i$. La transformation β_0 est dans $\Gamma_{\infty,\sharp}$, elle s'écrit donc de manière unique sous la forme $\lambda_{\alpha_0} t_{-a_0}$ et donc $\gamma_{-1} = (\lambda_{\alpha_0} t_{-a_0})^{-1} i = t_{a_0}\lambda_{1/\alpha_0} i = t_{a_0} i\lambda_{\alpha_0}$. Supposons que

$$\gamma_{-n} = t_{a_0}it_{a_{-1}}\dots it_{a_{-(n-1)}}i\lambda_{\alpha_{-(n-1)}}\ .$$

Alors

$$\gamma_{-(n+1)} = \gamma_{-n}\beta_{-n}^{-1} i = t_{a_0}it_{a_{-1}}\dots it_{a_{-(n-1)}}i\lambda_{\alpha_{-(n-1)}}\beta_{-n}^{-1} i\ .$$

La transformation $(\lambda_{\alpha_{-(n-1)}}\beta_{-n}^{-1})^{-1} = \beta_{-n}\lambda_{1/\alpha_{-(n-1)}}$ est dans $\Gamma_{\infty,\sharp}$. Elle s'écrit donc de manière unique sous la forme $\lambda_{\alpha_{-n}} t_{-a_{-n}}$. Alors

$$\begin{aligned}
\gamma_{-(n+1)} &= t_{a_0}it_{a_{-1}}\dots it_{a_{-(n-1)}}i(\lambda_{\alpha_{-n}}t_{-a_{-n}})^{-1} i = t_{a_0}it_{a_{-1}}\dots it_{a_{-(n-1)}}it_{a_{-n}}\lambda_{1/\alpha_{-n}} i \\
&= t_{a_0}it_{a_{-1}}\dots it_{a_{-(n-1)}}it_{a_{-n}}i\lambda_{\alpha_{-n}},
\end{aligned}$$

ce qui montre le résultat pour les a_n ainsi construits. Maintenant, pour tout entier $n > 0$, en posant $\xi_n = \xi_n(\ell)$, on a

$$\xi_{n-1} = \gamma_n\infty = it_{a_1}it_{a_2}\dots it_{a_n}\lambda_{\alpha_n}\infty = it_{a_1}it_{a_2}\dots it_{a_{n-1}}0 = [0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$$

et

$$\begin{aligned}\xi_{-n-1} &= \gamma_{-n}\infty = t_{a_0} i t_{a_{-1}} \dots i t_{a_{-n+1}} i \lambda_{\alpha_{-n+1}} \infty = t_{a_0} i t_{a_{-1}} \dots i t_{a_{-n+1}} 0 \\ &= [a_0; a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-(n-1)}] \,.\end{aligned}$$

Comme ξ_+ est la limite quand n tend vers l'infini de la suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le développement en fraction continue d'Artin de ξ_+ est $[0; a_1, a_2, \dots]$. De même ξ_-, limite de $(\xi_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$, a pour développement en fraction continue d'Artin $[a_0; a_{-1}, a_{-2}, \dots]$. □

Définissons la transformation $\widetilde{\Psi} : \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q) \to \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$ par $\widetilde{\Psi}(\ell) = \gamma_1(\ell)^{-1}\widetilde{T}_0(\ell)$. Comme $\gamma_0(\widetilde{T}_0\ell) = \gamma_1(\ell)$, il est immédiat que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{T_0} & \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\widetilde{\Psi}} & \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q) \end{array} \,.$$

Ceci revient à dire que $\widetilde{\Psi}$ est conjuguée par la section canonique φ à l'application T_0 de premier retour dans $\mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q)$.

Montrons maintenant le résultat suivant, qui implique le théorème 1.1 de l'introduction :

Théorème 3.7 *Soit $\ell = (\xi_-, \xi_+)$ un élément de $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$, soit $[0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ le développement en fraction continue d'Artin de ξ_+ et $[a_0; a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \dots]$ celui de ξ_-. Notons $\Theta_\sharp$ l'application de $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$ dans $(A-k)^{\mathbb{Z}}$ définie par $\Theta_\sharp(\ell) = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Alors $\Theta_\sharp$ est un homéomorphisme qui rend le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta_\sharp} & (A-k)^{\mathbb{Z}} \\ \widetilde{\Psi} \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta_\sharp} & (A-k)^{\mathbb{Z}} \end{array} \,,$$

où σ est le décalage à gauche des suites bilatères de $(A-k)^{\mathbb{Z}}$. De plus :

$$\widetilde{\Psi}(\xi_-, \xi_+) = \left(\frac{1}{\xi_-} - \left[\frac{1}{\xi_+}\right], \Psi(\xi_+) \right) \,,$$

où Ψ est la transformation d'Artin.

Preuve. Notons qu'un élément ξ de ${}^c\!K$ est uniquement déterminé par son développement en fraction continue, et appartient à $X^{-1}\mathcal{O}$ (resp. J) si et seulement si $a_0(\xi) = 0$ (resp. $a_0(\xi) \in A - k$). Donc l'application $\Theta_\sharp$ est une bijection. Comme la transformation d'Artin est continue (car la partie entière est localement constante) sur $X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^c\!K$, et par définition des a_n, l'application $\Theta_\sharp$ est continue. D'après la démonstration de la proposition 3.6, si ℓ et ℓ' sont deux éléments de $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$ qui ont mêmes a_n pour $-N \leq n \leq N$, alors ℓ et ℓ' ont mêmes ξ_n pour $-N-2 \leq n \leq N$, donc coïncident au moins sur $[-N-2, N]$. Donc $\Theta_\sharp^{-1}$ est continue.

