Corollaire (Version raffinée)

Si $u \in H^1(B_r)$ vérifie $-\operatorname{div}(A\nabla u) = 0$

alors $\exists \alpha \in]0,1[$, $\exists C > 0$
$$\int_{B_\rho} |\nabla u|^2 dx \leq C \left(\frac{\rho}{r}\right)^{N-2+2\alpha} \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx \quad \forall 0 < \rho \leq r$$

dém : • Quitte à dilatter, on se ramène au cas où $r = 1$, $\rho \leq 1$

• si $\rho \geq \frac{1}{4}$ c'est trivial $\Rightarrow$ on traite $\rho \leq \frac{1}{4}$

Quitte à remplacer u par $u - \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} u$, on peut supposer $\int_{B_1} u = 0$

• ~~Par une variante de Poincaré~~ :
Par la méthode habituelle en prenant $\chi\left(\frac{x}{\rho}\right)(u - u(0))$ comme fonction test
$$\int_{B_\rho} |\nabla u|^2 \leq \frac{C}{\rho^2} \int_{B_{2\rho}} |u(x) - u(0)|^2 dx$$
$$\leq \frac{C}{\rho^2} \rho^{N+2\alpha} \|u\|^2_{L^2(B_1)} \quad \text{par l'estimation } \mathcal{C}^\alpha$$
$$\leq C \rho^{N-2+2\alpha} \|\nabla u\|^2_{L^2(B_1)}$$
par une variante de Poincaré $\left(\int_{B_1} u = 0\right)$

Th (Régularité $\mathcal{C}^\alpha$) Si $-\operatorname{div}(A\nabla u) = f$ dans Ω avec $u \in H^1(\Omega)$, $f \in L^q$, $q > \frac{N}{2}$ alors $u \in \mathcal{C}^\alpha(K)$ $\forall K \subset\subset \Omega$

Dem : • De nouveau il suffit de traiter le cas $B_r \subset\subset \Omega$

• On va d'abord montrer l'estimation raffinée

~~Dem~~ (On fait la preuve pour $N \geq 3$ ($N=2$ plus facile))

Soit R avec R / $\overline{B_R} \subset \Omega$

On montre que $\exists c > 0 \ \forall \rho \leq \frac{R}{2}$ $\displaystyle\int_{B_\rho} |\nabla u|^2 dx \leq C \rho^{N-2+2\alpha}$

Pour cela : Soit $\rho < r \leq \frac{R}{2}$

On décompose $u = v + w$

avec $\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla v) = f & \text{i.e } v \in H_0^1(B_r) \\ v/_{\partial B_r} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla w) = 0 \\ w/_{\partial B_r} = u/_{\partial B_r} \end{cases}$

Par construction de w on a $\left(\|w\|_{H^1(B_r)} \leq \|u\|_{H^1(B_r)}\right)$

- Pour v : avec l'estimation habituelle : car $v \in H_0^1$

$$\alpha \int_{B_r} |\nabla v|^2 \leq \Big| \int_{B_r} \underbrace{f}_{\in L^q} \underbrace{v}_{\in L^{2^*}} \underbrace{\ }_{\in L^p} dx \Big|$$

$q > \frac{N}{2}$

$$\leq \|f\|_{L^q} \|v\|_{L^{2^*}(B_r)} r^{\frac{N}{p}}$$

$$\leq \underset{\sim}{C} \|\nabla v\|_{L^2(B_r)} r^{N/p}$$

Poincaré + Sobolev ; ne dépend que de $\|f\|_{L^q(\Omega)}$

donc $\displaystyle\int_{B_r} |\nabla v|^2 dx \lesssim r^{\frac{2N}{p}}$

- Pour w on utilise le lemme précédent

$$\int_{B_\rho} |\nabla w|^2 \leq \left(\frac{\rho}{r}\right)^{N-2+2\alpha} \int_{B_r} |\nabla w|^2$$

On a donc

$$\int_{B_\rho} |\nabla u|^2 \leq 2\int_{B_\rho} |\nabla v|^2 + 2\int_{B_\rho} |\nabla w|^2 \lesssim 2r^{\frac{2N}{p}} + C2\left(\frac{\rho}{r}\right)^{N-2+2\alpha}\int_{B_r} |\nabla w|^2$$

$$\lesssim 2r^{\frac{2N}{p}} + C4\left(\frac{\rho}{r}\right)^{N-2+2\alpha}\int_{B_r}|\nabla u|^2 + \underbrace{C4\left(\frac{\rho}{r}\right)^{N-2+2\alpha} r^{\frac{2N}{p}}}_{\lesssim C r^{\frac{2N}{p}} \quad \rho\leq r}$$

$$\lesssim C r^{\frac{2N}{p}} + c\left(\frac{\rho}{r}\right)^{N-2+2\alpha}\int_{B_r}|\nabla u|^2$$

