Cours 1

Rappels théorie de la mesure / intégration

Motivation :
- interversions lim et $\int$, somme et $\int$ séries de Fourier
- limites de Riemann - justifier $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx$
- intégrer en dim supérieure à 1

1) th de la mesure

rappels :
- σ algèbres, mesures, fonctions mesurables ... [Rudin], [Lieb-Loss], [Stein T3], ...
- boréliens d'un espace topologique = σ algèbre engendrée par la topologie
- on autorise des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, espace métrique avec $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$

Boréliens de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ engendrés par :
- ouverts
- fermés
- intervalles (pavés) ouverts, fermés
- $]-\infty, a[$ $\left(\prod_{i=1}^{d}]-\infty, a_i[\right)$ ...

$\rightarrow$ on peut utiliser le plus pratique pour une propriété donnée

Lemme : $f_k : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurables
alors $f(x) = \sup_k \{ f_k(x) \}$ est mesurable

dém Il suffit $f^{-1}(]a, +\infty])$ mesurable $\forall a$

$$x \in f^{-1}(]a, +\infty]) \iff \exists k\ f_k(x) > a \iff x \in \underbrace{\bigcup_k f_k^{-1}(]a, +\infty])}_{\text{mesurable}}$$

Rem. pareil pour l'Inf, on en déduit alors limSup et limInf et donc la lim simple d'une suite de fonctions mesurables est mesurable (on pourrait faire une preuve directe)

Rem :
- Ne pas oublier de vérifier que des ensembles / fonctions sont mesurables
- Il existe des ensembles ~~de Bor~~ non mesurables sur $\mathbb{R}$, tous les exemples utilisent l'axiome du choix

Ex: (mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ unique mesure boréliennes invariante par translation / $\mu[0,1]=1$)

sur $[0,1]$ $x \sim y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$ relation d'équivalence

$[0,1] = \bigcup_{\alpha} \Sigma_{\alpha}$ Σ_α : classes d'équivalence

$\forall \alpha$ on choisit $x_\alpha \in \Sigma_\alpha$

On pose $N = \bigcup_{\alpha} \{x_\alpha\}$

Lemme N n'est pas mesurable

Dém: Si N mesurable soit $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ les rationnels de $[0,1]$, on pose $N_k = N + r_k$

- les N_k sont disjoints : $x \in N_k \cap N_\ell$, $x = \underset{= x_\beta + r_\ell}{x_\alpha + r_k} \Rightarrow x_\alpha - x_\beta \in \mathbb{Q}$
- $[0,1] \subset \bigcup_k N_k \subset [0,2]$, $\mu(N_k) = \mu(N)$ $\forall k \Rightarrow$ Absurde

2) Intégration des fonctions

- fonctions simples ≥ 0 f ne prend qu'un nombre fini de valeurs

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

- A_i disjoints mesurables
- $\alpha_i \in [0, +\infty[$

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i)$$

Prop $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ mesurable, $\exists (s_n)$ suite croissante de fonctions simples / $\forall x$ $s_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$

Dém : $A_{i,n} = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right[\right)$ $i = 1, \dots n2^n$

$B_n = f^{-1}([n, +\infty[)$

$$s_n = \sum_i \frac{i-1}{2^n} \mathbb{1}_{A_{in}} + n \mathbb{1}_{B_n}$$

- s_n est $\uparrow$ si $s_n(x) \in \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right[$, $f(x) \in \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right[$ $\nearrow f(x) \in \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{2i-1}{2^{n+1}}\right[$ $\searrow f(x) \in \left[\frac{2i-1}{2^{n+1}}, \frac{i}{2^n}\right[$
- $0 \leq f(x) - s_n(x) \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Def : $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ mesurable

On pose $\int f \, d\mu = \sup \{ \int s \, d\mu , \ s \text{ simple} \leq f \}$

Propriétés standards, linéaire, nul ..., + $E \mapsto \int_E s \, d\mu$ est une mesure si s est simple

Th (Convergence monotone) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mesuré

$f_n : X \to [0, +\infty]$ $\quad 0 \leq f_n \leq f_{n+1}$

$f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x) \ \forall x$ $\quad$ alors $\int_X f \, d\mu = \lim_n \int_X f_n \, d\mu$

Dém :
- f est mesurable : lim de fonctions mesurables
- $\left(\int_X f_n \, d\mu\right)_n$ est croissante $\Rightarrow \lim_n \int_X f_n \, d\mu = \alpha$ existe $(\in [0, +\infty])$
- $f_n \leq f \ \forall n \Rightarrow \alpha \leq \int_X f \, d\mu$
- Soit s simple $s \leq f$, $c \in]0, 1[$

