

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

École doctorale de mathématiques Hadamard (ED 574)
Laboratoire de mathématique d'Orsay (UMR 8628 CNRS)

Mémoire présenté pour l'obtention du

Diplôme d'habilitation à diriger les recherches

Discipline : Mathématiques

par

Amaury FRESLON

Études des groupes quantiques libres :
analyse, algèbre et probabilités

Rapporteurs :
CYRIL HOUDAYER
SERGEY NESHVEYEV
ROLAND SPEICHER

Date de soutenance : 13 Décembre 2019

Composition du jury :
YVES BENOIST (Examineur)
CYRIL HOUDAYER (Rapporteur)
MAGDALENA MUSAT (Examinatrice)
MIKAEL RØRDAM (Examineur)
ROLAND SPEICHER (Rapporteur)
STEFAN VAES (Examineur)

À la mémoire d'Étienne Blanchard

Liste des publications présentées pour l'habilitation

[BCF18] M. BRANNAN, A. CHIRVASITU & A. FRESLON – « Topological generation and matrix models for quantum reflection groups », prépublication (2019).

[Fre18a] A. FRESLON – « On the representation theory of some noncrossing partition quantum groups », à paraître à *Algebr. Represent. Theory* (2019).

[Fre18b] A. FRESLON – « Quantum reflections, random walks and cut-off », *Internat. J. Math.* **29** (2018), n° 14, 1850101.

[Fre19a] A. FRESLON – « Cut-off phenomenon for random walks on free orthogonal quantum groups », *Probab. Theory Related Topics* **174** (2019), n° 3–4, p. 731–760.

[FM18] A. FRESLON & R. MARTOS – « Torsion and K-theory for some free wreath products », *Internat. Math. Res. Not.*, rny071 (2018).

[Fre19b] A. FRESLON – « On two-coloured noncrossing partition quantum groups », *prépublication Trans. Amer. Math. Soc.* **372** (2019), n° 6, p. 4471–4508.

[FV16] A. FRESLON & R. VERGNIoux – « The radial MASA in free orthogonal quantum groups », *J. Funct. Anal.* **271** (2016), n° 10, p. 2776–2807.

[FS18] A. FRESLON & A. SKALSKI – « Wreath products of quantum groups by finite groups », *J. Noncommut. Geom.* **12** (2018), n° 1, p. 29–68.

[Fre17] A. FRESLON – « On the partition approach to Schur-Weyl duality and free quantum groups – with an appendix by A. CHIRVASITU », *Transform. Groups* **22** (2017), n° 3, p. 707–751.

[Fre14] A. FRESLON – « Fusion (semi)rings arising from quantum groups », *J. Algebra* **417** (2014), p. 161–197.

[FF14] P. FIMA & A. FRESLON – « Graphs of quantum groups and K-amenability », *Adv. Math.* **260** (2014), p. 233–280.

[DCFY14] K. DE COMMER, A. FRESLON & M. YAMASHITA – « CCAP for universal discrete quantum groups – with an appendix by S. VAES », *Comm. Math. Phys.* **331** (2014), n° 2, p. 677–701.

Table des matières

Introduction	9
1 Aspects analytiques	15
1.1 Propriétés d'approximation pour les groupes quantiques discrets	15
1.1.1 Moyennabilité et moyennabilité faible	15
1.1.2 Un exemple quantique	17
Déformations de $SU(2)$	17
La propriété de Haagerup	19
Moyennabilité faible	20
Transfert de multiplicateurs	22
1.2 Sous-algèbres abéliennes maximales	23
1.2.1 Absence de sous-algèbre de Cartan	23
1.2.2 La sous-algèbre radiale de O_N^+	24
Maximalité et coefficients	25
Deux outils	26
Singularité, mélange et mesure spectrale	28
1.3 Structure des permutations quantiques	29
1.3.1 Permutations quantiques	30
1.3.2 Groupes quantiques discrets résiduellement finis	31
1.3.3 Extensions et applications	32
Produits en couronnes libres	32
Modèles matriciels	34
1.4 K-théorie des C^* -algèbres de groupes quantiques	34
1.4.1 Arbres de Bass-Serre quantiques et K-moyennabilité	35
Le théorème de Julg-Valette	35
Graphes de C^* -algèbres et modules de Bass-Serre	36
Arbre quantique et opérateur de Julg-Valette	39
1.4.2 Torsion et K-théorie pour les produits en couronne libres	40
Actions de torsion et propriété de Baum-Connes forte	40
Classification des actions de torsion	43
Quelques calculs de K-théorie	45
2 Aspects algébriques	47
2.1 De la dualité de Schur-Weyl aux partitions	47
2.1.1 Un détour par la théorie des invariants	48
2.1.2 Opérations sur les partitions	50
2.1.3 Dualité de Tannaka-Krein et catégories de partitions	51
2.2 Les groupes quantiques de partitions	54
2.2.1 Cadre général	54
2.2.2 Théorie des représentations	56
2.2.3 Applications	59
Propriété de Haagerup	59
Caractérisation des groupes quantiques libres	60
Classification	63

2.3	Le cas de deux couleurs	66
2.3.1	Classification	66
	Stratégie générale	67
	Produits en couronnes de paires	68
	Classification et conjectures	69
2.3.2	Calculs explicites	70
	Groupes quantiques bi-orthogonaux	70
	Produits en couronnes libres de paires	72
2.4	Produits en couronnes de partitions	73
2.4.1	Moyennes d'opérateurs associés aux partitions	73
2.4.2	Interpolation entre produits en couronnes classique et libre	73
2.4.3	Le cas abélien	75
2.4.4	Généralisations	76
3	Aspects probabilistes	79
3.1	Marches aléatoires non-commutatives	79
3.1.1	Le grand tour	79
3.1.2	Une version quantique du grand tour	81
3.1.3	Le phénomène de convergence abrupte	82
3.1.4	Autres exemples	85
	Mesure uniforme sur une classe de conjugaison	85
	Mélanges de rotations aléatoires	86
	Permutations quantiques aléatoires	87
3.2	Réflexions quantiques	88
3.2.1	Une marche aléatoire sur les réflexions du groupe quantique libre unitaire	88
	Produits libres d'états	88
	Réflexion aléatoires	89
3.2.2	Groupes quantiques de réflexions	90
	Liste des problèmes	93

Introduction

« J'estudiai, jeune, pour l'ostentation ;
depuis, un peu, pour m'assagir ;
à cette heure, pour m'esbatre ;
jamais pour le quest. »

Montaigne, *Essais* III, 3

Contexte des travaux

Les travaux exposés dans ce mémoire portent sur les *groupes quantiques topologiques* et plus précisément sur les groupes quantiques *compacts* et *discrets*. Ces objets, apparus dans le contexte des algèbres d'opérateurs et donc de l'analyse fonctionnelle, ont de nombreuses ramifications en algèbre et en théorie des probabilités. Dans cette introduction, nous souhaitons donner un très bref aperçu de l'histoire de ces groupes quantiques topologiques, et surtout de l'émergence d'une notion centrale pour nos travaux : celle de groupe quantique libre.

La notion de groupe quantique libre

Le développement de la théorie des groupes quantiques est une histoire riche. La première approche s'est construite sur l'intuition de G. Kac que la dualité de Pontryagin pouvait être étendue aux groupes localement compacts non abéliens, à condition de substituer aux espaces topologiques des algèbres d'opérateurs qu'on munit ensuite d'une version topologique de la structure d'algèbre de Hopf. La nomenclature de ces objets a varié selon les auteurs : *ring groups* pour G. Kac et L. Vainerman [Kac65a], [Kac65b], *algèbres de Kac* pour M. Enock et J.-M. Schwartz [ES92], *pseudo-groupes compacts* pour S.L. Woronowicz [Wor87a]. C'est la dernière de ces théories qui nous intéresse ici.

S.L. Woronowicz définit les pseudo-groupes compacts comme des “espaces compacts non-commutatifs”, c'est-à-dire des C^* -algèbres unifères, munies d'une structure supplémentaire de type algèbre de Hopf qui encode la loi de groupe¹. Les exemples fondamentaux de pseudo-groupes compacts sont de trois types :

- Les groupes compacts,
- Les groupes discrets, vus à travers leurs C^* -algèbres maximales et réduites²,
- Les déformations de groupes de Lie compacts G_q pour $-1 \leq q \leq 1$ non-nul, notamment celles de $SU(N)$ définies par S.L. Woronowicz dans [Wor88] (voir également les travaux de M. Rosso [Ros90]).

Le terme *groupe quantique* est, lui, apparu dans un cadre totalement algébrique et avec des motivations très éloignées de la dualité de Pontryagin. C'est V. Drinfel'd qui a inventé et popularisé ce nom dans [Dri87] pour désigner des déformations d'algèbres de Lie permettant de produire des solutions de l'*Équation de Yang-Baxter*. Rapidement, il a été constaté que pour

1. Notons qu'il y a là une différence avec l'approche de Kac-Vainerman et Enock-Schwartz, qui reposait sur les algèbres de von Neumann.

2. Ce point de vue donne un sens très fort à l'idée que la C^* -algèbre d'un groupe non-abélien est l'analogue de l'espace topologique sous-jacent à son dual unitaire.

un groupe de Lie compact semi-simple G , le groupe quantique $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ au sens de [Jim85] (où \mathfrak{g} désigne l'algèbre de Lie de G) est en un sens le “dual discret” de la C^* -algèbre de Woronowicz $C(G_q)$ (voir par exemple [NT13, Sec 2.4]). Les objets définis par S.L. Woronowicz méritaient donc le nom de *groupes quantiques compacts* qui leur a été donné dans [Wor98].

Si la théorie générale des groupes quantiques compacts s'est développée sans discontinuer depuis ces travaux fondateurs, les exemples, eux, manquaient. Ce problème fut résolu par l'introduction par S. Wang dans [Wan95] et [Wan98] de nouvelles familles de groupes quantiques compacts qui ne sont ni classiques, ni duaux de groupes discrets, ni déformations de groupes de Lie compacts. Ces exemples sont depuis centraux dans l'étude des groupes quantiques compacts et constituent l'objet principal des travaux exposés dans le présent mémoire.

Les groupes quantiques compacts de S. Wang sont inspirés des groupes orthogonaux O_N , des groupes unitaires U_N ainsi que des groupes symétriques S_N . Par la suite, d'autres familles ont été construites suivant la même idée, généralisant par exemples les produits en couronnes (par J. Bichon dans [Bic04]) ou les groupes d'automorphismes de graphes (par T. Banica dans [Ban05]). Parallèlement, une structure combinatoire très riche a été découverte dans les exemples de S. Wang (notamment dans [BS09]), qui a mené à d'autres constructions nouvelles que nous détaillerons au Chapitre 2 ainsi qu'à des liens profonds avec la théorie des probabilités libres et la théorie quantique de l'information.

Dans tous ces travaux est apparue l'idée que les groupes quantiques étudiés pouvaient être qualifiés de *libres*. Le sens précis de ce terme varie toutefois d'un auteur à l'autre, parce qu'elle reflète plusieurs propriétés essentielles de ces objets. Nous pouvons en dégager trois qui sont pertinentes pour la description de nos travaux :

1. Ils peuvent être définis en “libérant” les relations définissant certains groupes de matrices (c'est-à-dire en retirant les relations de commutation),
2. Ils peuvent être vus comme des analogues des groupes libres,
3. Ils peuvent être vus comme des analogues en théorie des probabilités libres de certains groupes de matrices.

Cette diversité d'interprétations fait la richesse de la théorie des groupes quantiques libres dans la mesure où elle permet de les aborder sous plusieurs angles. Pour rendre cette idée plus manifeste, nous allons maintenant illustrer ces trois descriptions de la “liberté”.

Un exemple : le groupe quantique libre orthogonal

Plutôt que d'introduire la théorie générale des groupes quantiques compacts, nous allons détailler la construction et quelques propriétés d'un exemple remarquable qui est paradigmatique des études que nous avons menées. Il s'agit du *groupe quantique libre orthogonal* de S. Wang. Ceci permettra de mettre en lumière les différents aspects de la notion de liberté évoqués ci-dessus.

Pour commencer, considérons le groupe des matrices orthogonales de taille $N \times N$, noté O_N . Dans l'approche des groupes quantiques de S.L. Woronowicz, cet objet sera décrit à partir de l'algèbre $C(O_N)$ des fonctions continues sur O_N à valeurs dans le corps \mathbf{C} des nombres complexes. Une application simple du Théorème de Gelfand-Naimark permet d'obtenir l'isomorphisme suivant :

$$C(O_N) = C^* \left((u_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \mid u_{ij}^* = u_{ij}, \sum_{k=1}^N u_{ik} u_{jk} = \delta_{ij} = \sum_{k=1}^N u_{ki} u_{kj}, [u_{ij}, u_{k\ell}] = 0, \forall i, j, k, \ell \right),$$

où u_{ij} est envoyé sur la fonction associant à une matrice son coefficient (i, j) . Pour “libérer” ces relations, il suffit de retirer le dernier ensemble de relation, qui impose la commutativité, et de poser

$$C(O_N^+) = C^* \left((u_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \mid u_{ij}^* = u_{ij}, \sum_{k=1}^N u_{ik} u_{jk} = \delta_{ij} = \sum_{k=1}^N u_{ki} u_{kj}, \forall i, j \right).$$

La construction de O_N^+ ci-dessus est l'archétype d'une libération des relations d'un espace compact. La C^* -algèbre $C(O_N^+)$ est non-triviale puisqu'elle a $C(O_N)$ pour quotient. Nous verrons bientôt qu'elle est non-commutative dès que $N \geq 2$, et est un donc un objet nouveau. Toutefois, la structure de groupe semble avoir été perdue dans ce processus. La clé de la théorie des groupes quantiques et de comprendre comment recouvrir cette structure de groupe. En appliquant la dualité de Gelfand au produit matriciel dans O_N on obtient l'expression suivante de la loi de groupe :

$$u_{ij}(gh) = \sum_{k=1}^N u_{ik}(g)u_{kj}(h)$$

et en identifiant $C(O_N \times O_N)$ avec $C(O_N) \otimes C(O_N)$, cette équation devient

$$u_{ij}(gh) = \sum_{k=1}^N (u_{ik} \otimes u_{kj})(g, h).$$

On définit³ donc un $*$ -homomorphisme $\Delta : C(O_N^+) \rightarrow C(O_N^+) \otimes C(O_N^+)$ ⁴, appelé *coproduit*, par la formule

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^N u_{ik} \otimes u_{kj}.$$

Définition. La paire $(C(O_N^+), \Delta)$ est un *groupe quantique compact* appelé *groupe quantique libre orthogonal* et noté O_N^+ .

La construction que nous venons d'expliquer illustre la première description des groupes quantiques libres donnée ci-dessus : on retire les relations de commutations de la présentation d'un groupe compact de matrices. Cette méthode s'applique à beaucoup d'autres exemples : groupes unitaires, groupes de réflexions, groupes symétriques. Les groupes quantiques obtenus partagent certains aspects de leur version classique d'origine, ce qui justifie a posteriori la construction et la notation. Le Chapitre 3 en fournit des exemples dans le cadre des marches aléatoires.

Pour motiver la seconde description des groupes quantiques libres, revenons sur le problème de savoir si $C(O_N^+)$ est bien différente de $C(O_N)$, c'est-à-dire non-commutative. Pour cela, considérons le quotient de $C(O_N^+)$ par l'idéal engendré par les générateurs u_{ij} pour tous $i \neq j$. Il est facile de voir qu'il est isomorphe à la C^* -algèbre maximale $C^*((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{*N})$ du produit libre $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{*N}$ ⁵. De plus, il n'existe pas d'autre groupe discret Γ dont la C^* -algèbre maximale donne un quotient intermédiaire. Du point de vue des groupes de Lie, on pourrait dire que $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{*N}$ est un tore maximal de O_N^+ . Mais il existe aussi une autre interprétation. Via la dualité de Pontryagin généralisée, $C(O_N^+)$ peut être vue comme la C^* -algèbre maximale du groupe quantique discret dual \widehat{O}_N^+ . Alors, de même que O_N^+ est un analogue quantique de O_N , \widehat{O}_N^+ est un analogue quantique de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{*N}$ (le coproduit sur $C((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{*N})$ est donné par $\Delta(g) = g \otimes g$ pour tout $g \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{*N}$). C'est en ce sens qu'on parle de groupe quantique discret libre.

Pour approfondir cette approche, il faut savoir retrouver un groupe discret Γ à partir de la structure de groupe quantique de $C^*(\Gamma)$. Pour ce faire, il suffit de considérer les éléments x de cette algèbre tels que $\Delta(x) = x \otimes x$. Ils forment un groupe isomorphe à Γ . Mais pour O_N^+ , ceci est insuffisant car seul 1 vérifie cette propriété. Il faut à la place considérer les représentations de dimension finie (qui dans le cas de $C^*(\Gamma)$ se réduisent aux éléments du groupe). Leurs classes d'équivalences ne forment pas un groupe, mais le produit tensoriel permet tout de même de reconstruire un semi-anneau :

3. L'existence d'un tel $*$ -homomorphisme découle d'une application de la propriété universelle de $C(O_N^+)$.

4. Contrairement au cas classique, la C^* -algèbre $C(O_N^+)$ n'est pas nucléaire par [Web13, Cor 5.9]. Il faut donc préciser la complétion du produit tensoriel utilisé. Dans le présent mémoire, il s'agira toujours du produit tensoriel minimal.

5. Si a_1, \dots, a_N désignent des générateurs des N copies de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, alors la matrice v de coefficients $v_{ij} = \delta_{ij}a_i$ vérifie les relations définissant $C(O_N^+)$, d'où une surjection par universalité. Réciproquement, ce quotient étant cocommutatif, il est de la forme $C^*(\Gamma)$ avec Γ engendré par les images a_i des u_{ii} , qui vérifient $a_i^{-1} = u_{ii}^* = a_i$.

Définition. Le semi-anneau de fusion d'un groupe quantique compact \mathbb{G} est le semi-groupe abélien libre $R^+(\mathbb{G})$ sur les classes d'équivalence de représentations irréductibles de \mathbb{G} , muni du produit induit par le produit tensoriel.

Comme expliqué ci-dessus, le semi-anneau de fusion de $C^*(\Gamma)$ est $\mathbf{N}[\Gamma]$, le semi-groupe libre sur les éléments de Γ muni de la structure de semi-anneau induite par la loi de groupe. Si Γ est un groupe libre, ou un produit libre, alors $\mathbf{N}[\Gamma]$ a une structure particulièrement simple. T. Banica et R. Vergnioux ont défini dans [BV09] une notion de semi-anneau de fusion libre inspirée de la structure de $\mathbf{N}[\mathbb{F}_N]$ et des propriétés de ce semi-anneau qui sont utilisées dans la preuve de la C^* -simplicité de \mathbb{F}_N . Ainsi, les groupes quantiques compacts dont le semi-anneau de fusion est libre se comportent du point de vue des algèbres d'opérateurs "comme des groupes libres". Les libérations de groupes de Lie compacts mentionnées plus haut ont toutes des semi-anneau de fusion libres et la question se pose évidemment de savoir si cela est fortuit ou consubstantiel à la méthode de libération. L'élucidation de cette question est l'un de nos résultats principaux et sera discutée dans le Chapitre 2.

L'étude du lien entre libération des relations et liberté du semi-anneau de fusion passe par la combinatoire des partitions et une vaste théorie initiée par T. Banica et R. Speicher dans [BS09]. L'étude de $R^+(O_N^+)$ nécessite de comprendre la théorie des représentations de O_N^+ , ce qui est équivalent à la description de sa théorie des invariants. Dans le cas classique, R. Brauer a montré que les invariants du groupe orthogonal peuvent être décrits de façon naturelle par l'ensemble des partitions en paires. Un résultat remarquable de T. Banica est que les invariants de O_N^+ , eux, peuvent être décrits via la même construction mais en ne considérant que les partitions en paires *non-croisées*.

En théorie des probabilités, il a été souvent observé que les phénomènes régis par la combinatoire de partitions ont en général un analogue en théorie des probabilités libres qui est régi par la même combinatoire mais en se restreignant aux partitions non-croisées (voir par exemple le livre [NS06]). La remarque précédente montre donc à nouveau que O_N^+ est une "libération" de O_N . C'est également le point de départ d'une vaste entreprise de construction, de classification et d'étude des groupes quantiques produits par ce procédé de libération des partitions. Pour montrer que cette notion de libération n'est pas purement heuristique, nous allons conclure par une illustration.

Considérons une famille $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de variables aléatoires telles que pour tout $N \in \mathbf{N}$ et tous i_1, \dots, i_N , la loi jointe du vecteur $(X_{i_1}, \dots, X_{i_N})$ soit invariante par l'action de O_N . Alors, par [Fre62], conditionnellement à leur algèbre de queue, les variables $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ sont indépendantes et ont la même distribution gaussienne. Dans [Cur10], S. Curran a montré que si les variables aléatoires sont invariantes par l'action de O_N^+ , alors conditionnellement à leur algèbre de queue, les variables sont *libres* et ont la même distribution *semi-circulaire*.

Organisation du présent mémoire

La brève description précédente a tenté de mettre en lumière la variété des approches possibles pour les groupes quantiques libres. L'approche la plus adaptée à un problème dépend de la nature de ce problème, et nous avons donc choisi de présenter nos travaux en fonction de leurs contextes, en distinguant trois aspects : analytiques, algébriques et probabilistes.

Les travaux décrits ici suggèrent de nombreuses pistes de recherches. Nous en avons détaillées plusieurs qui sont signalées en fin des Sections 1.2, 1.3, 1.4, 2.2, 2.3, 2.4.2, 2.4.4, 3.1.3, 3.1.4 et 3.2 dans des **Problèmes**, numérotés de 1 à 18.

Aspects analytiques

Par "analytique" nous entendons tout ce qui concerne l'étude des algèbres d'opérateurs associées aux groupes quantiques libres. C'est par cet aspect que nous avons débuté en étudiant les propriétés d'approximation (propriété de Haagerup et surtout moyennabilité faible) pour plusieurs groupes quantiques libres. Une première partie des résultats que nous présenterons, dans la Section 1.1, concerne la poursuite de l'étude des propriétés d'approximation, complétée

par des travaux récents sur les groupes quantiques discrets résiduellement de dimension finie exposés dans la Section 1.3. Ici, c'est l'analogie avec les groupes libres qui fournit des idées pour l'étude des groupes quantiques.

Les propriétés d'approximation concernent autant les C^* -algèbres que les algèbres de von Neumann. Un travail plus spécifique aux secondes est l'étude des sous-algèbres abéliennes maximales. On sait depuis les travaux fondateurs de S. Popa que les propriétés d'approximations des groupes discrets permettent de comprendre la structure des sous-algèbres abéliennes maximales des algèbres de von Neumann. Les développements de ces résultats, et surtout le travail de Y. Isono, nous a menés avec R. Vergnioux à l'étude des MASA dans les algèbres de von Neumann des groupes quantiques libres orthogonaux, étude que nous détaillerons dans la Section 1.2.

Quant aux C^* -algèbres, l'un des outils spécifiques de leur étude est la K -théorie. Pour les C^* -algèbres réduites de groupes, la conjecture de Baum-Connes est une approche générale puissante au calcul de la K -théorie. En la reformulant de manière plus catégorique, on peut s'en servir pour les groupes quantiques. Nous présenterons deux résultats dans ce cadre. Le premier provient d'un travail en collaboration avec P. Fima. Nous y étudions une notion générale d'arbre de Bass-Serre quantique et son application en K -théorie. Le second est une étude avec R. Martos de la K -théorie des produits en couronnes libres, assortie de calculs explicites pour certains d'entre eux. Ces résultats seront présentés dans la Section 1.4.

Aspects algébriques

Les aspects "algébriques" concernent l'approche des groupes quantiques compacts par les catégories tensorielles. Comme expliqué plus haut, S.L. Woronowicz a construit dès l'origine des exemples de groupes quantiques compacts via leurs catégories de représentations en utilisant sa généralisation du Théorème de Tannaka-Krein. Cette idée a été reprise d'une façon différente par T. Banica et R. Speicher pour définir les *groupes quantiques aisés* (*easy quantum groups* en anglais), et nous la détaillerons dans la Section 2.1. Cette construction peut se généraliser de plusieurs manières et l'une d'entre elles, que nous avons introduite, est appelée *groupes quantiques de partitions*. Nous partirons de cette définition générale pour ensuite détailler dans la Section 2.2 un travail avec M. Weber permettant de calculer la théorie des représentations d'un groupe quantique obtenu par cette construction.

La suite de nos travaux sur ce sujet se divise en deux parties. Premièrement, le cadre des groupes quantiques de partitions permet d'élucider la notion de groupe quantique libre, au sens de groupe quantique dont le semi-anneau de fusion est libre : ils sont toujours donnés par des partitions non-croisées. Ce résultat était l'une des motivations pour l'introduction des groupes quantiques de partitions et sera exposé dans la Section 2.2.3. Deuxièmement, nous expliquerons des travaux de classification de certaines familles de groupes quantiques de partitions. Il s'agit d'une contribution à un vaste programme très actif à l'heure actuelle, avec des méthodes reposant plus sur la théorie des représentations que sur la combinatoire des partitions. Ceci fait l'objet de la Section 2.3.

Enfin, nous détaillerons dans la Section 2.4 une autre généralisation des groupes quantiques aisés développée avec A. Skalski. Notre objectif était de construire des interpolations entre le produit en couronne permutatif classique et le produit en couronne libre des groupes quantiques. Dans certains cas, notre construction se relie aux groupes quantiques de partitions et dans d'autre, aux groupes quantiques d'isométries de certains duaux de produits libres.

Aspects probabilistes

Les travaux que nous qualifions de "probabilistes" dans ce mémoire font partie de nos plus récents. L'approche ici est celle des groupes quantiques obtenus en libérant les générateurs d'un groupe de Lie de leurs relations de commutations. Il s'avère qu'elle était parfaitement adaptée à l'étude des marches aléatoires. Les marches aléatoires sur les groupes sont un sujet ancien et en continuelle expansion à cause de ses liens avec presque tous les domaines des mathématiques, mais le cas quantique est beaucoup moins étudié. La théorie abstraite des marches aléatoires sur les groupes quantiques compacts a été initiée il y a déjà quelques années, mais l'étude d'exemples

concrets n'a commencé que très récemment dans le cas compact (elle remonte, dans le cas discrets, aux travaux de M. Izumi [Izu02]).