Soit $\ell = (\xi_-, \xi_+)$ dans $\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$ et $\gamma_1 = \gamma_1(\ell)$, $\xi_1 = \xi_1(\ell)$, $\eta_1 = \eta_1(\ell)$. Par la proposition précédente, $\gamma_1 = it_{a_1}\lambda_{\alpha_1}$ où a_1 est le premier terme (non nul) du développement en fraction continue de ξ_+, c'est-à-dire la partie entière de $\frac{1}{\xi_+}$, et $\alpha_1 \in k^\times$. Comme $\gamma_1 0 = \xi_1$, on a $\xi_1 = \frac{1}{a_1}$. D'après la remarque 3.2, on a $\eta_1 = \frac{1}{a_1+1}$. L'équation $\gamma_1 1 = \eta_1$ implique que $\alpha_1 = 1$. Donc $\lambda_{\alpha_1} = \mathrm{id}$, et

$$\widetilde{\Psi}(\xi_-, \xi_+) = \gamma_1^{-1}(\xi_-, \xi_+) = ((it_{a_1}\lambda_{\alpha_1})^{-1}\xi_-, (it_{a_1}\lambda_{\alpha_1})^{-1}\xi_+) = (\frac{1}{\xi_-} - a_1, \frac{1}{\xi_+} - a_1) \ .$$

Puisque $\Psi(\xi_+) = \frac{1}{\xi_+} - a_1$, que le développement en fraction continue d'Artin de $\frac{1}{\xi_+} - a_1$ est $[0; a_2, a_3, a_4, \dots]$, et que celui $\frac{1}{\xi_-} - a_1$ est $[a_1; a_0, a_{-1}, a_{-2}, \dots]$, ceci montre le résultat. $\square$

3.4 Naturalité par extension de corps

Le but de cette partie est de montrer la naturalité des codages par extension de corps. Toutes les vérifications sont faciles, mais comme elles sont nombreuses, il n'aurait pas été raisonnable de les laisser toutes au lecteur.

Si k' est un corps fini de cardinal q', extension de k, notons

$$A' = k'[X], \ \ K' = k'(X), \ \ \widehat{K'} = k'((X^{-1})), \ \ \mathcal{O}' = k'[[X^{-1}]] \ ,$$

qui sont des extensions d'anneaux ou de corps de respectivement $A, K, \widehat{K}, \mathcal{O}$. La restriction à $\widehat{K}$ de l'application partie entière de $\widehat{K'}$ coïncide avec l'application partie entière de $\widehat{K}$. Donc la restriction à $X^{-1}\mathcal{O} - \{0\}$ de l'application d'Artin $\psi' : X^{-1}\mathcal{O}' - \{0\} \to X^{-1}\mathcal{O}'$ de $\widehat{K'}$ coïncide avec l'application d'Artin ψ de $\widehat{K}$.

L'application de l'ensemble des $\mathcal{O}$-réseaux de $\widehat{K} \times \widehat{K}$ dans l'ensemble des $\mathcal{O}'$-réseaux de $\widehat{K'} \times \widehat{K'}$, définie par l'extension des scalaires $L \mapsto L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}'$, induit par passage au quotient une injection (isométrique) de $\mathbb{T}_q$ dans l'arbre de Bruhat-Tits $\mathbb{T}_{q'}$ de $(\mathrm{PGL}_2, \widehat{K'})$. Cette injection est équivariante pour l'inclusion de $\mathrm{PGL}_2(\widehat{K})$ dans $\mathrm{PGL}_2(\widehat{K'})$ (donc de $\Gamma = \mathrm{PGL}_2(A)$ dans $\Gamma' = \mathrm{PGL}_2(A')$). On identifie $\mathbb{T}_q$ avec son image dans $\mathbb{T}_{q'}$ par cette injection (ce qui est compatible avec les points base x_*). D'où une inclusion de $\mathcal{G}(\mathbb{T}_q)$ dans $\mathcal{G}(\mathbb{T}_{q'})$. L'identification de l'espace des bouts de $\mathbb{T}_q$ (resp. $\mathbb{T}_{q'}$) avec $\mathbb{P}_1(\widehat{K}) = \widehat{K} \cup \{\infty\}$ (resp. $\mathbb{P}_1(\widehat{K'}) = \widehat{K'} \cup \{\infty\}$) est alors compatible avec l'inclusion de $\widehat{K}$ dans $\widehat{K'}$. Donc $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ est contenu dans $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_{q'})$. Par passage au quotient, on obtient donc une application $\mathrm{Ext} : \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) \to \mathcal{G}_0(\Gamma'\backslash\backslash\mathbb{T}_{q'})$, et par restriction une application $\mathrm{Ext} : \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q) \to \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_{q'})$. Si $\Gamma'_{\infty,\sharp}$ est le sous-ensemble des éléments de Γ' fixant ∞ et ne fixant pas x_*, alors clairement $\Gamma_{\infty,\sharp} = \Gamma'_{\infty,\sharp} \cap \Gamma$. D'où une inclusion $\mathrm{Ext} : (\Gamma_{\infty,\sharp})^{\mathbb{Z}} \to (\Gamma'_{\infty,\sharp})^{\mathbb{Z}}$. Notons aussi $\mathrm{Ext} : (A-k)^{\mathbb{Z}} \to (A'-k')^{\mathbb{Z}}$ l'inclusion.

