

I) Mesures sur des espaces produits

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaces mesurés

Def: $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma$ algèbre de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ engendrée par $\{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$

$E_x: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

(• Clair: $A \times B = p_1^{-1}(A) \cap p_2^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$
 • $\{]a,b[\times]c,d[\}$ engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$)



$$E_x = \{y \in Y / (x,y) \in E\}$$

$$E_y = \{x \in X / (x,y) \in E\}$$

$f: X \times Y \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f_x: Y \rightarrow \mathbb{Z} / f_x(y) = f(x,y)$$

$$f_y: X \rightarrow \mathbb{Z} / f_y(x) = f(x,y)$$

Prop: • E mesurable $\Rightarrow E_x$ mesurable $\forall x$, E_y mesurable $\forall y$
 • f mesurable $\Rightarrow \forall x,y$ f_x, f_y sont mesurable

Dem: Soit $x \in X$ $\mathcal{G}_x = \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} / E_x \in \mathcal{B}\}$
 • $\mathcal{G}_x$ est une σ algèbre • $\{A \times B\} \subset \mathcal{G}_x$: $(A \times B)_x = B$ si $x \in A \in \mathcal{A}$
 $= \emptyset$ sinon

Prop: Si μ et ν sont σ finies. Soit $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ Alors
 $x \mapsto \nu(E_x)$ et $y \mapsto \mu(E_y)$ sont mesurable
 $\chi_A \mapsto [0, +\infty]$ $\chi_B \mapsto [0, +\infty]$

Dem assez longue: on traite d'abord le cas $\downarrow$ finie
 $\mathcal{G}_x = \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} / x \mapsto \nu(E_x) \text{ est mesurable}\}$

- $\{A \times B\} \subset \mathcal{G}_x$ $\nu(E_x) = \nu(B) \mathbb{1}_A$ si $E = A \times B$
- $\mathcal{G}_x$ est un d-système ($X \in \mathcal{D}$, $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}$
 $A_i \in \mathcal{D} \Rightarrow A_i \subset A_{i+1} \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{D}$)
- le d-système engendré par $\{A \times B\} \subset \mathcal{G}_x$
 $\{A \times B\}$ est stable par $\cap$ finie $\Rightarrow$ d $\{A \times B\} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

Th: $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ mesurés σ finis $\nexists!$ mesure $\mu \otimes \nu$ sur $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$
 telle que $\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \nu(B)$ $\forall A \in \mathcal{A}$
 $\forall B \in \mathcal{B}$
 De plus $\forall E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ $\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu = \int_Y \mu(E_y) d\nu$

Dém : unicite th des π systèmes

Remarques : Existence: on vérifie que les formules définissant une norme

Cas de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$

~~Il s'agit de~~

$\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_{n-k}$ même sur $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_{n-k}$ coïncide avec $\mathcal{L}_n$ sur les pavés $\Rightarrow \mathcal{L}_n = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_{n-k}$
unicité de la norme de Lebesgue

II Intégration des fonctions

th (Fubini-Tonelli) $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mesures σ finies

$f: (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable et intégrable

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left[\int_Y f_x(y) d\nu \right] d\mu = \int_Y \left[\int_X f^y(x) d\mu \right] d\nu$$

Dém : Si $f = \bigvee_E$ le résultat est donné par le th précédent
 $\rightarrow$ OK pour les fonctions simples

$f = \lim_n s_n$ s_n simple $s_n \leq s_{n+1}$ et Borel levi

th (Fubini) $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mesures σ finies
 $f: (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable et intégrable

i) pp tout $x \in X$ f_x est intégrable sur Y
pp tout $y \in Y$ f^y est intégrable sur X

On pose $I(x) = \int_Y f_x d\nu$ si intégrable 0 sinon

$J(y) = \int_X f^y d\mu$

(i) I est intégrable sur X , J est intégrable sur Y

$$(ii) \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X I d\mu = \int_Y J d\nu$$

Dém : $\int_{X \times Y} |f| d(\mu \otimes \nu) < +\infty$ par le précédent $\int_X \left(\int_Y |f_x| d\nu \right) d\mu < +\infty$

