Pour pouvoir décrire la théorie géométrique des groupes, et donc le sujet de cet ouvrage, il est important d'en rappeler certains résultats constitutifs, qui fondent ce domaine, qui l'illustrent, qui motivent son intérêt. Le choix de ces thèmes, tous cités dans ce livre auquel nous renvoyons pour des références, est personnel. Nous reviendrons plus tard sur son aspect d'inventaire à la Prévert.

1 "... et un raton laveur".

(1) Le groupe $\mathbb{Z}^2$ d'isométries de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$ est encore mystérieux. Si $N(t)$ est le nombre d'éléments x de $\mathbb{Z}^2$ tels que $||x|| \leq t$, on ne connaissait toujours pas en 2001 la borne inférieure des $\alpha > 0$ tels que $N(t) - \pi t^2 = O(t^\alpha)$.

(2) Un groupe Γ est dit *de type fini* s'il admet une partie génératrice finie. Soit S une partie génératrice finie fixée de Γ, stable par passage à l'inverse. La *marche aléatoire simple* sur Γ est la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in N}$ sur Γ de probabilité de transition $P(X_{n+1} = y|X_n = x)$ égale à $1/\mathrm{Card}(S)$ si $y \in xS$, et à 0 sinon. Elle est dite *récurrente* si la probabilité $P(\exists n > 0, X_n = x|X_0 = x)$ de retour en un point de départ $x \in G$ vaut 1 (ce qui ne dépend ni de x, ni de S).

Un théorème de Varopoulos (1986) dit que la marche aléatoire simple sur un groupe Γ de type fini est récurrente si et seulement si Γ est fini, ou contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^2$.

(3) Un théorème de Stallings et de Swan (1968) dit qu'un groupe est de dimension cohomologique 1 si et seulement s'il est libre.

(4) Un groupe est *linéaire* sur un corps K s'il est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$. Un groupe Γ est *résiduellement fini* si l'intersection de ses sous-groupes d'indice fini est triviale. Un théorème de Malcev (1940) dit qu'un groupe linéaire de type fini en caractéristique nulle est résiduellement fini. Un lemme dit de Selberg (1960) (sans doute dû à Malcev (1940)) affirme qu'un groupe linéaire de type fini en caractéristique nulle contient un sous-groupe d'indice fini sans torsion.

(5) Par un exercice de Bourbaki (1975), tout groupe de Lie réel connexe semi-simple, comme $SL_n(\mathbb{R})$, contient un sous-groupe dense et libre de rang 2.

(6) Un théorème de Tits (1972) dit qu'un groupe linéaire Γ, en caractéristique nulle, vérifie l'alternative :

– ou bien Γ contient un sous-groupe libre de rang 2,

– ou bien Γ contient un sous-groupe résoluble d'indice fini.

(7) On dit qu'un sous-groupe discret Γ d'un groupe de Lie réel connexe G est un *réseau* s'il existe une mesure de probabilité G-invariante sur G/Γ. Un groupe est *de présentation finie* s'il est isomorphe au quotient d'un groupe libre $L(S)$ de rang fini par un sous-groupe $N(R)$ normalement engendré par une partie finie R de $L(S)$. On dit alors que le couple (S, R) est une *présentation finie* du groupe.

Une combinaison de résultats importants, s'étalant sur une vingtaine d'années, et récapitulés dans cet ouvrage peut-être pour la première fois dans un livre, montre que tout réseau de G est de présentation finie.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[T])$ n'est pas de type fini, mais $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q[T])$ l'est pour $n \geq 3$. Le groupe $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_q[T])$ n'est pas de présentation finie (Behr, 1979), mais $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q[T])$ l'est pour $n \geq 4$ (Rehmann-Soulé, 1976).