Soit $\mathcal{HB}' = (HB'_{\gamma'\infty})_{\gamma' \in \Gamma'/\Gamma'_\infty}$ la famille des adhérences des composantes connexes de la préimage par la projection canonique $\pi' : \mathbb{T}_{q'} \to \Gamma'\backslash\mathbb{T}_{q'}$ du rayon $\Gamma'\backslash\mathbb{T}_{q'}$ privé de son origine. Pour tout γ dans Γ, on a $HB_{\gamma\infty} = HB'_{\gamma\infty} \cap \mathbb{T}_q$. De sorte que (et par les unicités), pour tout ℓ dans $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$, les éléments $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ construits dans la partie 3.2 ne dépendent pas du fait qu'on considère ℓ dans $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ ou dans $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_{q'})$.

Ainsi, en notant Θ' et $\Theta'_\sharp$ les applications de codages pour k' analogues aux applications Θ et $\Theta_\sharp$ pour k, le résultat suivant découle de cette discussion.

Proposition 3.8 *Les diagrammes suivants sont commutatifs :*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) & \stackrel{\Theta}{\longrightarrow} & (\Gamma_{\infty,\sharp})^{\mathbb{Z}} \\
\downarrow \mathrm{Ext} & & \downarrow \mathrm{Ext} \\
\mathcal{G}_0(\Gamma'\backslash\backslash\mathbb{T}_{q'}) & \stackrel{\Theta'}{\longrightarrow} & (\Gamma'_{\infty,\sharp})^{\mathbb{Z}}
\end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_{q'}) \arrow[rrr, "\Theta'_\sharp"'] \arrow[ddd, "\widetilde{\Psi}'"'] & & & (A'-k')^{\mathbb{Z}} \arrow[ddd, "\sigma'"] \\
& \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q) \arrow[ul, "\mathrm{Ext}"] \arrow[r, "\Theta_\sharp"] \arrow[d, "\widetilde{\Psi}"'] & (A-k)^{\mathbb{Z}} \arrow[ur, "\mathrm{Ext}"'] \arrow[d, "\sigma"] & \\
& \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q) \arrow[dl, "\mathrm{Ext}"'] \arrow[r, "\Theta_\sharp"] & (A-k)^{\mathbb{Z}} \arrow[dr, "\mathrm{Ext}"] & \\
\mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_{q'}) \arrow[rrr, "\Theta'_\sharp"'] & & & (A'-k')^{\mathbb{Z}} \, .
\end{tikzcd} \qquad \square$$

4 Mesure invariante par la transformation géodésique sur le rayon modulaire

Notons $\mu = \mu_{\mathrm{Haar}}$ la mesure de Haar sur le groupe topologique additif $\widehat{K}$ (identifié avec $\partial\mathbb{T}_q - \{\infty\}$), normalisée pour que $\mu(\mathcal{O}) = 1$. Notons dx_0 et dv_0 les mesures de comptages sur les espaces discrets $V\mathbb{T}_q$ et $E\mathbb{T}_q$.

Considérons la mesure $\widetilde{m}$ sur l'espace $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ définie, en utilisant le paramétrage de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$, par

$$d\widetilde{m}(\xi_-, \xi_+, x_0, v_0) = \frac{d\mu(\xi_-)d\mu(\xi_+)dx_0dv_0}{|\xi_+ - \xi_-|_\infty^2} \, .$$

Cette partie est consacrée à la démonstration du résultat suivant :

Théorème 4.1 *La mesure $\widetilde{m}$ est une mesure borélienne positive, invariante par Γ, par $\widetilde{T_0}$ et par renversement du temps $\widetilde{\tau}$. La mesure $q^2\widetilde{m}$ induit par passage au quotient par Γ une mesure de probabilité m sur $\mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q)$, invariante par T_0 et par renversement du temps τ.*

Outre une preuve directe, la partie nouvelle de ce théorème est le calcul de la masse totale de m. Mais une fois rappelé les propositions 4.2 et 4.3, l'existence de m

est une version “décorée” de la construction classique de la mesure de Bowen-Margulis sur l'espace des géodésiques de $\mathbb{T}_q$ (voir par exemple [Coo]), utilisant l'égalité entre les mesures de Patterson-Sullivan et de Hausdorff sur $\partial\mathbb{T}_q$, même pour les réseaux non uniformes dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{T}_q)$ (voir par exemple [BM]).

Dans ce qui suit, l'espace $\widehat{K}$ est muni de la distance d_∞ (voir la partie 2.1). Notons δ la dimension de Hausdorff de $\widehat{K}$, et μ_{Haus} la mesure de Hausdorff (de dimension δ) sur $\widehat{K}$. Rappelons que pour tout borélien E de $\widehat{K}$, si $0 < \delta < \infty$, nous avons

$$\mu_{\mathrm{Haus}}(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf\{\sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^\delta\}$$

où la borne inférieure est prise sur tous les recouvrements de E par des boules de rayon $r_i \leq \varepsilon$ pour la distance d_∞.

Comme d_∞ est invariante par Γ_∞, il en est de même pour μ_{Haus}.

Les deux propositions 4.2 et 4.3 suivantes sont bien connues, voir par exemple [Spr, page 69] pour une démonstration de la seconde.

Proposition 4.2 *La dimension de Hausdorff de* $(\widehat{K}, d_\infty)$ *est* $\delta = 1$. *La mesure de Hausdorff de* $\mathcal{O}$ *est* 1.