Finalement :

$$\forall \rho\leq r \quad \int_{B_\rho} |\nabla u|^2 dx \leq C\left(r^{2\beta} + \left(\frac{\rho}{r}\right)^{N-2+2\alpha} \underbrace{\int_{B_r} |\nabla u|^2 dx}_{\leq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx}\right)$$

<u>Rem</u> On s'intéresse à r petits on peut toujours supposer que β est petit

<u>Lemme.</u> Soit $\varphi \geq 0$ $\nearrow$ sur $[0,R]$

Si $\exists A, B > 0$ $\alpha,\beta\geq 0$ $\alpha\beta<\alpha$ tels que

$$\varphi(\rho) \leq A\left(\frac{\rho}{r}\right)^\alpha + Br^\beta \quad \forall\, 0<\rho\leq r\leq R$$

Alors $\exists\, C(R)$ / $\varphi(\rho) \lesssim C(R)\,\rho^\gamma \quad \forall\, 0<\rho\leq R$

avec $\beta<\gamma<\alpha$

avec le lemme : on déduit $\displaystyle\int_{B_\rho} |\nabla u|^2 \leq C\rho^{N-2+2\tilde\alpha}$

avec $0<\tilde\alpha<\alpha$

et on conclut avec le lemme de Campanato

<u>Dem du lemme</u> : On remarque que $\forall \tau \in]0,1[$ on peut prendre $\rho = \tau r$

$\Rightarrow \forall r\leq R \quad \varphi(\tau r) \leq A\,\tau^\alpha \varphi(r) + Br^\beta$

On choisit τ / $2A\tau^\alpha = \tau^\gamma$ (A est grand $\gamma<\alpha$)
$\to \tau \in]0,1[$

donc $\varphi(\tau r) \lesssim \tau^\gamma \varphi(r) + Br^\beta$

en itérant

$$\varphi(\tau^{k+1} r) \leq \tau^\gamma \varphi(\tau^k r) + B(\tau^k r)^\beta$$
$$\leq \tau^\gamma \left[\tau^\gamma \varphi(\tau^{k-1} r) + B(\tau^{k-1} r)^\beta\right] + B(\tau^k r)^\beta$$
$$\leq \tau^{2\gamma} \varphi(\tau^{k-1} r) + B\tau^\gamma(\tau^{k-1} r)^\beta + B(\tau^k r)^\beta$$

En itérant

$$\varphi(\tau^{k+1} r) \leq \tau^{(k+1)\gamma} \underbrace{\varphi(r)}_{\leq \varphi(R)} + \underbrace{B\sum_{\ell=0}^{k} \tau^{(k-\ell)\gamma} (\tau^\ell r)^\beta}_{\leq B r^\beta \tau^{k\gamma} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{k} (\tau^\ell)^{\beta-\gamma}}_{\leq \tau^{k(\beta-\gamma)}}}$$

car $\tau < 1$, $\beta - \gamma < 0$

Donc $\varphi(\tau^{k+1} r) \leq C(R)\left[\tau^{(k+1)\gamma} + BR^\beta \tau^{k\beta}\right]$

$$\leq \tilde{C}(R)\,\tau^{k\gamma}$$

$\forall\, 0 < \rho < r$ on peut trouver k / $\tau^{k+1} r \leq \rho \leq \tau^k r$

donc $\varphi(\rho) \leq \varphi(\tau^k r) \leq \tilde{C}(R)\, \tau^{(k-1)\gamma}$

$$\leq \underbrace{\frac{\tilde{C}(R)}{\tau^2}}_{\text{mais } \tau \text{ est fixe}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^\gamma$$

ch 3

Equations Elliptiques semi-linéaires

classification des EDP : • semi-linéaires = la partie principale est linéaire :
Ex : $-\Delta u + |u|^2 u = 0$, $\partial_t u - \Delta u = u(1-u)$, $i\partial_t u + \Delta u + |u|u = 0$

• quasilinéaire : linéaire / aux dérivées d'ordre maximal :
Ex : $\operatorname{div}(A(\nabla u)\nabla u) = 0$ (surface minimale)
$\partial_t u + u\,\partial_x u = 0$ (Burgers)

• complètement non-linéaire (fully nonlinear)
" $\det(D^2 u) = 0$ Monge-Ampère
- $\partial_t \varphi + |\nabla\varphi|^2 = 0$ (Hamilton-Jacobi)

Les équations elliptiques non-linéaires apparaissent :
- en physique (Mécanique des fluides, elasticité, cinétique chimique etc)
- en géométrie (riemannienne) (plongement isométrique, surface minimale, problème de Yamabe)

I Application du théorème du pt fixe de Schauder

1) Point fixe de Schauder

Rappel : Th (Brouwer) K compact convexe $\subset \mathbb{R}^N$ $f : K \to K$ C^0
$\exists x \in K$ $f(x) = x$