Dans le cas classique, de nombreux résultats sont liés à un phénomène intrigant appelé *phénomène de convergence abrupte* (*cut-off phenomenon* en anglais). La preuve de ce phénomène, pour des marches aléatoires invariantes par conjugaison, repose sur des méthodes de théorie des représentations qui s'adaptent très bien au cadre quantique. Nous avons donc entrepris de les étudier sur plusieurs exemples, et en particulier sur les groupes quantiques libres orthogonaux. Ces résultats seront présentés à la Section 3.1 et montrent que certains comportements classiques s'étendent à ce cadre. Une fois le cas orthogonal compris, il est naturel d'aborder d'autres familles de groupes quantiques. Les énoncés que nous avons obtenus à ce sujet sont présentés dans la Section 3.2.

Chapitre 1

Aspects analytiques

« Cette faculté de résolution tire peut-être une grande force de l'étude des mathématiques, et particulièrement de la très-haute branche de cette science, qui, fort improprement et simplement en raison de ses opérations rétrogrades, a été nommée l'analyse, comme si elle était l'analyse par excellence. »

E.A. Poe, *Double assassinat dans la rue Morgue*

Dans cette première partie, nous présentons des travaux portant essentiellement sur la structure des algèbres d'opérateurs (C^* -algèbres et algèbres de von Neumann) associées à certains groupes quantiques discrets. C'est la raison pour laquelle nous avons employé le terme *analytique* dans le titre. Nous adoptons ici le point de vue des groupes quantiques discrets, c'est-à-dire que les algèbres d'opérateurs $C_{\text{red}}(\mathbb{G})$ et $L^\infty(\mathbb{G})$ sont pensées comme provenant de la représentation régulière du groupe quantique discret dual. Cette façon d'envisager les problèmes est souvent utile car elle permet d'importer des techniques utilisées pour l'étude des groupes discrets, et en particulier des groupes libres.

1.1 Propriétés d'approximation pour les groupes quantiques discrets

L'objet de notre thèse de doctorat [Fre13b] était, comme son titre l'indique, l'étude des *Propriétés d'approximation pour les groupes quantiques discrets*. Nous avons poursuivi cette étude après la thèse dans un travail en collaboration avec K. De Commer et M. Yamashita [DCFY14]. Avant de présenter ces résultats, nous rappellerons quelques éléments concernant les propriétés d'approximation pour les groupes discrets classiques. Pour un exposé plus détaillé nous renvoyons le lecteur à [BO08, Chap 12].

1.1.1 Moyennabilité et moyennabilité faible

Les propriétés d'approximation admettent plusieurs descriptions. Celle qui est la plus adaptée à une généralisation quantique est celle en termes de la C^* -algèbre réduite d'un groupe discret. Puisque cet objet est un exemple important pour la théorie, nous en rappelons la définition avec les notations suivantes : dans l'espace $\ell^2(\Gamma)$ des suites de carré sommable indexées par Γ , on note δ_h la masse de Dirac en h et ces fonctions forment une base hilbertienne.

Définition 1.1.1. Soit Γ un groupe discret. On considère, pour $g \in \Gamma$, l'opérateur $\lambda(g)$ sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\Gamma)$ défini pour tout $h \in \Gamma$ par

$$\lambda(g)\delta_h = \delta_{gh}.$$

La \mathbf{C} -algèbre engendrée par ces opérateurs est notée $\mathbf{C}[\Gamma]$ et appelée *l'algèbre de groupe* de Γ . L'adhérence de $\mathbf{C}[\Gamma]$ dans $\mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$ pour la norme d'opérateur est appelée la *C^* -algèbre réduite* de Γ et notée $C_r^*(\Gamma)$.

La notion importante pour nous sera celle de multiplicateur :

Définition 1.1.2. Soit Γ un groupe discret. Un *multiplicateur* est une application linéaire

$$T : C_r^*(\Gamma) \rightarrow C_r^*(\Gamma)$$

telle qu'il existe une fonction $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ vérifiant

$$T(\lambda(g)) = \varphi(g)\lambda(g)$$

pour tout $g \in \Gamma$.

La plus célèbre et la plus étudiée des propriétés d'approximation est la moyennabilité.

Définition 1.1.3. Un groupe discret Γ est dit *moyennable* s'il existe une suite généralisée $(T_i)_{i \in I}$ de multiplicateurs sur $C_r^*(\Gamma)$ satisfaisant :

- Le rang de T_i est fini pour tout $i \in I$,
- Pour tout $x \in C_r^*(\Gamma)$, $\|T_i(x) - x\| \rightarrow 0$,
- L'application T_i est *complètement positive* pour tout $i \in I$.

La positivité complète est un renforcement de la notion d'application positive sur une C^* -algèbre. Si A est une C^* -algèbre et si $T : A \rightarrow A$ est une application linéaire, on peut la *dilater* pour tout $N \in \mathbf{N}$ en une application linéaire $T^{(N)} : M_N(A) \rightarrow M_N(A)$ simplement en l'appliquant à chaque coefficient. Alors, elle est complètement positive si $T^{(N)}$ est positive pour tout N .

La moyennabilité est une notion centrale en théorie géométrique des groupes et son étude n'a pas cessé depuis la première définition qui en a été donnée par J. von Neumann dans [vN29]. Malheureusement, de nombreux groupes intéressants ne sont pas moyennables, à commencer par les groupes libres. Il est donc souhaitable de disposer d'une notion plus faible préservant les mêmes caractéristiques : approximation en norme, par des multiplicateurs de rang fini, avec un contrôle fort sur la norme des approximants. Ces considérations mènent à la définition de la moyennabilité faible :

Définition 1.1.4. Un groupe discret Γ est *faiblement moyennable* s'il existe une suite généralisée $(T_i)_{i \in I}$ de multiplicateurs sur $C_r^*(\Gamma)$ satisfaisant :

- Le rang de T_i est fini pour tout $i \in I$,
- Pour tout $x \in C_r^*(\Gamma)$, $\|T_i(x) - x\| \rightarrow 0$,
- La quantité $K = \limsup_n \|T_i\|_{cb}$ est finie.

De plus, la borne inférieure des constantes K sur l'ensemble des suites $(T_i)_{i \in I}$ satisfaisant les hypothèses est notée $\Lambda_{cb}(\Gamma)$ et appelée *constante de Cowling-Haagerup* de Γ .

Le troisième point utilise la *norme complètement bornée*, définie par

$$\|T\|_{cb} = \sup_N \|T^{(N)}\|.$$

La moyennabilité faible est bien un affaiblissement de la moyennabilité puisque pour une application complètement positive, $\|T\|_{cb} = \|T(1)\|$. Il existe de nombreux exemples de groupes faiblement moyennables, notamment les groupes hyperboliques (résultat dû à N. Ozawa dans [Oza08]) et les groupes agissant proprement sur des complexes cubiques $\text{CAT}(0)$ de dimension finie (prouvé par E. Guentner et N. Higson dans [GH10]). La constante de Cowling-Haagerup, quant à elle, est très difficile à calculer en général. Certains cas ont tout de même pu être traités, notamment par J. de Cannière, M. Cowling et U. Haagerup dans [dCH85] et [CH89] :

- $\Lambda_{cb}(\mathbb{F}_n) = 1$.
- Si Γ est un réseau dans $SO(n, 1)$ ou dans $SU(n, 1)$, alors $\Lambda_{cb}(\Gamma) = 1$.
- Si Γ est un réseau dans $Sp(n, 1)$, alors $\Lambda_{cb}(\Gamma) = 2n - 1$.
- Si Γ est un réseau dans $F_{4(-20)}$, alors $\Lambda_{cb}(\Gamma) = 21$.

1.1.2 Un exemple quantique

Nous allons maintenant aborder des exemples qui ne sont plus des groupes compacts ou discrets mais des *groupes quantiques*. Nous allons pour l'instant nous concentrer sur un exemple particulièrement important : les déformations quantiques du groupe $SU(2)$, construites par S.L. Woronowicz dans [Wor87b]. Dans toute la suite, on fixe un réel non nul $-1 < q < 1$.

Déformations de $SU(2)$

Considérons le produit tensoriel d'espaces de Hilbert $H = \ell^2(\mathbf{N}) \otimes \ell^2(\mathbf{Z})$. On définit, pour $k \in \mathbf{Z}$, la fonction $e_k : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$ par $e_k(m) = 1$ si $k = m$ et $e_k(m) = 0$ sinon. On notera également e_k la restriction à \mathbf{N} de cette fonction. On définit sur H deux opérateurs linéaires bornés α et γ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \alpha(e_n \otimes e_k) &= \delta_{n \neq 0} \sqrt{1 - q^{2n}} (e_{n-1} \otimes e_k) \\ \gamma(e_n \otimes e_k) &= q^n (e_n \otimes e_{k-1}) \end{cases}$$

Définition 1.1.5. On note \mathcal{A}_q l'algèbre engendrée par α , α^* , γ et γ^* . L'adhérence de \mathcal{A}_q dans $\mathcal{B}(H)$ pour la norme d'opérateur est une C^* -algèbre notée A_q .

Remarque 1.1.6. On peut montrer que la C^* -algèbre A_q est toujours nucléaire et même de type I (voir par exemple [Wor87b, Thm A.2.3]). Cet objet ne semble donc pas intéressant du point de vue des propriétés d'approximation. Cependant, nous allons nous intéresser aux propriétés utilisant des multiplicateurs spécifiques liés à la structure de groupe quantique, ce qui modifie considérablement le problème.

S.L. Woronowicz a prouvé dans [Wor87b, Thm 1.3] que \mathcal{A}_q est la \mathbf{C} -algèbre involutive universelle engendrée par deux éléments a et c satisfaisant les relations

$$\begin{cases} ac &= qca \\ ac^* &= qc^*a \\ cc^* &= c^*c \\ a^*a + c^*c &= 1 \\ aa^* + q^2cc^* &= 1 \end{cases}$$

via l'unique morphisme d'algèbres involutives envoyant a sur α et c sur γ . Ces relations peuvent s'écrire de façon plus synthétique sous la forme

$$u_q^* u_q = \text{Id}_{M_2(A_q)} = u_q u_q^*,$$

où

$$u_q = \begin{pmatrix} a & -qc^* \\ c & a^* \end{pmatrix}$$

Cette définition a un sens pour tout $q \in [-1, 1]$, y compris pour $q = 1$. Dans ce dernier cas, on obtient l'algèbre universelle engendrée par les coefficients d'une matrice unitaire, qui s'interprète naturellement à l'aide du groupe $SU(2)$.

Proposition 1.1.7. *Pour $q = 1$, la C^* -algèbre enveloppante de la \mathbf{C} -algèbre universelle engendrée par les coefficients de u_1 est isomorphe à l'algèbre $C(SU(2))$ des fonctions continues sur le groupe $SU(2)$.*

La Proposition 1.1.7 suggère de penser à A_q comme à une déformation de $C(SU(2))$, d'où la notation courante $A_q = C(SU_q(2))$.

Remarque 1.1.8. Les formules

$$\begin{cases} \Delta_q(\alpha) &= \alpha \otimes \alpha - q\gamma^* \otimes \gamma \\ \Delta_q(\gamma) &= \gamma \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \gamma \end{cases}$$

définissent un unique morphisme de C^* -algèbres

$$\Delta_q : A_q \rightarrow A_q \otimes A_q$$

qui fait, par [Wor87b, Thm 1.4], de la paire (A_q, Δ_q) un *groupe quantique compact*. L'isomorphisme avec $C(SU(2))$ pour $q = 1$ transporte alors cette structure de groupe quantique (en remplaçant α par a et γ par c) sur la structure de groupe de $SU(2)$, justifiant encore plus fortement la notation $SU_q(2)$. Remarquons que la définition de Δ_q a pour but de faire de u_q une représentation de $SU_q(2)$, appelée *représentation fondamentale*.

Pour définir des multiplicateurs sur A_q , il nous faut un analogue des éléments du groupe discret Γ . Une première idée pourrait être de considérer les monômes en α et γ , mais il s'avère que ceci ne suffit pas. Il est plus pertinent de considérer à la place une graduation donnée par le résultat suivant :

Proposition 1.1.9. *Il existe des sous-espaces vectoriels $(\mathcal{A}_q^n)_{n \in \mathbf{N}}$ tels que*

- $\mathcal{A}_q = \cup_n \mathcal{A}_q^n$,
- $\mathcal{A}_q^n \mathcal{A}_q^m \subset \bigoplus_{j=0}^{\min(n,m)} \mathcal{A}_q^{n+m-2j}$.

Remarque 1.1.10. La seconde relation ci-dessus rappelle la règle du produit tensoriel de représentations irréductibles de $SU(2)$. Ce n'est pas un hasard. En effet, $SU_q(2)$ a la même théorie des représentations que $SU(2)$ par [Wor87b, Thm 5.11] et les sous-espaces \mathcal{A}_q^n correspondent aux combinaisons linéaires de coefficients de la représentation irréductible indexée par n (ou de spin $n/2$ suivant les conventions).

Notre objectif est de comprendre les propriétés d'approximations associées à cette graduation. Ils forment une classe particulière que nous définissons maintenant.

Définition 1.1.11. Un *multiplicateur central* sur A_q est une application linéaire

$$T : A_q \rightarrow A_q$$

telle qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ vérifiant

$$T|_{\mathcal{A}_q^n} = \varphi(n) \text{Id}_{\mathcal{A}_q^n}.$$

Remarque 1.1.12. La notion générale de multiplicateur dans ce cadre est donnée par une famille de matrices

$$T(n) \in M_{\dim(\mathcal{A}_q^n)},$$

chacune agissant sur l'espace \mathcal{A}_q^n après son identification à $\mathbf{C}^{\dim(\mathcal{A}_q^n)}$. Un tel multiplicateur est central si et seulement si toutes les matrices $T(n)$ sont scalaires.

Le premier résultat dans cette direction, négatif, est obtenu en combinant [Ban97, Cor 5] et [Fre13a, Prop 6.3].

Proposition 1.1.13. *La C^* -algèbre A_q n'est pas centralement moyennable.*

Se pose alors la question de la moyennabilité faible, sur laquelle nous avons achoppé dans notre thèse. Nous l'avons depuis résolue avec K. De Commer et M. Yamashita dans [DCFY14] :

Théorème 1.1.14 (F.-De Commer-Yamashita). *La C^* -algèbre A_q est centralement faiblement moyennable. De plus, sa constante de Cowling-Haagerup centrale est égale à 1.*

Dans le reste de cette section, nous allons détailler les éléments essentiels de la preuve de ce résultat. Cette démonstration commence par un détour par une autre propriété d'approximation : la *propriété de Haagerup*.

La propriété de Haagerup

Avant de construire une suite de multiplicateurs centraux satisfaisant les hypothèses de la moyennabilité faible, nous allons construire une suite auxiliaire donnant la propriété de Haagerup grâce à [DCFY14, Prop 9] :

Théorème 1.1.15 (F.-De Commer-Yamashita). *Il existe une famille de multiplicateurs $(T_t)_{t \in (0,1)}$ sur A_q déterminés par*

$$(T_t)|_{\mathcal{A}_q^n} = \varphi_t(n) \text{Id}_{\mathcal{A}_q^n}$$

et telle que :

- Pour tout $t \in (0, 1)$, $\varphi_t(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,
- Pour tout $x \in A_q$, $\|T_t(x) - x\| \xrightarrow{t \rightarrow 1} 0$,
- Pour tout $t \in (0, 1)$, l'application linéaire T_t est complètement positive.

Remarque 1.1.16. Un groupe discret Γ a la *propriété de Haagerup* (introduite par U. Haagerup pour le groupe libre dans [Haa78]) s'il existe une suite généralisée $(T_i)_{i \in I}$ de multiplicateurs sur $C_r^*(\Gamma)$ satisfaisant :

- L'opérateur T_i s'étend en un opérateur compact de $\ell^2(\Gamma)$ dans lui-même pour tout $i \in I$,
- Pour tout $x \in C_r^*(\Gamma)$, $\|T_i(x) - x\| \rightarrow 0$,
- L'application T_i est complètement positive pour tout $i \in I$.

On pourra consulter [BO08, Sec 12.2] pour plus de détails concernant la propriété de Haagerup.

Pour démontrer ce résultat, nous allons construire des multiplicateurs qui sont des *opérateurs de convolution*, c'est-à-dire de la forme

$$T_t = (\iota \otimes \psi_t) \circ \Delta_q$$

où $\psi_t : \mathcal{A}_q \rightarrow \mathbf{C}$ est une forme linéaire. Une telle application est complètement positive dès que ψ_t est *positive*. Une technique pour construire de telles formes linéaires est de prendre une représentation de C^* -algèbre π sur un espace de Hilbert K et un vecteur $\xi \in K$. Alors, la formule

$$\psi : x \mapsto \langle \pi(x)\xi, \xi \rangle$$

définit une forme linéaire positive. C'est cette stratégie que nous allons employer.

Démonstration des deux premiers points du Théorème 1.1.15. Une construction de C. Voigt dans [Voi11, Sec 4] montre que pour tout $z \in \mathbf{C}$, il existe une *représentation d'algèbre* π_z de \mathcal{A}_q sur un espace de Hilbert K (lié à la *sphère de Podleś standard* S_q^2) et un vecteur $\xi \in K$ ne dépendant pas de z tels que, en posant

$$\psi_z : x \mapsto \langle \pi_z(x)\xi, \xi \rangle,$$

l'application T_z soit un multiplicateur déterminé par

$$\varphi_z(k) = \frac{P_k(|q|^z + |q|^{-z})}{P_k(|q| + |q|^{-1})},$$

où P_k est le k -ième *polynôme de Chebyshev renormalisé de seconde espèce*, défini par récurrence par $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$ et

$$XP_k(X) = P_{k+1}(X) + P_{k-1}(X).$$

La première propriété du Théorème 1.1.15 suit du fait que $\varphi_t(k) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$ pour tout $t \in (0, 1)$. Quant à la seconde, elle est conséquence de l'égalité

$$\lim_{t \rightarrow 1} \varphi_t(k) = 1$$

valable quel que soit k . □

Remarque 1.1.17. Les polynômes de Chebyshev sont intimement liés à la théorie des représentations de $SU(2)$. Leur apparition ici n'est donc pas fortuite.

Il reste à prouver que les applications T_t sont complètement positives. Le problème ici est que les représentations π_z utilisées ne sont pas des représentations de C^* -algèbres. En effet $\pi_z(x)^*$ n'est en général pas égal à $\pi_z(x^*)$ et il n'est par conséquent pas possible d'appliquer notre stratégie. Pour remédier à cela, il faut déformer le produit scalaire de K afin que, pour $t \in (0, 1)$, π_t devienne une représentation de C^* -algèbre. C. Voigt a montré que c'était possible en fournissant des formules explicites. La preuve repose sur des calculs longs et difficiles que nous ne reproduisons pas.

Lemme 1.1.18 (Voigt). *Pour tout $t \in (0, 1)$ il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ sur K tel que pour tout $x \in A_q$,*

$$\pi_t(x^*) = \pi_t(x)^*,$$

où π_t désigne l'extension de π à la complétion K_t de K pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$.

Remarque 1.1.19. Le Lemme 1.1.18, originellement [Voi11, Lem 4.3], est intimement lié à la conjecture de Baum-Connes pour le groupe quantique $SU_q(2)$. Plus précisément, il s'agit de l'ingrédient technique essentiel pour prouver que la sphère de Podleś standard S_q^2 est équivalente, en KK-théorie équivariante par le double de Drinfel'd de $SU_q(2)$, à $\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$.

Fin de la démonstration du Théorème 1.1.15. Par le Lemme 1.1.18, l'application T_t est complètement positive pour tout $t \in (0, 1)$. Les deux premières propriétés étant satisfaites par $(T_t)_{t \in (0, 1)}$, la preuve est terminée. \square

Moyennabilité faible

L'idée fondamentale pour prouver la moyennabilité faible est de tronquer les multiplicateurs T_t du Théorème 1.1.15 par des projections de rang fini. En effet, le résultat suivant est évident :

Lemme 1.1.20. *Supposons que pour tout $t \in (0, 1)$, l'application T_t soit limite en norme $\| \cdot \|_{cb}$ d'une suite de multiplicateurs de rang fini. Alors, A_q est faiblement moyennable et sa constante de Cowling-Haagerup est égale à 1.*

Il existe des candidats naturels pour ces approximations de rang fini. Notons P_k la projection de \mathcal{A}_q sur \mathcal{A}_q^k . L'opérateur T_t peut alors s'écrire :

$$T_t = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_t(k) P_k.$$

On est donc mené à poser, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$T_{t,n} = \sum_{k=0}^n \varphi_t(k) P_k. \tag{1.1}$$

Il est clair que les multiplicateurs $T_{t,n}$ sont de rang fini et que, par convergence ponctuelle de $T_{t,n}$ vers T_t quand $n \rightarrow \infty$,

$$\|T_{t,n}(x) - x\| \xrightarrow{(t,n) \rightarrow (1, +\infty)} 0$$

pour tout $x \in A_q$. Il reste donc à montrer que la convergence précédente a également lieu en norme $\| \cdot \|_{cb}$. Malheureusement, nous ne savons pas si cela est vrai pour tout t . Néanmoins, il est possible de prouver la moyennabilité faible sans ce résultat.

Pour ce faire, nous nous sommes inspirés d'une idée de N. Ozawa exposée dans la preuve de [BO08, Cor 12.3.5]. Donnons d'abord une extension holomorphe de la famille d'applications linéaires T_t qui est une sorte d'analogue de la famille holomorphe de représentations uniformément bornées construite par T. Pytlik et R. Swarcz pour le groupe libre dans [PS86].

Proposition 1.1.21. *Pour tout $z \in \mathcal{D} = \{z \in \mathbf{C}, -1 \leq \Re(z) \leq 1\}$, il existe une application linéaire complètement bornée $Q_z : A_q \rightarrow A_q$ telle que :*

- L'application $z \mapsto Q_z$ est holomorphe de \mathcal{D} dans l'espace de Banach des applications complètement bornées de A_q dans elle-même muni de la norme $\|\cdot\|_{cb}$,
- Pour tout $t \in (0, 1)$, Q_t est un multiple strictement positif de T_t .

Démonstration. De nouveau, les applications linéaires Q_z vont être construites comme opérateurs de convolution. Il suffit par conséquent de construire une famille holomorphe de formes linéaires bornées qui, pour t réel, sont multiples des formes linéaires ψ_t . Rappelons tout d'abord la notation des *q-coefficients binomiaux* :

$$(x; q)_n = (1-x)(1-xq) \dots (1-xq^{n-1}).$$

On définit une suite de polynômes $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par

$$p_n(z) = \frac{q^n}{\sqrt{(q^2; q^2)_n}} \sum_{k=0}^n \frac{(q^2; q^2)_n}{(q^2; q^2)_k (q^2; q^2)_{n-k}} q^{z(n-2k)}.$$

Les polynômes p_n sont reliés aux *q-polynômes de Hermite* (voir [KS98]) et en utilisant la relation de récurrence de ces derniers, on prouve que pour $z \in \mathcal{D}$, le vecteur

$$\eta_z = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(z) e_n \in \ell^2(\mathbf{N})$$

est propre pour l'opérateur α avec la valeur propre $q^z + q^{-z}$. Alors, l'équation

$$\theta_z(x) = \langle x \eta_z, \eta_{\bar{z}} \rangle$$

définit une famille holomorphe de formes linéaires bornées sur la sous-C*-algèbre $C^*(\alpha)$ de A_q engendrée par α . Pour étendre ces formes linéaires à A_q , considérons l'isométrie

$$V : \ell^2(\mathbf{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbf{N}) \otimes \ell^2(\mathbf{Z})$$

définie par $V(e_n) = e_n \otimes e_0$. Alors, si $i : C^*(\alpha) \hookrightarrow A_q$ désigne l'inclusion, l'application linéaire

$$\mathbb{E} : x \mapsto i(VxV^*),$$

définit une *espérance conditionnelle* de A_q sur $C^*(\alpha)$. Des calculs élémentaires montrent ensuite que

$$Q_z = (\iota \otimes [\theta_z \circ \mathbb{E}]) \circ \Delta_q$$

satisfait toutes les propriétés nécessaires. □

Le reste de la preuve repose sur un simple argument d'analyse complexe. Il faut toutefois d'abord savoir que la convergence a lieu au moins pour de petites valeurs de t .

Lemme 1.1.22. *Pour $0 < t < 1/3$, la suite $(T_{t,n}^3)_{n \in \mathbf{N}}$ converge en norme $\|\cdot\|_{cb}$ vers T_t^3 .*

Démonstration. Nous ne voulons pas donner ici les calculs mais simplement mentionner qu'ils reposent sur des majorations extrêmement grossières de $\|P_k\|_{cb}$, à l'opposé du travail de [Fre13a] qui consistait à prouver des majorations fines (polynomiales de degré 2) de ces normes. □

Démonstration du Théorème 1.1.14. Soit M_{cb} l'espace de Banach des multiplicateurs complètement bornés sur A_q muni de la norme $\|\cdot\|_{cb}$ et soit M_{cb}^0 l'adhérence du sous-espace engendré par les multiplicateurs de rang fini. Considérons l'application holomorphe

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow M_{cb} \\ z & \mapsto Q_z^3 \end{cases}$$

D'après le Lemme 1.1.22, $\Phi(t) = Q_t^3 \in M_{cb}^0$ pour tout $0 < t < 1/3$. Considérons l'espace de Banach quotient $N = M_{cb}/M_{cb}^0$ et l'application quotient

$$\tilde{\Phi} : \mathcal{D} \rightarrow N.$$

D'après ce qui précède, $\tilde{\Phi}$ est une application holomorphe identiquement nulle sur $(0, 1/3)$. Une telle application est nécessairement identiquement nulle sur tout \mathcal{D} par le Théorème des zéros isolés. En particulier, pour tout $t \in (0, 1)$ T_t^3 , étant un multiple de Q_t^3 , est limite de multiplicateurs rang fini, ce qui conclut. □

Transfert de multiplicateurs

Le résultat précédent, tout satisfaisant qu'il est, ne concerne qu'un exemple particulier de groupe quantique compact, à savoir $SU_q(2)$. Cependant, le fait que le résultat porte sur des multiplicateurs centraux permet de l'étendre à plusieurs familles de groupes quantiques. Ceci nécessite toutefois d'introduire un nouvel outil, de nature plus algébrique, appelé *équivalence monoïdale*. Pour l'introduire, nous précisons quelques éléments de la théorie générale des groupes quantiques compacts.