Preuve. Par invariance par translation de d_∞, il suffit de montrer que la dimension de Hausdorff de $\mathcal{O}$ est 1, et que sa mesure de Hausdorff (en dimension 1) vaut 1. L'espace de Cantor $\mathcal{O}$ est la boule de rayon 1 et de centre n'importe quel point de $\mathcal{O}$. Il s'écrit comme l'union disjointe des q parties $\mathcal{O}_\alpha = \alpha + X^{-1}\mathcal{O}$ pour α dans k. Les parties $\mathcal{O}_\alpha$ sont d'ailleurs les boules de rayon $\frac{1}{q}$ et de centre n'importe quel point de $\mathcal{O}_\alpha$. Pour tout α de k, l'homographie de matrice $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ envoie $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}_\alpha$, c'est de plus une homothétie de rapport $\frac{1}{q}$ pour la distance d_∞.

D'après [Mat, Theo. 4.14], la dimension de Hausdorff δ de $(\mathcal{O}, d_\infty)$ vérifie l'équation $\sum_{\alpha \in k} \frac{1}{q}^\delta = 1$. Donc $\delta = 1$.

Comme par récurence, $\mathcal{O}$ est réunion de q^n boules (disjointes) de rayon $\frac{1}{q^n}$, la mesure de Hausdorff de $\mathcal{O}$ est au plus 1. Rappellons que si deux boules pour d_∞ se rencontrent, alors l'une est contenue dans l'autre, et que toute boule contenue dans $\mathcal{O}$ est une boule de rayon une puissance de $\frac{1}{q}$. Donc la mesure de Hausdorff de $\mathcal{O}$ vaut au moins 1. $\square$

Proposition 4.3 *Les mesures de Haar* μ_{Haar} *et de Hausdorff* μ_{Haus} *sur* $\widehat{K}$ *coïncident.*

Preuve. Comme la dimension de Hausdorff δ est finie non nulle, et puisque $\mathcal{O}$ est un espace de Cantor de mesure de Hausdorff finie, la mesure de Hausdorff μ_{Haus} est une mesure de Radon (voir par exemple [Mat, page 57]).

Comme vu ci-dessus, la mesure μ_{Haus} est invariante par translation, donc par unicité de la mesure de Haar, il existe $c \geq 0$ tel que $\mu_{\mathrm{Haus}} = c\mu_{\mathrm{Haar}}$. Comme $\mu_{\mathrm{Haar}}(\mathcal{O}) = 1$ et $\mu_{\mathrm{Haus}}(\mathcal{O}) = 1$, les mesures coïncident. $\square$

Pour tous γ dans G et f dans $\widehat{K}$, vérifiant $f \neq \gamma^{-1}\infty$, notons

$$j_\infty(\gamma, f) = |\gamma'(f)|_\infty$$

la valeur absolue de la dérivée de l'application analytique $\gamma : \widehat{K} \to \widehat{K}$ en f. Par la formule de dérivation des compositions, elle vérifie la formule de cocycle suivante : pour γ_1, γ_2 dans G et f dans $\widehat{K}$ tels que $\gamma_2 f, \gamma_1\gamma_2 f \neq \infty$,

$$j_\infty(\gamma_1\gamma_2, f) = j_\infty(\gamma_1, \gamma_2 f) j_\infty(\gamma_2, f) \ .$$

Si $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ avec $|ad-bc|_\infty = 1$, alors $j_\infty(\gamma, f) = \frac{1}{|cf+d|_\infty^2}$. Comme la valeur absolue prend des valeurs discrètes dans $]0, +\infty[$, pour tout élément γ de G, l'application continue $f \mapsto j_\infty(\gamma, f)$ est localement constante sur $\widehat{K} - \{\gamma^{-1}\infty\}$.

Proposition 4.4 *Pour tout γ de G^+, pour tous f, g dans $\widehat{K}$ tels que $f, g \neq \gamma^{-1}\infty$,*

$$|\gamma f - \gamma g|_\infty^2 = j_\infty(\gamma, f) j_\infty(\gamma, g) |f - g|_\infty^2 \ .$$

Preuve. Les translations $t_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ avec a dans $\widehat{K}$, les applications $\lambda_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ avec α, β dans $\widehat{K}^\times$ tels que $|\beta|_\infty = |\alpha|_\infty^{-1}$, et l'inversion $i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ engendrent G^+. Par la formule de cocycle pour j_∞ et par un argument de continuité sur les f, g, il suffit donc de vérifier la proposition 4.4 pour ces trois types de transformations.

Pour a dans $\widehat{K}$, la translation t_a préserve la distance d_∞, et $j_\infty(t_a, f) = 1$. Pour α, β dans $\widehat{K}^\times$ avec $|\beta|_\infty = |\alpha|_\infty^{-1}$, l'application $\lambda_{\alpha,\beta}$ est une homothétie de rapport $|\alpha|_\infty^2$ pour la distance d_∞ et $j_\infty(\lambda_{\alpha,\beta}, f) = |\alpha|_\infty^2$. Comme $j_\infty(i, f) = \frac{1}{|f|_\infty^2}$ et $|\frac{1}{f} - \frac{1}{g}|_\infty = \frac{|f-g|_\infty}{|f|_\infty |g|_\infty}$, le résultat en découle. □

Proposition 4.5 *Pour tout γ de G^+, l'image de la mesure $\mu_{\rm Haus}$ par γ est absolument continue par rapport à $\mu_{\rm Haus}$. Sa dérivée de Radon-Nikodym vérifie (pour $\mu_{\rm Haus}$-presque tout ξ de $\widehat{K}$) :*

$$\frac{d\gamma_*\mu_{\rm Haus}}{d\mu_{\rm Haus}}(\xi) = j_\infty(\gamma^{-1}, \xi) \ .$$