$\Rightarrow \int_Y |f_x| d\nu$ est finie pp: $x \in E$ (et mesurable)

on pose $I(x) = \int_Y f_x d\nu$ si $x \in E$, 0 sinon, I est mesurable et intégrable

• pour l'égalité on développe $f = u^+ - u^- + i(v^+ - v^-)$

Rem : En pratique : pour utiliser Fubini, il faut vérifier l'intégrabilité
 - pour la vérifier on utilise Fubini Tonelli

Ex: $\|f\|_p^p = p \int_0^{+\infty} \mu\{|f| \geq t\} t^{p-1} dt$

$$\int_0^{+\infty} \mu\{|f| \geq t\} t^{p-1} dt = \int_0^{+\infty} \int_X \mathbb{1}_{\{|f| \geq t\}} d\mu t^{p-1} dt$$

$$\stackrel{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \int_X \int_0^{|f(x)|} t^{p-1} dt d\mu = \frac{1}{p} \int_X |f(x)|^p d\mu$$

Espaces L^p

On note $L^p = L^p(\mu)$, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ muni de l'ensemble des classes de fonctions
 modulo μ / $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$ si $p \in [1, +\infty[$
 • $\text{ess sup } |f| < +\infty$ si $p = +\infty$ (i.e. $\exists c > 0$ $\mu\{|f| > c\} = 0$)

Rappels : cf feuille d'exercices :

• Holder : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$

• Minkowski : $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

• Interpolation $\|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}$, $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$
 $\theta \in [0, 1]$

• $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach

1) Parties denses :

th $(X, \mathcal{F}, \mu)$ muni $1 \leq p \leq \infty$ $S = \{ \text{combinaisons de fonctions caractéristiques} \} \cap L^p$
 S est dense dans L^p

dém : - Cas des fonctions ≥ 0 ,
 si $p < +\infty$ on prend la suite s_n de fonctions simples construites au 1^{er} cours

$$s_n \leq f \quad s_n \leq s_{n+1} \quad s_n \rightarrow f \quad \forall x$$

$$f \in L^p \Rightarrow s_n \in L^p, \quad \|s_n - f\|^p \leq 2^p \|f\|^p \quad \text{donc CV demandée}$$

• si $p = +\infty$ pour la suite construite, n assez grand / $n > \|f\|_{L^\infty} \Rightarrow f(x) - s_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$
 $p \neq x$

$$\text{donc } \|f - s_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Cas général } f = u^+ - u^- + i(v^+ - v^-)$$

Th 0 ouvert de $\mathbb{R}^n$, $C_c(0)$ est dense dans $L^p(0)$ $1 \leq p \leq +\infty$

Dém : • Il suffit de tracter $\mathbb{1}_A$ avec $|A| < +\infty$

• régularité de la mesure de Lebesgue : $\forall \varepsilon > 0 \exists K \text{ compact, } U \text{ ouvert / } K \subset A \subset U \subset \mathbb{R}^n \text{ et } |U \setminus K| \leq \varepsilon$, on prend $U', K \subset U' \subset \bar{U}' \subset U, \bar{U}' \text{ compact}$

Lemme (Urysohn) F_1, F_2 2 fermés disjoints $\exists \varphi : C^0$ à valeurs dans $[0, 1]$ / $\varphi = 0$ sur F_1 et $\varphi = 1$ sur F_2

On utilise le lemme par K et $(U')^c$, $\varphi = 1$ sur K
 $\text{supp } \varphi \subset \bar{U}' \text{ compact}$

$$|\mathbb{1}_A - \varphi(x)| = 0 \quad \text{si } x \in K$$

$$= 0 \quad \text{si } x \in K^c \setminus U$$

$$\leq 1 \text{ sinon}$$

$$\|\mathbb{1}_A - \varphi\|_{L^p}^p \leq 2^p |U \setminus K| \leq 2^p \varepsilon$$

Dém du lemme : (vrai dans les espaces normaux)

$$\varphi(x) = \frac{d(x, F_1)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}$$

→ Pour améliorer il faut l'actif suivant

Convolution

$\mathbb{R}^n$, mesure de Lebesgue

f, g mesurables $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) g(x-t) dt$