(8) L'ensemble $\mathcal{G}r_n$ (non dénombrable si $n \geq 2$) des classes d'isomorphisme de groupes admettant une partie génératrice finie de cardinal n est muni d'une topologie naturelle, de la manière suivante. Soit $\widetilde{\mathcal{G}r}_n$ l'ensemble des sous-groupes distingués d'un groupe libre $L(S)$ de rang n. On le munit de la topologie, dite topologie de Cayley, induite par la distance (ultramétrique) $d(N, N') = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid B(e,n) \cap N = B(e,n) \cap N'\}$, avec $B(e,n)$ l'ensemble des mots réduits de longueur au plus n dans $L(S)$. L'espace $\widetilde{\mathcal{G}r}_n$ est compact. Alors $\mathcal{G}r_n$ est en bijection avec l'ensemble quotient de $\widetilde{\mathcal{G}r}_n$ par la relation $N \sim N'$ si et seulement si $L(S)/N$ et $L(S)/N'$ sont isomorphes.

Un théorème de Champetier (1994) montre que, muni de sa tribu des boréliens pour la topologie quotient, l'espace $\mathcal{G}r_n$ n'est pas standard (un espace borélien est standard s'il est isomorphe à l'espace borélien défini par un espace topologique métrisable localement compact σ-compact).

(9) On dit qu'un sous-groupe discret Γ d'un groupe de Lie réel connexe G est *arithmétique* s'il existe un groupe algébrique linéaire $\underline{G}$ défini sur $\mathbb{Q}$, et un morphisme de groupes de Lie f, surjectif et de noyau compact, de la composante neutre de $\underline{G}(\mathbb{R})$ dans G, tel que Γ et $f(\underline{G}(\mathbb{Z}))$ soient commensurables. Par exemple, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe arithmétique de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Un résultat maintenant classique dit que tout sous-groupe arithmétique est un réseau. Un théorème de Margulis (en train de devenir classique !) dit que la réciproque est vraie si G est de rang au moins 2, et si Γ est irréductible.

(10) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le groupe des tresses B_n, défini par générateurs et relations par

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \mid \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ si } |i-j| > 1, \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j \text{ si } |i-j| = 1 \rangle$$

est linéaire par un théorème récent (2000) de Krammer et de Bigelow.

(11) Un *sous-groupe de congruence* de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe d'indice fini contenant le noyau du morphisme $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ de réduction modulo un entier $\ell \geq 2$. Pour $n \geq 3$, tout sous-groupe distingué infini de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est d'indice fini (un résultat de Margulis), et tout sous-groupe d'indice fini est de congruence (un théorème de Bass-Milnor-Serre (1967) et Mennicke (1965)). Ces deux faits sont faux pour $n = 2$.

(12) Tout groupe de type fini Γ, muni d'une partie génératrice finie S, admet une unique distance invariante par translation à gauche (appelée la *métrique des mots*), telle que la distance d'un élément γ à l'élément neutre e soit la longueur minimale d'une écriture de γ comme mot en éléments de S et leurs inverses. Une *quasi-isométrie* entre deux espaces métriques X, Y est une application $f : X \to Y$ telle qu'il existe des constantes $\lambda \geq 1, \epsilon \geq 0$, avec

$$\forall\, x, x' \in X, \quad \frac{1}{\lambda} d(x,x') - \epsilon \leq d(f(x), f(x')) \leq \lambda d(x,x') + \epsilon$$

$$\forall\, y \in Y, \quad d(y, f(X)) \leq \epsilon\ .$$

Pour $n \geq 3$, si un groupe de type fini Γ' est quasi-isométrique à $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, alors, modulo sous/sur-groupes d'indice fini et quotients/extensions de noyau fini, ils sont isomorphes. Plus généralement, par une compilation de nombreux résultats, qu'il est bien agrâble de retrouver dans un même livre, un groupe de type fini quasi-isométrique à un réseau irréductible d'un groupe de Lie G réel connexe semi-simple de centre fini, est isomorphe modulo sous/sur-groupes d'indice fini et quotients/extensions de noyau fini, à un réseau de G, et on sait exactement quand deux réseaux de G sont quasi-isométriques.

