Théorie des nombres/Géométrie différentielle

Sur les rayons de Hall en approximation diophantienne

Jouni Parkkonen [a], Frédéric Paulin [b]

[a] *Department of Mathematics and Statistics, P.O. Box 35, 40014 University of Jyväskylä, FINLAND*

[b] *DMA, UMR 8553 CNRS, Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 PARIS Cedex 05, FRANCE*

Résumé

Nous montrons que l'existence d'un rayon de Hall dans le spectre de Lagrange des constantes d'approximation d'un nombre réel par des nombres rationnels se généralise à de nombreux problèmes d'approximation diophantienne, comme conséquence de la possibilité de prescrire arbitrairement une hauteur de pénétration asymptotique suffisamment grande d'une géodésique dans un voisinage d'une pointe d'une variété riemannienne de volume fini à courbure strictement négative.

Abstract

On Hall rays in Diophantine approximation We prove that the existence of a Hall ray in the Lagrange spectrum of the approximation constants of a real number by rational ones generalizes to many Diophantine approximation problems, as an application of the possibility to prescribe big enough asymptotic penetration heights of geodesic lines in a cusp neighborhood of a finite volume negatively curved Riemannian manifold.

Étant donné un anneau localement compact $\widehat{K}$, contenant un sous-corps dénombrable dense K, un groupe algébrique linéaire $\underline{G}$ défini sur K et une distance d invariante à gauche sur le groupe localement compact $\underline{G}(\widehat{K})$, l'approximation diophantienne s'intéresse à la qualité de l'approximation d'un élément de $\underline{G}(\widehat{K})$ par des éléments de $\underline{G}(K)$ (voir entre autres [HS,Wal,Bug]). Par exemple, soit $K = \mathbb{Q}, \widehat{K} = \mathbb{R}, \underline{G} = \mathbb{A}^1$, et d la distance euclidienne usuelle sur $\underline{G}(\widehat{K}) = \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, la *constante d'approximation* $c(x)$ de x est (certains ouvrages considèrent plutôt $c(x)^{-1}$, voire $(2c(x))^{-1}$)

$$c(x) = \liminf_{p,\, q\,\in\,\mathbb{Z}\,,\ |q|\to\infty} \ |q|^2|x - p/q|\ .$$

Le *spectre de Lagrange* est le sous-ensemble $\mathrm{Sp}_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{R}$ formé des $c(x)$ pour $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. De très nombreuses propriétés de $\mathrm{Sp}_{\mathbb{Q}}$ sont connues (voir par exemple [CF]). En particulier, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{Q}}$ est fermé (Cusick 1975), de maximum $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (Korkine-Zolotareff 1873, Hurwitz 1891), et contient un *rayon de Hall*, i.e. un intervalle maximal $[0, \mu]$ avec $\mu > 0$ (Hall 1947) dont le maximum, appelé *constante de Freiman*, est $\mu = 491993569/(2221564096 + 283748\sqrt{462}) \simeq 0,2208$ (Freiman 1975 ; un terme additif de 4 manque

Email addresses: parkkone@maths.jyu.fi (Jouni Parkkonen), Frederic.Paulin@ens.fr (Frédéric Paulin).

dans [CF]). Le but de cette note est de montrer que ce phénomène de rayon de Hall est très répandu, au moins lorsque $\underline{G}$ est nilpotent. Nous énonçons trois résultats types, avant de démontrer comment ils découlent de propriétés de géométrie riemannienne de courbure négative.

Soit d un entier strictement positif, sans facteur carré, et $\mathcal{I}$ un idéal non nul d'un ordre $\mathcal{O}$ de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{-d}$ du corps de nombres imaginaire quadratique $K_{-d} = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$. Pour $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{O}$, notons $\langle p_1, \dots, q_k \rangle$ l'idéal de $\mathcal{O}$ engendré. Pour tout $x \in \mathbb{C} - K_{-d}$, appelons *constante d'approximation* de x

$$c_{\mathcal{I}}(x) = \liminf_{(p,q)\,\in\,\mathcal{O}\times\mathcal{I}\,:\,\langle p,q\rangle=\mathcal{O}\ ,\ |q|\to\infty} |q|^2|x - p/q|$$