Preuve. Soit γ dans G. Comme $f \mapsto j_\infty(\gamma, f)$ est localement constante, pour tout f_0 de $\widehat{K} - \{\gamma^{-1}\infty\}$, il existe un voisinage U de f_0 dans $\widehat{K} - \{\gamma^{-1}\infty\}$ tel que pour tout f dans U, on a $j_\infty(\gamma, f_0) = j_\infty(\gamma, f)$. En particulier, la proposition 4.4 montre que pour tous f, g dans U, on a $|\gamma f - \gamma g|_\infty = j_\infty(\gamma, f_0)|f - g|_\infty$. Donc la restriction de γ à U est une homothétie de rapport $j_\infty(\gamma, f_0)$ pour la distance d_∞. Soit V un voisinage de f_0 d'adhérence contenue dans U. Par construction de la mesure de Hausdorff, pour tout borélien E de V, on a $\mu_{\rm Haus}(\gamma E) = j_\infty(\gamma, f_0)^\delta \mu_{\rm Haus}(E)$. Ceci montre le résultat car $\delta = 1$. □

Nous aurons besoin du calcul élémentaire d'intégrale suivant.

Lemme 4.6 *Si $\mu = \mu_{\rm Haar}$, alors*
$$\int_J \frac{d\mu(g)}{|g|_\infty^2} = \frac{1}{q}\;.$$

Preuve. Notons S cette intégrale. Comme J est la réunion disjointe des ensembles $(a + X^{-1}\mathcal{O})$, quand a varie dans $A - k$, et comme la mesure de Haar est invariante par translations,
$$S = \sum_{a\in A-k} \int_{X^{-1}\mathcal{O}} \frac{d\mu(g)}{|a+g|_\infty^2} = \sum_{a\in A-k} \frac{1}{|a|_\infty^2}\mu(X^{-1}\mathcal{O})\;.$$
Comme le nombre de polynômes de degré $n \geq 1$ à coefficients dans k est $(q-1)q^n$,
$$S = \sum_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} \frac{(q-1)q^n}{q^{2n}}\frac{1}{q} = \frac{1}{q}\sum_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}\frac{(q-1)}{q^n} = \frac{1}{q}\;.$$
□

Démonstration du théorème 4.1. Rappelons que
$$d\widetilde{m}(\xi_-,\xi_+,x_0,v_0) = \frac{d\mu(\xi_-)d\mu(\xi_+)dx_0dv_0}{|\xi_+-\xi_-|_\infty^2}$$
et que les mesures de comptage sont invariantes par permutation. Il est donc immédiat que $\widetilde{m}$ est une mesure borélienne positive, invariante par renversement du temps $\widetilde{\tau} : (\xi_-,\xi_+,x_0,v_0) \mapsto (\xi_+,\xi_-,x_0,v_0)$ et par $\widetilde{T}_0 : (\xi_-,\xi_+,x_0,v_0) \mapsto (\xi_-,\xi_+,x_1,v_1)$.

Montrons que $\widetilde{m}$ est invariante par Γ. Toute action d'un groupe sur un ensemble préserve la mesure de comptage. Pour tout γ de Γ, pour $\widetilde{m}$-presque tout (ξ_-,ξ_+,x_0,v_0),
$$\begin{aligned} d(\gamma_*\widetilde{m})(\xi_-,\xi_+,x_0,v_0) &= \frac{d(\gamma_*\mu)(\xi_-)d(\gamma_*\mu)(\xi_+)dx_0dv_0}{|\gamma^{-1}\xi_+-\gamma^{-1}\xi_-|_\infty^2} \\ &= \frac{j_\infty(\gamma^{-1},\xi_-)d\mu(\xi_-)j_\infty(\gamma^{-1},\xi_+)d\mu(\xi_+)dx_0dv_0}{j_\infty(\gamma^{-1},\xi_-)j_\infty(\gamma^{-1},\xi_+)|\xi_+-\xi_-|_\infty^2}\end{aligned}$$
d'après les propositions 4.5 et 4.4, et car Γ est contenu dans G^+. Donc $\gamma_*\widetilde{m} = \widetilde{m}$.

Par conséquent, $q^2\widetilde{m}$ induit par passage au quotient par Γ une mesure borélienne positive m sur $\mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q)$, invariante par T_0 et par renversement du temps τ. Il ne reste plus qu'à montrer que m est une mesure de probabilité.

Comme la mesure de Haar sur $\widehat{K}$ est sans atome et comme K est dénombrable, le paramétrage de $\mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q)$ permet d'écrire :
$$m(\mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q)) = q^2\int_{\xi_-\in J}\int_{\xi_+\in X^{-1}\mathcal{O}} \frac{d\mu(\xi_-)d\mu(\xi_+)}{|\xi_+-\xi_-|_\infty^2} = q^2\mu(X^{-1}\mathcal{O})\int_J\frac{d\mu(\xi_-)}{|\xi_-|_\infty^2}\;.$$
Le lemme 4.6 montre alors que la masse totale de m est bien 1.

Ceci achève la démonstration du théorème 4.1. □

5 Applications

Nous résumons dans l'énoncé suivant les résultats de la partie 3. Toutes les applications en découleront.