Def : $F : A \subset X \to X$, X Banach est compacte si F est C^0 et $\forall B$ borné $F(B)$ est relativement compact

Rem : • Si F est linéaire la 2ème condition $\Rightarrow$ continuité
• dans la terminologie Leray-Schauder compact = complètement continu

Th (point fixe de Schauder) X Banach $\Gamma \subset X$ fermé borné convexe :
Si $F : \Gamma \to \Gamma$ est compacte alors $\exists x \in \Gamma$ $F(x) = x$

dém : Lemme : $\forall \varepsilon > 0$ $\exists f_\varepsilon$, E_ε sous ev de dim finie /
$f_\varepsilon : \Gamma \cap E_\varepsilon \to \Gamma \cap E_\varepsilon$ C^0 et
$\|f - f_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$

En utilisant le lemme : $\Gamma \cap E_\varepsilon$ est un compact convexe donc
Brouwer $\Rightarrow$ $\exists x_\varepsilon \in \Gamma \cap E_\varepsilon$ / $f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $\quad x_n \in \Gamma \cap E_n \quad / \quad F_n(x_n) = x_n$

• Γ est borné donc x_n est borné, F est compacte donc $\exists n_k$ $\quad F(x_{n_k}) \to y \in \Gamma$
$y \in X$ $\quad$ (Γ est fermé)

Mais $\underbrace{F_{n_k}(x_{n_k}) - F(x_{n_k})}_{\|\ \| \leq \frac{1}{n_k}} = x_{n_k} - F(x_{n_k})$ donc $x_{n_k} \to y$

Comme F est C^0 $\quad F(x_{n_k}) \to F(y)$

Donc $F(y) = y$

Dém du Lemme $\quad F(\Gamma)$ est compact $\quad F(\Gamma) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(v_i, \frac{\varepsilon}{2})$

o.p.s chaque boule contient un élément de $F(\Gamma) \subset \Gamma$ donc

$F(\Gamma) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(w_i, \varepsilon)$ avec $w_i \in \Gamma$

On pose $\quad w_i(x) = 2\varepsilon - \|x - w_i\|$ si $\|x - w_i\| \leq 2\varepsilon$ $\quad w_i : X \to \mathbb{R}_+$
$= 0$ si $\|x - w_i\| > 2\varepsilon$ $\quad$ et w_i est C^0

De plus $\sum_{i=1}^{N} w_i(x) \neq 0 \quad \forall x \in F(\Gamma)$

donc $a_i(x) = \dfrac{w_i(x)}{\sum_1^N w_i}$ est C^0 sur $F(\Gamma)$ et $\sum_1^N a_i = 1 \quad \forall x \in F(\Gamma)$
≥ 0

On définit alors $\quad F_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i(Fx)\, w_i$

F_ε est C^0 sur Γ, comme $w_i \in \Gamma$ $\quad a_i \geq 0$ $\quad \sum_1^N a_i = 1$ et Γ convexe

$F_\varepsilon : \Gamma \to \Gamma \cap \mathrm{Vect}(w_1, \dots w_N)$

donc $F_\varepsilon : \Gamma \cap \langle w_1 \dots w_N \rangle \to \Gamma \cap \langle w_1 \dots w_N \rangle$ est C^0

finalement : si $x \in \Gamma$ $\quad F_\varepsilon(x) - F(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i(F(x))\,(w_i - F(x))$

Par def des a_i $\quad \|F_\varepsilon(x) - F(x)\| \leq 2\varepsilon \sum_{i=1}^{N} a_i \leq 2\varepsilon$

(si $a_i(F(x)) \neq 0$ $\quad \|F(x) - w_i\| \leq 2\varepsilon$)

2) Application 1

Th (Equation semi-linéaire à non-linéarité sous linéaire)

Soit $\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + f(x,u) = 0 & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{array} \right.$ $\quad \Omega$ borné $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de Carathéodory : $f(\cdot, u)$ mesurable $\forall u$, $f(x, \cdot)$ est C^0 pp $x \in \Omega$

On suppose que $\forall u$ $\quad |f(x,u)| \leq |g(x)| + C|u|^p$ $\quad$ avec $p < 1$ et $g \in L^2$

alors $\exists$ au moins une solution faible $\in H_0^1(\Omega)$:
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega f(x,u)\, v = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Rem : La méthode peut être étendue à $-\operatorname{div}(A(u)\nabla u) = f(x,u)$

Dém : Si $v \in L^2$ on pose $u = T(v)$ la solution de
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega f(x,v)\,\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$
$\Leftrightarrow$ solution faible de $-\Delta u + f(x,v) = 0$