(lorsque $\mathcal{O}$ est principal, par exemple si $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{-d}$ pour $d = 1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163$, il n'y a pas besoin de mettre la condition $\langle p, q\rangle = \mathcal{O}$). Appelons *spectre de Lagrange* pour l'approximation des nombres complexes par des éléments de $\mathcal{O}\mathcal{I}^{-1} \subset K_{-d}$ le sous-ensemble $\mathrm{Sp}_{\mathcal{I}}$ de $\mathbb{R}$ formé des $c_{\mathcal{I}}(x)$ pour $x \in \mathbb{C} - K_{-d}$. Si $\mathcal{I} = \mathcal{O} = \mathcal{O}_{-d}$, alors il est démontré dans [Poi], par des techniques de meilleure approximation, que $\mathrm{Sp}_{\mathcal{I}}$ contient $\mathrm{Sp}_{\mathbb{Q}}$, donc contient $[0, \mu]$.

Théorème 1 *Il existe* $c_* > 0$ *tel que* $\mathrm{Sp}_{\mathcal{I}}$ *contienne l'intervalle* $[0, c_*]$.

Soit $A(\mathbb{Q})$ une algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$ qui ramifie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{O}'$ un ordre de $A(\mathbb{Q})$, $\mathcal{I}'$ un idéal bilatère non nul de $\mathcal{O}'$ et N la norme réduite sur $A(\mathbb{R}) = A(\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ (voir par exemple [Vig]). Pour tout $x \in A(\mathbb{R}) - A(\mathbb{Q})$, appelons *constante d'approximation* de x

$$c_{\mathcal{I}'}(x) = \liminf_{(p,q)\,\in\,\mathcal{O}'\times\mathcal{I}'\,:\,\exists\, r,s\,\in\,\mathcal{O}'\ N(qr-qpq^{-1}s)=1\ ,\ N(q)\to\infty} N(q)N(x - pq^{-1})^{\frac{1}{2}}\ ,$$

et *spectre de Lagrange* pour l'approximation des éléments de $A(\mathbb{R})$ par des éléments de $\mathcal{O}'\mathcal{I}'^{-1} \subset A(\mathbb{Q})$ le sous-ensemble $\mathrm{Sp}_{\mathcal{I}'}$ de $\mathbb{R}$ formé des $c_{\mathcal{I}'}(x)$ pour $x \in A(\mathbb{R}) - A(\mathbb{Q})$.

Théorème 2 *Il existe* $c_* > 0$ *tel que* $\mathrm{Sp}_{\mathcal{I}'}$ *contienne l'intervalle* $[0, c_*]$.

Pour tout entier $n \geq 2$, notons $\mathrm{Heis}_{2n-1}(\mathbb{R})$ le groupe de Lie $\{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}\ :\ 2\ \mathrm{Re}\ z - |w|^2 = 0\}$, où $w' \cdot \overline{w} = \sum_{i=1}^{n-1} w'_i\overline{w_i}$ est le produit scalaire hermitien standard sur $\mathbb{C}^{n-1}$ et $|w|^2 = w \cdot \overline{w}$, de loi $(z, w)(z', w') = (z + z' + w' \cdot \overline{w}, w + w')$. Notons que $\mathrm{Heis}_{2n-1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des points réels d'une $\mathbb{Q}$-forme Heis_{2n-1} (qui dépend de d) du groupe de Heisenberg de dimension $2n - 1$, dont l'ensemble des points sur $\mathbb{Q}$ est $\mathrm{Heis}_{2n-1}(\mathbb{R}) \cap (K_{-d} \times {K_{-d}}^{n-1})$. Considérons la distance de Cygan modifiée d'_{Cyg} sur $\mathrm{Heis}_{2n-1}(\mathbb{R})$ (dont la distance de longueur associée est équivalente à la distance de Carnot-Carathéodory, voir par exemple [Gol,PP]), définie comme invariante par translations à gauche et telle que $d'_{\mathrm{Cyg}}((z, w), (0, 0)) = \sqrt{|w|^2 + 2\,|z|}$. Supposons pour simplifier l'énoncé suivant (voir [PP] pour la version générale) que $n = 2$. Pour $x \in \mathrm{Heis}_3(\mathbb{R}) - \mathrm{Heis}_3(\mathbb{Q})$, appelons *constante d'approximation* $c_{\mathrm{Heis}}(x)$ de x

