Ex 3 :

i) $\Rightarrow$ ii) fait dans la leçon

ii) $\Rightarrow$ i)

avec N assez grand $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$ donc

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi x \xi} \hat{u}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x z} \hat{u}(z)\, dz$$

On montre avec le théorème de Cauchy que

$$(*) \quad u(x) = \int_{\mathrm{Im}\, z = \varepsilon \rho} e^{2i\pi x z} \hat{u}(z)\, dz \qquad \forall \rho > 0$$

avec $\varepsilon = \mathrm{sgn}(x)$

Si c'est vrai, on a alors en posant $z = \xi + i\varepsilon\rho$

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi|x|\rho} e^{2i\pi x \xi} \hat{u}(\xi + i\varepsilon\rho)\, d\xi$$

l'intégrale est convergente puisque pour $N \geq 2$

$$\left| e^{-2\pi|x|\rho} e^{2i\pi x\xi} \hat{u}(\xi + i\varepsilon\rho) \right| \leq C_N \frac{e^{-2\pi|x|\rho} e^{2\pi R\rho}}{(1+|\xi|)^N}$$

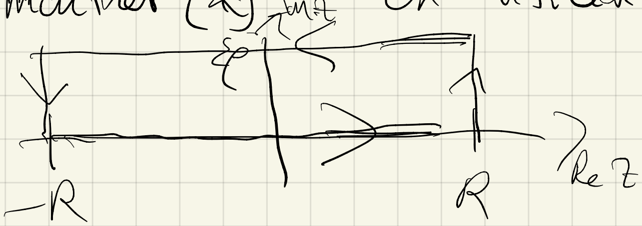
Cela donne de plus

$$|u(x)| \leq C e^{2\pi\rho(R-|x|)}$$

avec $C = C_N \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|\xi|)^N} d\xi$

Donc si $|x| > R$ en faisant $\rho \to +\infty$ on obtient $u(x) = 0$

Il reste à montrer $(*)$. On utilise la formule de Cauchy sur



pour $z \mapsto e^{2i\pi x z} \hat{u}(z)$ holomorphe et on fait tendre R vers l'infini, les intégrales sur les segments verticaux tendent vers 0 car :

$$\left| \int_0^{\varepsilon \ell} e^{2i\pi x(\pm R + iy)} \hat{u}(\pm R + iy)\, dy \right|$$

$$\leq \left| \int_0^{\varepsilon \ell} e^{-2\pi x y} \frac{C_N e^{2\pi |y|}}{[1 + R + |y|]^N} dy \right|$$

$$\underbrace{\leq \frac{C_N}{\boxed{1+R}^N} \int_0^{\ell} e^{2\pi |y| (1+|x|)} dy}_{\xrightarrow[R \to +\infty]{} 0}$$

Exercice 4

1) On cherche $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(y + \lambda a) = f(y) + \lambda m \leq p(y + \lambda a)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Par homogénéité ($p(\lambda x) = \lambda p(x)$ $\forall \lambda > 0$), il suffit d'avoir

$$f(y) + m \leq p(y + a) \qquad \forall y \in F$$

$$\text{et} \quad f(y') - m \leq p(y' - a) \qquad \forall y' \in F$$

On cherche donc m tel que :

$$f(y') - p(y' - a) \leq m \leq p(y + a) - f(y) \qquad \forall y, y' \in F$$

Si on a $(*)$ $f(y') - p(y' - a) \leq p(y + a) - f(y)$ $\forall y, y' \in F$

alors $S = \sup_{y'} (f(y') - p(y') - a) \leq I = \inf_{y} (p(y + a) - f(y))$

et donc on peut prendre $m = \frac{S + I}{2}$

Montrons que $(*)$ est vrai

$$(*) \iff f(y) + f(y') \leq p(y + a) + p(y' - a) \qquad (2)$$

Mais $\quad p(y+y') = p(y+a+y'-a) \leq p(y+a) + p(y'-a)$ par hyp sur p

et $\quad f(y+y') \leq p(y+y')$ hypothèse de domination sur F

$\quad \| \atop f(y)+f(y')$

Donc (2) est vraie

2) On pose $E_n = \langle E_0, e_1, \dots e_n \rangle \qquad E_0 := Y$ linéaire

Par récurrence avec 1) $\forall n \; \exists f_n : E_n \to \mathbb{R}$ l telle que

$f_n{}_{/E_{n-1}} = f_{n-1} \quad , f_1{}_{/E_0} = f$ et $f_n(y) \leq p(y) \quad \forall y \in E_n$

On peut donc définir f sur $\bigcup_n E_n$ en posant $f_{/E_n} = f_n$

On veut l'étendre à $\overline{\bigcup_n E_n} = X$

Par hypothèse, p est C^0 en zéro et $p\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^k} p(x) \; \forall k$ donc $p(0) = 0$

De plus $\forall y \in \bigcup_n E_n \qquad f(y) \leq p(y)$

$$-f(y) = f(-y) \leq p(-y)$$

Donc $\quad p(-y) \leq f(y) \leq p(y) \qquad \forall y \in \bigcup_n E_n$

- p continue en $0 \Rightarrow f$ continue en 0
- f est linéaire donc f est uniformément continue sur $\bigcup_n E_n$

Par le th de prolongement f se prolonge à $\overline{\bigcup_n E_n} = X$

avec $f(x) = \lim_n f(x_n) \quad$ si $x_n \to x$

Par passage à la limite, on garde :
- f linéaire
- f vérifie $f(x) \leq p(x) \; \forall x \in X$