(13) Soit Γ un groupe de type fini, muni d'une métrique des mots. Si $f(n)$ est le cardinal de la boule de centre e et de rayon n, la *croissance* de Γ est le comportement asymptotique de la fonction $n \mapsto f(n)$ (ce qui ne dépend pas de S, lorsque l'on identifie les fonctions croissantes par la relation d'équivalence $f \sim g$ si et seulement s'il existe $a \geq 1, b \geq 0$ tels que $f(n) \leq ag(an+b)+b$ et de même en échangeant f et g). Par exemple, les groupes libres sont à croissance exponentielle, et les groupes abéliens libres à croissance polynomiale.

Un théorème de Gromov (1981) dit qu'un groupe est à croissance polynomiale si et seulement s'il est virtuellement nilpotent. Un théorème d'Avez (1970) dit que le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte connexe X, de courbure (sectionnelle) négative ou nulle, de dimension au moins 3, est à croissance exponentielle, sauf si X est plate. Les premiers exemples de groupes à croissance *intermédiaire* (i.e. sur-polynomiale et sous-exponentielle) sont dus à Grigorchuk (1980). La partie la plus détaillée du livre de de la Harpe concerne la construction et l'étude d'un groupe de Grigorchuk Γ, qui vérifie les propriétés suivantes.

1. Soit X l'intervalle $[0,1]$ privé des diadiques. Soit a la bijection de X qui échange les deux moitiés de X ($a : t \mapsto \begin{cases} t+\frac{1}{2} \text{ si } t<\frac{1}{2} \\ t-\frac{1}{2} \text{ sinon} \end{cases}$), et 1 l'application identité de $[0,1]$. Notons encore a et 1 les bijections de $X \cap [u,v]$ conjuguées aux applications a et 1 précédentes par l'unique application affine envoyant $[0,1]$ sur $[u,v]$. Pour tout mot infini à droite $w = w_0 w_1 ...$ dans les lettres $a, 1$, notons b_w la bijection de X valant w_0 sur la première moitié de X, valant w_1 sur la première moitié de ce qui reste, etc. Alors Γ est le groupe de bijections de X engendré par $\{a, b_{w_1}, b_{w_2}, b_{w_3}\}$, pour $w_1 = aa1aa1aa1aa1..., w_2 = a1aa1aa1aa1a..., w_3 = 1aa1aa1aa1aa...$.

2. Le groupe Γ est un groupe de torsion, infini, de type fini, qui n'est pas de présentation finie, moyennable, résiduellement fini, à croissance intermédiaire.

2 Des groupes en géométrie à la géométrie des groupes

La théorie géométrique des groupes est en gros l'étude des *groupes métriques*, i.e. des groupes munis d'une distance invariante par translation à gauche. Il peut s'agir par exemple d'unn groupe de Lie connexe muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche, d'un groupe de type fini muni d'une distance des mots, et pas si trivialement que cela, d'un sous-groupe d'un tel groupe, muni de la distance induite. Mais la théorie géométrique des groupes est surtout un langage et une problématique.

Le programme d'Erlangen de Klein [Kle] définit ainsi une géométrie: "étant donné un espace et un groupe de transformations de cet espace, en étudier les êtres du point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe [...]; développer la théorie des invariants relatifs à ce groupe." Ce transfert de point de vue (géométrie = groupe) a été renforcé par la vision de Gromov [Gro1] des groupes a priori abstraits comme objets géométriques (groupe = géométrie).

Le livre de de la Harpe illustre très bien les grands problèmes de la théorie géométrique des groupes. Un regroupement dans des grandes thématiques permet de mettre de l'ordre dans l'inventaire de la partie précédente, dont l'aspect a priori aléatoire est surtout dû à la diversité des domaines touchés. La liste ci-dessous est bien sûr personnelle et non exhaustive.

(i) Classification des groupes métriques à quasi-isométrie près.