$$c_{\mathrm{Heis}}(x) = \liminf_{(p,\alpha,q)\in(\mathcal{O}_{-d})^3\,:\,2\ \mathrm{Re}\ p\overline{q}=|\alpha|^2\ ,\ \langle p,\alpha,q\rangle=\mathcal{O}_{-d}\ ,\ |q|\to\infty} |q|\ d'_{\mathrm{Cyg}}(x, (p/q, \alpha/q))\ ,$$

et *spectre de Lagrange* pour l'approximation des éléments de $\mathrm{Heis}_3(\mathbb{R})$ par des éléments de $\mathrm{Heis}_3(\mathbb{Q})$ le sous-ensemble $\mathrm{Sp}_{\mathrm{Heis}}$ de $\mathbb{R}$ formé des $c_{\mathrm{Heis}}(x)$ pour $x \in \mathrm{Heis}_3(\mathbb{R}) - \mathrm{Heis}_3(\mathbb{Q})$. Soit τ_{-d} l'élément de $\mathcal{O}_{-d}$ de partie imaginaire strictement positive tel que $\mathcal{O}_{-d} = \mathbb{Z} + \tau_{-d}\mathbb{Z}$.

Théorème 3 *Il existe* $c_* > 0$ *tel que* $\mathrm{Sp}_{\mathrm{Heis}}$ *contienne l'intervalle* $[0, \sqrt{2}\, c_*(\mathrm{Im}\ \tau_{-d})^{-\frac{1}{2}}]$.

Dans les trois énoncés ci-dessus, nous pouvons prendre $c_* = 0,0337$, mais nous ne connaissons pas la valeur optimale de cette constante. Les résultats ci-dessus découlent du théorème suivant de géométrie riemannienne, qui est démontré dans [PP, Coro. 5.14]. Rappelons que si X est une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative, si $\rho : [0, +\infty[\ \to X$ est un rayon géodésique, alors la *fonction de Busemann* $\beta_\rho : X \to \mathbb{R}$ de ρ est $x \mapsto \lim_{t\to+\infty}\ t - d(x, \rho(t))$, et l'*horoboule*

H_ρ de ρ est $H_\rho = \beta_\rho^{-1}([0,+\infty[)$. L'espace des points à l'infini de X est noté $\partial_\infty X$. La constante h_* ci-dessous n'est pas optimale, mais nous ne savons pas quelle est la meilleure possible.

Théorème 4 [PP] *Soit X une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle au plus -1 et de dimension au moins 3. Soit $\big(H_\alpha\big)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ une famille d'horoboules de X, d'intérieurs deux à deux disjoints, et β_α la fonction de Busemann de H_α. Supposons qu'il existe $\kappa \in \mathbb{R}$ et une partie Y dense dans $\partial_\infty X$ tels que pour tout rayon géodésique $g : [0,+\infty[\, \rightarrow X$ d'extrémité dans Y, on ait $\liminf_{t\rightarrow+\infty}\ d(g(t), \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} H_\alpha) \leq \kappa$. Notons $\beta : X \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\beta(x) = 0$ si $x \notin \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} H_\alpha$ et $\beta(x) = \beta_\alpha(x)$ si $x \in H_\alpha$, pour $\alpha \in \mathcal{A}$. Alors, pour tout $\xi_0 \in \partial_\infty X$ et pour tout $h \geq h_* = 6,7771$, il existe une géodésique $g : \mathbb{R} \rightarrow X$ d'origine ξ_0 telle que*

$$\limsup_{t\rightarrow+\infty} \beta \circ g(t) = h\ .\ \Box$$

Pour tout entier $n \geq 2$, notons $\mathbb{H}^n_\mathbb{R}$ le modèle du demi-espace supérieur de l'espace hyperbolique réel à courbure sectionnelle (constante) -1 de dimension réelle n, dont l'espace des points à l'infini est $\mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$, pour $\mathbb{R}^{n-1}$ l'hyperplan des $n-1$ premières coordonnées de $\mathbb{R}^n$. Le sous-espace des points de $\mathbb{H}^n_\mathbb{R}$ dont la dernière coordonnée est au moins 1 est une horoboule, que nous noterons $\mathcal{H}_\infty$.