- $T(v)$ est bien définie car si $v \in L^2$ $f(x,v) \in L^2$
- de plus en prenant $u = T(v)$ comme fonction test :
$$\alpha \|u\|_{H^1}^2 \leq \int_\Omega \left(g(x) + C|v|^\beta\right) u \, dx$$
$$\leq \|g\|\,\|u\| + C\int_\Omega |v|^\beta |u|\, dx$$

donc par Holder et Young
$$\|u\|_{H^1}^2 \leq C\left(\|g\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^{2\beta}\right)$$
Si $\|v\| \leq R$ $\|u\|_{H^1}^2 \leq C\left(\|g\|_{L^2}^2 + R^{2\beta}\right)$ C ne dépend que de Ω et α

on peut choisir R grand pour avoir
$$\|u\|_{H^1}^2 \leq R^2$$
donc : $T \quad L^2 \cap B(0,R) \longrightarrow L^2 \cap B(0,R)$

en fait l'image de $T \subset H^1$

- comme l'injection $H^1 \hookrightarrow L^2$ est compacte, il suffit de montrer la continuité.
- Si $v_n \to v$ dans L^2 on pose $u = T(v) \in H_0^1$, $u_n = T(v_n)$

u_n borné dans H^1, on peut supposer $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ H^1 faible, $u_n \to \bar{u}$ L^2 fort

On peut aussi supposer (quitte à réextraire) $u_n \to \bar{u}$ pp, $v_n \to v$ pp
et u_n, v_n dominés

$\forall \varphi \quad \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega f(x, u_n) \varphi = 0$

$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla \varphi \longrightarrow \int \nabla \bar{u} \cdot \nabla \varphi$ par CV faible H^1

$f(x, u_n) \to f(x, \bar{u})$ pp par la C^0

de plus $|f(x, u_n)| \leq |g| + C|u_n|^\beta \leq |g| + C|h|^\beta \in L^2$

donc par convergence dominée $\int_\Omega f(x, u_n)\varphi \longrightarrow \int_\Omega f(x, \bar{u})\varphi$

donc $\bar{u}$ vérifie $\begin{cases} -\Delta \bar{u} + f(x, v) = 0 \\ \bar{u} \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$

Par unicité pour cette équation linéaire $\bar{u} = u$

On a donc montré qu'une sous suite $T(v_{n_k}) \to u$

Mais par unicité de la lim, toutes les sous suites CV vers u

donc $T(v_n) \to u$

. Par le point de Schauder, il existe v / $T(v) = v$

<u>Rem</u> : . l'hypothèse sur la non-linéarité est très restrictive

. Mais dès qu'on autorise une croissance linéaire, il faut être prudent $\longrightarrow$ Spectre :

si $f(x, u) = -\lambda u + g$ avec $\lambda \in Sp(-\Delta)$

on ne peut pas tjs résoudre $-\Delta u - \lambda u = -g$

(l'image est de Codim 1)

<u>Th 2</u> Ω borné $\begin{cases} -\Delta u + f(x, u) = 0 \\ u \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$ $\quad f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$

et $\frac{\partial f}{\partial u} \geq 0 \quad \forall x \; \forall u$

Alors $\exists ! \, u \in H^1_0(\Omega)$ solution

<u>dém</u> : Pour l'existence : on pose $f_j(x, u) = f(x, u)$ si $|u| \leq j$

$= f(x, j+1)$ si $|u| \geq j+1$

et on recolle pour avoir $f_j \, C^1$

alors f est bornée et $\frac{\partial f_j}{\partial u} = 0$ si $|u| \geq j+1$

• Pour chaque j, on résout $\begin{cases} -\Delta u_j + f_j(x, u_j) = 0 \\ u_j \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$

comme f_j est Lip c'est équivalent à

$$\begin{cases} -\Delta u_j + \lambda_j(x, u_j) u_j = g(x) \\ u_j \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

• $g(x) = -f(x,0) \in L^\infty(\Omega)$

• $\lambda_j(x,v) = \int_0^1 \frac{\partial f_j}{\partial v}(x, sv)\, ds \geq 0$

$\forall v \in L^2(\mathbb{R})$, on définit $u = Tv$ l'unique solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda_j(x,v) u = g(x) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

comme $\lambda_j \geq 0$ $\quad \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \|g\|_{L^2}$ + Poincaré $\Rightarrow \|u\|_{H^1} \leq C\|g\|_{L^2}$

En choisissant R assez grand :

$T : L^2 \cap B(0,R) \circlearrowleft$, T est compacte car • $T(B_{L^2}(0,R)) \subset B_{H^1}(0,R)$

• T est C^0 même argument qu'avant

$\Rightarrow \forall j\ \exists u_j \in H_0^1(\Omega)$ solution et $\|u_j\|_{H^1}^2 \leq C\|g\|_{L^2}^2$

De plus $g \in L^\infty$, $\lambda_j \geq 0 \underset{\text{principe du Max}}{\Longrightarrow} \|u_j\|_{L^\infty} \leq \|g\|_{L^\infty}$