À l'instar de $SU_q(2)$, tout groupe quantique compact possède une C^* -algèbre réduite $C_{\text{red}}(\mathbb{G})$ qui est munie d'une filtration canonique, les espaces de cette filtration étant indexés par les classes d'équivalence de représentations irréductibles de \mathbb{G} . Plus précisément, les coefficients des représentations de dimension finies de \mathbb{G} forment une sous-algèbre $\mathcal{O}(\mathbb{G}) \subset C_{\text{red}}(\mathbb{G})$ qui est naturellement filtrée :

$$\mathcal{O}(\mathbb{G}) = \bigcup_{\alpha \in \text{Irr}(\mathbb{G})} \mathcal{O}^\alpha(\mathbb{G}),$$

où $\text{Irr}(\mathbb{G})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de \mathbb{G} . Soient donc \mathbb{G}_1 et \mathbb{G}_2 deux groupes quantiques compacts et supposons que l'on dispose d'une bijection

$$\psi : \text{Irr}(\mathbb{G}_1) \rightarrow \text{Irr}(\mathbb{G}_2).$$

Alors, à tout multiplicateur central T sur $C_{\text{red}}(\mathbb{G}_1)$ déterminé par

$$T|_{\mathcal{O}(\mathbb{G}_1)^\alpha} = \varphi(\alpha) \text{Id}_{\mathcal{O}(\mathbb{G}_1)^\alpha}$$

on peut associer le multiplicateur central $\psi_* T$ sur $C_{\text{red}}(\mathbb{G}_2)$ déterminé par

$$\psi_* T|_{\mathcal{O}(\mathbb{G}_2)^\beta} = \varphi \circ \psi^{-1}(\beta) \text{Id}_{\mathcal{O}(\mathbb{G}_2)^\beta}.$$

Toutefois, il est impossible en général de comparer les normes complètement bornées de ces opérateurs. Pour ce faire, il faut que la bijection ψ ait plus de propriétés. C'est ici qu'intervient la notion d'*équivalence monoïdale*. L'idée est que l'application ψ doit s'étendre en une équivalence de C^* -catégories monoïdales entre les catégories de représentations de dimension finie de \mathbb{G}_1 et \mathbb{G}_2 . Les C^* -catégories monoïdales seront introduites dans le Chapitre 2, à la Définition 2.1.6, mais il existe une définition plus concrète de l'équivalence monoïdale introduite par J. Bichon, A. de Rijdt et S. Vaes dans [BDRV06, Def 3.1] :

Définition 1.1.23. Une équivalence monoïdale entre \mathbb{G}_1 et \mathbb{G}_2 est la donnée d'une bijection

$$\psi : \text{Irr}(\mathbb{G}_1) \rightarrow \text{Irr}(\mathbb{G}_2)$$

envoyant la représentation triviale sur la représentation triviale et d'isomorphismes

$$\Psi : \text{Hom}_{\mathbb{G}_1}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n, \beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_m) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{G}_2}(\psi(\alpha_1) \otimes \cdots \otimes \psi(\alpha_n), \psi(\beta_1) \otimes \cdots \otimes \psi(\beta_m))$$

pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \text{Irr}(\mathbb{G}_1)$ et $\beta_1, \dots, \beta_m \in \text{Irr}(\mathbb{G}_2)$ tels que $\Psi(\text{Id}) = \text{Id}$ et pour tous morphismes S et T ,

$$\begin{aligned} \Psi(S \circ T) &= \Psi(S) \circ \Psi(T) \\ \Psi(S^*) &= \Psi(S)^* \\ \Psi(S \otimes T) &= \Psi(S) \otimes \Psi(T) \end{aligned}$$

Remarque 1.1.24. De façon informelle, la différence entre deux groupes quantiques monoïdalement équivalents est essentiellement la dimension des représentations. D'ailleurs, si deux groupes quantiques compacts sont monoïdalement équivalents et si ψ préserve les dimensions, alors d'après [BDRV06, Prop 4.5] ils sont déformation l'un de l'autre par un 2-cocycle.

L'intérêt de cette définition réside dans le résultat suivant [Fre13a, Prop 6.3], qui nous a été indiqué par S. Vaes à l'époque de la rédaction de l'article en question.

Proposition 1.1.25 (Vaes). *Soient \mathbb{G}_1 et \mathbb{G}_2 deux groupes quantiques compacts monoïdalement équivalents et soit $\psi : \text{Irr}(\mathbb{G}_1) \rightarrow \text{Irr}(\mathbb{G}_2)$ la bijection associée. Alors, pour tout multiplicateur T sur $C_{\text{red}}(\mathbb{G}_1)$, on a l'égalité*

$$\|\psi_* T\|_{cb} = \|T\|_{cb}.$$

On en déduit immédiatement que les propriétés d'approximation se “transportent” à travers l'équivalence monoïdale pour peu qu'elles soient implémentées par des multiplicateurs centraux, ce qui permet d'étendre les résultats obtenus précédemment (nous renvoyons à [VDW96] pour la définition des groupes quantiques ci-dessous).

Théorème 1.1.26 (F.-De Commer-Yamashita). *Les groupes quantiques suivants ont la propriété de Haagerup centrale et sont centralement faiblement moyennables avec une constante de Cowling-Haagerup centrale égale à 1 :*

- $SU_q(2)$ et $SO_q(3)$ pour tout $-1 \leq q \leq 1$.
- O_F^+ et U_F^+ pour tout $F \in GL_N(\mathbf{C})$.
- Le groupe quantique d'automorphismes d'une C^* -algèbre de dimension finie B munie d'un état fidèle ψ .

Remarque 1.1.27. La moyennabilité faible implique l'exactitude (voir par exemple [BO08, Chap 5] pour une introduction à cette notion). Ainsi, tous les groupes quantiques du théorème précédent sont exacts, résultat qui était toutefois déjà connu par les travaux de S. Vaes et R. Vergnioux, voir [VV07, Prop 4.4 et Thm 4.5].

1.2 Sous-algèbres abéliennes maximales

Bien que nous les ayons exprimés en termes de la C^* -algèbre réduite $C_{\text{red}}(\mathbb{G})$ pour plus de commodité, les résultats précédents traduisent des propriétés du groupe quantique \mathbb{G} lui-même ou de son dual discret $\widehat{\mathbb{G}}$, et permettent de mieux comprendre la structure des *algèbres de von Neumann* associées à ces groupes quantiques compacts.

1.2.1 Absence de sous-algèbre de Cartan

Un objet important dans l'étude des algèbres de von Neumann est les *sous-algèbres abéliennes maximales*, que nous abrègerons suivant l'usage en MASA¹. Il s'agit, comme leur nom l'indique, de sous-algèbres abéliennes qui ne sont pas strictement contenues dans une autre sous-algèbre abélienne. L'étude de ces objets a connu des développements spectaculaires ces dix dernières années, en grande partie sous l'impulsion de S. Popa et de sa théorie de la déformation/rigidité. Ces travaux ont montré que la moyennabilité faible pouvait être un outil puissant pour l'étude d'une classe particulière de MASA appelées *sous-algèbres de Cartan*. Pour les définir, introduisons d'abord une autre notion :

Définition 1.2.1. Soient $A \subset N$ des algèbres de von Neumann. Le *normalisateur* de A dans N est le groupe

$$\mathcal{N}_N(A) = \{u \in \mathcal{U}(N) \mid uAu^* \subset A\}$$

où $\mathcal{U}(N)$ désigne le groupe des unitaires de N .

Définition 1.2.2. Soit N une algèbre de von Neumann. Une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale $A \subset N$, munie d'une espérance conditionnelle normale et fidèle, est une *sous-algèbre de Cartan* si l'algèbre de von Neumann engendrée par $\mathcal{N}_N(A)$ est égale à N .

L'exemple principal de sous-algèbre de Cartan provient de la théorie ergodique. Étant donnée une action α d'un groupe discret Γ sur un espace mesuré X , on peut construire une algèbre de von Neumann $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$, appelée *produit croisé*, qui encode le système dynamique. En

1. Pour *Maximal Abelian SubAlgebra* en anglais

particulier, elle est engendrée par l'algèbre de von Neumann abélienne $L^\infty(X)$ et par l'algèbre de von Neumann $L(\Gamma)$ et les générateurs vérifient la relation suivante : pour tout $g \in \Gamma$ et tout $f \in L^\infty(X)$.

$$\lambda(g)f\lambda(g^{-1}) = f \circ \alpha_g^{-1}$$

On voit ainsi que le normalisateur de $L^\infty(X)$ contient tous les $\lambda(g)$, donc que l'algèbre de von Neumann engendrée contient $L(\Gamma)$. Comme elle contient aussi par définition $L^\infty(X)$, elle est égale au produit croisé. F. Murray et J. von Neumann ont montré dans [MvN43] que si l'action α est libre et ergodique, alors $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ est un facteur et $L^\infty(X)$ est une MASA. Il s'agit donc dans ce cas d'une sous-algèbre de Cartan.

À l'opposé, on sait depuis les travaux de D.V. Voiculescu [Voi96] que les facteurs de groupes libres $L(\mathbb{F}_n)$ n'ont pas de sous-algèbre de Cartan. La preuve utilise la théorie des probabilités libres et est donc difficilement transposable à d'autres groupes, et encore moins à des groupes quantiques. Une autre approche a été initiée par N. Ozawa et S. Popa dans [OP10a] et [OP10b] reposant sur la moyennabilité faible. Si Γ est un groupe tel que $\Lambda_{cb}(\Gamma) = 1$, ils montrent que l'action par conjugaison du groupe unitaire de $L(\Gamma)$ sur ses MASA doit avoir des propriétés très particulières (voir par exemple [BO08, Thm 12.3.6] pour un énoncé dans cet esprit dans le cadre des groupes). En exploitant cette idée, ils prouvent que $L(\Gamma)$ ne peut dans certains cas contenir aucune sous-algèbre de Cartan.

Plus tard, S. Popa et S. Vaes ont à nouveau utilisé dans [PV12] et [PV14] la moyennabilité faible pour obtenir des résultats très généraux sur les sous-algèbres de Cartan. Toutefois, ils utilisent un second ingrédient, à savoir que le groupe est *bi-exact*. Cette hypothèse n'était pas facile à exploiter dans le cadre quantique, mais Y. Isono est parvenu à dégager une alternative, appelée *propriété AO forte*, qui lui a permis d'obtenir le résultat suivant dans [Iso15, Thm 4.2.1] :

Théorème 1.2.3 (Isono). *Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact faiblement moyennable et bi-exact² tel que l'algèbre de von Neumann $L^\infty(\mathbb{G})$ soit de type II. Alors, $L^\infty(\mathbb{G})$ est fortement solide : pour toute sous-algèbre diffuse³ moyennable $N \subset L^\infty(\mathbb{G})$, $\mathcal{N}_{L^\infty(\mathbb{G})}(N)''$ est également moyennable.*

Pour voir le lien entre la solidité forte et les sous-algèbres de Cartan, il suffit de savoir qu'une algèbre abélienne est moyennable. Ainsi, si $L^\infty(\mathbb{G})$ lui-même n'est pas moyennable mais fortement solide, alors il ne peut contenir de sous-algèbre de Cartan. Tous les groupes quantiques précédemment cités vérifient les hypothèses de ce théorème. Il suffit donc par exemple de prouver que leurs algèbres de von Neumann ne sont pas moyennables pour obtenir l'absence de sous-algèbre de Cartan. On obtient alors (voir [DCFY14, Prop 27] ainsi que l'appendice de S. Vaes à ce même article pour des résultats plus généraux)

Corollaire 1.2.4. *Soit M l'algèbre de von Neumann de l'un des groupes quantiques compacts suivants, alors M n'a pas de sous-algèbre de Cartan :*

- U_N^+ pour $N \geq 2$.
- O_N^+ pour $N \geq 3$.
- Le groupe quantique d'automorphismes d'une C^* -algèbre de dimension finie B de dimension supérieure ou égale à 5 munie d'une trace fidèle ψ .

En particulier, aucune de ces algèbres de von Neumann n'est isomorphe à un produit croisé.

1.2.2 La sous-algèbre radiale de O_N^+

Une application directe du lemme de Zorn montre que toute algèbre de von Neumann possède des MASA et le résultat précédent nous dit que pour les groupes quantiques qui nous intéressent, le normalisateur d'une telle MASA ne peut être "très grand". Il est par conséquent naturel

2. Voir [Iso14] pour la définition.

3. C'est-à-dire sans projecteur non-nul minimal

de chercher des sous-algèbres pour laquelle le normalisateur est “très petit”, le cas extrême étant $\mathcal{N}_N(A) = \mathcal{U}(A)$. On dit alors que la MASA est *singulière*. Dans le cas du groupe libre, on connaît des exemples de MASA singulières. L’un des principaux est la *sous-algèbre radiale* (parfois appelée *sous-algèbre laplacienne*), qui est la sous-algèbre de von Neumann de $L(\mathbb{F}_N)$ engendrée par

$$\Delta = \sum_{i=1}^N a_i + a_i^{-1}$$

où les a_i sont les générateurs de \mathbb{F}_N ⁴. S. Radulescu a montré dans [Rad91] que cette sous-algèbre est une MASA singulière.

Nous souhaitons ici définir un analogue de cette MASA radiale dans l’algèbre de von Neumann $L^\infty(O_N^+)$ du groupe quantique libre orthogonal O_N^+ . Pour ce faire, considérons la matrice diagonale v dont les coefficients sont les générateurs du groupe libre \mathbb{F}_N . Il s’agit d’une représentation du groupe quantique compact $\widehat{\mathbb{F}}_N$ dual de \mathbb{F}_N qui a la propriété que ses coefficients engendrent toute la C^* -algèbre $C^*(\widehat{\mathbb{F}}_N)$. Ces propriétés sont analogues à celle de la représentation u dont les coefficients définissent $C(O_N^+)$ et qui est appelée *représentation fondamentale* de O_N^+ . Comme la MASA radiale de $L^\infty(\mathbb{F}_N)$ est engendrée par

$$\Delta = \text{Tr}(v) + \text{Tr}(\bar{v}),$$

il est naturel de considérer dans $L^\infty(O_N^+)$ la sous-algèbre engendrée par $\text{Tr}(u) + \text{Tr}(\bar{u}) = 2 \text{Tr}(u)$. Autrement dit, l’élément qui nous intéresse est le *caractère fondamental*

$$\chi_1 = \sum_{i=1}^N u_{ii}.$$

Par définition, χ_1 est auto-adjoint et engendre donc une sous-algèbre abélienne. Dans un travail en commun avec R. Vergnioux [FV16], nous avons montré qu’il s’agit d’une MASA singulière.

Maximalité et coefficients

Notons $A \subset L^\infty(O_N^+)$ la sous-algèbre de von Neumann engendrée par χ_1 et considérons pour l’instant simplement le problème de la maximalité. On cherche à prouver que si un élément $x \in L^\infty(O_N^+)$ commute à A , alors il est dans A . Un outil commode pour exprimer l’appartenance à A est l’*espérance conditionnelle*

$$\mathbb{E}_A : L^\infty(O_N^+) \rightarrow A$$

dont l’existence est assurée par le fait que $L^\infty(O_N^+)$ est de type II_1 . En posant

$$A^\perp = \{x \in L^\infty(O_N^+) \mid \mathbb{E}_A(x) = 0\},$$

il suffit de montrer que si $x \in A^\perp$ commute à A , alors $x = 0$. L’idée est alors d’essayer de transporter le problème dans l’espace de Hilbert $L^2(O_N^+)$. En effet, comme l’état de Haar est fidèle sur $L^\infty(O_N^+)$ (voir par exemple [NT13, Cor 1.7.5]) on dispose d’une injection

$$L^\infty(O_N^+) \hookrightarrow L^2(O_N^+).$$

On est ainsi mené à essayer de prouver le lemme-clef suivant :

Lemme 1.2.5. *Soit $(u_i)_{i \in I}$ une suite généralisée d’unitaires de A qui tend faiblement vers 0 dans $L^2(O_N^+)$ (son existence est assurée par le caractère diffus de A). Alors, pour tout $z \in A^\perp$, $u_i z u_i^*$ tend faiblement vers 0 dans $L^2(O_N^+)$.*

La maximalité suit immédiatement de ce résultat :

4. Remarquons que Δ est le Laplacien usuel sur le graphe de Cayley de \mathbb{F}_N associé aux générateurs canoniques, d’où le nom de sous-algèbre laplacienne.

Preuve de la maximalité. Soit $x \in L^\infty(O_N^+)$ qui commute à A et posons $z = x - \mathbb{E}_A(x) \in A^\perp$. Alors, $z \in A^\perp$ et commute également à A , donc

$$z = u_i z u_i^* \rightarrow 0$$

dans $L^2(O_N^+)$ et $x = \mathbb{E}_A(x) \in A$. □

Pour démontrer le Lemme 1.2.5, prenons un élément $x \in L^2(O_N^+)$ et (en notant de la même façon les éléments de $L^\infty(O_N^+)$ et leurs images dans $L^2(O_N^+)$) essayons d'estimer la quantité

$$\langle u_i z u_i^*, x \rangle = \langle z u_i^*, u_i^* x \rangle.$$

L'hypothèse sur z implique qu'il est orthogonal à l'adhérence $L^2(A)$ de A dans $L^2(O_N^+)$, et on se ramène aisément au cas où x l'est également. Posons alors $H = L^2(A)^\perp$. Par définition, A agit à gauche et à droite sur H , lui donnant une structure naturelle de bimodule dont nous devons étudier les *coefficients*, c'est-à-dire les nombres

$$\langle ax, yb \rangle$$

pour $x, y \in H$ et $a, b \in A$. Naturellement, il est plus facile de travailler avec de tels produits scalaires en utilisant une base hilbertienne. Pour H , une telle base est donnée par les coefficients $(u_{ij}^n)_{n \in \mathbf{N}, 1 \leq i \neq j \leq d_n}$ des représentations irréductibles de O_N^+ , tandis qu'une base de $L^2(A)$ est donnée par les caractères $(\chi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ des représentations irréductibles. Ceci découle immédiatement des relations d'orthogonalité de Schur (voir par exemple [NT13, Thm 1.4.3]). Il est alors possible de majorer efficacement les coefficients, ce que nous avons fait dans [FV16, Thm 4.3] :

Théorème 1.2.6 (F.-Vergnioux). *Soit $N > 2$, soient k, n des entiers, soit $1 \leq i \neq j \leq d_n$ et $1 \leq i', j' \leq d_k$. Alors, il existe $K > 0$ tel que pour tous ℓ, ℓ' ,*

$$\left| \langle \chi_\ell u_{i'j'}^k, u_{ij}^n \chi_{\ell'} \rangle \right| \leq K q^{\max(\ell, \ell')}.$$

En particulier, $\left| \langle \chi_\ell u_{i'j'}^k, u_{ij}^n \chi_{\ell'} \rangle \right| \rightarrow 0$ quand ℓ ou ℓ' tend vers $+\infty$.

Afin de donner une intuition du sens de cette inégalité, nous allons en donner un analogue dans le cas des groupes libres. La discussion au début de ce chapitre suggère de prendre, pour remplacer les caractères des représentations irréductibles, les fonctions indicatrices des mots de longueur fixée. Posons donc

$$\chi_\ell = \frac{1}{\sqrt{2N(2N-1)^{\ell-1}}} \sum_{|w|=\ell} w \in L(\mathbb{F}_N).$$

Un calcul combinatoire montre que ces éléments forment une base de la MASA radiale, tandis qu'une base de son supplémentaire orthogonal dans $\ell^2(\mathbb{F}_N)$ est donnée par les éléments de la forme $x - x'$ où x et x' sont deux mots de même longueur. Des majorations élémentaires montrent alors que, pour x, x' deux mots de longueur n et y, y' deux mots de longueur k ,

$$\begin{aligned} |\langle \chi_{\ell'}(x - x'), (y - y')\chi_\ell \rangle| &\leq \frac{\min(k+1, n+1)}{N \sqrt{(2N-1)^{\ell-1} (2N-1)^{\ell'-1}}} \\ &\leq 2 \min(k+1, n+1) (2N-1)^{-(\ell+\ell')/2}. \end{aligned}$$

Deux outils

La preuve du Théorème 1.2.6 occupe la quasi-totalité de l'article [FV16] et est relativement technique. Elle nécessite de plus d'obtenir une connaissance fine de la structure des morphismes de représentations de O_N^+ , ce qui nous a amenés à prouver deux résultats intermédiaires qui ont un intérêt indépendant. Ces résultats concernent les projections qui permettent de décomposer un produit tensoriel de représentations de O_N^+ en somme de sous-représentations irréductibles. Par exemple, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la représentation $u^{\otimes n}$ contient une unique copie de la représentation

u^n , dite *de plus haut poids*. Celle-ci est donnée par une projection orthogonale $P_n \in H_1^{\otimes n}$ d'image notée H_n . Considérons maintenant deux représentations u^n et u^k et l'opérateur

$$(\text{id}_n \otimes \text{Tr}_k)(P_{n+k}) \in \mathcal{B}(H_n).$$

Il s'agit d'un morphisme de représentations de u^n vers lui-même, et c'est donc un scalaire puisque u^n est irréductible. Pour les besoins des calculs, nous avons dû contrôler des quantités similaires mais avec trois indices, à savoir

$$x_{n,k,m} = (\text{id}_n \otimes \text{Tr}_k \otimes \text{id}_m)(P_{n+k+m}) \in \mathcal{B}(H_n \otimes H_m).$$

Cet opérateur n'est plus un morphisme de représentations et donc plus un scalaire. Cela dit, si k devient grand il est "très proche" d'un scalaire et nous sommes parvenus à rendre cette idée quantitative dans [FV16, Prop 3.2] :

Proposition 1.2.7 (F.-Vergnioux). *Soit $N > 2$. Il existe deux constantes $\lambda_{n,m} > 0$ et $D_{n,m} > 0$ ne dépendant que de N , n et m telles que*

$$\|x_{n,k,m} - \lambda_{n,m}(\text{id}_n \otimes \text{id}_m)\| \leq D_{n,m}q^k.$$

En particulier, $x_{n,k,m} \rightarrow \lambda_{n,m}(\text{id}_n \otimes \text{id}_m)$ quand $k \rightarrow \infty$.

Illustrons à nouveau cette propriété dans le cas des groupes libres. L'idée est de remplacer l'espace de Hilbert $H_n \subset \ell^2(\widehat{O}_N^+)$ de la n -ième représentation irréductible par l'espace $\ell^2(W_n) \subset \ell^2(\mathbb{F}_N)$ des mots de longueur n . Alors, pour $g \in W_n$ et $h \in W_m$,

$$x_{n,k,m}(\delta_g \otimes \delta_h) = \frac{\lambda_k(g, h)}{|W_k|} \delta_g \otimes \delta_h$$

avec

$$\lambda_k(g, h) = |\{\gamma \in W_k \mid |g\gamma h| = |g| + |h| + k\}|.$$

Pour que $x_{n,k,m}$ soit asymptotiquement scalaire, il suffit donc que la fonction $\lambda_k/|W_k|$ soit asymptotiquement constante. Or, un calcul élémentaire montre que pour tous $g, g' \in W_n$ et $h, h' \in W_m$, on a quel que soit k

$$|\lambda_k(g, h) - \lambda_k(g', h')| \leq 1.$$

Ainsi, le rapport $\lambda_k(g, h)/|W_k|$ ne dépend asymptotiquement que de n et m et on retrouve un analogue de la proposition précédente.

Les projections $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont liées par une relation de récurrence, appelée *relation de Wenzl* (voir par exemple [FK97, Eq 3.8] ou [VV07, Eq 7.4]) qui peut être énoncée ainsi :

$$P_n = (P_{n-1} \otimes \text{id}_1) + \sum_{\ell=1}^{n-1} (-1)^{n-\ell} \frac{d_{\ell-1}}{d_{n-1}} \left(\text{id}_1^{\otimes(\ell-1)} \otimes t_1 \otimes \text{id}_1^{\otimes(n-\ell-1)} \otimes t_1^* \right) (P_{n-1} \otimes \text{id}_1)$$

où $t_1 : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^N \otimes \mathbf{C}^N$ est défini par

$$t_1(1) = \sum_{i=1}^N e_i \otimes e_i.$$

Cette relation très utile est écrite en termes d'opérateurs sur $H_1^{\otimes n}$, mais nous avons besoin dans les calculs de l'utiliser pour des vecteurs dans certains sous-espaces $H_p \subset H_1^{\otimes n}$. Il nous fallait donc développer une version "supérieure" de la relation de récurrence, ce qui fut fait dans [FV16, Lem 3.4] :

Proposition 1.2.8 (F.-Vergnioux). *Soit $\zeta \in H_{p+q}$ qu'on décompose en*

$$\zeta = \sum \zeta^{(1)} \otimes \zeta^{(2)} \in H_p \otimes H_q \text{ et } \zeta = \sum \zeta_{(1)} \otimes \zeta_{(2)} \in H_q \otimes H_p.$$

Pour tout $n \geq p + q$, il existe $\alpha_{p,q}^n \in \mathbf{C}$ tel que

$$\begin{aligned} \sum (\bar{\zeta}^{(1)*} \otimes \text{id}_{n-p}) P_n(\zeta^{(2)} \otimes \text{id}_{n-q}) &= \alpha_{p,q}^n \sum P_{n-p}(\zeta_{(1)} \bar{\zeta}_{(2)}^* \otimes \text{id}_{n-p-q}) P_{n-q} \\ \sum (\text{id}_{n-p} \otimes \zeta^{(1)*}) P_n(\text{id}_{n-q} \otimes \bar{\zeta}^{(2)}) &= \alpha_{p,q}^n \sum P_{n-p}(\text{id}_{n-p-q} \otimes \bar{\zeta}_{(1)} \zeta_{(2)}^*) P_{n-q}. \end{aligned}$$

De plus, il existe des constantes $C_{p,q} > 0$ telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $C_{p,q} \leq |\alpha_{p,q}^n| \leq 1$.