Pour tout entier $n \geq 1$, notons $\mathbb{H}^n_\mathbb{C}$ le modèle du domaine de Siegel de l'espace hyperbolique complexe à courbure sectionnelle holomorphe (constante) -1 de dimension complexe n, dont l'ensemble sous-jacent est $\{(z,w) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^{n-1}\ :\ 2\ \mathrm{Re}\ z - |w|^2 > 0\}$, et l'espace des points à l'infini est $\mathrm{Heis}_{2n-1}(\mathbb{R}) \cup \{\infty\}$. Le sous-espace $\mathcal{H}_\infty$ des $(z,w) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^{n-1}$ tels que $2\ \mathrm{Re}\ z - |w|^2 \geq 2$ est une horoboule dans $\mathbb{H}^n_\mathbb{C}$ (voir [Gol]).

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Un élément de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n_\mathbb{K})$ est dit *parabolique* s'il admet un unique point fixe dans $\mathbb{H}^n_\mathbb{K} \cup \partial_\infty\mathbb{H}^n_\mathbb{K}$, qui est dans $\partial_\infty\mathbb{H}^n_\mathbb{K}$. Rappelons qu'un *réseau* du groupe de Lie $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n_\mathbb{K})$ des isométries de $\mathbb{H}^n_\mathbb{K}$ est un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n_\mathbb{K})$ tel que $\Gamma\backslash\mathbb{H}^n_\mathbb{K}$ soit de volume fini. Pour tout groupe d'isométries Γ de $\mathbb{H}^n_\mathbb{K}$, nous noterons Γ_∞ le stabilisateur du point ∞ dans Γ, nous munirons $(\Gamma-\Gamma_\infty)/\Gamma_\infty$ de la topologie discrète, et nous noterons $\mathcal{P}_\Gamma$ l'ensemble des points fixes des éléments paraboliques de Γ. Notons $d_{\mathbb{H}^n_\mathbb{R}}$ la distance riemannienne sur $\mathbb{H}^n_\mathbb{R}$, $d_{\mathbb{H}^n_\mathbb{C}}$ la moitié de la distance riemannienne sur $\mathbb{H}^n_\mathbb{C}$ (qui ainsi est à courbures sectionnelles réelles au plus -1), $d_\mathbb{R}$ la distance euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$ et $d_\mathbb{C}$ la distance $\frac{1}{2}\,d'_{\mathrm{Cyg}}$ sur $\mathrm{Heis}_{2n-1}(\mathbb{R})$.

Corollaire 5 *Soient $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ et $n \in \mathbb{N}-\{0,1\}$, avec $n \geq 3$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit Γ un réseau de* $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n_\mathbb{K})$ *tel que $\mathcal{H}_\infty$ soit* précisément invariante, *i.e. tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$, si $\gamma \overset{\circ}{\mathcal{H}}_\infty \cap \overset{\circ}{\mathcal{H}}_\infty \neq \emptyset$ alors $\gamma \in \Gamma_\infty$. Pour $\xi \in \partial_\infty\mathbb{H}^n_\mathbb{K} - \mathcal{P}_\Gamma$, posons*

$$c_\Gamma(\xi) = \liminf_{\gamma\in(\Gamma-\Gamma_\infty)/\Gamma_\infty\ ,\ \gamma\rightarrow\infty} e^{d_{\mathbb{H}^n_\mathbb{K}}(\mathcal{H}_\infty,\gamma\mathcal{H}_\infty)}\ d_\mathbb{K}(\xi,\gamma\cdot\infty)\ .$$

Alors l'ensemble Sp_Γ *des $c_\Gamma(\xi)$, pour $\xi \in \partial_\infty\mathbb{H}^n_\mathbb{K} - \mathcal{P}_\Gamma$, contient $[0, c_*]$ où $c_* = e^{-h_*}/2$.*