Par déf de f_j, pour j assez grand $f_j(x, u_j) = f(x, u_j)$

donc $\begin{cases} -\Delta u_j + f(x, u_j) = 0 \\ u_j \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$

u_j est bornée dans H^1 et L^∞, on a alors quitte à extraire

$u_j \to u \in H^1 \cap L^\infty$ avec convergence dans
• H^1 faible
• L^∞ faible *
• L^2 fort
• pp en étant dominée

La seule difficulté est de montrer que

$$\int_\Omega f(x,u_j)\,\varphi\,dx \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_\Omega f(x,u)\,\varphi\,dx$$

On a ~~borne~~ $|f(x,u_j)-f(x,u)| \leq C\,|u_j-u|$ grâce à la borne L^∞

- L'unicité est aussi une conséquence de l'estim d'énergie ou du ppe du Max

Rem : • Le résultat s'applique à $-\Delta u + u^3 = h(x)$
• On peut aussi utiliser une méthode de continuité pour arriver au résultat

Application 2 Equation de Navier-Stokes stationnaire

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + u.\nabla u + \nabla p = F, & \operatorname{div} u = 0 \\ u/_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$$H = \{u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \;/\; \operatorname{div} u = 0\}$$
$$V = \{u \in H^1_0 \;/\; \operatorname{div} u = 0\}$$

Formulation faible :

$$\begin{cases} \nu\int_\Omega \nabla u : \nabla v - \int_\Omega u\otimes u : \nabla v = \int_\Omega F v \quad \forall v \in V \\ u \in V \end{cases}$$

Rem pour montrer que solution régulière faible $\Rightarrow$ solution forte
Il faut utiliser $\int_\Omega f v = 0 \;\forall v \in V \Rightarrow f = \nabla p$

th : $\forall F \in L^2(\Omega)$ $\exists$ une solution faible, Ω borné régulier $N \leq 4$
De plus il y a unicité si $\|F\|_{L^2}$ est suffisamment petite

Dém : Existence : pour $N \leq 3$ (on fait $N=3$)
On utilise Schauder avec $X = H \cap H^{3/4}_0$
(Rem : Motivation $H^{3/4} \hookrightarrow L^4$)

On peut prendre $\|u\|_{H^{3/4}(\Omega)} = \operatorname{Inf}\left\{\|Pu\|_{H^{3/4}(\mathbb{R}^N)} \;/\; Pu_{|\Omega} = u\right\}$

. Si $v \in X$, On ré'sout

$$\begin{cases} \nu \int_\Omega \nabla u : \nabla w - \int_\Omega u\cdot(v\cdot\nabla w) = \int_\Omega f w \quad \forall w \in V \\ u \in V \end{cases}$$

En effet Lax-Milgram

$$a(u,w) = \nu\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla w - \int_\Omega u\cdot(v\cdot\nabla w)$$

$$|a(u,w)| \leq \nu \|u\|_{H^1}\|w\|_{H^1} + \|u\|_{L^4}\|v\|_{L^4}\|w\|_{H^1}$$

$$\leq C\left(\nu + \|v\|_X\right)\|u\|_{H^1}\|w\|_{H^1}$$

$$a(u,u) = \nu\|\nabla u\|^2_{L^2} - \int_\Omega \underbrace{u\cdot(v\cdot\nabla u)}_{\substack{\| \\ u^i v^j \partial_j u^i}} \quad + ipp = 0$$

$\to a$ coercive

$\underset{\text{Lax-Milgram}}{\Rightarrow}$ $\exists! u$ solution on pose $u = Tv$

Si $\|v\|_X \leq R$ alors $\nu\|\nabla u\|^2_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$

~~[illegible]~~ Poincaré $\Rightarrow \|u\|_{H^1} \leq C\|f\|_{L^2}$

donc pour R assez grand :

$T : B_X(0,R) \circlearrowleft$ $\left.\begin{array}{l} .\,T \text{ est à valeurs dans } H^1 \hookrightarrow X \\ .\,T \text{ est } C^0 \text{ (arguments du même type)} \end{array}\right\} - T$ compacte

Rem : . Pour $N = 4$ Il faut raffiner un peu, l'injection $H^1 \hookrightarrow L^4$ est critique, T n'est plus compacte et la preuve ci-dessus ne marche plus.