Soit $E_n = \{ x \ / \ f_n(x) \geq c \, s(x) \}$ $\quad E_n \in \mathcal{A}$

$f_n \leq f_{n+1} \Rightarrow E_n \subset E_{n+1}$, $f_n \to f \Rightarrow X = \bigcup_n E_n$

$$\begin{tikzcd}
\text{donc } \int_X f_n \, d\mu \arrow[d] & \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq & c \int_{E_n} s \, d\mu \arrow[d] \\
\alpha & & c \int_{\cup E_n = X} s \, d\mu
\end{tikzcd}$$

car $E \mapsto \int_E s \, d\mu$ est une mesure

donc $\alpha \geq c \int_X s \, d\mu \Rightarrow \alpha \geq \int_X f \, d\mu$

Corollaire $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty[$ mesurables

$$\int_X \sum_n f_n \, d\mu = \sum_n \int_X f_n \, d\mu$$

Rem : s'applique aux séries doubles ≥ 0 en prenant $\mathbb{N}$ avec mesure de dénombrement (le résultat sert dans Fubini)

Lemme de Fatou

$f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty[$ mesurables

$$\int_X \liminf f_n \leq \liminf \int_X f_n$$

dém : $g_k = \inf_{n \geq k} f_n$ $\quad (g_k) \uparrow$ mesurable

$$\int_X \lim_k g_k = \lim_k \int_X g_k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car la} \\ \text{lim existe}}}{=} \liminf \int_X g_k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } g_k \leq f_k}}{\leq} \liminf \int_X f_k$$

Def : $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{C}$ mesurable est intégrable si $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$

Rem : $f = f_+^r - f_-^r + i(f_+^i - f_-^i) \Rightarrow$ on peut définir $\int f \, d\mu$

$$|f_\pm^{ri}| \leq |f|$$

Prop : $\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$

Dem : Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ $\quad |\alpha| = 1$ tel que $\alpha \int_X f \, d\mu = \left| \int_X f \, d\mu \right|$

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| = \alpha \int_X f \, d\mu = \int_X \alpha f \, d\mu = \int_X (u + iv) \, d\mu$$

$$= \int_X u \, d\mu = \int_X (u^+ - u^-) \, d\mu \leq \int_X (u^+ + u^-) \, d\mu$$

$$\leq \int_X |u| \, d\mu \leq \int_X |\alpha f| \, d\mu = \int_X |f| \, d\mu$$

Th (Convergence dominée) $f_n \; (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{C}$ mesurables

$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ pp x

$\exists \; g \; (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty[$ mesurable / $|f_n(x)| \leq g(x)$ pp x

avec $\int_X g \, d\mu < +\infty$. Alors $\int_X |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

(Donc aussi $\int_X f_n \to \int_X f \, d\mu$)

Dém
- f est aussi intégrable , $|f| \leq g$
- $|f_n - f| \leq 2g$ donc $f_n - f$ est aussi intégrable
- $2g - |f_n - f| \geq 0$

Fatou $\int_X \liminf (2g - |f_n - f|) \leq \liminf \int_X 2g - |f_n - f|$

$$\overset{\displaystyle \int_X \liminf (2g-|f_n-f|)}{\underset{\displaystyle \int_X 2g}{\parallel}} \qquad \leq 2g - \limsup \int_X |f_n - f|$$

donc $\limsup \int_X |f_n - f| \, d\mu \leq 0$

Rem : avec p.p il suffit d'enlever un ensemble de mesure nulle

Prop : Si f est intégrable sur $\mathbb{R}^d$

i) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B$ de mesure fini $\int_{B^c} |f| < \varepsilon$

ii) $\exists \delta > 0 \ / \ \forall E \quad \mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E |f| < \varepsilon$

Dém : i) $f_n(x) = |f(x)| \mathbb{1}_{B(0,n)}$

ii) $f_n(x) = |f(x)| \mathbb{1}_{\{|f| \leq n\}}$, $f_n \leq f_{n+1}$ $\int |f| - f_n < \frac{\varepsilon}{2}$ n assez grand

Soit $\delta > 0$ $n \ / \ n\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad \int_E |f| = \underbrace{\int_E |f| - f_n}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\int_E f_n}_{n\mu(E)}$

3) Intégrales à paramètre

Continuité : th : $f : T \times X \to \mathbb{C}$ $\quad X$ mesurable , T espace métrique

- $\forall t, \ x \mapsto f(t,x)$ mesurable
- $\exists g \geq 0 \ / \ |f(t,x)| \leq g(x) \quad \forall_x^t$ avec $\int_X g \, d\mu < +\infty$

Soit $t_0 \in T /$ pp $x \in X$ $t \mapsto f(t,x)$ est C^0 en t_0

alors $F(t) = \int_X f(t,x) \, d\mu(x)$ est C^0 en t_0

Dém : . $F(t)$ bien défini

. T métrique $t_n \to t_0$, n_q $F(t_n) \to F(t_0)$

$F(t_n) = \int_X f(t_n, x)\, d\mu(x)$ CV dominée s'applique

Dérivabilité

th I intervalle ouvert de IR $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mesuré $f : I \times X \to \mathbb{C}$