$\forall x$ $t \mapsto f(t) g(x-t)$ est mesurable si la fonction est intégrable $\downarrow f * g$ est défini on dit que

Prop : si $f * g(x)$ existe $f * g(x) = g * f(x)$

II : $E = \{x / f * g(x) \text{ est défini}\}$ est mesurable, $x \in E \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(t) g(x-t) dx$
 $\mapsto 0$ sinon
 est mesurable

Dém : $I(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| |g(x-t)| dx$

$(x, t) \mapsto |f(t)| |g(x-t)|$ est mesurable, Fubini $\Rightarrow I$ est mesurable

OK pour les fonctions ≥ 0 , sinon on développe

Prop de Support : si f est nul hors de A et g nulle hors de B $f * g$ est nul
 hors de $A+B$

Convolution de fonctions L^p

Th : si $f \in L^1, g \in L^1$ $f * g$ est définie p.p et $\in L^1$
 $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$

Dém : $\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |g(x-t)| dt dx = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$ Fubini Tonelli
 Fubini $\Rightarrow f * g$ def p.p

Th : Soit $p, q, r \in [1, +\infty]$ / $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$
 si $f \in L^p, g \in L^q$ alors $f * g \in L^r$
 $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$

Dém $I = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| |g(x-t)| dt \right]^r dx$ $1 = \frac{1}{s} + \frac{1}{p} - \frac{1}{r} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$
 $= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^{\frac{p}{r}} |g(x-t)|^{\frac{q}{r}} |f(t)|^{1-\frac{p}{r}} |g(x-t)|^{1-\frac{q}{r}} dt dx \right]^r$
 $\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^p |g(x-t)|^q \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^p \right)^{\frac{r-p}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-t)|^q \right)^{\frac{r-q}{q}} dx$
 Holder

$$\leq \|f\|_{L^p}^r \|g\|_{L^q}^r$$

Lemme: on pose $\tau_h f(x) = f(x+h)$
 Si $p < +\infty$, $f \in L^p$ $\tau_h f \xrightarrow{h \rightarrow 0} f$ dans L^p

Dém on veut montrer $\|\tau_h f - f\|_{L^p} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

• Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $\exists \varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ / $\|f - \varphi\|_{L^p} \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_{L^p} &\leq \|\tau_h(f - \varphi)\|_{L^p} + \|\tau_h \varphi - \varphi\|_{L^p} + \|f - \varphi\|_{L^p} \\ &\leq \varepsilon + \|\tau_h \varphi - \varphi\|_{L^p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi \in C_c(\mathbb{R}^n) &\Rightarrow \varphi \text{ est uniformément continue, } \Rightarrow \sup_{|h| \leq 1} \|\tau_h \varphi - \varphi\|_{L^p} < \varepsilon \\ \|\tau_h \varphi - \varphi\|_{L^p}^p &\leq \sup_{|h| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

→ On peut améliorer le cas $r = +\infty$

th si $f \in L^p$, $g \in L^q$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

- i) $f * g$ est définie partout
- ii) $f * g$ est UC
- iii) si $p < +\infty$ $q < +\infty$ $f * g \xrightarrow{|h| \rightarrow +\infty} 0$

Dém i) Holder

$$\begin{aligned} \text{ii) } |f * g(x+h) - f * g(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(t)g(x+h-t) - f(t)g(x-t)) dt \right| \\ &\leq \|f\|_{L^p} \|\tau_h g - g\|_{L^q} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup_x |f * g(x+h) - f * g(x)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

iii) φ, ψ à supports compacts / $\|f - \varphi\|_{L^p} \leq \varepsilon$ $\|g - \psi\|_{L^q} \leq \varepsilon$
 On peut supposer $\text{supp } \varphi, \psi \subset B(0, R)$

$$|f * g(x)| \leq \|f - \varphi\|_{L^p} \|g\|_{L^q} + \|\varphi\|_{L^p} \|\psi - g\|_{L^q} + |\varphi * \psi(x)|$$

$$\leq \varepsilon \|g\|_{L^q} + (\|f\|_{L^p} + \varepsilon) \varepsilon + |\varphi * \psi(x)|$$

et $\varphi * \psi(x) = 0$ si $|x| > 2R$

Régularité

th: 1) si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^1$ bornée à dérivées partielles bornées
 2) si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$
 alors $f * g$ est C^1 et $\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = f * \frac{\partial g}{\partial x_i}$