On peut faire un "schéma itératif à la main" ou utiliser le point fixe de Leray-Schauder

<u>Unicité</u> si u_1, u_2 sont solution,

on $\|u_i\|_{H^1} \leq C\|f\|_{L^2}$

$$\rightarrow \int_\Omega \nabla(u_1-u_2)\cdot\nabla w + \int_\Omega \left[(u_1-u_2)\cdot(u_1\cdot\nabla w) + u_2\cdot\left((u_1-u_2)\cdot\nabla w\right)\right] = 0$$

On prend $w = u_1 - u_2$

$$\rightarrow \|\nabla(u_1-u_2)\|^2_{L^2} \leq \left(\|u_1\|_{L^4}+\|u_2\|_{L^4}\right)\|u_1-u_2\|_{L^4}\,\|\nabla(u_1-u_2)\|_{L^2}$$

avec Poincaré et Sobolev

$$C\,\|(u_1-u_2)\|^2_{H^1} \leq \underbrace{C\left(\|u_1\|_{H^1}+\|u_2\|_{H^1}\right)}_{\leq \tilde{C}\|f\|_{L^2}}\|u_1-u_2\|^2_{H^1}$$

II Un exemple de bifurcation

$$(*) \begin{cases} -\Delta u - \lambda u(1-u^2) = 0 \\ u_{/\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Ω borné régulier $\subset \mathbb{R}^N$
$N \leq 3$

Rem : - problème de valeurs propres "non-linéaire"
- $u \equiv 0$ est toujours solution

Rappels Prop : $-\Delta = A$ opérateur $D(-\Delta) = H^2 \cap H^1_0(\Omega)$ est autoadjoint à résolvante compacte

Dém : . symétrique évident

. $D(A^*) = \{ v \in L^2(\Omega) \ / \ u \mapsto (Au, v)_{L^2}$ est continue $L^2 \to \mathbb{R} \}$

si $u \mapsto (Au, v)$ est C^0 sur L^2, $\exists f \in L^2$ $(Au, v)_{L^2} = (u, f)_{L^2}$ $\forall u \in L^2$

Par existence et régularité elliptique, $\exists w \in H^2 \cap H^1_0 / f = Aw$

donc $(Au, v) = (u, A^* w)$ $\forall u \in H^2 \cap H^1_0$

donc $(Au, v - w) = 0$ comme $\forall g \in L^2$ $\exists u \in H^2 \cap H^1_0$ $/ g = Au$

on déduit $v = w \in H^2 \cap H^1_0$

La réciproque est claire

. A est inversible par existence et régularité elliptique

$A^{-1} : L^2 \to H^2 \underset{\text{compacte}}{\hookrightarrow} L^2$ donc A^{-1} est compact

Corollaire : $\sigma(-\Delta) = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\lambda_n \to +\infty$

$\lambda_0 > 0$, de plus λ_0 est simple (Ω connexe)
(voir th spectrale)

On remarque que $(*)$ pour $\lambda < \lambda_0$ a seulement 0 comme solution
$\to$ on étudie au voisinage de λ_0

Posons $F(u, \lambda) = -\Delta u - \lambda u(1-u^2)$ $\lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0)$
$u \in \mathcal{V}_{H^2 \cap H^1_0}(0)$

On pose $L_0 = -\Delta u - \lambda_0 u$ $\operatorname{Ker} L_0 = \langle \varphi \rangle$
avec $\varphi \in H^2 \cap H^1_0$ $\|\varphi\|_{L^2} = 1$

th : $\exists\, N(\lambda_0)$ voisinage de λ_0, $\mathcal{V}(0)$ voisinage de 0 dans $H^2 \cap H^1_0(\Omega)$

$F(u,\lambda)=0 \quad u\in \mathcal{V}(0),\ \lambda \in N(\lambda_0) \iff \left\{\begin{array}{l} u=0 \\ \text{ou} \\ \exists\, \tilde{\mathcal{V}}(0) \text{ voisinage de } 0 \,/\, u=\alpha[\varphi + \mathcal{U}(\alpha)],\ \lambda=\lambda(\alpha) \end{array}\right.$ avec $\mathcal{U}(0)=0$ régulière

Dém : Idée : th des fonctions implicites

Mais $D_u F(0,\lambda_0) = L_0$ n'est pas inversible

$\to$ généralisation Méthode de Lyapunov Schmidt

$L_0 : (\varphi)^\perp \cap H^2 \cap H^1_0 \longrightarrow \operatorname{Im} L_0 = (\varphi)^\perp$ est inversible

On pose $u=\alpha\varphi + v$ $\quad v$ petit, α petit

$\lambda = \lambda_0 + \mu \quad \mu$ petit

$F(u,\lambda)=0 \iff G(v,\mu,\alpha)=0$

$\phi : \begin{array}{l} H^2 \longrightarrow L^2 \\ u \longmapsto u^3 \end{array}$ est C^∞ $D\phi(u).h = 3u^2 h$ donc F et G sont C^∞

$$G(v,\mu,\alpha) = -\Delta u - \lambda_0 u - \mu u + (\lambda_0+\mu)u^3$$
$$= L_0 v - \mu\alpha\varphi - \mu v + (\lambda_0+\mu)[\alpha\varphi+v]^3$$

$G(v,\mu,\alpha)=0 \iff L_0 v = \mu\alpha\varphi + \mu v - (\lambda_0+\mu)[\alpha\varphi+v]^3$