Deux métriques des mots sur un même groupe de type fini sont quasi-isométriques. Comme le montre le point (8), et une extension conjoncturelle à l'espace des classes de quasi-isométries de groupes admettant une partie génératrice de cardinal n, le problème général est très ouvert. On ne pourra pas se contenter d'un ensemble dénombrable d'invariants, ni d'un espace borélien standard d'invariants. De nombreux résultats (voir par exemple le point (12)) visent à classer les groupes de type fini, munis de métriques des mots, qui sont quasi-isométriques à un autre donné, d'origine géométrique. Dans le prolongement des idées de Klein, des invariants de quasi-isométries sont développés (dimension conformes d'espaces à l'infini, dimensions de nature cohomologique (voir le point (3),...).

(ii) Propriétés géométriques de groupes.

Certaines propriétés de groupes de type finis munis d'une métrique des mots (avoir un sous-groupe d'indice fini libre, avoir un sous-groupe d'indice fini nilpotent (voir le point (13)), être hyperbolique au sens de Gromov, ...) sont invariantes par quasi-isométries, d'autres non (être résiduellement fini (à sous-groupes d'indice fini/quotients finis près), avoir la propriété (T) de Kazhdan, ...), et pour bien d'autres encore on ne sait pas.

(iii) Propriétés asymptotiques de groupes métriques.

Le livre fondateur [Gro2] de Gromov est une source importante d'exemples et de problèmes dans cette direction. Les points (1) et (13) ci-dessus, qui s'interpellent dans l'introduction et la conclusion du livre de de la Harpe, concernent la croissance asymptotique du cardinal des boules dans un groupe métrique discret.

Le comportement asymptotique de marches aléatoires (voir par exemple le point (2)) rentre aussi dans ce domaine.

(iv) Propriétés asymptotiques de familles de groupes métriques.

La croissance du nombre de (certains) sous-groupes d'indices finis d'un groupe donné est aussi intéressante (Sont à comparer, par exemple, la croissance du nombre de tous les sous-groupes d'indice au plus n et celle des sous-groupes arithmétiques d'indice au plus n dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.)

(v) Structure des sous-groupes des groupes métriques.

Où l'on revient de Gromov à Klein, en utilisant la structure géométrique d'un groupe métrique donné pour étudier la structure de ses sous-groupes (voir les points (4), (5), (6), (7), (11), (12)).

Il y a un danger en théorie géométrique des groupes, celui de rester anecdotique. Mais ce n'est pas le cas du livre de de la Harpe.

Cet ouvrage contient bien d'autres choses encore, comme un rappel du théorème de Poincaré sur les groupes engendrés par réflexions ou une évocation des groupes hyperboliques de Gromov. La richesse et la variété des outils nécessaires pour démontrer les résultats de la section 1 font que le livre de de la Harpe ne contient pas toutes leurs preuves. Ceci peut parfois provoquer une certaine frustation, et fait que ce livre ne saurait être lu linéairement, comme l'indique son titre. Mais sa bibliographie est somptueuse (29 pages !), et ses références, bien amenées, de niveaux variés, sont une incitation à passer des heures dans une bibliothèque. Ce livre fourmille d'exemples, et contient de nombreux exercices et problèmes, certains faciles, d'autres difficiles. C'est un livre qui devrait être dans toutes les bibliothèques personnelles, car il est agréable, pour se détendre ou se cultiver, de l'ouvrir au hasard, d'y piocher des faits amusants et profonds, quitte à poursuivre l'apprentissage dans d'autres ouvrages.

Pour une mise à jour des références et des problèmes ouverts mentionnés dans le livre de de la Harpe, on peut consulter le texte de son auteur "Topics in geometric group theory - mise à jour" sur la page

http://www.unige.ch/math/biblio/preprint/pp2001.html

Références

[Kle] F. Klein, *Le programme d'Erlangen*, Gauthier-Villars (1974).

[Gro1] M. Gromov, *Infinite groups as geometric objects*, in "Proc. Inter. Cong. Math. Varszawa **1** (1984) 385-392.

[Gro2] M. Gromov, *Asymptotics invariants of infinite groups*, Vol. 2 de "Geometric group theory", A. Niblo, M. Roller eds, LMS LNS **182**, Cambridge Univ. Press, 1993.

Frédéric Paulin, École Normale Supérieure