Singularité, mélange et mesure spectrale

Le Lemme 1.2.5 se déduit facilement du Théorème 1.2.6, ainsi que la maximalité de A . Mais on peut en fait obtenir bien plus. En effet, on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 1.2.9. *Soit $(u_i)_{i \in I}$ une suite généralisée d'unitaires qui tend faiblement vers 0. Alors, pour tous $x, y \in A^\perp$,*

$$\|\mathbb{E}_A(xu_iy)\|_2 \rightarrow 0.$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord qu'il suffit de prendre pour x et y des coefficients de représentations irréductibles $u_{\xi, \eta}^n$ et $u_{\xi', \eta'}^k$ où $\xi \perp \eta$ et $\xi' \perp \eta'$. On calcule alors la norme quadratique en décomposant selon la base des caractères, ce qui donne

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}_A(xu_iy)\|_2^2 &= \sum_{\ell'=0}^{+\infty} |\langle \mathbb{E}(u_{\xi\eta}^{n*} u_i u_{\xi'\eta'}^k), \chi_{\ell'} \rangle|^2 \\ &= \sum_{\ell'=0}^{+\infty} |\langle u_{\xi\eta}^{n*} u_i u_{\xi'\eta'}^k, \chi_{\ell'} \rangle|^2 \\ &= \sum_{\ell'=0}^{+\infty} |\langle u_i u_{\xi'\eta'}^k, u_{\xi\eta}^n \chi_{\ell'} \rangle|^2. \end{aligned}$$

Le fait que la suite généralisée $(u_i)_{i \in I}$ tende faiblement vers 0 implique que chaque terme de la somme tend vers 0. Il reste donc simplement à vérifier que les hypothèses du théorème de convergence dominée sont satisfaites. En écrivant dans $L^2(A)$ la décomposition

$$u_i = \sum_{\ell=0}^{+\infty} a_\ell^i \chi_\ell,$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le Théorème 1.2.6 donnent

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}_A(xu_iy)\|_2^2 &= \sum_{\ell'=0}^{+\infty} \left| \sum_{\ell=0}^{+\infty} a_\ell^i \langle \chi_\ell u_{\xi'\eta'}^k, u_{\xi\eta}^n \chi_{\ell'} \rangle \right|^2 \\ &\leq \sum_{\ell'=0}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{+\infty} |\langle \chi_\ell u_{\xi'\eta'}^k, u_{\xi\eta}^n \chi_{\ell'} \rangle|^2 \\ &\leq K \sum_{\ell'=0}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{+\infty} q^{\max(\ell, \ell')} < +\infty. \end{aligned}$$

□

Une MASA possédant cette propriété est dite *mélangeante*, et toute MASA mélangeante est singulière (voir par exemple [FV16, Cor 5.8]). Il est en fait possible de dire encore un peu plus sur la structure de A . Pour ce faire, remarquons tout d'abord que la structure de bimodule de H signifie qu'il existe des morphismes

$$\rho_g, \rho_d : A \rightarrow \mathcal{B}(H)$$

dont les images commutent. Comme A elle-même est commutative, ces deux images engendrent une algèbre de von Neumann commutative qui est, par définition, isomorphe à $L^\infty([-2, 2] \times [-2, 2])$. Étant donnée une telle sous-algèbre, il est toujours possible de *désintégrer* H , c'est-à-dire de l'écrire comme un champ mesurable d'espaces de Hilbert au-dessus du spectre $[-2, 2] \times [-2, 2]$. Ce champ est décrit par une mesure sur $[-2, 2] \times [-2, 2]$ et une fonction donnant la dimension de chaque fibre. En particulier, la connaissance de cette mesure donne des informations sur A et nous avons pu l'identifier dans [FV16, Thm 5.7].

Théorème 1.2.10 (F.-Vergnioux). *La mesure associée à la désintégration de H est équivalente (au sens de Borel-Lebesgue) à la mesure de Lebesgue sur $[-2, 2] \times [-2, 2]$.*

Il suit de ce résultat et du travail de K. Mukherjee [Muk13, Sec 2] que H est contenu, en tant que bimodule, dans une somme de bimodules dits *grossiers*, ce qui implique qu'il est mélangeant. On retrouve ainsi tous les résultats précédents.

Ces résultats ne sont que la première étude de MASA dans des algèbres de von Neumann de groupes quantiques discrets et suggère plusieurs prolongements. Nous en indiquerons trois principaux.

Tout d'abord, il existe d'autres sous-algèbres abéliennes dans $L^\infty(O_N^+)$ qui, au vu de l'analogie avec les groupes libres, sont susceptibles d'être des MASA. En particulier, on peut considérer la sous-algèbre engendrée par un générateur u_{ij} , analogue de la sous-algèbre engendrée par un générateur dans $L(\mathbb{F}_N)$. La stratégie employée dans [FV16] est un point de départ raisonnable et mène à des calculs qui semblent faisables. Cependant, les quantités à considérer sont différentes de celles étudiées dans le cas de la sous-algèbre radiale et de nouveaux calculs approfondis dans l'algèbre de Temperley-Lieb seront sans doute nécessaires.

Problème 1. La sous-algèbre génératrice de O_N^+ est-elle maximale abélienne ?

Ensuite, il est naturel dans ce genre d'étude, une fois le cas orthogonal connu, d'aborder le cas unitaire. On peut envisager de reprendre les calculs de [FV16] dans la catégorie de représentations de U_N^+ , qui est bien comprise. Cependant, cela risque d'être extrêmement fastidieux, alors qu'on sait par [Ban97, Thm 1] que $L^\infty(U_N^+)$ peut se voir comme une complexification (au sens des probabilités libres) de $L^\infty(O_N^+)$. Il serait donc intéressant de voir si des techniques de probabilités libres permettent d'obtenir des informations sur les sous-algèbres abéliennes dans le cas unitaire à partir de ce qu'on sait dans le cas orthogonal.

Un autre exemple à considérer est le groupe quantique de permutations S_N^+ . Ici, les calculs sont en général plus compliqués que dans le cas orthogonal. Cependant, les groupes quantiques S_N^+ et O_N^+ sont subtilement liés : O_N^+ contient un "sous-groupe d'indice 2" dont la catégorie de représentations a une structure très proche de celle de S_N^+ . Cela suggère de chercher à extraire, dans les calculs de [FV16], les résultats partiels qui peuvent se transporter par équivalence monoïdale, ce qui pourrait considérablement simplifier l'étude du cas S_N^+ .

Problème 2. Étudier les MASA radiales et génératrices dans les algèbres de von Neumann de U_N^+ et S_N^+ , si possible en transférant des résultats de [FV16].

Le troisième problème que nous voulons mentionner concerne la MASA radiale. Dans $L(\mathbb{F}_N)$, la MASA radiale est plus que singulière : elle est maximale moyennable par [Pop83, Cor 3.3] et possède même, d'après [Wen16], une propriété encore plus forte appelée *propriété d'absorption moyennable*. Cette propriété pour une sous-algèbre diffuse $A \subset M$ signifie que si $B \subset A$ est diffuse, alors toute sous-algèbre moyennable contenant B est incluse dans A . La technique pour prouver ce genre de résultat est un renforcement de la *propriété d'orthogonalité asymptotique*⁵ introduite par S. Popa dans [Pop83] pour la MASA génératrice de $L(\mathbb{F}_N)$. Dans le cas de O_N^+ , les calculs sont très différents des précédents et semblent a priori difficiles. Cependant, l'approche alternative de A. Brothier et C. Wen [BW16] dans le domaine des sous-facteurs pourrait donner des pistes étant donné les liens étroits entre O_N^+ et les algèbres de Temperley-Lieb.

Problème 3. La sous-algèbre radiale de $L^\infty(O_N^+)$ possède-t-elle la propriété d'absorption moyennable ?

1.3 Structure des permutations quantiques

En dehors des propriétés d'approximation évoquées à la Section 1.1, il existe d'autres façons d'approcher la structure d'une algèbre d'opérateurs par des objets "de dimension finie". Par exemple, un groupe discret est dit *résiduellement fini* si tout élément a une image non-triviale dans un quotient fini. Dans un travail en commun avec M. Brannan et A. Chirvasitu [BCF18], nous nous sommes intéressés à cette propriété pour les groupes quantiques de permutations, ou plutôt leurs duaux discrets.

5. *Asymptotic Orthogonality Property* en anglais.

1.3.1 Permutations quantiques

Avant de détailler nos résultats concernant les groupes quantiques de permutations, nous souhaitons introduire ces objets de façon un peu détaillée, en exploitant un lien récent avec la théorie quantique de l'information. Considérons un jeu, dont les règles sont données par deux graphes finis X et Y . Les deux joueurs A (Alice) et B (Bob) coopèrent de la façon suivante. L'arbitre donne à A un sommet v_A de X et à B un sommet v_B de X . Ensuite, A répond par un sommet w_A de Y et B par un sommet w_B de Y et ils gagnent si la condition suivante est vérifiée :

« La relation⁶ entre v_A et v_B est la même que la relation entre w_A et w_B . »

Bien sûr, A et B ne peuvent pas communiquer pendant le jeu, mais peuvent mettre au point une stratégie commune en avance. Il est facile de voir qu'une stratégie qui gagne à tous les coups est équivalente au choix d'un isomorphisme entre les deux graphes X et Y . Par conséquent, s'ils ne sont pas isomorphes, il n'existe pas de stratégie parfaite. La découverte surprenante de [LMR17] est que si les joueurs sont autorisés, toujours sans communiquer, à partager un système quantique *intriqué*, ils peuvent alors développer des *stratégies quantiques* plus efficaces que les stratégies classiques. En effet, on a le résultat suivant :

Théorème 1.3.1 (Lupini-Mančinska-Roberson). *Il existe une stratégie quantique parfaite si et seulement s'il existe un espace de Hilbert H et une matrice $P = (P_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ à coefficients dans $\mathcal{B}(H)$ tels que*

- Les P_{ij} sont des projections orthogonales pour tous $1 \leq i, j \leq N$,
- $\sum_{k=1}^N P_{ik} = 1 = \sum_{k=1}^N P_{ki}$ pour tout $1 \leq i \leq N$,
- $A_X P = P A_Y$, où A_X et A_Y désignent les matrices d'adjacence de X et Y respectivement.

Si $H = \mathbf{C}$, on doit avoir $P_{ij} \in \{0, 1\}$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$ et la seconde condition impose qu'il y a exactement un coefficient non-nul sur chaque ligne et sur chaque colonne. On a donc une matrice de permutation, ce qui justifie d'appeler P une *permutation quantique*. De plus, si $H = \mathbf{C}$ la troisième condition implique que cette permutation induit un isomorphisme entre les graphes, et P sera donc en général appelé un *isomorphisme quantique* entre X et Y . L'intérêt de cette notion est qu'il existe des exemples (voir [LMR17, Fig 1 et 2]) de graphes non-isomorphes pour lesquels il existe une stratégie quantique parfaite.

Tout ceci motive sérieusement l'étude des permutations quantiques. Le problème est qu'avec notre définition, il n'y a pas de structure analogue à celle de groupe pour les permutations, ce qui laisse peu de moyens d'étude. Heureusement, les groupes quantiques compacts fournissent exactement le bon outil pour cela, grâce à la définition suivante :

Définition 1.3.2. Pour $N \in \mathbf{N}$, la *C^* -algèbre des permutations quantiques* est définie par

$$C(S_N^+) = C^* \left(u_{ij}, 1 \leq i, j \leq N \mid u_{ij}^2 = u_{ij} = u_{ij}^*, \sum_{k=1}^N u_{ik} = 1 = \sum_{k=1}^N u_{ki} \right).$$

Comme dans le cas de O_N^+ expliqué dans l'Introduction, il existe un unique $*$ -homomorphisme $\Delta : C(S_N^+) \rightarrow C(S_N^+) \otimes C(S_N^+)$ tel que

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^N u_{ik} \otimes u_{kj}.$$

La paire $(C(S_N^+), \Delta)$ est alors un groupe quantique compact appelé *groupe quantique de permutations*.

6. Par relation nous entendons ici soit être égal, soit être relié par une arête, soit ne pas être relié par une arête.

1.3.2 Groupes quantiques discrets résiduellement finis

Comme expliqué au début de cette section, nous allons montrer que les groupes quantiques de permutations sont résiduellement finis. Donnons d'abord une définition précise de cette notion :

Définition 1.3.3. Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact. Son dual discret $\widehat{\mathbb{G}}$ est dit *résiduellement fini* si l'algèbre $\mathcal{O}(\mathbb{G})$ des coefficients de représentations est séparée par ses représentations de dimension finie. De façon équivalente, il existe une famille d'indices I et des entiers $(n_i)_{i \in I}$ tel qu'on ait un $*$ -homomorphisme injectif

$$\mathcal{O}(\mathbb{G}) \hookrightarrow \prod_{i \in I} M_{n_i}(\mathbf{C}).$$

Remarque 1.3.4. Il est nécessaire d'utiliser dans cette définition la sous-algèbre dense $\mathcal{O}(\mathbb{G})$. En effet, on ne sait pas à ce jour si la C^* -algèbre $C(S_N^+)$ est séparée par ses représentations de dimension finie. Par contre, notre résultat implique qu'un de ses quotients l'est.

Pour prouver un tel résultat, nous avons procédé par récurrence en utilisant une notion de groupe quantique topologiquement engendré par deux sous-groupes quantiques. Plus précisément, considérons un groupe quantique compact \mathbb{G} et deux autres groupes quantiques compacts \mathbb{H}_1 et \mathbb{H}_2 tels qu'il existent des $*$ -homomorphismes surjectifs

$$\pi : C(\mathbb{G}) \rightarrow C(\mathbb{H}_i)$$

pour $i = 1, 2$ entrelaçant les coproduits. On dit alors que \mathbb{G} est *topologiquement engendré* par \mathbb{H}_1 et \mathbb{H}_2 s'il n'existe pas de groupe quantique \mathbb{H} muni d'un $*$ -homomorphisme surjectif

$$\pi : C(\mathbb{G}) \rightarrow C(\mathbb{H})$$

entrelaçant les coproduits et tel que les deux applications π_1 et π_2 se factorisent par π . L'intérêt de cette notion réside dans le résultat suivant, prouvé dans [Chi15, Cor 2.12] :

Proposition 1.3.5. *Si \mathbb{G} est topologiquement engendré par \mathbb{H}_1 et \mathbb{H}_2 et si ces deux derniers ont des duaux résiduellement finis, alors $\widehat{\mathbb{G}}$ est résiduellement fini.*

Dans le cas de S_N^+ , le choix des deux sous-groupes quantiques est assez naturel.

- Le premier est obtenu en quotientant $C(S_N^+)$ par l'idéal engendré par $u_{11} - 1$. En un sens, le groupe quantique correspondant est le stabilisateur de 1 dans l'action naturelle de S_N^+ sur $\{1, \dots, N\}$. Il est donc isomorphe à S_{N-1}^+ .
- Pour le second, on prend l'abélianisation de $C(S_N^+)$, dont le groupe quantique associé est simplement le groupe symétrique S_N .

Ce dernier est résiduellement fini puisqu'il est fini, il ne reste donc plus qu'à prouver qu'ils engendrent topologiquement S_N^+ pour conclure. Dans un premier temps, nous démontrons le résultat suivant [BCF18, Prop 3.5] :

Théorème 1.3.6 (Brannan-Chirvasitu-F.). *Pour tout $N \geq 6$, S_N^+ est topologiquement engendré par S_{N-1}^+ et S_N .*

Démonstration. Des manipulations standard sur la théorie des représentations ramènent le problème à la question suivante : soit

$$f : (\mathbf{C}^N)^{\otimes k} \rightarrow \mathbf{C}$$

une forme linéaire invariante par l'action diagonale de S_{N-1}^+ et de S_N , est-elle invariante par l'action diagonale de S_N^+ ?

La meilleure façon de traiter ce problème est d'utiliser la description combinatoire des invariants de S_N^+ et de S_N utilisant les partitions (voir Chapitre 2 pour plus de détails). En effet

pour tout $N \geq 4$, on connaît une base de l'espace des formes linéaires invariantes par S_N^+ sur $(\mathbf{C}^N)^{\otimes k}$, qui est indexée par les partitions non-croisées de $\{1, \dots, k\}$.

La preuve commence par exploiter l'invariance par S_{N-1}^+ en décomposant l'espace sous la forme

$$\mathbf{C}^N = V \oplus W$$

avec $V = \mathbf{C}$ et $W = \mathbf{C}^{N-1}$. La k -ième puissance tensorielle s'écrit alors comme une somme de 2^k produits tensoriels de ces deux sous-espaces. En particulier, l'un des termes est $W^{\otimes k}$. La restriction de f à cet espace est donc donnée par des partitions non-croisées par invariance par rapport à S_{N-1}^+ .

La suite de la preuve, que nous ne détaillerons pas, consiste à montrer que la valeur de f sur les autres facteurs est déterminée par sa valeur sur $W^{\otimes k}$. C'est ici bien sûr que l'invariance par rapport à S_N intervient puisqu'elle permet de permuer les vecteurs de base sans changer la valeur de f . Le point crucial est qu'on peut ainsi se ramener à étudier f sur un espace de la forme $Z^{\otimes k}$ avec $Z \simeq \mathbf{C}^{N-2}$. Or, les applications linéaire indexées par les partitions non-croisées ne forment une base de l'espace des invariants que si la dimension de l'espace est au moins égale à 4. Ainsi, l'hypothèse $N \geq 6$ est indispensable. \square

L'inconvénient du résultat précédent est que, pour pouvoir démontrer la finitude résiduelle par récurrence, il faudrait montrer le résultat pour S_5^+ , ou prouver que ce dernier est topologiquement engendré par S_4^+ et S_5 . Il s'avère que cela est vrai, mais la preuve repose sur des résultats hautement non-triviaux. Considérons en effet un sous-groupe quantique $S_5 \subset \mathbb{G} \subset S_5^+$. Il agit transitivement, fidèlement et de façon centralement ergodique (voir par exemple [TW18a, Sec 2] pour les définitions) sur \mathbf{C}^5 . L'action préservant l'inclusion naturelle $\mathbf{C} \subset \mathbf{C}^5$, on peut lui associer une algèbre planaire de sous-facteur d'indice 5 par [Ban99a]. De plus, ce sous-facteur est irréductible. L'argument combine alors deux faits :

- Cette correspondance entre sous-groupe quantique et algèbres planaires de sous-facteur est injective par [TW18a],
- Les algèbres planaires de sous-facteurs d'indice 5 ont été entièrement classifiés⁷ (voir par exemple [JMS14]) et on peut identifier les groupes quantiques correspondant aux sous-facteurs irréductibles et observer qu'ils ne contiennent jamais S_5 , à l'exception de ceux provenant de S_5 et S_5^+ .

Ainsi, le groupe quantique topologiquement engendré par S_5 et S_4^+ contenant strictement S_5 , il doit être égal à S_5^+ . Nous pouvons maintenant démontrer notre résultat :

Corollaire 1.3.7. *Le dual du groupe quantique S_N^+ est résiduellement fini pour tout N .*

Démonstration. D'après ce qui précède, il suffit de prouver le résultat pour S_4^+ (on a $S_N^+ = S_N$ pour $N \leq 3$). Or on sait par [BC08] qu'il existe un $*$ -homomorphisme injectif

$$C(S_4^+) \hookrightarrow C(SU(2), M_4(\mathbf{C})),$$

donc les points de $C(S_4^+)$ sont séparés par des représentations de dimension 4. \square

1.3.3 Extensions et applications

Produits en couronnes libres

Le résultat précédent peut s'étendre à d'autres groupes quantiques, qui appartiennent à la famille des groupes quantiques d'automorphismes de graphes.

⁷ Il s'agit du résultat d'une longue entreprise par de nombreuses personnes, d'où le caractère non-trivial du résultat.

Définition 1.3.8. Soit X un graphe fini à N sommets. Son *groupe quantique d'automorphismes* est le groupe quantique compact obtenu en quotientant $C(S_N^+)$ par les relations

$$uA_X = A_Xu,$$

où A_X désigne la matrice d'adjacence de X .

Il n'existe aucun résultat général sur la structure de ces groupes quantiques d'automorphismes, mais on sait qu'ils se réduisent parfois au groupe d'automorphismes classiques d'un graphe. Il existe cependant une façon simple d'en produire qui ne sont pas classiques :

Définition 1.3.9. Soit X un graphe de groupe quantique d'automorphismes \mathbb{G} . Alors, l'union disjointe de N copies de X a pour groupe quantique d'automorphismes le produit en couronne libre $\widehat{\mathbb{G}} \wr S_N^+$, qui n'est pas classique.

Le produit en couronne libre a été défini dans [Bic04] précisément pour rendre cette définition valable, et donne de plus de nombreux exemples de groupes quantiques libres (voir le Chapitre 2). Notre résultat s'étend à ces groupes quantiques dans le cas où le graphe de départ X n'a pas de symétries quantiques. Il s'agit d'une version un peu plus générale de [BCF18, Thm 3.11].

Théorème 1.3.10 (Brannan-Chirvasitu-F.). *Soit Γ un groupe discret résiduellement fini. Alors, le dual de $\widehat{\Gamma} \wr S_N^+$ est résiduellement fini.*

Démonstration. La preuve repose sur le résultat pour S_N^+ et procède en deux temps. Supposons tout d'abord Γ fini. Alors, le produit en couronne libre peut être construit de la façon suivante : on pose $A_0 = \mathcal{O}(S_N^+)$ et pour $0 \leq i \leq N-1$,

$$A_{i+1} = \mathbf{C}[\Gamma] * A_i / \langle [\mathbf{C}[\Gamma], u_{i+1k}], 1 \leq k \leq N \rangle.$$

Alors, $A_N = \mathcal{O}(\widehat{\Gamma} \wr S_N^+)$. De plus, A_i se plonge naturellement dans le produit libre amalgamé

$$(\mathbf{C}[\Gamma] \otimes A_i) *_{\mathbf{C}^N} (\mathbf{C}[\Gamma] \otimes A_i)$$

et le résultat suit de propriétés de permanence de la finitude résiduelle pour les produits libre de C^* -algèbres amalgamés au-dessus d'une C^* -algèbre de dimension infinie, prouvées dans [ADEL04].

Si maintenant Γ n'est plus fini, il suffit de remarquer que $\widehat{\Gamma} \wr S_N^+$ est topologiquement engendré par les sous-groupes quantiques $\widehat{\Lambda} \wr S_N^+$ pour tous les quotients finis Λ de Γ (voir [BCF18, Lem 2.13]). \square

Il est naturel de se demander quels autres groupes quantiques d'automorphismes de graphes finis sont résiduellement finis. Cependant, la stratégie précédente est très spécifique aux produits en couronnes libres, il faut donc plutôt revenir à l'idée de la preuve par récurrence. Le problème peut alors se formuler de la façon suivante :

Problème 4. À quelle condition sur un graphe fini X a-t-on que son groupe quantique d'automorphismes est engendré par le stabilisateur quantique d'un point et le groupe classique d'automorphismes ?

Remarque 1.3.11. Pour $\widehat{\Gamma} \wr S_N^+$, la propriété ci-dessus est vérifiée pour $N \geq 6$ par [BCF18, Thm 3.13]. Le problème est que l'astuce utilisant les sous-facteurs pour S_5^+ ne marche plus pour $\widehat{\Gamma} \wr S_5^+$.

L'une des motivations principales de notre travail était le *Problème de plongement de Connes*. Il peut s'énoncer simplement comme suit : tout facteur de type II_1 se plonge-t-il dans un ultraproduct du facteur hyperfini de type II_1 ? Dans le cas des facteurs provenant de groupes, de nombreux travaux donnent des outils pour donner une réponse affirmative à cette question. En particulier, si Γ est un groupe résiduellement fini, alors $L(\Gamma)$ possède un tel plongement. Ce résultat a été étendu aux groupes quantiques dans [BBCW19, Thm 2] :

Proposition 1.3.12. *Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact dont le dual est résiduellement fini. Alors, $L^\infty(\mathbb{G})$ se plonge dans un ultraproduit du facteur hyperfini de type II_1 .*

La preuve utilise simplement le fait que sur $\mathcal{O}(\mathbb{G})$, on dispose d'une trace fidèle qui est moyennable (c'est-à-dire limite ponctuelle de traces se factorisant par des algèbres de dimension finie) obtenue en restreignant une trace du produit d'algèbres de matrices. Alors, la suite des puissances de convolution converge ponctuellement en moyenne de Cesàro vers l'état de Haar, qui est donc moyennable et les travaux de Kirchberg [Kir94, Prop 3.2] impliquent que la construction GNS associée donne une algèbre de von Neumann qui vérifie la propriété de plongement de Connes.

On a donc le résultat suivant :

Corollaire 1.3.13. *Soit Γ un groupe résiduellement fini. Alors, $L^\infty(\widehat{\Gamma} \wr_* S_N^+)$ se plonge dans un ultraproduit du facteur hyperfini de type II_1 .*

Modèles matriciels

Nous concluons cette section avec une amélioration de nos résultats qui, cette fois, ne concerne que les groupes quantiques de permutations. Rappelons que nous avons défini $C(S_N^+)$ comme une C^* -algèbre universelle engendrée par des projections. Pour vérifier qu'une relation y est vraie, il faut donc a priori la vérifier pour toute famille de projections dans un espace de Hilbert qui forment une permutation quantique. Il a été suggéré par T. Banica et I. Nechita dans [BN17] qu'il suffisait de considérer des projections de rang 1. Plus précisément, considérons l'ensemble X_N de toutes les permutations quantiques composées de projections de rang 1. C'est naturellement un fermé (donné par un nombre fini d'équations polynomiales) du produit d'espaces projectifs $P^{N-1}(\mathbf{C})^{\times N}$ et on a un $*$ -homomorphisme

$$\pi : C(S_N^+) \rightarrow C(X_N, M_N(\mathbf{C}))$$

qui envoie u_{ij} sur la fonction $P \mapsto P_{ij}$. La conjecture de T. Banica et I. Nechita est qu'il n'existe pas de sous-groupe quantique \mathbb{G} de S_N^+ par lequel π se factorise. On dit alors que π est *intérieurement fidèle*. C'est ce que nous avons prouvé dans [BCF18] pour presque toutes les valeurs de N :

Théorème 1.3.14 (Brannan-Chirvasitu-F.). *Pour tout $N \leq 5$ et $N \geq 10$, l'application π est intérieurement fidèle.*

La preuve repose sur une description de S_N^+ comme étant topologiquement engendré par deux sous-groupes quantiques plus compliqués que dans le précédent cas. La C^* -algèbre $C(X_N, M_N(\mathbf{C}))$ étant résiduellement de dimension finie, on retrouve le résultat précédent. On peut en fait faire mieux. En observant les détails de la preuve on peut même observer que trois points de X_N suffisent à empêcher toute factorisation de π , d'où

Corollaire 1.3.15. *Pour tout $N \leq 5$ et $N \geq 10$, le dual de S_N^+ est intérieurement linéaire, au sens où il admet un $*$ -homomorphisme intérieurement fidèle dans une C^* -algèbre de dimension finie.*

La construction du modèle matriciel π s'adapte sans difficulté à tout groupe quantique d'automorphisme d'un graphe fini X , pour peu que l'action de ce dernier soit transitive sur les sommets. On peut donc formuler le problème suivant :

Problème 5. À quelle condition sur un graphe transitif (au sens quantique) X le modèle matriciel précédent est-il intérieurement fidèle ?