Proposition 5.1 *Il existe un homéomorphisme* $\Theta'' : \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) \to (A-k)^{\mathbb{Z}}$ *et une application continue surjective* $\mathrm{p}_2 : \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) \to X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^c K$ *tels que les diagrammes suivants soient commutatifs :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta''} & (A-k)^{\mathbb{Z}} \\ T_0 \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{\Theta''} & (A-k)^{\mathbb{Z}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) & \xrightarrow{T_0} & \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) \\ \downarrow \mathrm{p}_2 & & \downarrow \mathrm{p}_2 \\ X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^c K & \xrightarrow{\Psi} & X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^c K \end{array} ,$$

où σ *est le décalage à gauche des suites bilatères de* $(A-k)^{\mathbb{Z}}$*.*

Preuve. Notons $\mathrm{p}_+ : J \times X^{-1}\mathcal{O} \to X^{-1}\mathcal{O}$ la seconde projection. Avec les notations de la partie 3, posons

$$\Theta'' = \Theta_\sharp \circ \varphi \ \text{ et } \ \mathrm{p}_2 = \mathrm{p}_+ \circ \varphi \ .$$

Le résultat découle alors de la partie 3.3. □

Le résultat précédent dit en particulier que l'application d'Artin est semi-conjuguée à une (version décorée d'une) application de premier retour de la transformation géodésique sur $\mathrm{PGL}_2(A)\backslash\mathbb{T}_q$. C'est l'analogue dans le corps des séries de Laurent sur $\mathbb{F}_q$ du résultat bien connu qui dit que l'application de Gauss $x \mapsto \{\frac{1}{x}\}$ sur $[0,1] \cap {}^c\mathbb{Q}$ est semi-conjuguée à une application de premier retour du flot géodésique sur la courbe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$ (voir par exemple [Seri]).

5.1 Application au mélange de la transformation géodésique sur le rayon modulaire

Considérons la mesure ν sur l'espace discret $A-k$ définie par $\nu(a) = \frac{1}{|a|_\infty^2}$. La mesure ν est une mesure de probabilité car le nombre de polynômes de degré n à coefficients dans k est $(q-1)q^n$. Notons $\nu^{\mathbb{Z}}$ la mesure produit sur $(A-k)^{\mathbb{Z}}$.

Proposition 5.2 *L'homéomorphisme* $\Theta'' = \Theta_\sharp \circ \varphi : \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) \to (A-k)^{\mathbb{Z}}$ *envoie la mesure* m *sur la mesure* $\nu^{\mathbb{Z}}$*.*

Preuve. Notons P la mesure de probabilité image de m par Θ''. Comme Θ'' conjugue T_0 et σ, et comme m est invariante par T_0, la mesure P est donc invariante par le décalage σ.

Pour a dans $A-k$ fixé, calculons $P[a_0 = a]$. Soit $\ell = (\xi_-, \xi_+) \in \mathcal{G}_0^\sharp(\mathbb{T}_q)$. Alors ξ_+ appartient à $X^{-1}\mathcal{O}$ et $a_0(\ell) = a$ si et seulement si ξ_- appartient à $(a + X^{-1}\mathcal{O})$. On a donc :

$$P[a_0 = a] = \varphi_* m((a + X^{-1}\mathcal{O}) \times X^{-1}\mathcal{O}) = q^2 \frac{1}{|a|_\infty^2} \mu(X^{-1}\mathcal{O})^2 = \nu(a) \ .$$

Soient $a'_{-k}, \ldots, a'_{-1}, a'_0, a'_1$ fixés dans $A - k$. Par séparation des variables, les deux évènements $\{a_{-k} = a'_{-k}, \ldots, a_{-1} = a'_{-1}, a_0 = a'_0\}$ et $\{a_1 = a'_1\}$ (qui portent respectivement sur les coordonnées ξ_- et ξ_+) sont indépendants pour P. En effet, soit B_- le borélien des ξ_- de $J \cap {}^c\!K$ tels que $a_{-k}(\xi_-) = a'_{-k}, \ldots, a_{-1}(\xi_-) = a'_{-1}, a_0(\xi_-) = a'_0$ et B_+ celui des ξ_+ de $X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^c\!K$ tels que $a_1(\xi_+) = a'_1$. Alors

$$P[a_{-k} = a'_{-k}, \ldots, a_0 = a'_0, a_1 = a'_1] = \varphi_* m(B_- \times B_+) = q^2 \int_{\xi_- \in B_-} \int_{\xi_+ \in B_+} \frac{d\mu(\xi_-) d\mu(\xi_+)}{|\xi_-|^2} \; .$$

Comme $\int_J \frac{d\mu(\xi_-)}{|\xi_-|^2} = \frac{1}{q}$ (voir le lemme 4.6) et $\mu(X^{-1}\mathcal{O}) = \frac{1}{q}$, on a donc

$$\begin{aligned} P[a_{-k} = a'_{-k}, \ldots, a_0 = a'_0, a_1 = a'_1] &= \varphi_* m(B_- \times X^{-1}\mathcal{O}) \; \varphi_* m(J \times B_+) \\ &= P[a_{-k} = a'_{-k}, \ldots, a_0 = a'_0] P[a_1 = a'_1] \; . \end{aligned}$$

L'invariance de P par le décalage σ et un raisonnement par récurrence montrent alors que les mesures P et $\nu^{\mathbb{Z}}$ coïncident sur tous les cylindres du produit $(A - k)^{\mathbb{Z}}$, donc sont égales. $\square$

Corollaire 5.3 *L'application $T_0 : \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) \to \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q)$ de premier retour sur $\mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q)$ est Bernoulli (i.e. (métriquement) conjuguée à un décalage de Bernoulli sur un alphabet fini), donc mélangeante, donc ergodique, pour la mesure m.*

Preuve. L'application $\Theta'' : \mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q) \to (A - k)^{\mathbb{Z}}$ est un isomorphisme mesuré, conjuguant T_0 au décalage σ. Le décalage (de Bernoulli) σ est d'entropie $h_{\nu^{\mathbb{Z}}}(\sigma)$ finie, car

$$\begin{aligned} h_{\nu^{\mathbb{Z}}}(\sigma) &= -\sum_{a \in A-k} \nu(a) \log \nu(a) = -2 \log q \sum_{a \in A-k} \frac{v_\infty(a)}{|a|^2_\infty} = 2 \log q \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n(q-1)q^n}{q^{2n}} \\ &= 2 \log q (q-1) \frac{1}{q} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q}} \right)^2 = \frac{2q \log q}{q - 1} \; . \end{aligned}$$