Dém: Dérivons sous $\int$

Corollaire: $f \in L^p$, $g \in C_c^\infty$ alors $f * g \in C^\infty$

Existence de fonctions plateaux

- $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f \geq 0$
- Soit $g(x) = f(x+1) - f(-(x-1))$, $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, $g \geq 0$, $\text{supp } g \subset [-1, 1]$
- $h(x) = \frac{g(x)}{\int g(x) dx}$ $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, $h \geq 0$, $\text{supp } h \subset [-1, 1]$, $\int h = 1$
- $\rho(x) = \int_0^1 g(\|x\|t) dt$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\rho \geq 0$, $\text{supp } \rho \subset \overline{B(0, 1)}$, $\int \rho dx = 1$
- $\rho_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^d} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ même chose avec $\text{supp } \rho \subset \overline{B(\rho, \varepsilon)}$

Lemme: Soit K , compact, U ouvert $\subset \mathbb{R}^d$ $K \subset U$, $\exists \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ $\varphi \equiv 1$ sur K et $\text{supp } \varphi \subset U$

Dém: Soit $\tilde{K} = K + \overline{B(0, \delta)}$ avec $\delta = d(K, U^c)$, $\delta > 0$
 $\tilde{K}$ est compact $\tilde{K} \subset U$

On considère $\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^d} \varphi \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right)$ pour ε assez petit φ répond à la question
 $\subset^{\text{ab}}$ par le Lemme précédent

Def (Approximations de l'unité)
 $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonctions ≥ 0 intégrable / 1) $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x) dx = 1$, 2) $\int_{|x| > \eta} \varphi_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

clairement: $\varphi_n = \varphi_{\varepsilon_n}$ ci-dessus avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$ convenant

Th: "cas L^∞ " si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, φ approximation de l'unité
 - si ~~f est continue~~, K compact, f est C^0 en tout point de K
 - ou f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$
 Alors $f * \varphi_n \rightarrow f$ uniformément sur K ou sur $\mathbb{R}^d$

dém soit $\varepsilon > 0$ f est $\sim$ UC ~~sur K~~ , $\exists \alpha > 0$ /
 $\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \forall h$ $|h| \leq \alpha \quad |f(x+h) - f(x)| \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned} |f * \varphi_k(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t) \varphi_k(t) dt - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} [f(x-t) \varphi_k(t) - f(x) \varphi_k(t)] dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t) - f(x)| \varphi_k(t) dt \\ &\leq \int_{|t| \leq \alpha} |f(x-t) - f(x)| \varphi_k(t) dt + \int_{|t| > \alpha} |f(x-t) - f(x)| \varphi_k(t) dt \\ &\leq \varepsilon \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_k}_=1 + 2 \|f\|_{L^\infty} \underbrace{\int_{|t| > \alpha} \varphi_k(t) dt}_{\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0} \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

par k assez grand

th (Cas L^p , $p < +\infty$)

II Si $f \in L^p$, φ_k approximation de l'unité $\varphi_k * f \rightarrow f$ dans L^p

Dém $\int \left| \int [f(x-t) - f(x)] \varphi_k(t) dt \right|^p dx$

$$\leq \int \int |f(x-t) - f(x)|^p \varphi_k(t) dt dx$$

$$\leq \underbrace{\int_{|t| \leq \alpha} \int |f(x-t) - f(x)|^p \varphi_k(t) dx dt}_{\substack{\xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0}} + \int_{|t| > \alpha}$$

$$\leq \underbrace{\sup_{|t| \leq \alpha} \|f(\cdot - t) - f\|_{L^p}^p}_{\substack{\xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0}} + 2^p \|f\|_{L^p}^p \underbrace{\int_{|t| > \alpha} \varphi_k(t) dt}_{\substack{\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0}}$$