1.4 K-théorie des C^* -algèbres de groupes quantiques

La K-théorie topologique est un outil puissant pour l'étude des C^* -algèbres et est intimement liée aux idées fondamentales de la géométrie non-commutative, en particulier via la *conjecture*

de *Baum-Connes*. Il est donc naturel, lorsqu'on s'intéresse à la topologie non-commutatives des groupes quantiques, de chercher à calculer leurs groupes de K-théorie. Ils permettent dans certains cas de distinguer les C*-algèbres réduites de ces groupes quantiques et peut de plus donner des informations de nature algébrique, comme l'absence de projection non-triviale (en analogie avec la *Conjecture de Kadison-Kaplanski*).

L'une des richesses de la K-théorie est que son étude passe souvent par les propriétés géométriques des groupes discrets, notamment leurs actions sur des espaces géométriques remarquables (arbres ou espaces de Hilbert). Cette ligne de pensée permet de développer des analogues quantiques de ces actions géométriques, avec l'espoir qu'elle puissent ensuite avoir d'autres applications. C'est la motivation d'un travail avec P. Fima dans [FF14] que nous exposerons dans la première partie de la présente section. Une telle approche géométrique n'est cependant pas toujours possible, et il faut parfois employer des techniques plus homologiques, comme dans le travail [FM18] en collaboration avec R. Martos, que nous exposerons dans la seconde partie.

Il serait beaucoup trop long et fastidieux d'introduire ici la K-théorie ou la KK-théorie, même brièvement. Il existe quelques références désormais classique à ce sujet auquel le lecteur intéressé peut se référer. Une excellent introduction à la K-théorie est fournie par [WO93], tandis qu'un texte plus récent et plus complet est donné par [RLL00]. Pour ce qui concerne la KK-théorie, il existe à ce jour deux ouvrages sur le sujet, [JT91] et [Bla98], mais aucun des deux ne traite en détail le cas équivariant, même par un groupe classique.

1.4.1 Arbres de Bass-Serre quantiques et K-moyennabilité

Le théorème de Julg-Valette

L'une des premiers applications remarquables de la K-théorie aux algèbres d'opérateurs est due à M.V. Pimsner et D.V. Voiculescu dans [PV82], où ils prouvent que pour $n \neq m$, les C*-algèbres réduites $C_r^*(\mathbb{F}_n)$ et $C_r^*(\mathbb{F}_m)$ ne sont pas isomorphes. La preuve repose sur le calcul de la K-théorie de ces C*-algèbres. Plus précisément, les auteurs démontrent que

$$K_0(C_r^*(\mathbb{F}_n)) = \mathbf{Z} \text{ et } K_1(C_r^*(\mathbb{F}_n)) = \mathbf{Z}^n.$$

Par ailleurs, tout groupe discret Γ possède une C*-algèbre maximale $C^*(\Gamma)$ et dans le cas du groupe libre, elle a la même K-théorie que la C*-algèbre réduite. Le calcul, assez subtil, du cas réduit contraste avec les arguments simples du cas maximal. Surgit alors une question naturelle : ne pouvait-on pas prévoir que la C*-algèbre maximale et la C*-algèbre réduite ont la même K-théorie ? Cela permettrait, en étendant la méthode, de calculer de nouveaux groupes de K-théorie.

C'est cette idée, développée par J. Cuntz dans [Cun83], que nous allons maintenant introduire. Pour tout groupe discret Γ , on dispose d'une surjection $\lambda : C^*(\Gamma) \rightarrow C_r^*(\Gamma)$ donnée par la représentation régulière. Le groupe est alors moyennable si et seulement si λ est inversible. Or, par functorialité, λ induit un morphisme de groupes abéliens

$$\lambda_* : K_*(C^*(\Gamma)) \rightarrow K_*(C_r^*(\Gamma))$$

pour $* \in \{0, 1\}$. Bien sûr, λ_* est inversible si λ l'est, mais la réciproque est fautive et nous avons donc un affaiblissement de la moyennabilité. Cependant, il est préférable de prendre une définition un peu plus forte pour cette notion de moyennabilité en K-théorie, appelée *K-moyennabilité*. En effet, étant données deux C*-algèbres A et B , le groupe de KK-théorie $\text{KK}(A, B)$ peut être pensé comme un ensemble de "morphisme généralisés" à homotopie près et, en particulier, tout *-homomorphisme $\pi : A \rightarrow B$ induit un élément $[\pi] \in \text{KK}(A, B)$.

Définition 1.4.1. Un groupe discret Γ est *K-moyennable* si la surjection canonique

$$\lambda : C^*(\Gamma) \rightarrow C_r^*(\Gamma)$$

induit un élément de KK-théorie $[\lambda] \in \text{KK}(C^*(\Gamma), C_r^*(\Gamma))$ inversible.

Cette définition implique que λ_* est un isomorphisme. Il reste à prouver que les groupes libres sont K -moyennables, ce que J. Cuntz a fait dans [Cun83] en réinterprétant l'un des arguments de [PV82]. Dans leur recherche de nouveaux exemples de groupes K -moyennables, P. Julg et A. Valette ont obtenu dans [JV84] un critère général remarquable de par sa nature géométrique.

Théorème 1.4.2 (Julg-Valette). *Soit Γ un groupe discret agissant sur un arbre tel que tous les stabilisateurs de sommets sont moyennables. Alors, Γ est K -moyennable.*

Remarque 1.4.3. P. Julg et A. Valette prouvent en fait ce résultat pour tout groupe localement compact, mais nous avons préféré restreindre l'énoncé au cas que nous allons ensuite généraliser.

La preuve repose sur la construction d'un triplet $\gamma = (H, K, F)$ où H et K sont des espaces de Hilbert munis de représentations de Γ et $F : H \rightarrow K$ est un opérateur unitaire modulo les compacts et qui commute aux actions de Γ modulo les compacts. Ce triplet provient naturellement de l'action sur l'arbre de la façon suivante : si x_0 est un sommet fixé une fois pour toutes, alors

- H est l'espace ℓ^2 des sommets,
- K est l'espace ℓ^2 des arêtes,
- $F(\delta_x) = \delta_{\beta(x)}$ où $\beta(x)$ est la dernière arête dans l'unique géodésique reliant x_0 à x .

Par quelques manipulations élémentaires de KK -théorie, il suffit ensuite de prouver que γ est homotope au triplet $(\mathbf{C}, 0, 0)$ où \mathbf{C} est muni de la représentation triviale de Γ . Pour ce faire, P. Julg et A. Valette utilisent le fait que la distance sur un arbre est une fonction *conditionnellement de type négatif* (voir par exemple [BdlHV08, Def C.2.1] pour la définition) pour déformer continûment le produit scalaire sur H . En effet, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}_+$,

$$\langle \delta_p, \delta_q \rangle_\lambda = e^{-\lambda d(p,q)}$$

définit un produit scalaire sur l'espace ℓ^2 des sommets. Si l'on note H_λ l'espace de Hilbert correspondant, il suffit ensuite d'adapter la représentation de Γ sur l'espace des arêtes pour obtenir, pour tout λ , un élément γ_λ en KK -théorie. La déformation est continue par construction et l'étude de ses limites en 0 et en $+\infty$ donne le résultat.

Graphes de C^* -algèbres et modules de Bass-Serre

Dans [FF14], nous avons, avec P. Fima, généralisé le Théorème 1.4.2 aux groupes quantiques discrets. Une telle généralisation était a priori une gageure, puisqu'il n'existe à ce jour pas de bonne notion d'action d'un groupe quantique sur un arbre. L'idée, exploitée pour la première fois par R. Vergnioux dans [Ver04] pour le cas particulier du produit libre de deux groupes quantiques moyennables, est de prendre le problème "à l'envers" grâce à la théorie de Bass-Serre [Ser77]. Rappelons brièvement en quoi consiste cette dernière. Un *graphe* \mathcal{G} est la donnée

- D'un ensemble $S(\mathcal{G})$ de sommets,
- D'une partie $A(\mathcal{G}) \subset S(\mathcal{G}) \times S(\mathcal{G})$ d'arêtes munie d'une involution sans point fixe $a \mapsto \bar{a}$ appelée *inversion des arêtes*,
- D'une application $s : A(\mathcal{G}) \rightarrow S(\mathcal{G})$ associant à chaque arête sa *source*. Le *but* est alors donné par l'application $b : e \mapsto s(\bar{e})$.

Considérons donc un tel graphe connexe dont chaque sommet p est muni d'un groupe discret Γ_p et chaque arête a est munie d'un sous-groupe commun à la fois à $\Gamma_{s(a)}$ et $\Gamma_{b(a)}$. La construction du groupe de lacets d'un graphe s'étend à ce cadre et définit le *groupe fondamental du graphe de groupes*.

Le résultat principal de la théorie est que ce groupe fondamental agit sur un arbre, appelé *arbre de Bass-Serre*, et que réciproquement tout groupe agissant sur un arbre provient de cette construction. Le Théorème de Julg-Valette peut donc se reformuler de la façon suivante : soit \mathcal{G}

un graphe de groupes moyennables, alors son groupe fondamental est K-moyennable. Sous cette forme, l'extension au cas quantique devient plus abordable et c'est le point de départ du travail [FF14], qui commence par la définition naturelle suivante :

Définition 1.4.4. Un *graphe de C*-algèbres* est un quadruplet

$$(\mathcal{G}, (A_q)_{q \in S(\mathcal{G})}, (A_a)_{a \in A(\mathcal{G})}, (s_a)_{a \in A(\mathcal{G})})$$

composé de

- Un graphe connexe \mathcal{G} ,
- Une C*-algèbre A_q pour tout $q \in S(\mathcal{G})$,
- Une C*-algèbre A_a pour tout $a \in A(\mathcal{G})$ avec $A_{\bar{a}} = A_a$,
- Un *-homomorphisme fidèle $s_a : A_a \rightarrow A_{s(a)}$ pour tout $a \in A(\mathcal{G})$.

Pour généraliser la théorie de Bass-Serre, il faut associer à un tel objet une *C*-algèbre fondamentale*, ce qui se fait aisément à l'aide d'une construction universelle :

Définition 1.4.5. Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{G}$ un sous-arbre maximal. La *C*-algèbre fondamentale maximale* de \mathcal{G} associée à \mathcal{T} est la C*-algèbre universelle P_m engendrée par les C*-algèbres A_q pour $q \in S(\mathcal{G})$ et des unitaires u_a pour $a \in A(\mathcal{G})$ sujets aux relations suivantes :

- $u_{\bar{a}} = u_a^*$ pour tout $a \in A(\mathcal{G})$,
- Pour tout $a \in A(\mathcal{G})$ et $x \in A_a$, $u_{\bar{a}} s_a(x) u_a = s_{\bar{a}}(x)$,
- $u_a = 1$ pour tout $a \in A(\mathcal{T})$.

Remarque 1.4.6. Le choix d'un sous-arbre maximal est déjà nécessaire dans le cas des groupes, et ne doit donc pas surprendre. Comme on peut l'espérer, la définition ne dépend pas, à isomorphisme près, du sous-arbre maximal choisit d'après [FF14, Cor 3.8]. C'est pourquoi \mathcal{T} n'apparaît pas dans notre notation P_m .

Exemple 1.4.7. Supposons que le graphe \mathcal{G} ne possède que deux sommets q_1 et q_2 et une arête a les reliant.

$$A_{q_1} \bullet \xrightarrow{B_a} \bullet A_{q_2}$$

Alors, \mathcal{G} est lui-même un sous-arbre maximal et la définition ci-dessus coïncide avec celle du *produit libre amalgamé* (voir par exemple [Bla06, II.8.3])

$$A_{q_1} \underset{A_a}{*} A_{q_2}.$$

Exemple 1.4.8. Supposons maintenant que le graphe \mathcal{G} ne possède qu'un seul sommet q et une arête a de q vers q .

$$\begin{array}{c} B_a \\ \circ \\ \bullet \\ A_q \end{array}$$

Alors, $\{q\}$ est un sous-arbre maximal et la définition ci-dessus coïncide avec celle de l'*extension HNN* (voir [Ued05])

$$\text{HNN}(A_q, A_a, s_a).$$

Ces deux exemples sont en un sens génériques. En effet, il est toujours possible d'écrire la C^* -algèbre fondamentale d'un graphe de C^* -algèbres comme une succession de produits libres amalgamés et d'extensions HNN. Ce résultat de *déviissage*, qui généralise le cas classique, est prouvé dans [FF14, Thm 3.29] mais n'est d'aucune aide pour notre problème. En effet, sauf cas très particulier, un produit libre amalgamé de groupes quantiques discrets n'est pas moyennable et on ne peut donc envisager une preuve par récurrence du Théorème de Julg-Valette.

Revenons maintenant à la C^* -algèbre P_m . Son existence est assurée car il s'agit d'un quotient de

$$\left(\underset{q \in \mathcal{S}(\mathcal{G})}{*} A_q \right) * C^*(\mathbb{F}_{A(\mathcal{G})}).$$

Toutefois, rien ne prouve qu'elle ne soit pas réduite à 0. Pour cela, il faut en produire une représentation non-triviale sur un espace de Hilbert, ou plus généralement sur un C^* -module hilbertien. Dans notre cadre, le C^* -module hilbertien sera précisément le substitut de l'arbre de Bass-Serre. Malheureusement, sa construction nécessite une hypothèse supplémentaire : à partir de maintenant, nous supposons qu'il existe pour tout $a \in A(\mathcal{G})$ une espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}_a^s : A_{s(a)} \rightarrow s_a(A_a).$$

Classiquement, les sommets et les arêtes de l'arbre de Bass-Serre sont obtenus en considérant les classes du groupe fondamental par rapport aux groupes de sommets ou d'arêtes. On peut donner un sens à cette construction dans le cadre des groupes quantiques discrets de la façon suivante : on considère le A_a -module hilbertien \mathcal{H}_a^s obtenu en faisant la construction GNS de $A_{s(a)}$ par rapport à l'espérance conditionnelle \mathbb{E}_a^s , c'est-à-dire en prenant le séparé complété par rapport au "produit scalaire"

$$\langle x, y \rangle = s_a^{-1} \circ \mathbb{E}_a^s(xy^*).$$

à valeurs dans la C^* -algèbre A_a .

Toutefois, il n'est pas évident de donner une structure d'"arbre quantique" à ces objets. Nous allons donc plutôt considérer l'espace des chemins de cet arbre fictif. Le A_a -module hilbertien \mathcal{H}_a^s contient une copie naturelle de A_a donnée par son action sur l'image de $1_{A_{s(a)}}$ et on note $\mathcal{H}_a^{s^\circ}$ son supplémentaire orthogonal. Avec ces notations, si $w = (a_1, \dots, a_n)$ est un chemin dans le graphe \mathcal{G} , on pose

- $\mathcal{K}_0 = \mathcal{H}_{a_1}^s$,
- Pour $1 \leq i \leq n-1$ tel que $a_{i+1} \neq \bar{a}_i$, $\mathcal{K}_i = \mathcal{H}_{a_{i+1}}^s$,
- Pour $1 \leq i \leq n-1$ tel que $a_{i+1} = \bar{a}_i$, $\mathcal{K}_i = \mathcal{H}_{a_{i+1}}^{s^\circ}$,
- $\mathcal{K}_n = A_{s(\bar{a}_n)}$.

Alors, \mathcal{K}_i peut être muni d'une structure de $A_{a_{i+1}}$ -module à droite et le produit tensoriel

$$\mathcal{H}_w = \mathcal{K}_0 \underset{A_{a_1}}{\otimes} \mathcal{K}_1 \underset{A_{a_2}}{\otimes} \cdots \underset{A_{a_n}}{\otimes} \mathcal{K}_n$$

est naturellement un $A_{s(e_1)}$ - $A_{s(\bar{e}_n)}$ -bimodule hilbertien appelé *module du chemin w* . Si maintenant p et q sont deux sommets de \mathcal{G} , on leur associe le module

$$\mathcal{H}_{p,q} = \bigoplus_{w:p \rightarrow q} \mathcal{H}_w$$

où la somme est topologique (on complète la somme directe algébrique) et porte sur tous les chemins de p à q . Cet objet, pour compliqué qu'il paraisse, est ce qu'il nous faut pour définir une version réduite de la C^* -algèbre fondamentale. En effet, en notant $\mathcal{L}_{A_q}(\mathcal{H}_{p,q})$ l'ensemble des applications A_q -linéaires bornées possédant un adjoint, on peut construire explicitement une représentation

$$\lambda_{p,q} : P_m \rightarrow \mathcal{L}_{A_q}(\mathcal{H}_{p,q})$$

et les résultats de [FF14, Sec 3.2.3] montrent que $\lambda_{p,q}$ est injective sur toutes les C^* -algèbres de sommets (et donc aussi d'arêtes). Ceci assure en particulier que P_m n'est pas réduite à $\{0\}$.

Arbre quantique et opérateur de Julg-Valette

Les outils détaillés dans la section précédente appartiennent au cadre général des C*-algèbres, mais il est aisé de les spécialiser aux groupes quantiques discrets. Dorénavant, nous noterons $C_m(\mathbb{G})$ la C*-algèbre enveloppante de $\mathcal{O}(\mathbb{G})$, appelée *C*-algèbre maximale* de \mathbb{G} . La définition de départ est alors :

Définition 1.4.9. Un *graphe de groupes quantiques discrets* est un quadruplet

$$(\mathcal{G}, (\mathbb{G}_q)_{q \in S(\mathcal{G})}, (\mathbb{G}_e)_{e \in A(\mathcal{G})}, (s_e)_{e \in A(\mathcal{G})})$$

composé de

- Un graphe connexe \mathcal{G} ,
- Un groupe quantique compact \mathbb{G}_q pour tout $q \in S(\mathcal{G})$,
- Un groupe quantique compact \mathbb{G}_e pour tout $e \in A(\mathcal{G})$ avec $\mathbb{G}_{\bar{e}} = \mathbb{G}_e$,
- Un *-homomorphisme fidèle $s_e : C_m(\mathbb{G}_e) \rightarrow C_m(\mathbb{G}_{s(e)})$ entreliant les coproduits pour tout $e \in A(\mathcal{G})$.

La dernière condition signifie que s_e réalise une inclusion du groupe quantique discret $\widehat{\mathbb{G}}_e$ de l'arête dans le groupe quantique discret $\widehat{\mathbb{G}}_{s(e)}$ du sommet, ce qui généralise bien la définition classique.

Il suit de [FF14, Prop 3.6] que si P_m est la C*-algèbre fondamentale maximale du graphe de C*-algèbres sous-jacent à un graphe de groupes quantiques discrets, alors P_m possède une structure naturelle de groupe quantique compact, dont la théorie des représentations est décrite dans [FF14, Thm 4.4]. Ajoutons que par [Ver04, Prop 2.2], il existe toujours des espérances conditionnelles permettant de construire une version réduite, qui coïncide avec la forme réduite du groupe quantique fondamental par [FF14, Thm 4.4].

Pour relier ces constructions à la stratégie de P. Julg et A. Valette et à la K-moyennabilité, il nous faut revenir à des espaces de Hilbert et fabriquer un triplet approprié. Ceci est possible en composant le produit scalaire sur $\mathcal{H}_{p,q}$, qui est à valeur dans $C_m(\mathbb{G}_q)$, avec la *counité*

$$\varepsilon_q : C_m(\mathbb{G}_q) \rightarrow \mathbf{C}.$$

On obtient alors des espaces de Hilbert notés $H_{p,q}$ qui permettent de définir l'espace de Hilbert des sommets de l'*arbre de Bass-Serre quantique*. Pour une arête $a \in A(\mathcal{G})$, on procède de même en complétant cette fois-ci $\mathcal{H}_{p,s(a)}$ à l'aide de $\varepsilon_a \circ \mathbb{E}_a^s$ et on note $K_{p_0,a}$ le résultat.

Définition 1.4.10. Fixons un sommet $p_0 \in S(\mathcal{G})$. L'*espace ℓ^2 des sommets* de l'arbre de Bass-Serre quantique est l'espace de Hilbert

$$H_{p_0} = \bigoplus_{q \in S(\mathcal{G})} H_{p_0,q}.$$

Il faut être attentif à ce stade à l'orientation des arêtes. Rappelons que dans un graphe tel que nous l'avons défini, chaque arête possède une arête inverse. Une *orientation* du graphe \mathcal{G} est alors une partition $A(\mathcal{G}) = A^+(\mathcal{G}) \sqcup A^-(\mathcal{G})$ telle que $\{a, \bar{a}\}$ n'est inclus dans un de ces deux ensembles pour aucune arête a .

Définition 1.4.11. Fixons un sommet $p_0 \in S(\mathcal{G})$ et une orientation sur \mathcal{G} . L'*espace ℓ^2 des arêtes positives* de l'arbre de Bass-Serre quantique est l'espace de Hilbert

$$K_{p_0} = \bigoplus_{a \in A^+(\mathcal{G})} K_{p_0,s(a)}.$$

La restriction aux arêtes positives est source de complications techniques dans les calculs mais elle est essentielle. En effet, si l'on essaye de définir l'opérateur de Julg-Valette en adaptant la définition originelle, on voit que son image est toujours une arête positive (pour l'orientation ascendante correspondant au sommet p_0). Dans notre cadre, si $w = (e_1, \dots, e_n)$ est un chemin dans \mathcal{G} et si $x = x_0 \otimes \dots \otimes x_n \in H_{p_0, s(\bar{e}_n)}$, on pose

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} \varepsilon(x)x_0 \otimes \dots \otimes x_{n-1} & \text{si } e_n \in A^+(\mathcal{G}), \\ \varepsilon(x)x_0 \otimes \dots \otimes x_{n-1} \otimes 1 & \text{si } e_n \notin A^+(\mathcal{G}). \end{cases}$$

Le premier travail est de montrer que $(H_{p_0}, K_{p_0}, \mathcal{F})$ vérifie les hypothèses définissant un élément de KK-théorie, c'est-à-dire que \mathcal{F} est unitaire modulo les compacts et commute aux représentations du groupe quantique fondamental modulo les compacts. La preuve (il s'agit de [FF14, Lem 5.5]), si elle ne contient pas d'astuce ou d'idée remarquable, est cependant rendue très difficile par la complexité des constructions ainsi que l'inévitable lourdeur des notations.

La véritable difficulté conceptuelle apparaît dans la construction de l'homotopie. Nous ne sommes pas parvenus à adapter la construction de P. Julg et A. Valette car en l'absence d'un arbre muni de sa distance géodésique, il n'y a aucun moyen naturel de déformer le produit scalaire sur les espaces de Hilbert qui forment le triplet. Nous avons donc à la place déformé les représentations du groupe quantique fondamental. Ceci fournit une homotopie qui, dans le cas classique, diffère de celle de P. Julg et A. Valette et est par conséquent nouvelle. Grâce à elle, nous avons obtenu dans [FF14, Thm 5.2] le résultat suivant

Théorème 1.4.12. *Soit \mathcal{G} un graphe de groupes quantiques discrets moyennables. Alors, le groupe quantique fondamental de \mathcal{G} est K -moyennable.*

Ce résultat généralise le théorème de Julg-Valette ainsi que les résultats de [Ver04] et [Fim13]. Mentionnons pour conclure que le Théorème de Julg-Valette a été généralisé par M.V. Pimsner dans [Pim86] de la façon suivante : si Γ est un groupe discret agissant sur un arbre avec des stabilisateurs K -moyennables, alors il est lui-même K -moyennable. Depuis, la parution de [FF14], un analogue quantique du résultat de M.V. Pimsner a été obtenu par P. Fima et E. Germain dans [FG18].

1.4.2 Torsion et K -théorie pour les produits en couronne libres

La version quantique du Théorème de Julg-Valette est un résultat théorique et, contrairement au cas classique où P. Julg et A. Valette ont pu obtenir de nouveaux exemples de groupes localement compact K -moyennables, notre résultat n'a pas eu à ce jour d'applications car on ne sait pas, en général, décomposer un groupe quantique discret comme groupe quantique fondamental d'un graphe de groupes quantiques. Ce qui manque, c'est le sens réciproque de la théorie de Bass-Serre, qui nécessiterait une bonne notion d'action de groupe quantique discret sur un "arbre quantique".

Si l'on veut donc étudier la K -théorie d'exemples concrets, il faut utiliser d'autres techniques. La seule qui ait à ce jour produit des résultats explicites dans le cadre quantique est la *conjecture de Baum-Connes*. Le problème est que la formulation originale de cette conjecture est géométrique, faisant intervenir l'espace classifiant des actions propres du groupe considéré. Une première tentative de formulation quantique a été entreprise par D. Goswami et A. Kuku dans [GK03]. Ils y construisent une version noncommutative du classifiant des actions propres ainsi qu'une application d'assemblage reliant sa K -homologie à la K -théorie de la C^* -algèbre réduite d'un groupe quantique discret quelconque. Cependant, à ce jour, aucune méthode pour prouver que cette application est un isomorphisme n'est connue. De plus, la K -homologie du membre de gauche ne se réduit pas à un calcul de cohomologie usuel, comme dans le cas de la conjecture de Baum-Connes classique. C'est pourquoi R. Meyer et R. Nest ont développé, dans [MN06, MN10], une approche radicalement différente basée sur des considérations d'algèbre homologique.