D'après [Orn, Theo. 5, p. 53], un décalage (de Bernoulli) sur un alphabet dénombrable, d'entropie finie, est (métriquement) conjugué à un décalage (de Bernoulli) sur un alphabet fini. Le résultat en découle. $\square$

Corollaire 5.4 *Le temps moyen τ_n du n-ème parcours dans une horoboule de la famille $\mathcal{HB}$ d'un relevé d'un élément de $\mathcal{G}_0(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{T}_q)$ pour la mesure m est $\tau_n = \frac{2q}{q-1}$.*

Preuve. L'invariance de m par T_0 montre que $\tau_n = \tau_1$. Dans [Pau1, page 80], il est montré qu'un rayon géodésique d'origine x_* et d'extrémité ξ_+ dans $X^{-1}\mathcal{O}$ rentre dans sa première horoboule de la famille $\mathcal{HB}$ sur un segment de longueur $-2v_\infty(a_1)$. Comme $\Theta''{}_* m = \nu^{\mathbb{Z}}$, on a

$$\tau_1 = \mathbb{E}[-2v_\infty(a_1)] = -2 \sum_{a \in A-k} v_\infty(a) \nu^{\mathbb{Z}}[a_1 = a] = -2 \sum_{a \in A-k} \frac{v_\infty(a)}{|a|^2_\infty} = \frac{2q}{q-1} \; .$$

$\square$

Corollaire 5.5 *L'action de S/M sur $\Gamma\backslash G/M$ pour la mesure de Haar quotient est lâchement Bernoulli.*

Preuve. Pour tout sommet x de $\mathbb{T}_q$, notons d_x la *distance visuelle* sur $\partial\mathbb{T}_q$ définie par $d_x(\eta,\xi) = q^{-d(x,y)}$ où $[x,y] = [x,\eta[\cap [x,\xi[$ si $\eta \neq \xi$. La définition usuelle (voir par exemple [Bou]) est avec $e^{-d(x,y)}$, mais ici comme $\mathbb{T}_q$ est $(q+1)$-régulier, la présente définition est plus commode, en particulier la dimension de Hausdorff de $\partial\mathbb{T}_q$ est 1. Identifions une géodésique ℓ de $\mathcal{G}(\mathbb{T}_q)$ avec le triplet $(\xi_-, \xi_+, x_0 = \ell(0))$ de ses extrémités et origine. Il est bien connu (voir par exemple [BM]) que dans l'identification entre G/M et $\mathcal{G}(\mathbb{T}_q)$, la mesure de Haar quotient de G/M correspond, à constante multiplicative près, à la mesure $\widetilde{\lambda}$ de (Patterson-Sullivan-)Bowen-Margulis ainsi construite : si λ_x est la mesure de Hausdorff de d_x, alors

$$d\widetilde{\lambda}(\ell) = \frac{d\lambda_x(\xi_-)d\lambda_x(\xi_+)dx_0}{d_x(\xi_-,\xi_+)^2} \;.$$

Cette mesure étant indépendante de x, on peut faire tendre x vers l'infini le long du rayon géodésique entre x_* et ∞. On obtient alors (voir la fin du paragraphe 2.3 de [HP1] et le corollaire 5.2 de [Pau1]), sur l'ouvert de mesure pleine des géodésiques dont aucune extrémité n'est ∞,

$$d\widetilde{\lambda}(\ell) = \frac{d\mu(\xi_-)d\mu(\xi_+)dx_0}{|\xi_- - \xi_+|_\infty^2} \;.$$

Ainsi la projection par l'application d'oubli de la décoration de $\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q)$ dans $\mathcal{G}(\mathbb{T}_q)$ de la mesure $\widetilde{m}$ est, à constante multiplicative près, la mesure induite sur l'image de cette application par la mesure de Bowen-Margulis $\widetilde{\lambda}$. Rappelons aussi (voir le début de la partie 3.2) que par oubli de la décoration, l'application $\widetilde{T}_0$ induit l'application $\widetilde{T}$ de premier retour de la transformation géodésique $\ell \mapsto \{t \mapsto \ell(t+1)\}$ sur la transversale rencontrant presque toute orbite $\pi^{-1}(\pi(x_*))$. La transformation géodésique sur $(\mathcal{G}(\mathbb{T}_q), \widetilde{\lambda})$, et donc l'action de S/M sur G/M pour la mesure de Haar, est ainsi, à normalisation près des mesures, une suspension d'un facteur du système $(\mathcal{G}_0(\mathbb{T}_q), \widetilde{T}_0, \widetilde{m})$. En passant au quotient par Γ, l'action de S/M sur $\Gamma\backslash G/M$ pour la mesure de Haar normalisée, qui est donc une suspension mélangeante (par le théorème d'Howe-Moore) d'un facteur d'un système de Bernoulli (d'entropie finie), est lâchement Bernoulli (voir par exemple [Tho]). $\square$

5.2 Applications arithmétiques

Le résultat suivant est l'analogue dans le corps des séries formelles de Laurent du résultat bien connu qui dit que la mesure de Gauss $\frac{1}{\log 2}(\frac{dt}{1+t})$ sur $[0,1]$ est la projection de la mesure de Liouville sur le fibré unitaire tangent à la courbe modulaire $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$ (voir par exemple [Seri]).