$\iff (S) \left\{\begin{array}{ll} L_0 v = \Pi_0\left[\mu\alpha\varphi + \mu v - (\lambda_0+\mu)(\alpha\varphi+v)^3\right] & (1) \\ \mu\alpha - (\lambda_0+\mu)\left([\alpha\varphi+v]^3, \varphi\right)_{L^2} = 0 & (2) \end{array}\right.$

$\Pi_0 w = w - (w,\varphi)\varphi$

. On étudie d'abord (1) $\quad$ On étudie $H : H^2\cap H^1_0 \cap (\varphi)^\perp \times \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow L^2 \cap (\varphi)^\perp$

$H(v,\mu,\alpha)=0$

$\quad\ \ \|$

$L_0 v - \Pi_0\left(\mu\alpha\varphi + \mu v - (\lambda_0+\mu)(\alpha\varphi+v)^3\right) =$

$D_v H(0,0,0) = L_0$ donc inversible

Par le th des fonctions implicites

$$H(v,\alpha,\mu)=0 \iff v = V(\alpha,\mu)$$ au vois de $(0,0,0)$ avec V C^∞

On remarque de plus que $V(0,\mu)=0 \ \forall \mu$

en effet $H(0,0,\mu)= 0$

Donc on peut factoriser $v = \alpha \tilde{V}(\alpha,\mu)$

On donc (S) $\iff$

$$\begin{cases} v = \alpha \tilde{V}(\alpha,\mu) \\ \mu\alpha - (\lambda_0+\mu)\left((\alpha\varphi + \alpha\tilde{V}(\alpha,\mu))^3, \varphi\right)_{L^2} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Pour résoudre (2), on remarque que $\alpha = 0$

ou $\mu - \alpha^2(\lambda_0+\mu)\left((\varphi+\tilde{V}(\alpha,\mu))^3,\varphi\right)_{L^2} = 0$

On pose $h(\mu,\alpha) = \mu - \alpha^2(\lambda_0+\mu)\left((\varphi+\tilde{V}(\alpha,\mu))^3,\varphi\right)_{L^2}$

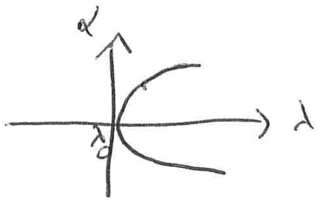
h est C^∞ $h(0,0)=0$

$\frac{\partial h}{\partial \mu}(0,0) = 1$ donc $h(\mu,\alpha)=0 \iff \mu = M(\alpha)$

On donc tps 2 solutions $\alpha = 0$ ou $\mu = M(\alpha)$ donc $u=0$ ou $\lambda = \lambda_0 + M(\alpha)$, $u = \alpha(\varphi + \tilde{V}(\alpha, M(\alpha)))$

<u>Rem</u> : . On peut calculer

. $\frac{\partial h}{\partial \alpha}(0,0) = 0$



~~on~~ en déduit donc que $\frac{\partial h}{\partial \alpha}(0,0) < 0$?

donc $M'(0) > 0$

on a donc $\exists \cancel{\alpha}$ $\mu = M(\alpha) \iff \mu > 0$ au voisinage de 0

Reformulation du résultat : au voisinage de $(0, \lambda_0)$

$$F(u,\lambda) = 0 \iff \begin{cases} u = 0 & \text{si } \lambda \leq \lambda_0 \\ u = 0 \text{ ou } u \text{ non triviale} & \text{si } \lambda > \lambda_0 \end{cases}$$

λ_0 est un point de bifurcation

III Méthodes Variationnelles

1) Retour sur le cas linéaire

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega f u \qquad u \in H^1_0(\Omega)$$

Ω ouvert borné

Th : $\exists\, u \in H^1_0(\Omega)$ / $J(u) = \operatorname{Inf}_{v \in H^1_0(\Omega)} J(v)$

$\Downarrow$

. u vérifie $-\Delta u = f$ Ω au sens de distributions (Eq d'Euler-Lagrange)

Rem : cas particulier d'un théorème très classique

Dém . J est minorée : $J(u) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2} - \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$

$$\geq \alpha(\Omega)\left[\|u\|^2_{H^1} - C\|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}\right]$$

$$\geq -C(\Omega)\|f\|^2_{L^2}$$

donc $I = \operatorname{Inf} \in \mathbb{R}$

. l'inf est atteint soit $u_n \in H^1_0(\Omega)$ / $J(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} I$

$J(u_n)$ est bornée donc $\frac{1}{2}\|\nabla u_n\|^2 \leq M + \|f\|\,\|u_n\|$

et donc de nouveau avec Poincaré $\exists M \,/\, \|u_n\|_{H^1} \leq M \ \forall n$

$H^1_0(\Omega)$ est un Hilbert $\exists u \in H^1_0(\Omega)$ et une ~~sous~~ suite /

$u_n \rightharpoonup u$ H^1 faiblement.