Actions de torsion et propriété de Baum-Connes forte

L'idée essentielle dans l'approche de R. Meyer et R. Nest est de considérer le problème du point de vue de la catégorie des actions du groupe quantique. Plus précisément, étant donné un

groupe quantique compact \mathbb{G} , on note $\text{KK}^{\mathbb{G}}$ la catégorie dont les objets sont les C*-algèbres A munies d'une action de \mathbb{G} , c'est-à-dire d'un *-homomorphisme

$$\alpha : A \rightarrow A \otimes C(\mathbb{G})$$

tel que $(\alpha \otimes \text{id}) \circ \alpha = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \alpha$, et dont les morphismes sont les groupes de KK-théorie équivariante.

Un point délicat dans la formulation de la conjecture de Baum-Connes pour un groupe discret est le traitement de la torsion. Ici, il nous faut une version quantique de la torsion qui s'exprime en termes d'actions. Dans le cas classique, la torsion d'un groupe discret Γ est donnée par ses sous-groupes finis Λ . Étant donné un tel sous-groupe, on obtient une co-action de la C*-algèbre maximale $C^*(\Gamma)$

$$\alpha_{\Lambda} : C^*(\Lambda) \rightarrow C^*(\Lambda) \otimes C^*(\Lambda) \subset C^*(\Gamma) \otimes C^*(\Lambda)$$

par la formule $\alpha_{\Lambda}(g) = g \otimes g$. Cette action vérifie de façon évidente les deux propriétés suivantes :

- Elle est de dimension finie,
- Elle est ergodique au sens où $\{x \in C^*(\Lambda) \mid \alpha_{\Lambda}(x) = 1 \otimes x\} = \mathbf{C} \cdot 1$.

Réciproquement, si $\alpha : A \rightarrow C^*(\Gamma) \otimes A$ est une coaction ergodique de dimension finie, on peut montrer (voir par exemple [Voi17, Prop 4.2]) qu'il existe un sous-groupe fini $\Lambda \subset \Gamma$ et un 2-cocycle unitaire normalisé⁸ ω tel qu'on ait une *équivalence de Morita équivariante*

$$A \sim C_{\omega}^*(\Lambda)$$

où $C_{\omega}^*(\Lambda)$ est la C*-algèbre de Λ avec le produit déformé $g \cdot_{\omega} h = \omega(g, h)gh$. Ceci nous mène naturellement à une définition dynamique de la torsion. Notons qu'une co-action de $C(\mathbb{G})$ est la même chose qu'une action de \mathbb{G} .

Définition 1.4.13. Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact. Une *action de torsion* est une action $\alpha : A \rightarrow C(\mathbb{G}) \otimes A$ ergodique de dimension finie. De plus, \mathbb{G} est dit *sans torsion* si pour toute action de torsion, il existe une équivalence de Morita équivariante avec l'action triviale.

Remarque 1.4.14. Bien sûr, tout sous-groupe quantique fini fournit une action de torsion. Mais dans le cadre quantique, la réciproque n'est pas vraie et nous verrons des exemples de ce phénomène ci-après.

Cette notion de torsion étant fixée, il est possible de détailler l'approche de R. Meyer et R. Nest à la conjecture de Baum-Connes. La première chose à faire est de remarquer qu'on peut travailler indifféremment avec le groupe quantique compact \mathbb{G} ou avec le groupe quantique discret dual $\widehat{\mathbb{G}}$. En effet, S. Baaj et G. Skandalis ont montré dans [BS89] qu'il existe une équivalence de catégories naturelle (donnée par le produit croisé) entre $\text{KK}^{\mathbb{G}}$ et $\text{KK}^{\widehat{\mathbb{G}}}$. Nous allons donc, pour donner une intuition des idées de cette théorie, nous restreindre dans un premier temps au cas des groupes discrets classiques.

Considérons donc un groupe discret Γ . Si $\Lambda < \Gamma$ est un sous-groupe et si A est une Λ -C*-algèbre, le théorème d'imprimitivité de Green ([Gre78]) donne un isomorphisme

$$K_* \left(\text{Ind}_{\Lambda}^{\Gamma}(A) \rtimes_r \Gamma \right) \simeq K_* (A \rtimes_r \Lambda).$$

Si Λ est fini, le membre de droite de cette équation peut être "plus simple" à calculer que le membre de gauche. L'idée générale est donc de chercher à "approcher" une Γ -C*-algèbre quelconque A par des induites de sous-groupes finis. Pour formaliser cette idée d'approximation en un sens utile pour les calculs, il est nécessaire d'utiliser la structure de *catégorie triangulée*.

8. C'est-à-dire une application $\omega : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{T}$ telle que $\omega(g, hk)\omega(h, k) = \omega(gh, k)\omega(g, h)$ et $\omega(g, e) = 1 = \omega(e, g)$ pour tous $g, h, k \in \Gamma$.

Toutefois, puisque nous n'aurons pas besoin de la manipuler directement, nous nous contenterons de décrire certaines constructions sans donner toutes les définitions formelles. Posons⁹

$$\mathcal{FI}_\Gamma = \{\text{Ind}_\Lambda^\Gamma(A) \mid \Lambda < \Gamma \text{ fini}\}$$

et considérons tout ce qui peut être obtenu à partir de ces C^* -algèbres en utilisant les trois opérations suivantes :

- Les sommes directes,
- La suspension : $\Sigma A = \{f : [0, 1] \rightarrow A \text{ continue} \mid f(0) = 0 = f(1)\}$,
- Les extensions de la forme

$$\Sigma B \longrightarrow C_f \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$$

où $f : A \rightarrow B$ est un $*$ -homomorphisme et

$$C_f = \{(a, b) \in A \oplus C_0([0, 1], B) \mid f(a) = b(1)\}$$

est le *cône d'application* associé.

On obtient ainsi une sous-catégorie $\langle \mathcal{FI}_\Gamma \rangle$ dite *localisée*. Comme les suites exactes du type ci-dessus donnent des suites exactes en K -théorie, $\langle \mathcal{FI}_\Gamma \rangle$ est un candidat raisonnable pour les Γ - C^* -algèbres qui sont “bien approchées” par des induites de sous-groupes finis. De plus, il admet un complémentaire au sens des catégories triangulées, à savoir¹⁰

$$\mathcal{FC}_\Gamma = \{A \mid \text{Res}_\Lambda^\Gamma = 0 \text{ pour tout } \Lambda < \Gamma \text{ fini}\}.$$

R. Meyer a montré dans [MN10, Thm 7.3] que toute Γ - C^* -algèbre possède une “meilleure approximation” par des actions finiment induites :

Théorème 1.4.15 (Meyer-Nest). *Pour tout $A \in \text{KK}^\Gamma$, il existe $\tilde{A} \in \langle \mathcal{FI}_\Gamma \rangle$ et $N \in \mathcal{FC}_\Gamma$ tels que la suite exacte*

$$\Sigma N \longrightarrow \tilde{A} \longrightarrow A \longrightarrow N$$

soit isomorphe à la suite exacte d'un cône d'application.

Les Γ - C^* -algèbres \tilde{A} et N sont uniques en un certain sens, et la flèche $\tilde{A} \rightarrow A$ est appelé *élément de Dirac* et est une généralisation de l'objet du même nom utilisé dans l'étude de la conjecture de Baum-Connes. Si maintenant on applique le foncteur $K_*(\cdot \rtimes_r \Gamma)$, on obtient par functorialité une application

$$K_*(\tilde{A} \rtimes_r \Gamma) \rightarrow K_*(A \rtimes_r \Gamma)$$

qui n'est autre que l'application d'assemblage de Baum-Connes.

Revenons maintenant au cadre quantique. Puisque la notion de sous-groupe quantique fini est insuffisante pour rendre compte de la torsion, nous allons utiliser à la place les actions de torsions, ce qui nécessite de travailler dans un premier temps avec la version compacte \mathbb{G} . Considérons donc toutes les \mathbb{G} - C^* -algèbres de la forme $A \otimes B$ où A est une action de torsion et l'action sur B est triviale. On note $\mathcal{T}_\mathbb{G}$ cette collection, où \mathcal{T} signifie *torsion*, et on s'intéresse dans la suite à la plus petite sous-catégorie localisée qui la contient, qu'on note $\langle \mathcal{T}_\mathbb{G} \rangle$. Son image par la dualité de Baaĵ-Skandalis est notée $\langle \mathcal{FI}_{\widehat{\mathbb{G}}} \rangle$ et jouera le rôle des actions finiment induites. La machinerie homologique décrite précédemment pour un groupe discret s'applique encore dans ce cadre et la *conjecture de Baum-Connes à coefficients dans A* est l'affirmation que le morphisme

$$K_*(\tilde{A} \rtimes_r \widehat{\mathbb{G}}) \rightarrow K_*(A \rtimes_r \widehat{\mathbb{G}})$$

9. La notation usuelle (dans le cas localement compact) est \mathcal{CI} pour *compactly induced*. Nous avons préféré, dans le cadre de cet exposé simplifié, prendre la notation \mathcal{FI} pour *finiment induites*.

10. La notation \mathcal{FC} signifie *finiment contractile*, que nous avons substitué au \mathcal{CC} de *compactly contractible*.

est un isomorphisme. En général, il est difficile d'obtenir des informations sur ce morphisme, mais il existe un cas très simple. Si $A \in \langle \mathcal{FI}_{\widehat{\mathbb{G}}} \rangle$, alors par définition $\tilde{A} = A$ donc le morphisme est l'identité, qui est un isomorphisme. Une façon de montrer la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans A peut donc être de montrer que $A \in \langle \mathcal{FI}_{\widehat{\mathbb{G}}} \rangle$. C'est ce que nous avons fait avec R. Martos dans [FM18] en un sens très fort donné par la définition suivante :

Définition 1.4.16. Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact. On dit que $\widehat{\mathbb{G}}$ satisfait la *propriété de Baum-Connes forte* si on a l'égalité

$$\langle \mathcal{FI}_{\widehat{\mathbb{G}}} \rangle = \mathrm{KK}^{\widehat{\mathbb{G}}}.$$

Classification des actions de torsion

En nous inspirant des idées de C. Voigt dans [Voi17], nous sommes parvenus avec R. Martos à prouver dans [FM18, Thm 3.19] le résultat suivant :

Théorème 1.4.17 (F.-Martos). *Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact sans torsion satisfaisant la propriété de Baum-Connes forte. Alors, pour tout $N \geq 4$, le dual du produit en couronne libre $\mathbb{G} \wr_* S_N^+$ satisfait la propriété de Baum-Connes forte.*

Nous avons déjà rencontré les produits en couronne libres à la Section 1.3 sans vraiment les définir. Pour ce qui suit, nous n'aurons toujours pas besoin d'une définition formelle, il suffira d'en connaître un "modèle" à équivalence monoïdale près. Considérons le produit libre $\mathbb{G} \hat{*} SU_q(2)$. Ses représentations irréductibles sont données, d'après [Wan95, Thm 3.10], par les mots alternés en les représentations irréductibles de \mathbb{G} et de $SU_q(2)$. En particulier, si u est la représentation fondamentale de $SU_q(2)$, alors pour tout $\alpha \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$, on a une représentation irréductible

$$r(\alpha) = u\alpha u.$$

Soit $C(\mathbb{H}_q)$ la sous-C*-algèbre de $C(\mathbb{G}) * C(SU_q(2))$ engendrée par les coefficients de toutes les $r(\alpha)$. La restriction du coproduit en fait un groupe quantique compact que nous noterons \mathbb{H}_q et qui sera central pour notre étude, à cause du résultat suivant de P. Fima et L. Pittau [FP16, Thm 4.1] (une version dans le cas unimodulaire avait été donnée précédemment par F. Lemeux et P. Tarrago dans [LT16, Thm 5.11]) :

Théorème 1.4.18 (Fima-Pittau). *Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact, soit $N \geq 4$ et soit $0 < q < 1$ tel que $q + q^{-1} = \sqrt{N}$. Alors, le produit en couronne libre $\mathbb{G} \wr_* S_N^+$ est monoïdalement équivalent à \mathbb{H}_q .*

Il suit des liens entre équivalence monoïdale et actions ergodiques (voir [BDRV06], [DRVV10] et [Voi11]) que toute équivalence monoïdale $\mathbb{G} \sim \mathbb{H}$ induit une équivalence de catégories triangulées $\mathrm{KK}^{\mathbb{G}} \sim \mathrm{KK}^{\mathbb{H}}$, de sorte qu'il nous suffit d'étudier \mathbb{H}_q . Comme expliqué dans la section précédente, l'essentiel est d'en comprendre la torsion. L'avantage de considérer \mathbb{H}_q au lieu de $\mathbb{G} \wr_* S_N^+$ est que nous disposons d'une inclusion $C(\mathbb{H}_q) \subset C(\mathbb{G}) * C(SU_q(2))$ qui permet d'utiliser l'induction et la restriction pour étudier les actions. Cette approche nécessite alors dans un premier temps d'étudier la torsion des produits libres.

La première remarque est que toute action de torsion

$$\alpha : A \rightarrow A \otimes C(\mathbb{G})$$

d'un groupe quantique compact \mathbb{G} induit une action de torsion du produit libre $\mathbb{G} \hat{*} \mathbb{H}$ et, dans la mesure où "rien n'est ajouté" dans le produit libre, on peut espérer que toute action de torsion est de cette forme. C'est ce que nous avons montré avec R. Martos dans [FM18, Thm 3.5]. Pour ce faire, nous avons exploité une idée introduite par Y. Arano et K. De Commer dans [ADC19] que nous allons maintenant détailler.

À toute action $\alpha : A \rightarrow A \otimes C(\mathbb{G})$ de \mathbb{G} on peut associer la C*-catégorie $\mathrm{Mod}(\alpha)$ des *A-modules hilbertiens α -équivariants de dimension finie* (voir [ADC19, Def 2.3] pour la définition), qui a la

structure d'une C^* -catégorie module¹¹ sur la C^* -catégorie monoïdale $\text{Rep}(\mathbb{G})$ des représentations de \mathbb{G} (voir Section 2.1.3 pour plus de détails sur les C^* -catégories monoïdales). De plus, les catégories $\text{Mod}(\alpha)$ et $\text{Mod}(\beta)$ associées à deux actions α et β sont équivalentes (en tant que C^* -catégories modules) si et seulement s'il existe une équivalence de Morita équivariante entre les actions correspondantes [DCY13, Thm 6.4]. Ainsi formulé, le problème ne semble pas plus simple, mais cette description a l'avantage de nous permettre d'utiliser des outils catégoriques, et notamment la K-théorie algébrique.

Concrètement, considérons tout d'abord $K_0(\text{Rep}(\mathbb{G}))$, le groupe abélien libre sur les classes d'équivalences de représentations irréductibles de \mathbb{G} . Le produit tensoriel muni ce groupe d'une structure d'anneau noté $R(\mathbb{G})$ et appelé *anneau de fusion de \mathbb{G}* . Alors, le groupe abélien libre $K_0(\text{Mod}(\alpha))$ sur les classes d'équivalence de modules irréductibles est naturellement muni d'une structure de module sur $R(\mathbb{G})$, appelé *module de fusion de α* et noté $M(\alpha)$. De plus, $R(\mathbb{G})$ et $M(\alpha)$ ont une structure particulière qui peut être formalisée par la notion de \mathbf{Z}_+ -anneau (voir par exemple [EGNO15, Chap 3] pour un traitement détaillé de cette théorie). Nous ne donnerons pas ici le cadre général mais simplement quelques remarques sur la structure particulière de $M(\alpha)$ en utilisant le vocabulaire de [ADC19].

Notons J l'ensemble des classes d'équivalences de modules irréductibles. Alors, $M(\alpha) = \mathbf{Z}[J]$ comme groupe abélien et la structure de module est donnée par des constantes de structures $\lambda_{x,j}^{j'}$ telles que pour $x \in \text{Irr}(\mathbb{G})$,

$$x \otimes j = \sum_{j' \in J} \lambda_{x,j}^{j'} j$$

et seul un nombre fini de termes de cette somme sont non nuls. De plus, la réciprocity de Frobenius (voir [NT13, Thm 2.2.6]) pour les représentations de \mathbb{G} implique que $\lambda_{x,j}^{j'} \neq 0$ si et seulement si $\lambda_{x,j'}^j \neq 0$. Enfin, on dispose d'une fonction de dimension $d : J \rightarrow \mathbf{N}$ qui s'étend par linéarité et vérifie les propriétés suivantes :

- $d(j) > 0$ pour tout $j \in J$,
- $d(x \otimes j) = d(x)d(j)$ pour tout $x \in \text{Irr}(\mathbb{G})$ et $j \in J$.

Ceci nous conduit à la définition suivante :

Définition 1.4.19. Un *module de fusion* M sur $R(\mathbb{G})$ est un module de la forme $\mathbf{Z}[J]$ avec des constantes de structures $(\lambda_{x,j}^{j'})_{x \in \text{Irr}(\mathbb{G}), j, j' \in J}$ qui sont des entiers positifs tels que

$$\lambda_{x,j}^{j'} \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_{x,j'}^j \neq 0$$

et muni d'une application linéaire $d : M \rightarrow \mathbf{N}$ vérifiant

- $d(j) > 0$ pour tout $j \in J$,
- $d(x \otimes j) = d(x)d(j)$ pour tout $x \in \text{Irr}(\mathbb{G})$ et $j \in J$.

Un module de fusion est dit

- *Connexe* si pour tous $j, j' \in J$, il existe $x \in \text{Irr}(\mathbb{G})$ tel que $\lambda_{x,j}^{j'} \neq 0$
- *Cofini* si pour tous $j, j' \in J$, $\{x \in \text{Irr}(\mathbb{G}) \mid \lambda_{x,j}^{j'} \neq 0\}$ est fini.

On vérifie aisément que si l'action α est ergodique, alors $M(\alpha)$ est connexe et que si A est de dimension finie, alors $M(\alpha)$ est cofini. Nous sommes ainsi ramenés à la classification des modules de fusion connexes cofinis sur un anneau que nous connaissons explicitement. Toutefois, il faut rester prudent : rien ne garantit que tout module de fusion sur $R(\mathbb{G})$ provienne d'une action de \mathbb{G} . De plus, autant il est clair que s'il existe une équivalence de Morita équivariante entre A et B , alors $M(\alpha) \simeq M(\beta)$, autant la réciproque n'a pas de raison d'être vraie. Il existe cependant un cas important où elle l'est [ADC19, Thm 2.8] :

11. Il s'agit d'une généralisation naturelle de la notion de module sur un anneau que nous ne détaillerons pas ici. Nous renvoyons le lecteur à [DCY13, Sec 2.3] pour un exposé détaillé.

Théorème 1.4.20 (Arano-De Commer). *Soit $\alpha : A \rightarrow A \otimes C(\mathbb{G})$ une action d'un groupe quantique compact \mathbb{G} telle que $M(\alpha) \simeq R(\mathbb{G})$ comme $R(\mathbb{G})$ -modules. Alors, il existe une équivalence de Morita équivariante entre A et \mathbf{C} muni de l'action triviale de \mathbb{G} .*

Dans notre étude il s'est en fait avéré qu'à chaque fois que nous avons pu classifier les modules de torsion sur $R(\mathbb{G})$, la preuve s'adaptait au langage des C*-catégories pour donner une classification des C*-catégories modules sur $\text{Rep}(\mathbb{G})$, et donc des actions de torsion. On obtient alors le résultat suivant [FM18, Thm 3.5] :

Théorème 1.4.21 (F.-Martos). *L'induction induit une bijection entre les classes d'équivalence de Morita équivariantes des actions de torsion d'un produit libre $\mathbb{G} \hat{*} \mathbb{H}$ et celles des actions de torsion des groupes quantiques compacts \mathbb{G} et \mathbb{H} .*

Démonstration. Considérons une action de torsion du produit libre et restreignons-là à \mathbb{G} ou \mathbb{H} . Elle se décompose alors comme une somme directe d'actions de torsion. Il suit de la preuve de [ADC19, Thm 1.25] que si toutes les composantes de ces restrictions sont équivalentes à l'action triviale, alors l'action de départ l'est aussi. Il existe donc une composante non-triviale, disons dans la restriction à \mathbb{G} . Il faut alors prouver, en utilisant la structure de la théorie des représentations d'un produit libre, que son induite à $\mathbb{G} \hat{*} \mathbb{H}$ est équivalente à l'action de départ. Il s'agit d'une preuve délicate pour les détails de laquelle nous renvoyons à [FM18, Prop 3.4]. \square

Armés de ce résultat, nous pouvons maintenant aborder les produits en couronne libres, ou plus précisément les groupes quantiques compacts \mathbb{H}_q . Étant donnée une action de torsion de \mathbb{H}_q , son induite à $\mathbb{G} \hat{*} SU_q(2)$ est équivalente, d'après le théorème précédent, à une induite d'une action de torsion de \mathbb{G} ou de $SU_q(2)$. Comme $SU_q(2)$ est sans torsion d'après [Voi11, Prop 3.2], toute action de torsion de \mathbb{H}_q est un facteur direct de la restriction de l'induite à $\mathbb{G} \hat{*} SU_q(2)$ d'une action de torsion de \mathbb{G} . En étudiant ces facteurs directs, on aboutit à la classification cherchée [FM18, Thm 3.9] :

Théorème 1.4.22 (F.-Martos). *L'induction suivie de la restriction induit une bijection entre les classes d'équivalence de Morita équivariantes de toutes les actions de torsion du groupe quantique compact \mathbb{G} et les classes d'équivalences de toutes les actions de torsion non-triviales du produit en couronne libre $\widehat{\mathbb{G}} \wr_* SU_q(2)$.*

Une conséquence de ce résultat est qu'un produit en couronne libre possède toujours au moins une action de torsion non-triviale. Cependant, si \mathbb{G} est supposé sans torsion, il n'y a qu'une seule telle action (qui peut être décrite explicitement) et l'on peut alors en déduire l'un des résultats principaux [FM18, Thm 3.19] de notre travail :

Théorème 1.4.23 (F.-Martos). *Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact sans torsion ayant la propriété de Baum-Connes forte. Alors, $\widehat{\mathbb{G}} \wr_* S_N^+$ a la propriété de Baum-Connes forte.*

Signalons qu'on peut déduire de ce qui précède que, sous les mêmes hypothèses, $\widehat{\mathbb{G}} \wr_* S_N^+$ est K-moyennable, ce qui s'avère utile pour les calculs de K-théorie. L'hypothèse “ \mathbb{G} sans torsion” semble superflue dans l'énoncé précédent et n'est due qu'au fait qu'on ne sait pas à ce jour si la propriété de Baum-Connes forte passe aux produits libres en présence de torsion. Prouver ceci nécessiterait de reprendre et de généraliser le travail de R. Vergnioux et C. Voigt [VV13].

Problème 6. Prouver qu'un produit libre de groupes quantiques compacts avec la propriété de Baum-Connes forte a encore la propriété de Baum-Connes forte, même si les facteurs possèdent des actions de torsion non-triviales.

Quelques calculs de K-théorie

En utilisant la propriété de Baum-Connes forte et les idées développées par C. Voigt dans [Voi17], il est possible de calculer la K-théorie de la C*-algèbre réduite de certains produits en couronne libres. Toutefois, nous ne sommes pas parvenus, dans notre travail avec R. Martos, à faire le calcul pour $\widehat{\mathbb{G}} \wr_* S_N^+$ lui-même mais seulement, dans certains cas, pour \mathbb{H}_q en utilisant à nouveau l'inclusion dans le produit libre.

Posons $G = \widehat{\mathbb{G}} \wr SU_q(2)$. La stratégie repose sur l'inclusion $C(\mathbb{H}_q) \subset C(G)$ qui permet de restreindre les suites exactes en KK-théorie. Plus précisément, supposons que l'on ait une résolution projective de longueur 1 de \mathbf{C} dans $\text{KK}^{\widehat{G}}$:

$$0 \longrightarrow B_1 \longrightarrow B_0 \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow 0.$$

Les résultats de [MN06] impliquent que l'élément de Dirac $\widetilde{\mathbf{C}}$ appartient à un triangle exact de la forme

$$B_1 \longrightarrow B_0 \longrightarrow \widetilde{\mathbf{C}} \longrightarrow \Sigma B_1. \quad (1.2)$$

L'image de ce triangle dans $\text{KK}^{\widehat{\mathbb{H}}_q}$ est encore exacte et produit donc une suite exacte à six termes en K-théorie, à l'aide de laquelle il est possible de calculer la K-théorie de $C^*(\widehat{\mathbb{H}}_q) = C(\mathbb{H}_q)$.

Dans le cas des produits libres, R. Vergnioux et C. Voigt ont construit dans [VV13] une résolution projective de longueur 1 de \mathbf{C} , mais leur construction ne fonctionne pas si le second facteur est $SU_q(2)$. Il faut modifier leur preuve, ce que nous avons fait dans [FM18, Sec 4]. Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant [FM18, Prop 4.5 et Prop 4.6] :

Théorème 1.4.24 (F.-Martos). *Soit*

$$\mathbb{G} = U_{P_1}^+ * \cdots * U_{P_k}^+ * O_{Q_1}^+ * \cdots * O_{Q_l}^+$$

où $P_i \in GL_{m_i}(\mathbf{C})$ avec $m_i \geq 2$ et $Q_j \in GL_{n_j}(\mathbf{C})$ avec $n_j \geq 2$ satisfont $Q_j \overline{Q_j} = \pm \text{id}$. Alors,

$$\begin{aligned} K_0(C(\mathbb{H}_q)) &= \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \\ K_1(C(\mathbb{H}_q)) &= \mathbf{Z}^{2k+l+1}. \end{aligned}$$

Nous nous sommes également intéressés au cas où \mathbb{G} est le dual d'un groupe libre \mathbb{F}_N . Dans ce cas, on peut à nouveau construire une résolution projective du produit libre qui donne le résultat suivant [FM18, Prop 4.8] :

Proposition 1.4.25. *Pour $\mathbb{G} = \widehat{\mathbb{F}}_N$, on a*

$$\begin{aligned} K_0(C(\mathbb{H}_q)) &= \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \\ K_1(C(\mathbb{H}_q)) &= \mathbf{Z}^{n+1}. \end{aligned}$$

Il y a deux directions naturelles de généralisation de ces calculs. La première concerne le produit en couronne libre $\widehat{\mathbb{G}} \wr S_N^+$ lui-même. Dans ce cas, il faut produire une résolution projective de l'action triviale "à la main" puisqu'il n'y a plus de produit libre dans lequel plonger le groupe quantique. Si \mathbb{G} est trivial, C. Voigt a construit dans [Voi17] une telle résolution, mais nous ne sommes pas parvenus à l'adapter au cadre général. Il est possible que pour \mathbb{G} non-trivial, il faille chercher une résolution de longueur supérieure à un, auquel cas on n'obtiendrait plus une suite exacte mais une suite spectrale.