$\forall t\ \forall x$ $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable et $\exists A \in \mathcal{A}$ / $\mu(A^c) = 0$ et

i) $\exists t_0$ $x \mapsto f(t_0, x)$ est intégrable

ii) $\forall x \in A$ $\forall t \in I$ $t \to f(t,x)$ est ~~intégrable~~ dérivable

iii) $\exists g \geq 0$ $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$ avec $\int_X g\, d\mu < +\infty$

Alors $F(t) = \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$ est définie, dérivable sur I

et $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu(x)$

Rem : . ⚠ à la position du pp :

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ $t \to \int_0^t f\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,t]} f(x)\, d\mu(x)$

. $t \to \mathbb{1}_{[0,t[}(x)$ est C^0 en t_0 sauf pour $x = t_0$

donc $F(t)$ est C^0 en t_0 $\forall t_0$

. $t \to \mathbb{1}_{[0,t[}(x)$ est dérivable en t^0 de dérivée nulle sauf pour $x = t_0$

pour $f = \mathbb{1}_{[0,A]}$ on n'a pas F dérivable et $F' = 0$

Dém : IAF $t, t' \in I$, $x \in A$ $\left|\frac{f(t,x) - f(t',x)}{t - t'}\right| \leq g(x)$

. $t' = t_0 \Rightarrow f(t,x)$ est intégrable $\forall t \in I$

. $\frac{\partial f}{\partial t} = \lim_n \frac{f(t_n,x) - f(t,x)}{t_n - t}$ et on utilise convergence dominée

4) Lien avec la théorie classique

- pour $\mathbb{R}$ avec mesure de Lebesgue
- $f \in C^0[a,b]$ f est mesurable bornée donc intégrable
  f est lim uniforme de fonctions en escalier, pour une fonction en escalier intégrale de lebesgue = intégrale de riemann
- fonctions réglées = lim uniformes de fonctions continues par morceaux donc intégrables, coïncide avec Lebesgue par passage à la lim

Propo f riemann intégrable, f est intégrable et $\int_a^b f d\mu = \int_a^b f dx$ (Riemann)

Dém Si f est riemann intégrable, $\exists (\varphi_k)\uparrow, (\psi_k)\downarrow$ en escalier telles que
$\varphi_k \leq f \leq \psi_k$ et $\lim_k \int_a^b \varphi_k dx = \lim_k \int_a^b \psi_k d\mu = \int_a^b f dx$

. Pour φ_k, ψ_k en escalier $\int_a^b \varphi_k dx = \int_{[a,b]} \varphi_k d\mu$ de même pour ψ_k

soit $\tilde{\varphi} = \lim_k \varphi_k$, $\tilde{\psi} = \lim_k \psi_k$, $\tilde{\varphi} \leq f \leq \tilde{\psi}$

f est bornée (car Riemann intégrable) donc par CV dominée

$$\int_{[a,b]} \tilde{\varphi} d\mu = \lim_k \int_a^b \varphi_k dx = \int_a^b f dx$$

$$\int_{[a,b]} \tilde{\psi} d\mu = \int_a^b f dx \quad \text{donc} \quad \int_{[a,b]} (\tilde{\psi} - \tilde{\varphi}) d\mu = 0 \Rightarrow \tilde{\psi} = \tilde{\varphi} \text{ pp}$$

donc $f = \tilde{\varphi} = \tilde{\psi}$ pp et donc f est mesurable (f coïncide pp avec une fonction mesurable)

En utilisant de nouveau la convergence dominée on déduit $\int_{[a,b]} f d\mu = \int_a^b f(x) dx$

.**th** (Egorov) Soit $f_k : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable $\mu(X) < +\infty$
et $f_k \longrightarrow f$ pp alors $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A_\varepsilon \ / \ \mu(A_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$
et $f_k \longrightarrow f$ unif sur A_ε

dém on peut supposer $f_k(x) \longrightarrow f(x) \quad \forall x$

Soit $E_k^n = \bigcap_{i \geq k} \{ |f_i - f| \leq \frac{1}{n} \}$

$$X = \bigcup_k E_k^n \qquad E_k^n \subset E_{k+1}^n \qquad \mu(X) = \lim_k \mu(E_k^n)$$

donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad \exists k_n \ / \ \mu\left(\left(E_{k_n}^n\right)^c\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$

Soit $E = \bigcap_n E_{k_n}^n \qquad E^c = \bigcup_n \left(E_{k_n}^n\right)^c \qquad \mu(E^c) \leq \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon$

Soit $\delta > 0$ et $n_0 \ / \ \frac{1}{n_0} \leq \delta$

alors $\forall x \in E \qquad |f_i(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n_0} \leq \delta \ \forall i \geq k_{n_0}$