- $\int_\Omega f u_n \to \int_\Omega f u$ par définition de la convergence faible

- $\underline{\lim} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \geq \int_\Omega |\nabla u|^2$ (dû à la convexité)

En effet on remarque que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 + 2 \underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u_n - u)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ n \to +\infty} \text{ par convergence faible}}$$

donc $\underline{\lim} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \geq \int_\Omega |\nabla u|^2$

on trouve donc que $I \geq J(u)$ donc le min est atteint en u

- De plus $\forall v \in H^1_0(\Omega)$ $J(u+tv) \geq J(u)$

$$J(u+tv) = J(u) + t\int_\Omega (2\nabla u \cdot \nabla v - fv) + t^2 \int |\nabla v|^2$$

donc $t \int_\Omega (2\nabla u \cdot \nabla v - fv) \geq -t^2 \|\nabla v\|^2$

donc en prenant $t > 0$ / $t < 0$ et en faisant tendre vers 0

on trouve que $\int_\Omega 2\nabla u \cdot \nabla v - fv = 0 \quad \forall v \in H^1_0$

i.e. u est solution faible

Rem par stricte convexité on peut avoir l'unicité

2) Un exemple Non-linéaire

Soit $t \to g(t)$ / $\left\{ \begin{array}{l} t\,g(t) \geq 0 \\ \exists C \in \mathbb{R} / \quad g(t) \leq C(1+|t|^p) \end{array} \right.$

~~g~~ $g \in C^0(\mathbb{R})$

et p / $p+1 < 2^*$

On pose $G(t) = \int_0^t g(s)\,ds$

et $J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + G(u)\,dx - \int_\Omega f u \,dx$

avec $f \in L^2(\Omega)$

Ω ouvert borné régulier

Th : $\exists u \in H_0^1(\Omega)$ / $J(u) = \operatorname{Inf}_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v)$

De plus u vérifie l'équation $-\Delta u + g(u) = f$

Rem : . La condition de croissance sur g est restrictive

. Mais si on veut construire des solutions de l'EDP / on peut procéder comme dans le § sur les méthodes de point fixe : Si $f \in L^\infty$ on tronque la nonlinéarité si u est grand et on utilise le principe du Max

Dém . J est minorée : On remarque que $G(t) \geq 0 \quad \forall t$ par la première condition

donc $J(v) \geq \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \int_\Omega f u \,dx$

donc J est minorée grâce à l'étude de la fonctionnelle précédente

. Soit $I = \operatorname{Inf}_{v \in H_0^1} J(v)$ $\quad (I \in \mathbb{R})$ et u_n une suite Minimisante. Quitte à extraire $u_n \rightharpoonup u$ dans H^1, $u_n \to u$ dans L^{p+1}

$\underline{\lim}\, J(u_n) \geq \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \int_\Omega f u + \underline{\lim} \int_\Omega G(u_n)$

On peut aussi supposer que $u_m \to u$ pp

et u_m est dominée dans L^{p+1}

donc par convergence dominée $\int_\Omega G(u_m)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\Omega G(u)\,dx$

Donc $J(u)$ est un minimiseur

- Il reste l'equation d'Euler Lagrange :

$$J(u+tv) - J(u) \geq 0 \quad \forall t, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Mais $J(u+tv) = J(u) + t\int_\Omega \nabla u.\nabla v + t^2 \int_\Omega |\nabla v|^2 - t\int_\Omega fv$

$$+ \underbrace{\int_\Omega \left[G(u+tv) - G(u)\right] dx}$$

$$= t\int_\Omega \int_0^1 g(u+tsv)\, v\, dx$$

donc $t\left(\int_\Omega \nabla u.\nabla v + \int_\Omega g(u)v - \int_\Omega fv\right)$

$$\geq t\left(-t\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega \int_0^1 \left(g(u+tsv) - g(u)\right) v\, dx\right)$$

$$\geq t\, r(t)$$

avec $\lim_{t\to 0} r(t) = 0$

En effet $\forall x \in \Omega$, $\forall s \in [0,1]$ $\quad \lim_{t\to 0} g(u+tsv) - g(u) = 0$

et $\left|\left(g(u+tsv) - g(u)\right)v\right| \leq C\left(1 + |u+tsv|^p + |u|^p\right)|v|$

$$\leq C(p)\left(1 + |u|^p + |v|^p\right)|v|$$

$$\leq C(p)\left(1 + |u|^{p+1} + |v|^{p+1}\right) \in L^1$$

En utilisant $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $\qquad$ car $H_0^1 \hookrightarrow L^{p+1}$

donc par convergence dominée $\lim_{t\to 0} \int_\Omega \int_0^1 \left(g(u+tsv) - g(u)\right) v\, ds\,dx = 0$