Problème 7. Construire une résolution de \mathbf{C} "la plus courte possible" pour $\widehat{\mathbb{G}} \wr S_N^+$, où \mathbb{G} est un groupe libre ou un produit libre de groupes quantiques libres.

La seconde concerne la classe de groupes \mathbb{G} pour laquelle on peut faire les calculs. Même si \mathbb{G} est le dual d'un groupe discret, il est facile de voir que la résolution utilisée pour les groupes libres \mathbb{F}_N ne fonctionne pas dès que le groupe admet des relations. Encore une fois, la solution est peut-être de rallonger la résolution, quitte à manipuler ensuite des suites spectrales.

Problème 8. Calculer la K-théorie de \mathbb{H}_q pour $\mathbb{G} = \widehat{\Gamma}$, avec Γ un groupe discret de type fini sans torsion.

Ajoutons qu'une fois le problème de la torsion mentionné plus haut résolu, on pourra s'attaquer au cas de $\mathbf{Z}/s\mathbf{Z} \wr S_N^+$. Ce groupe quantique est un analogue du groupe de réflexions H_N^s et est un objet intéressant (voir par exemple la Section 3.2). Ajoutons que pour les groupes quantiques de réflexion, on peut également envisager une preuve par récurrence exploitant la décomposition utilisée dans la preuve du Théorème 1.3.10.

Chapitre 2

Aspects algébriques

« La logique est moins nécessaire à la peinture qu'à la poésie ;
il faut raisonner mathématiquement juste sur certains sentiments ;
mais il faut avoir ces sentiments :
tout homme qui ne sent pas que la mélancolie
est inhérente à l'architecture gothique,
et la joie à la grecque,
doit s'appliquer à l'algèbre. »

Stendhal, *Histoire de la peinture en Italie*

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, l'une des grandes richesses de la théorie des groupes quantiques compacts est la multiplicité des points de vue sous lesquels ils peuvent être abordés. On sait depuis les travaux de S.L. Woronowicz [Wor88] que les algèbres d'opérateurs ne sont pas nécessaires pour traiter les groupes quantiques discrets ou compacts. Elles peuvent être remplacées par une structure plus algébrique, les *C*-catégories monoïdales*. Ce point de vue peut, de prime abord, sembler beaucoup plus abstrait. Le but de la première partie de ce chapitre sera de montrer qu'il n'en est rien et qu'au contraire, les C*-catégories monoïdales apparaissent naturellement quand on s'intéresse à des questions très concrètes de représentations ou d'invariants. De plus, il s'agit d'une perspective extrêmement fructueuse pour produire des familles d'exemples de groupes quantiques aux propriétés intéressantes, comme nous l'expliquerons plus loin.

Nous avons choisi de donner ici une assez longue introduction au cadre des groupes quantiques de partitions. Premièrement, par souci de clarté et deuxièmement parce que notre approche, basée sur la théorie des invariants plutôt que sur des considérations de probabilités libres, n'est jamais apparue telle qu'elle dans les articles publiés sur le sujet. Nous pensons qu'elle permet d'envisager ces constructions sous un autre angle, en les rattachant à des travaux plus anciens, notamment de R. Brauer.

2.1 De la dualité de Schur-Weyl aux partitions

Considérons un groupe G agissant sur un espace vectoriel (sur \mathbf{C}) de dimension finie V via une représentation ρ . Le groupe G agit alors diagonalement sur la k -ième puissance tensorielle $V^{\otimes k}$ de V et chaque élément de $g \in G$ donne ainsi un opérateur $\rho^{\otimes k}(g) \in \text{End}(V^{\otimes k})$. L'un des problèmes fondamentaux de la théorie des représentations est de décrire le *commutant* de ces représentations, c'est-à-dire les algèbres

$$\text{End}_G(V^{\otimes k}) = \{T \in \text{End}(V^{\otimes k}), T \circ \rho(g) = \rho(g) \circ T\}.$$

Si G est le groupe linéaire, la description de ce commutant en termes du groupe symétrique S_N est connue sous le nom de *dualité de Schur-Weyl*. Plusieurs méthodes ont été développées pour attaquer ce problème, en fonction des propriétés du groupe G . Ici, nous nous intéresserons à une approche purement combinatoire initiée par R. Brauer dans [Bra37].

2.1.1 Un détour par la théorie des invariants

Afin d'expliquer l'idée de R. Brauer, il nous faut d'abord détailler quelques notations. Nous supposons pour simplifier qu'un produit scalaire a été fixé sur V et que $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$ est une base orthonormée. Une base orthonormée de $V^{\otimes k}$ est alors donnée par les vecteurs

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$$

pour tous les k -uplets $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$. Étant donnés deux tels k -uplets \mathbf{i} et \mathbf{j} ainsi qu'un endomorphisme T de $V^{\otimes k}$, on pose

$$T_{\mathbf{i}\mathbf{j}} = \langle T(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}), e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k} \rangle.$$

De même, si J est une fonction de $V^{\otimes k} \otimes V^{\otimes k}$ dans \mathbf{C} , on pose

$$J(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j}) = J(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k}).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat de [Bra37] qui permet de ramener le problème à l'étude des invariants polynomiaux.

Théorème 2.1.1 (Brauer). *Un opérateur T sur $V^{\otimes k}$ est dans $\text{End}_G(V^{\otimes k})$ si et seulement s'il existe une fonction J sur $V^{\otimes k} \otimes V^{\otimes k}$, polynomiale en les coordonnées et invariante par G , telle que pour tous $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$ et $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_k)$,*

$$T_{\mathbf{i}\mathbf{j}} = J(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j}).$$

Afin de voir l'intérêt de ce théorème, nous allons l'illustrer dans le cas du groupe orthogonal, qui est l'un des plus simples. Pour un entier N , on considère $V = \mathbf{C}^N$ muni du produit scalaire canonique et on note O_N le groupe orthogonal associé. Par définition, l'application polynomiale

$$J : \begin{cases} V^{\otimes 2} & \rightarrow & \mathbf{C} \\ v_1 \otimes v_2 & \mapsto & \langle v_1, v_2 \rangle \end{cases}$$

est invariante sous l'action de O_N . Pour étendre cette fonction à plus de deux tenseurs, une façon simple est de considérer $2k$ tenseurs et de les apparier deux par deux. Pour faire cela, il suffit de choisir une partition p de l'ensemble $\{1, \dots, 2k\}$ dont les parties sont des paires $\{a, b\}$, puis de définir une application

$$J_p : \begin{cases} V^{\otimes 2k} & \rightarrow & \mathbf{C} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_{2k} & \mapsto & \prod_{\{a,b\} \in p} \langle v_a, v_b \rangle \end{cases}$$

où le produit est indexé par les paires $\{a, b\}$ de la partition p . L'invariance de J caractérise entièrement le groupe orthogonal, et les fonctions J_p sont toutes les fonctions polynomiales que l'on peut construire élémentairement à partir de J . Il semblerait donc raisonnable que nous ayons ainsi obtenu, quitte à prendre des combinaisons linéaires, tous les invariants polynomiaux. C'est le cas, et cette affirmation est l'objet du *Premier théorème fondamental de la théorie des invariants* du groupe orthogonal (voir par exemple [Wey97, Thm 10.2.A] pour une démonstration) :

Théorème 2.1.2 (Premier théorème fondamental de la théorie des invariants du groupe orthogonal). *Les invariants polynomiaux du groupe orthogonal sont les combinaisons linéaires des fonctions J_p .*

Ce résultat signifie que l'unique ingrédient nécessaire pour construire des invariants de O_N sont les partitions de $\{1, \dots, 2k\}$ en blocs de taille deux. De telles partitions seront appelées *partitions en paires*. Étant donnée une telle partition en paire p et deux k -uplets \mathbf{i} et \mathbf{j} , posons

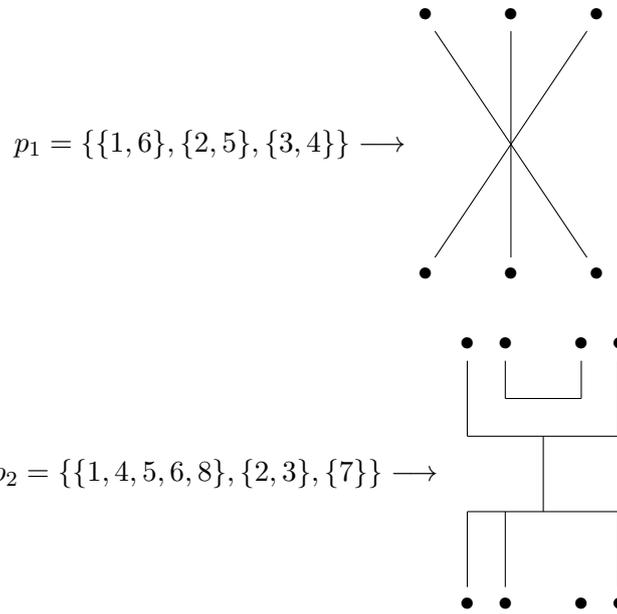
$$\delta_p^*(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = J_p(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j}).$$

Alors, les opérateurs

$$T_p : e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \mapsto \sum_{\mathbf{j}=(j_1, \dots, j_k)} \delta_p^*(\mathbf{i}, \mathbf{j}) e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k}$$

engendrent (en tant qu'espace vectoriel) l'algèbre $\text{End}_{O_N}(V^{\otimes k})$ par le Théorème 2.1.1. En d'autres termes, nous avons résolu notre problème initial dans le cas de O_N .

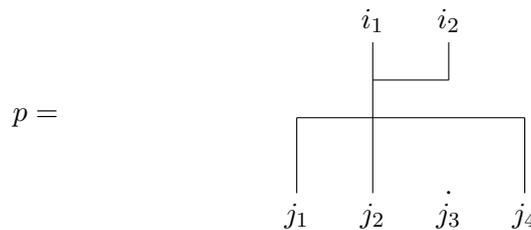
Notre stratégie a cependant un défaut, à savoir la définition de δ_p^* , qui repose sur notre connaissance des invariants du groupe. Pour espérer généraliser la méthode, il faudrait en donner une description intrinsèque. C'est là la seconde idée de R. Brauer : il a introduit dans [Bra37] une description graphique des partitions en paires aujourd'hui appelée *diagrammes de Brauer*. La définition originelle concerne les partitions en paires mais s'adapte sans modification aux partitions arbitraires, nous la donnons donc en toute généralité. Si p est une partition de $\{1, \dots, 2k\}$, on dessine deux lignes horizontales de k points, puis on connecte deux points par un trait si et seulement s'ils appartiennent au même *bloc* de la partition p , c'est-à-dire au même sous-ensemble. Voici deux exemples, l'un en paires et l'autre non :



Partant de cette description, T. Banica et R. Speicher ont défini dans [BS09, Def 1.6] une application δ_p de la façon suivante :

Définition 2.1.3. Soit p une partition et soient $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$ et $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_k)$ deux k -uplets. On étiquette les points de la rangée supérieure de p avec les éléments de \mathbf{i} de gauche à droite. On fait ensuite de même pour la rangée inférieure avec les éléments de \mathbf{j} , toujours de gauche à droite. Si toute paire de points connectés a la même étiquette, on pose $\delta_p(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 1$. Sinon, on pose $\delta_p(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 0$.

Par exemple, pour la partition



on obtient

$$\delta_p(i_1, i_2, j_1, j_2, j_3, j_4) = \delta_{i_1 i_2 j_2} \delta_{j_1 j_4}.$$

Il est clair qu'on a, pour toute partition en paires p et tous \mathbf{i}, \mathbf{j} ,

$$\delta_p(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \delta_p^*(\mathbf{i}, \mathbf{j}).$$

La conséquence de ceci, formulée dans [BS09] et qui est la ligne directrice de tous les travaux exposés dans ce chapitre, est que *la famille des groupes orthogonaux est totalement caractérisée par l'ensemble des partitions en paires*. Ce que nous voulons dire par là, c'est qu'en partant de l'ensemble des partitions en paires, on peut reconstruire toutes les algèbres $\text{End}_{O_N}(V^{\otimes k})$ en posant

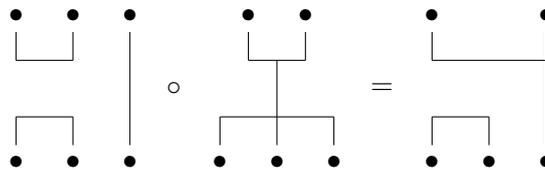
$$T_p : e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \mapsto \sum_{\mathbf{j}=(j_1, \dots, j_k)} \delta_p(\mathbf{i}, \mathbf{j}) e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k} \quad (2.1)$$

Comme nous le verrons dans la Section 2.1.3, cette donnée suffit à retrouver toute la structure algébrique et topologique O_N , grâce à la *dualité de Tannaka-Krein*.

2.1.2 Opérations sur les partitions

Une question se pose d'elle-même au vu des résultats précédents : existe-t-il d'autres familles de groupes dont les invariants sont donnés par des partitions ? En effet, la définition des applications δ_p et T_p a un sens même quand p a des blocs de taille différente de deux. Un premier résultat positif a été obtenu indépendamment par V.F.R. Jones dans [Jon93] et P. Martin dans [Mar94]. Ils ont montré que l'espace vectoriel engendré par les opérateurs T_p pour *toutes* les partitions p de $\{1, \dots, 2k\}$ est isomorphe au centralisateur de la représentation diagonale du groupe symétrique S_N sur $(\mathbf{C}^{\otimes N})^{\otimes k}$.

D'autres exemples intéressants ont également été obtenus en raffinant la construction à l'aide de coloriage des points, mais nous y reviendrons dans les Sections 2.2 et 2.4 et nous verrons que la cadre des groupes quantiques de partitions que nous avons introduit contient la plupart de ces exemples. Pour l'instant, nous souhaitons nous intéresser au problème inverse : quels ensembles \mathcal{P} de partitions peuvent produire des invariants de groupes ? Visiblement, \mathcal{P} doit vérifier des propriétés de stabilités afin que les opérateurs T_p engendrent linéairement une algèbre. En particulier, il faut une condition assurant que $T_q \circ T_p$ est une combinaison linéaire d'applications de la forme T_r . Cette condition est liée à l'opération suivante : étant données deux partitions p et q de $\{1, \dots, 2k\}$, on peut effectuer leur *concatenation verticale* qp en plaçant q sous p et en reliant les points de la rangée inférieure de p à ceux qui leur correspondent dans la rangée supérieure de q . Néanmoins, ce procédé peut faire apparaître des blocs fermés qui n'ont pas de sens du point de vue des partitions. Il suffit alors de les enlever et nous noterons $\text{rl}(q, p)$ leur nombre¹. Voici un exemple avec $\text{rl}(q, p) = 1$:

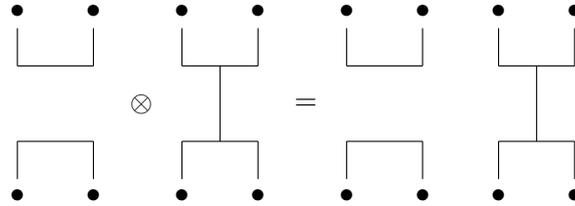


Au niveau des opérateurs T_p , cette opération se traduit par la formule suivante, démontrée dans [BS09, Prop 1.9] :

$$T_q \circ T_p = \dim(V)^{\text{rl}(q,p)} T_{qp}. \quad (2.2)$$

La stabilité par concaténation verticale est certainement insuffisante pour produire des commutants de représentations de groupes, et l'on se doute qu'il devrait aussi y avoir une certaine compatibilité entre les différents ensembles de partitions $\mathcal{P}(k)$. Par exemple, si T_p commute à $\rho^{\otimes k}$ et T_q commute à $\rho^{\otimes \ell}$, alors $T_p \otimes T_q$ commute à $\rho^{\otimes k+\ell}$ et doit donc s'écrire à l'aide de partitions. Cette construction correspond en fait à l'opération dite de *concaténation horizontale* : si p et q sont deux partitions de $\{1, \dots, 2k\}$ et $\{1, \dots, 2\ell\}$ respectivement, on construit une partition $p \otimes q$ de $\{1, \dots, 2(k+\ell)\}$ en dessinant simplement q à la droite de p .

1. Abréviation de l'anglais *removed loops*.



Avec cette définition, il est démontré dans [BS09, Prop 1.9] que

$$T_p \otimes T_q = T_{p \otimes q}$$

Grâce à ces deux opérations, il est possible de reconstruire un groupe G à partir des algèbres de partitions généralisées associées. Cependant, pour expliquer ce résultat il est à la fois nécessaire et utile de passer à un formalisme plus général en “complétant” ces données en une *catégorie*.

2.1.3 Dualité de Tannaka-Krein et catégories de partitions

La reconstruction d’un groupe (quantique) à partir de ses représentations est l’objet de la *dualité de Tannaka-Krein*. Son objet d’étude est la *catégorie* $\text{Rep}(\mathbb{G})$ des représentations de dimension finie de \mathbb{G} , qu’on peut décrire comme suit :

- Les objets de $\text{Rep}(\mathbb{G})$ sont les représentations de dimension finie de \mathbb{G} , c’est-à-dire les matrices $v \in M_n(C(\mathbb{G}))$ telles que

$$\Delta(v_{ij}) = \sum_{k=1}^n v_{ik} \otimes v_{kj},$$

- Les morphismes de $\text{Rep}(\mathbb{G})$ entre deux objets v et w sont les applications linéaires $T : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^m$ entretenant les représentations, c’est-à-dire telles

$$v \circ T = T \circ w.$$

L’ensemble de ces morphismes est noté $\text{Mor}_{\mathbb{G}}(v, w)$.

Soit v une représentation de dimension finie de \mathbb{G} . Par définition, toute sous-représentation w de $v^{\otimes k}$ correspond à un idempotent dans $\text{Mor}(v^{\otimes k}, v^{\otimes k})$, qui est la projection orthogonale sur le sous-espace $w \subset v^{\otimes k}$. Par conséquent, si v est *génératrice* au sens où toute représentation irréductible de G est équivalente à une sous-représentation d’une puissance tensorielle de v , alors trouver les représentations irréductibles de \mathbb{G} revient à décomposer en blocs matriciels les algèbres $\text{Mor}(v^{\otimes k}, v^{\otimes k})$. Or, ces algèbres sont en fait les commutants $\text{End}_G(v^{\otimes k})$ de sorte qu’en principe, la dualité de Schur-Weyl suffit à retrouver la catégorie $\text{Rep}(\mathbb{G})$.

Remarque 2.1.4. Nous avons ici simplifié puisqu’en général on ne peut se contenter de regarder les puissances tensorielles d’une représentation génératrice v mais qu’il faut aussi considérer sa *contragrédiente* \bar{v} . Ce problème sera résolu par l’introduction des partitions coloriées dans la Section 2.2.1. Pour l’instant, nous supposons que $v = \bar{v}$.

Remarquons que puisque la dualité de Schur-Weyl “détermine” $\text{Rep}(\mathbb{G})$, on doit pouvoir décrire également les espaces $\text{Mor}_{\mathbb{G}}(v^{\otimes k}, v^{\otimes \ell})$ à l’aide des espaces $\text{Mor}_{\mathbb{G}}(v^{\otimes k}, v^{\otimes k})$. Ceci peut se faire grâce à la *réciprocité de Frobenius* (voir par exemple [NT13, Prop 2.2.5] pour une preuve dans le cas quantique), qui donne un isomorphisme explicite

$$\text{Mor}_{\mathbb{G}}(v^{\otimes k}, v^{\otimes \ell}) \simeq \text{Mor}_{\mathbb{G}}(v^{\otimes(k+1)}, v^{\otimes(\ell-1)}).$$

En appliquant cette construction, on se ramène aux espaces $\text{Mor}_{\mathbb{G}}(\mathbf{C}, v^{\otimes k})$ où \mathbf{C} est muni de la représentation triviale. Si $G = O_N$ et si u est la représentation fondamentale, on a alors l’alternative suivante :

- Si k est impair, $\text{Mor}(\mathbf{C}, u^{\otimes k}) = \{0\}$,
- Si $k = 2k'$ est pair, $\text{Mor}(\mathbf{C}, u^{\otimes k}) = \text{Mor}(u^{\otimes k'}, u^{\otimes k'})$

et on peut donc bien décrire tous les espaces de morphismes à l'aide de la dualité de Schur-Weyl, donc à l'aide de partitions.

Remarque 2.1.5. En appliquant la réciprocity de Frobenius à un opérateur de la forme T_p pour $p \in \mathcal{P}(k, \ell)$, on observe le phénomène suivant : soit q la partition obtenue en faisant tourner le point le plus à gauche de la rangée inférieure de p pour qu'il devienne le point le plus à gauche de la rangée supérieure. Alors, l'image de T_p par la réciprocity de Frobenius est égale à T_q .

Nous considérerons donc des ensembles $\mathcal{C}(k, \ell)$ de partitions de $\{1, \dots, k + \ell\}$ (que l'on représentera avec k points dans la rangée supérieure et ℓ points dans la rangée inférieure) pour tous entiers k et ℓ , stables par concaténation horizontale et verticale. On définit alors les espaces vectoriels

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(k, \ell) = \text{Vect}\{T_p, p \in \mathcal{P}(k, \ell)\}$$

et il ne nous reste plus qu'à nous assurer que nos conditions sur $\mathcal{P} = (\mathcal{P}(k, \ell))_{k, \ell}$ sont suffisantes pour que ces espaces soient les morphismes de la catégorie de représentations d'un groupe quantique compact \mathbb{G} . Pour cela, il faut caractériser les catégories qui apparaissent comme catégories de représentations d'un groupe quantique compact, et c'est le but de la dualité de Tannaka-Krein. Pour la formuler, donnons d'abord une définition "simplifiée" des catégories qui nous intéressent :

Définition 2.1.6. Soit V un espace de Hilbert de dimension finie. Un C^* -catégorie monoïdale concrète \mathfrak{C} est une collection d'espaces $\text{Mor}_{\mathfrak{C}}(k, \ell) \subset \mathcal{B}(V^{\otimes k}, V^{\otimes \ell})$ pour tous k et ℓ telle que

1. Si $T \in \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(k, \ell)$ et $T' \in \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(k', \ell')$, alors $T \otimes T' \in \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(k + k', \ell + \ell')$,
2. Si $T \in \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(k, \ell)$ et $T' \in \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(\ell, r)$, alors $T' \circ T \in \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(k, r)$,
3. Si $T \in \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(k, \ell)$, alors $T^* \in \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(\ell, k)$,
4. $\text{Id} : x \mapsto x \in \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(1, 1)$,
5. $D : x \otimes y \mapsto \langle x, y \rangle \in \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(2, 0)$.

Si de plus $\sigma : x \otimes y \mapsto y \otimes x \in \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(2, 2)$, alors \mathfrak{C} est dite *symétrique*.

Ces conditions seront vérifiées dès que \mathbb{G} est un *groupe quantique compact matriciel orthogonal* au sens suivant :

Définition 2.1.7. Un groupe quantique compact matriciel orthogonal (\mathbb{G}, u) est un groupe quantique compact \mathbb{G} muni d'une représentation u de dimension finie telle que

- $\bar{u} = u$,
- Toute représentation irréductible de \mathbb{G} est équivalente à une sous-représentation de $u^{\otimes k}$ pour un certain entier k .

Si V est l'espace de Hilbert de la représentation u , on vérifie facilement que les espaces $\text{Mor}_{\mathbb{G}}(V^{\otimes k}, V^{\otimes \ell})$ forment une C^* -catégorie monoïdale concrète que nous noterons $\mathfrak{C}_{\mathbb{G}}$. La réciproque de cet énoncé est la dualité de Tannaka-Krein, dont nous donnons une version modifiée qui est un cas particulier du résultat de S.L. Woronowicz [Wor88, Thm 1.3].

Théorème 2.1.8 (Woronowicz). *Soit \mathfrak{C} une C^* -catégorie monoïdale concrète. Alors, il existe un groupe quantique compact matriciel orthogonal (\mathbb{G}, u) tel que $\mathfrak{C} \simeq \mathfrak{C}_{\mathbb{G}}$. De plus, le groupe quantique compact \mathbb{G} est unique à isomorphisme près et il est classique si et seulement si \mathfrak{C} est symétrique.*

Au vu de ce résultat, il ne nous reste plus qu'à traduire les axiomes de C^* -catégorie monoïdale concrète en termes de partitions. Pour ce faire il nous manque encore une opération : si p est une partition, on note p^* la partition obtenue en échangeant les deux rangées (par une réflexion horizontale). Comme le suggère la notation, on vérifie sans peine que $T_{p^*} = T_p^*$ (voir [BS09, Prop 1.9]). Donnons également la description explicite de quelques opérateurs :

- $T_{|} = \text{Id}_V$,
- $T_{\sqcup}(x \otimes y) = \langle x, y \rangle$,
- $T_{\times} = \sigma$.

Définition 2.1.9. Une *catégorie de partitions* \mathcal{C} est une collection d'ensembles de partitions $\mathcal{C}(k, \ell)$ pour tous entiers k et ℓ telle que

1. Si $p \in \mathcal{C}(k, \ell)$ et $q \in \mathcal{C}(k', \ell')$, alors $p \otimes q \in \mathcal{C}(k + k', \ell + \ell')$,
2. Si $p \in \mathcal{C}(k, \ell)$ et $q \in \mathcal{C}(\ell, r)$, alors $qp \in \mathcal{C}(k, r)$,
3. Si $p \in \mathcal{C}(k, \ell)$, alors $p^* \in \mathcal{C}(\ell, k)$,
4. $| \in \mathcal{C}(1, 1)$,
5. $\sqcup \in \mathcal{C}(2, 0)$.