Preuve. Notons $X = (\mathbb{H}^n_\mathbb{K}, d_{\mathbb{H}^n_\mathbb{K}})$, $\mathcal{A} = (\Gamma-\Gamma_\infty)/\Gamma_\infty$ et $H_\gamma = \gamma\mathcal{H}_\infty$ pour $\gamma \in \mathcal{A}$. Alors X et la famille $(H_\gamma)_{\gamma\in\mathcal{A}}$ vérifient les hypothèses du théorème 4. Comme Γ est un réseau, l'ensemble $Y = \partial_\infty X - \mathcal{P}_\Gamma$ est dense et il existe un compact C de $\Gamma\backslash X$ tel que l'image par la projection canonique $X \rightarrow \Gamma\backslash X$ de toute géodésique $t \mapsto g(t)$ telle que $g(+\infty) \in Y$ s'accumule dans C quand $t \rightarrow +\infty$, ce qui implique l'existence d'une constante κ comme dans l'énoncé du théorème 4. Il découle de [HP1, §2.1] si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et de [PP, Prop. 6.2] si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (voir aussi [HP2] où la distance de Cygan doit être remplacée par la distance de Cygan modifiée ci-dessus), que pour tout $\gamma \in \mathcal{A}$, et toute géodésique $t \mapsto g(t)$ entre ∞ et $\xi \in \partial_\infty X - \{\infty\}$,

$$\max_{t\in\mathbb{R}} \beta_\gamma(g(t)) = -\,d_{\mathbb{H}^n_\mathbb{K}}(\mathcal{H}_\infty,\gamma\mathcal{H}_\infty) - \log(2\ d_\mathbb{K}(\xi,\gamma\cdot\infty))\ .$$

Posons $\xi_0 = \infty$. Soient $c \in \,]0, c_*]$ et $h = -\log 2c \geq h_*$. Par le théorème 4, soit $g : \mathbb{R} \to X$ une géodésique d'origine ξ_0 telle que $\limsup_{t\to+\infty} \beta \circ g(t) = h$. Si $\xi = g(+\infty)$ (qui n'est pas dans $\mathcal{P}_\Gamma$), alors il en découle que $c_\Gamma(\xi) = e^{-h}/2 = c$, ce qui montre le résultat. $\square$