Proposition 5.6 *L'image de m par p_2 est la restriction de la mesure $q\mu_{\mathrm{Haar}}$ à $X^{-1}\mathcal{O}$:*

$$(p_2)_* m = q\; \mu_{\mathrm{Haar}}\,|_{X^{-1}\mathcal{O}\cap {}^cK} \;.$$

Preuve. Par définition de m, pour tout ξ_+ dans $X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^c\!K$, nous avons

$$d(p_2)_*m(\xi_+) = q^2 \int_{\xi_- \in J} \frac{d\mu(\xi_-)}{|\xi_+ - \xi_-|_\infty^2} d\mu(\xi_+) = q\, d\mu(\xi_+)$$

d'après le lemme 4.6. D'où le résultat. □

Nous retrouvons ainsi, dans le corollaire suivant, l'invariance bien connue de la mesure de Haar par la transformation d'Artin, voir par exemple [BN] pour des références.

Corollaire 5.7 *La mesure de Haar sur $X^{-1}\mathcal{O} \cap {}^c\!K$ est invariante par la transformation d'Artin.*

Preuve. Les propositions 5.1 et 5.6, et l'invariance de m par l'application de premier retour T_0 montrent que :

$$\Psi_*\mu_{\mathrm{Haar}} = \frac{1}{q}(\Psi \circ p_2)_*m = \frac{1}{q}(p_2 \circ T_0)_*m = \frac{1}{q}(p_2)_*m = \mu_{\mathrm{Haar}}\ .$$

Le résultat en découle. □

Nous renvoyons par exemple à [BN] pour d'autres propriétés dynamiques du développement en fraction continue dans le corps des séries de Laurent sur $\mathbb{F}_q$.

Références

[Art] E. Artin, *Quadratische Körper in Gebiete der höheren Kongruenzen I-II*, Math. Z. **19** (1924) 153-246.

[BN] V. Berthé, H. Nakada, *On continued fraction expansions in positive characteristic : equivalence relations and some metric properties*, Expo. Math. **18** (2000) 257-284.

[Bou] M. Bourdon, *Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(−1) espace*, L'Ens. Math. **41** (1995) 63-102.

[BP] A. Broise-Alamichel, F. Paulin, *Sur le codage du flot géodésique dans un arbre*, à paraître dans les Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.

[BM] M. Burger, S. Mozes, *CAT(−1) spaces, divergence groups and their commensurators*, J. Amer. Math. Soc **9** (1996) 57-94.

[Coo] M. Coornaert, *Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov.* Pacific J. Math. **159** (1993) 241–270.

[HP1] S. Hersonsky, F. Paulin, *Counting orbit points in covering of negatively curved manifolds and Hausdorff dimension of cusp excursions*, Erg. Theo. Dyn. Sys. **24** (2004) 803-824.

[Laj] A. Lasjaunias, *A survey of diophantine approximation in fields of power series*, Monat. Math. **130** (2000) 211-229.

[LW] E. Lindenstrauss, B. Weiss, *On sets invariants under the action of the diagonal group*, Erg. Theo. Dyn. Sys. **21** (2001) 1481-1500.

[Mar1] G. Margulis, *Discrete subgroups of semi-simple groupes*, Ergeb. Math. Grenz. **17**, Springer Verlag, 1991.

[Mar2] G. Margulis, *Problems and conjectures in rigidity theory*, in "Mathematics : frontiers and perspectives 2000", 161-174, Amer. Math. Soc. 2000.

[Mat] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Camb. Stud. Avd. Math. **44**, Camb. Univ. Press, 1995.

[Moz] S. Mozes, *Actions of Cartan subgroups*, Israel J. Math. **90** (1995) 253-294.

[Orn] D. Ornstein, *Ergodic theory, randomness and dynamical systems*, Yale Univ. Press, 1974.

[Pau1] F. Paulin, *Groupe modulaire, fractions continues et approximation diophantienne en caractéristique p*, Geom. Dedi. **95** (2002) 65-85.

[Pau2] F. Paulin, *Groupes géométriquement finis d'automorphismes d'arbres et approximation diophantienne dans les arbres*, Manuscripta Math. **113** (2004) 1-23.

[Sch] W. Schmidt, *On continued fractions and diophantine approximation in power series fields*, Acta Arith. **XCV** (2000) 139-166.

[Ser1] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1962.

[Ser2] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2*, Astérisque **46** , Soc. Math. France (1983).

[Seri] C. Series, *The modular surface and continued fractions*, J. Lond. Math. Soc. **31** (1985) 69-80.

[Spr] V. Sprindzuk, *Mahler's problem in metric number theory*, Trans. Math. Mono. **25**, Amer. Math. Soc (1969).

[Tho] J.-P. Thouvenot, *Entropy, isomorphism and equivalence in ergodic theory*, in Hand. Dyn. Sys. Vol. 1A, B. Hasselblatt, A. Katok eds., Elsevier, 2002, 205-238.

[Tom] G. Tomanov, *Actions of maximal tori on homogeneous spaces*, in "Rigidity in dynamics and geometry" (Cambridge, 2000), M. Burger, A. Iozzi eds, Springer Verlag (2002), 407-424.

[Zim] R. J. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Birkhauser, 1984.

Laboratoire de Mathématique UMR 8628 CNRS
Equipe de Topologie et Dynamique (Bât. 425)
Université Paris-Sud
91405 ORSAY Cedex, FRANCE.
e-mail : Anne.Broise@math.u-psud.fr

Département de Mathématique et Applications, UMR 8553 CNRS
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS Cedex 05, FRANCE
e-mail : Frederic.Paulin@ens.fr