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (resp. le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{H})$ des matrices 2-2 à coefficients dans le corps gauche de Hamilton réel $\mathbb{H}$, de déterminant de Dieudonné 1) agit isométriquement sur $\mathbb{H}^n_\mathbb{R}$ avec $n = 3$ (resp. $n = 5$), de sorte que l'action induite sur $\partial_\infty \mathbb{H}^n_\mathbb{R}$, identifié à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (resp. $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$), soit celle par homographies $(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z) \mapsto (az + b)(cz + d)^{-1}$. Soit Q la forme hermitienne $-z_0\overline{z_2} - z_2\overline{z_0} + z_1\overline{z_1}$, et U_Q son groupe unitaire. La variété complexe $\mathbb{H}^2_\mathbb{C}$ se plonge dans l'espace projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ par $(z, w) \mapsto [z : w : 1]$, et l'action projective de $\mathrm{U}_Q(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ préserve l'image de ce plongement ainsi que la métrique riemannienne image. Les théorèmes 1, 2 et 3 découlent alors du corollaire 5 en prenant respectivement $(\mathbb{K}, n) = (\mathbb{R}, 3)$, $(\mathbb{R}, 5)$, $(\mathbb{C}, 2)$, et Γ l'image dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n_\mathbb{K})$ de la préimage du sous-groupe triangulaire supérieur par l'application canonique $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \to \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}/\mathcal{I})$, $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}') \to \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}'/\mathcal{I}')$ respectivement si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou le conjugué par l'isométrie $(z, w) \mapsto (t^2 z, tw)$ de $\mathbb{H}^2_\mathbb{C}$, avec $t = (2 \,\mathrm{Im}\, \tau_{-d})^{-\frac{1}{2}}$, de l'image dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2_\mathbb{C})$ de $\mathrm{U}_Q(\mathcal{O}_{-d})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Le fait que $\mathcal{H}_\infty$ soit précisément invariante découle respectivement de l'inégalité de Shimizu, de [Kel, page 1091], et de l'inégalité de Kamiya-Parker (voir [PP, Lem. 6.4]). Le calcul de $d_{\mathbb{H}^n_\mathbb{K}}(\mathcal{H}_\infty, \gamma\mathcal{H}_\infty)$, qui vaut respectivement $2 \log |q|, \log N(q)$ et $\log |q|$ si q est le coefficient en bas à gauche de γ, est fait dans [HP1, Lem. 2.10], [PP, Lem. 6.7], et [HP2, Prop. 3.14] (avec une forme hermitienne différente) respectivement. L'ensemble $\Gamma\infty - \{\infty\}$ vaut respectivement $\{p/q \,:\, (p, q) \in \mathcal{O} \times \mathcal{I},\, q \neq 0,\, \langle p, q\rangle = \mathcal{O}\}$, $\{pq^{-1} \,:\, (p, q) \in \mathcal{O}' \times \mathcal{I}', q \neq 0, \exists\, r, s \in \mathcal{O}'\; N(qr - qpq^{-1}s) = 1\}$ et $\{(p/q, \alpha/q) \,:\, (p, \alpha, q) \in (\mathcal{O}_{-d})^3,\, q \neq 0,\, 2 \,\mathrm{Re}\, p\overline{q} = |\alpha|^2,\, \langle p, \alpha, q\rangle = \mathcal{O}_{-d}\}$, ce dernier point par [Hol, page 280]. Enfin, l'ensemble $\mathcal{P}_\Gamma - \{\infty\}$ est égal à K_{-d}, $A(\mathbb{Q})$ et $\mathrm{Heis}_3(\mathbb{Q})$ respectivement, par des résultats standards de groupes arithmétiques.

D'autres applications arithmétiques sont possibles en variant les réseaux arithmétiques Γ de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n_\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ (avec $n = 2$ dans ce dernier cas).

Références

[Bug] Y. Bugeaud, *Approximation by algebraic numbers*, Camb. Tracts Math.**160**, Cambridge Univ. Press, 2004.

[CF] T. Cusick, M. Flahive, *The Markoff and Lagrange spectra*, Math. Surv. Mono. **30**, Amer. Math. Soc. 1989.

[Gol] W. M. Goldman, *Complex hyperbolic geometry*, Oxford Univ. Press, 1999.

[HP1] S. Hersonsky, F. Paulin, *Diophantine approximation for negatively curved manifolds*, Math. Zeit. **241** (2002) 181-226.

[HP2] S. Hersonsky, F. Paulin, *Diophantine Approximation on Negatively Curved Manifolds and in the Heisenberg Group*, in "Rigidity in dynamics and geometry" (Cambridge, 2000), M. Burger, A. Iozzi eds, Springer Verlag (2002) 203-226.

[HS] M. Hindry, J. Silverman, *Diophantine geometry : an introduction*, Graduate Texts Math. **201**, Springer Verlag, 2000.

[Hol] R.-P. Holzapfel, *Ball and surface arithmetics*, Asp. Math. **29**, Vieweg, 1998.

[Kel] R. Kellerhals, *Quaternions and some global properties of hyperbolic 5-manifolds*, Canad. J. Math. **55** (2003) 1080–1099.

[PP] J. Parkkonen, F. Paulin, *Prescribing the behaviour of geodesics in negative curvature*, en préparation.

[Poi] G. Poitou, *Sur l'approximation des nombres complexes par les nombres des corps imaginaires quadratiques dénués d'idéaux non principaux*, Ann. Scien. Ec. Norm. Sup. **70** (1953) 199-265.

[Vig] M.-F. Vigneras, *Arithmétique des algèbres de quaternions*, Lect. Notes **800**, Springer Verlag, 1980.

[Wal] M. Waldschmidt, *Diophantine approximation on linear algebraic groups*, Grund. math. Wiss. **326**, Springer Verlag, 2000.