Si de plus $\times \in \mathcal{C}(2, 2)$, alors \mathcal{C} est dite *symétrique*.

Nous avons maintenant la réponse à notre question :

Corollaire 2.1.10. Soit \mathcal{C} une catégorie de partitions et soit N un entier. Posons $V = \mathbf{C}^N$ et

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(k, \ell) = \text{Vect}\{T_p, p \in \mathcal{C}(k, \ell)\} \subset \mathcal{B}(V^{\otimes k}, V^{\otimes \ell}).$$

Alors par le Théorème 2.1.8, il existe un groupe quantique compact matriciel orthogonal (\mathbb{G}, u) tel que pour tous $k, \ell \in \mathbf{N}$,

$$\text{Mor}_{\mathbb{G}}(k, \ell) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(k, \ell).$$

Il est appelé le groupe quantique de partitions associé à \mathcal{C} et N .

Les groupes *classiques* produits par la construction précédente ont été classifiés dans [BS09, Thm 2.8], en voici la liste complète :

- Les groupes orthogonaux O_N ,
- Les groupes symétriques S_N ,
- Les groupes histochastiques B_N ,
- Les groupes hyperoctaédraux H_N ,
- Les versions “signées” $S_N \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $B_N \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Comme on peut le voir, la liste est assez courte. Par contre, l'ensemble des groupes *quantiques* compacts issus de cette construction a été classifié dans [BS09], [Web13] et [RW16] et ils sont, cette fois-ci, nombreux et de nature très variée.

2.2 Les groupes quantiques de partitions

Nous allons maintenant décrire une théorie des groupes quantiques associés à des partitions qui généralise ce qui a été présenté dans la section précédente. Commençons par une remarque qui est une des motivations de [BS09] : à chaque groupe classique de partitions correspond un groupe quantique obtenu en ne considérant que les partitions qui sont *non-croisées* au sens suivant :

Définition 2.2.1. Une partition p est dite *croisée* s'il existe quatre entiers k_1, k_2, k_3, k_4 tels que :

- k_1 et k_3 sont dans le même bloc,
- k_2 et k_4 sont dans le même bloc,
- k_1 et k_2 ne sont pas dans le même bloc,
- $k_1 < k_2 < k_3 < k_4$.

Sinon, p est dite *non-croisée*. L'ensemble des partitions non-croisées de $\{1, \dots, k\}$ est noté $NC(k)$.

Graphiquement, ceci correspond à l'idée intuitive selon laquelle la partition peut être dessinée de telle sorte que les traits ne se croisent pas. Par exemple, il semble clair que la partition

$$\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}$$

ne peut être dessinée sans que les traits ne se croisent. Le processus qui consiste, pour un phénomène régi par la combinatoire des partitions, à se restreindre aux partitions non-croisées, permet souvent d'obtenir des analogues de résultats probabilistes dans le cadre des probabilités libres. La théorie des cumulants libres est la principale illustration de ce phénomène (voir [NS06]).

Il est naturel de chercher à classifier les groupes quantiques obtenus à partir de catégories de partitions non-croisées, ce qui a été fait dans [BS09] et [Web13]. Il y a

- Le groupe quantique libre orthogonal O_N^+ ,
- Le groupe des permutations quantiques S_N^+ ,
- Le groupe quantique libre bistochastique B_N^+ ,
- Le groupe quantique libre hyperoctaédral H_N^+ ,
- Les versions "signées" $S_N^+ \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $B_N^+ \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $B_N^+ \widehat{*} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Comme pour les groupes classiques, la liste est courte et tous les groupes quantiques qui y apparaissent étaient déjà connus et étudiés. Cela est dû au fait que l'on ne considère que des groupes quantiques compacts matriciels *orthogonaux*, c'est-à-dire que la représentation fondamentale est sa propre contragrédiente. Une façon simple de lever cette obstruction est d'ajouter des couleurs aux partitions, ce que nous allons maintenant faire.

2.2.1 Cadre général

Dans ce qui suit, nous allons généraliser la théorie de T. Banica et R. Speicher dans [BS09] à des partitions coloriées. A priori, il suffit de se donner un ensemble \mathcal{A} (appelé *ensemble des couleurs*) et de considérer des partitions avec la donnée supplémentaire d'une couleur pour chacun des points. L'idée est alors de disposer, pour chaque couleur x , d'une représentation fondamentale u^x distincte pour obtenir plus de groupes quantiques. Il faut cependant adapter les opérations sur les partitions. Cela ne pose pas de problème en ce qui concerne la concaténation horizontale ou l'opération $*$. Pour la concaténation verticale, on impose que deux

partitions p et q ne sont composables (dans cet ordre) que si les couleurs de la rangée supérieure de p coïncident avec les couleurs de la rangée inférieure de q .

Le dernier problème est la présence de la partition \sqcup . Quel est la bonne version coloriée à ajouter ? Comme expliqué dans la section précédente, T_{\sqcup} n'est autre que le produit scalaire, qui met en dualité la représentation fondamentale avec elle-même. Ainsi, c'est la présence de \sqcup qui donne une identification entre \bar{u} et u . Dans notre cadre plus général, nous voulons laisser la possibilité à une représentation fondamentale de ne pas être équivalente à sa contragrédiente, il faut par conséquent autoriser \sqcup à être coloriée par deux couleurs différentes. Plus précisément, on se donne une involution $x \mapsto \bar{x}$ sur \mathcal{A} et on considère $\sqcup(x)$ qui est la partition \sqcup coloriée par x et \bar{x} . Ceci mène à la définition suivante :

Définition 2.2.2. Un *ensemble de couleurs* est un ensemble \mathcal{A} muni d'une involution. Une *catégorie de partitions \mathcal{A} -coloriées* est un ensemble \mathcal{C} de partitions coloriées qui est stable par concaténation horizontale et verticale, par l'opération $p \mapsto p^*$ et qui contient, pour tout $x \in \mathcal{A}$, $\sqcup(x)$ ainsi que la partition $|$ coloriée par x aux deux extrémités.

Une telle donnée produit un groupe quantique compact de la même façon que dans le Corollaire 2.1.10. Nous allons néanmoins donner un énoncé précis, ce qui nécessite d'introduire quelques notations. Supposons un entier N fixé. Pour chaque couleur $x \in \mathcal{A}$, on se donne une copie V^x de \mathbf{C}^N . Si on a maintenant un mot $w = w_1 \cdots w_n$ sur \mathcal{A} , on pose

$$V^w = V^{w_1} \otimes \cdots \otimes V^{w_n}.$$

On définit de même, étant données des représentations $(u^x)_{x \in \mathcal{A}}$ et un mot w sur \mathcal{A} , la représentation produit tensoriel u^w . De plus, si p est une partition \mathcal{A} -coloriée, on peut lui associer deux mots sur \mathcal{A} en lisant sa rangée supérieure et sa rangée inférieure de gauche à droite. Pour une catégorie de partitions \mathcal{A} -coloriées \mathcal{C} , on note alors $\mathcal{C}(w, w')$ l'ensemble de ses partitions dont le mot supérieur est w et le mot inférieur w' . Avec ces notations, pour $p \in \mathcal{C}(w, w')$ on peut définir une application linéaire $T_p : V^w \rightarrow V^{w'}$ par une adaptation immédiate de la définition donnée par l'Équation (2.1). Nous pouvons maintenant énoncer notre premier résultat [Fre17, Thm 3.2.3] :

Théorème 2.2.3. Soit \mathcal{A} un ensemble de couleurs, soit \mathcal{C} une catégorie de partitions \mathcal{A} -coloriées et soit N un entier. Alors, il existe un unique groupe quantique compact \mathbb{G} muni de représentations $(u^x)_{x \in \mathcal{A}}$ de dimension N tel que

- Toute représentation de dimension finie de \mathbb{G} est équivalente à une sous-représentation d'un produit tensoriel u^w pour un certain mot w sur \mathcal{A} ,
- Pour tous mots w, w' sur \mathcal{A} ,

$$\text{Mor}_{\mathbb{G}}(u^w, u^{w'}) = \text{Vect}\{T_p \mid p \in \mathcal{C}(w, w')\}.$$

Le groupe quantique compact \mathbb{G} est appelé groupe quantique de partitions associé à \mathcal{C} et N et est noté $\mathbb{G}_N(\mathcal{C})$.

Exemple 2.2.4. Si \mathcal{A} est un singleton, on retrouve le Corollaire 2.1.10. Ces groupes quantiques compacts sont appelés, depuis [BS09], *groupes quantiques aisés* (en anglais *easy quantum groups*). Si $\mathcal{A} = \{\circ, \bullet\}$ avec $\bar{\circ} = \bullet$, on obtient les *groupes quantiques aisés unitaires* introduits et étudiés par P. Tarrago et M. Weber dans [TW17] et [TW18b] ainsi que dans [Fre14].

Exemple 2.2.5. Soit Γ un groupe discret et soit \mathcal{A} une partie génératrice symétrique de Γ contenant l'élément neutre e . On fait de \mathcal{A} un ensemble de couleurs en posant $\bar{x} = x^{-1}$. Alors, une partition \mathcal{A} -coloriée p est dite *admissible* si dans chaque bloc de p , le produit de gauche à droite des couleurs de la rangée supérieure est égal (comme élément de Γ) au produit de gauche à droite des couleurs de la rangée inférieure. L'ensemble $\mathcal{C}_{\Gamma, S}$ des partitions admissibles *non-croisées* est une catégorie de partitions, et le groupe quantique compact correspondant est le *produit en couronne libre* $\widehat{\Gamma} \wr_{\ast} S_N^+$ que nous avons déjà rencontré au Chapitre 1. Si on ajoute toutes les versions coloriées possibles de la partition \times , on obtient alors le produit en couronne usuel $\Gamma \wr S_N$.

L'intérêt majeur de cette notion est que l'on dispose d'outils efficaces pour étudier la théorie des représentations des groupes quantiques compacts obtenus. La section suivante sera consacrée à l'exposé de ces outils, mais auparavant donnons un résultat illustrant une propriété de "stabilité" des groupes quantiques de partitions, et prouvé dans [Fre17, Prop 4.1.2].

Proposition 2.2.6. *Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' des catégories de partitions coloriées respectivement par \mathcal{A} et \mathcal{A}' . Soit $\mathcal{A}'' = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{A}'$ et soit \mathcal{C}'' la catégorie de partitions \mathcal{A}'' coloriées engendrée² par \mathcal{C} et \mathcal{C}' . Alors, pour tout entier N ,*

$$\mathbb{G}_N(\mathcal{C}'') = \mathbb{G}_N(\mathcal{C}) \hat{*} \mathbb{G}_N(\mathcal{C}').$$

2.2.2 Théorie des représentations

L'idée sous-jacente aux groupes quantiques de partitions est qu'ils sont entièrement déterminés par la combinatoire des partitions associées. Il est par conséquent tentant de vouloir décrire leur structure uniquement à l'aide de ces partitions. De ce point vue, la première étape est l'étude de la théorie des représentations. Nous avons mené cette étude avec M. Weber dans [FW16]. Les partitions coloriées n'ayant pas été introduites à l'époque, nous n'avions considéré que le cas des groupes quantiques aisés, mais la théorie s'adapte sans changement et nous allons donc la présenter en toute généralité.

Rappelons que, par définition, il suffit d'étudier les représentations u^w . Le point de départ est alors très simple : les sous-représentations irréductibles de u^w correspondent aux projections minimales de $\text{Mor}_{\mathbb{G}}(u^w, u^w)$, une algèbre dont nous possédons une famille génératrice. On peut donc commencer par se demander quels projecteurs peuvent être fabriqués à l'aide des opérateurs T_p . La formule $T_p T_q \in \mathcal{C} T_{pq}$ mène alors à la définition suivante :

Définition 2.2.7. Une partition coloriée p est dite *projective* si $pp = p = p^*$. Alors, il existe un multiple S_p de T_p qui est une projection.

Une telle définition appelle des exemples et leur recherche nous a rapidement mené à une constatation cruciale, prouvée dans [FW16, Prop 2.18]. Rappelons qu'une *isométrie partielle* est une application linéaire S telle que S^*S est une projection.

Proposition 2.2.8 (F.-Weber). *Soit r une partition coloriée, alors rr^* et r^*r sont des partitions projectives. Par conséquent, il existe un multiple S_r de T_r qui est une isométrie partielle.*

Ainsi, nous disposons d'une famille génératrice formée d'isométries partielles, ce qui est très utile quand on cherche des projections minimales. De plus, le lien avec la théorie des projections dans les espaces de Hilbert suggère les définitions suivantes :

- Une partition projective q est *dominée* par une partition projective p si $qp = q$. Alors $pq = q$ et on note $q \preceq p$.
- Deux partitions projectives p et q sont *équivalentes* s'il existe une partition r telle que $p = r^*r$ et $q = rr^*$. On note alors $p \sim q$.

Armés de ces outils, nous sommes encore loin du but. En effet, si $p \in \mathcal{C}(w, w)$ est une partition projective, S_p est en général loin d'être minimale parmi les projections de $\text{Mor}_{\mathbb{G}}(u^w, u^w)$. Par exemple, l'identité de V^w est donnée par la partition $|\otimes^w$. Toutefois, la comparaison du treillis des partitions projectives avec la théorie des représentations d'exemples connus suggère que les représentations irréductibles peuvent être "naturellement" indexées par les partitions projectives. Le résultat principal de [FW16] est la formalisation de cette idée. La définition centrale est la suivante :

Définition 2.2.9. Soit $p \in \mathcal{C}(w, w)$ une partition projective. On pose

$$P_p = S_p - \bigvee_{q \prec p} S_q \in \text{Mor}_{\mathbb{G}}(u^w, u^w),$$

2. Il s'agit simplement de l'intersection de toutes les catégories de partitions \mathcal{A}'' -coloriées contenant \mathcal{C} et \mathcal{C}' .

où \vee désigne la borne supérieure dans l'ensemble des projections. Il s'agit d'une projection et on lui associe donc la représentation

$$u_p = P_p u^w P_p.$$

Si cette définition est naturelle pour espérer construire “par récurrence” les représentations irréductibles de $\mathbb{G}_N(\mathcal{C})$, elle ne va pas sans poser de problème. En particulier, il n'est pas garanti en général que P_p ne soit pas nulle. Plus précisément, on peut montrer que le supremum apparaissant dans la définition de P_p est une combinaison linéaire des opérateurs S_q pour $q \prec p$. Mais ces opérateurs ne sont pas linéairement indépendants en général et rien ne garantit donc que S_p ne soit pas dans l'espace vectoriel qu'ils engendrent. Il s'agit de la première manifestation d'un phénomène important qui explique pourquoi nous nous sommes concentrés sur l'étude des partitions non-croisées. En effet, dans ce cas l'indépendance linéaire est assurée (voir par exemple [FW16, Lem 4.16] pour une preuve) :

Proposition 2.2.10. *Pour $N \geq 4$ et pour tout k , les opérateurs $(T_p)_{p \in NC(k)}$ sont linéairement indépendants.*

Cela dit, certains résultats sont vrais en toute généralité. Tout d'abord, la définition est compatible avec les notions d'équivalences par [FW16, Thm 4.18] :

Théorème 2.2.11 (F.-Weber). *Si $p \sim q$, alors $u_p \sim u_q$. Réciproquement, si $u_p, u_q \neq 0$ et $u_p \sim u_q$, alors $p \sim q$.*

Ensuite, on obtient bien “tout” de cette façon par [FW16, Prop 4.22] :

Proposition 2.2.12. *Il n'existe pas de sous-représentation stricte de u^w qui contienne u_p pour tout $p \in \mathcal{C}(w, w)$. En particulier, toute représentation irréductible de $\mathbb{G}_N(\mathcal{C})$ est équivalente à une sous-représentation de u_p pour un certain p .*

Le problème majeur restant est donc celui de l'irréductibilité de u_p . Pour le comprendre, nous sommes parvenus à décrire l'algèbre des entrelaceurs de u_p . Ceci nécessite une décomposition particulière des partitions donnée par (un cas particulier de) [FW16, Prop 2.9]. Étant donnée une partition p , nous noterons $t(p)$ le nombre de blocs de p qui contiennent des points à la fois de la rangée supérieure et de la rangée inférieure, aussi appelés *blocs transversaux* (en anglais *through-blocks*) :

Proposition 2.2.13. *Soit $p \in \mathcal{C}(w, w)$ une partition projective et soit $x_0 \in \mathcal{A}$ une couleur fixée. Alors il existe une unique partition $p_u \in \mathcal{C}(w, x_0^{t(p)})$ telle que*

- $p_u^* p_u = p$,
- *Les traits reliant la rangée supérieure de p_u à sa rangée inférieure ne se croisent pas.*

Soit maintenant $\sigma \in S_{t(p)}$ une permutation. On peut lui associer la partition en paire

$$h_\sigma \in P_2(x_0^{t(p)}, x_0^{t(p)})$$

dont les blocs sont $\{i, \sigma(i)\}$ et en composant on obtient une version “permutée” de p :

$$p_\sigma = p_u^* h_\sigma p_u.$$

Il est facile de voir que $P_p T_{p_\sigma} P_p$ entrelace u_p avec elle-même et nous avons prouvé dans [FW16, prop 4.15] une réciproque, à savoir

Proposition 2.2.14. *Soit $p \in \mathcal{C}(w, w)$ une partition projective et posons*

$$\text{Sym}_{\mathcal{C}}(p) = \{\sigma \in S_{t(p)} \mid p_\sigma \in \mathcal{C}\}.$$

Alors, il existe un morphisme d'algèbres surjectif

$$\Phi : \mathbf{C}[\text{Sym}_{\mathcal{C}}(p)] \rightarrow \text{Mor}_{\mathbb{G}}(u_p, u_p).$$

De plus, si $u_p \neq 0$ et si la famille $(T_q)_{q \in \mathcal{C}(t(p), t(p))}$ est libre, alors Φ est un isomorphisme.

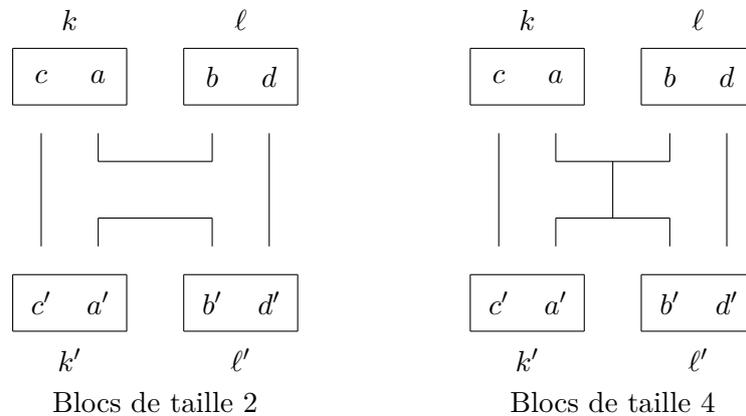
Ce résultat montre en particulier que, même dans les cas favorables (quand Φ est un isomorphisme), la description des représentations irréductibles de $\mathbb{G}_N(\mathcal{C})$ fera intervenir la théorie des représentations des groupes symétriques. Encore une fois, ce problème disparaît si les partitions sont non-croisées puisqu'alors p_σ n'est jamais dans \mathcal{C} pour $\sigma \neq \text{id}$. Autrement dit, dans ce cas, u_p est toujours irréductible.

Pour compléter l'étude de la théorie des représentations, il faut encore comprendre les *règles de fusion*, c'est-à-dire la façon dont un produit tensoriel de représentations irréductibles se décompose en somme de représentations irréductibles. Prenons donc deux partitions projectives $p, q \in \mathcal{C}$. Nous cherchons à décrire les projections dominées par $P_p \otimes P_q$. Ces dernières devraient s'écrire en "mélangeant" $p \otimes q$, d'où la définition suivante :

Définition 2.2.15. Soit $x_0 \in \mathcal{A}$ une couleur fixée et soit k et ℓ des entiers. Une partition (k, ℓ) -mélangeante est une partition $h \in P(x_0^{k+\ell}, x_0^{k+\ell})$ telle que

- Tous les blocs sont de taille 2 ou 4,
- Les blocs de taille 2 transversaux relient un point de la rangée supérieure avec son symétrique dans la rangée inférieure,
- Les blocs de taille 2 non-transversaux relient l'un des k premiers points d'une rangée avec l'un des ℓ derniers points de cette rangée,
- Les blocs de taille 4 relient l'un des k premiers points de la rangée supérieure, l'un des ℓ derniers points de cette même rangée et leurs symétriques dans la rangée inférieure.

Voici une illustration des partitions mélangeantes :



Grâce à cette notion, les règles de fusion peuvent être décrites dans certains cas par [FW16, Thm 4.27]. Précisons cependant que les hypothèses de ce théorème sont restrictives et que nous ne savons les vérifier que dans le cas des partitions non-croisées.

Théorème 2.2.16 (F.-Weber). Soit \mathcal{C} une catégorie de partitions coloriées et soient $p, q \in \mathcal{C}$ des partitions projectives. Pour une partition projective $(t(p), t(q))$ -mélangeante h , on pose

$$p *_h q = (p_u^* \otimes q_u^*)h(p_u \otimes q_u)$$

et on note $X_{\mathcal{C}}(p, q)$ l'ensemble des partitions dans \mathcal{C} de cette forme. Alors, si u_m est irréductible pour tout $m \in X_{\mathcal{C}}(p, q)$, on a

$$u_p \otimes u_q \sim \sum_{m \in X_{\mathcal{C}}(p, q)} u_m$$

au sens où il existe pour tout m une sous-représentation v_m de $u_p \otimes u_q$ équivalente à u_m et qu'aucune sous-représentation stricte de $u_p \otimes u_q$ ne contient tous les v_m .

2.2.3 Applications

Propriété de Haagerup

Il est possible d'utiliser nos résultats pour donner une preuve assez générale de la propriété de Haagerup pour des groupes quantiques de partitions non-croisées. Cette idée avait été mise en œuvre dans le cas des groupes quantiques aisés unitaires dans [Fre14, Sec 6.2] mais s'adapte sans difficulté au cas général, comme nous allons l'expliquer. Commençons par donner une définition alternative de la propriété de Haagerup centrale pour un groupe quantique compact (nous renvoyons le lecteur à [DFSW16] pour une étude détaillée de cette notion).

Définition 2.2.17. Un groupe quantique compact \mathbb{G} a la *Propriété de Haagerup centrale* s'il existe une famille d'états $(\psi_t)_{t \in (0,1)}$ sur l'algèbre des caractères de \mathbb{G} telle que

- Pour tout $\alpha \in \text{Irr}(\mathbb{G})$, $\varphi_t(\chi_\alpha) \rightarrow \dim(\alpha)$,
- Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie finie $F \subset \text{Irr}(\mathbb{G})$ telle que pour tout $\alpha \notin F$,

$$\left| \frac{\psi_t(\chi_\alpha)}{\dim(\alpha)} \right| < \epsilon.$$

Le point de départ de notre approche est la surjection naturelle, pour \mathbb{G} un groupe quantique de partitions non-croisées \mathcal{A} -coloriées,

$$\pi : C(\mathbb{G}) \rightarrow C(S_N^+)$$

donnée par l'inclusion de catégories de partitions $\mathcal{C} \subset NC^{\mathcal{A}}$. Si $(\varphi_t)_{t \in (0,1)}$ est une suite de fonction donnant la propriété de Haagerup pour S_N^+ (on en connaît une explicite grâce aux travaux de M. Brannan [Bra13]), alors $\psi_t = \varphi_t \circ \pi$ définit une suite d'états sur l'algèbre des caractères de $\mathbb{G}_N(\mathcal{C})$ vérifiant la première condition de la Définition 2.2.17.

Comme on peut s'y attendre, la seconde condition n'a pas de raison d'être vérifiée en général. Il faut en un sens que l'application π soit "propre" au niveau des algèbres de caractères pour pouvoir espérer la prouver. La notion de propreté adaptée peut être décrite à l'aide d'une fonction de longueur au sens suivant introduit par R. Vergnioux dans [Ver07] :

Définition 2.2.18. Une *fonction de longueur centrale* sur un groupe quantique compact \mathbb{G} est une fonction

$$\ell : \text{Irr}(\mathbb{G}) \rightarrow \mathbf{R}_+$$

telle que

- $\ell(\alpha) = 0$ si et seulement si α est triviale,
- $\ell(\bar{\alpha}) = \ell(\alpha)$,
- $\ell(\alpha \otimes \beta) \leq \ell(\alpha) + \ell(\beta)$

Considérons une représentation irréductible de $\mathbb{G}_N(\mathcal{C})$, qui est donnée par une partition projective $p \in \mathcal{C}$. Une façon naturelle de mesurer sa longueur est de compter son nombre de blocs transversaux. Cependant, ceci ne définit pas une fonction de longueur puisque les représentations de dimension un n'ont pas de blocs transversaux. Nous poserons donc

$$\ell(u_p) = t(p) + \delta_{p \sim \emptyset}.$$

Notre résultat principal dans cette section est que si ℓ est propre, au sens où la préimage de toute partie finie est finie, alors pour N suffisamment grand, $\mathbb{G}_N(\mathcal{C})$ a la propriété de Haagerup. Il n'est pas très difficile de caractériser la propreté de ℓ . Considérons, pour une catégorie de partitions \mathcal{C} , les deux ensembles suivants :

- $A(\mathcal{C})$ est l'ensemble des classes d'équivalences de partitions projectives avec un seul bloc transversal dont les points extrêmes sont connectés

- $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ est l'ensemble des classes d'équivalences de partitions projectives sans bloc transversal.

On peut alors généraliser [Fre14, Prop 6.2] :

Proposition 2.2.19. *La fonction de longueur ℓ est propre si et seulement si $A(\mathcal{C})$ et $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ sont tous deux finis.*

Démonstration. Il suffit de constater que toute partition projective non-croisée p avec $t(p) = k$ est une concaténation horizontale d'au plus k éléments de $A(\mathcal{C})$ et $k + 1$ éléments de $\mathcal{G}(\mathcal{C})$. \square

Avec ce résultat, il est possible d'énoncer notre critère pour la propriété de Haagerup, qui généralise [Fre14, Thm 6.11] :

Théorème 2.2.20 (F.). *Soit \mathcal{C} une catégorie de partitions non-croisées telle que ℓ soit une fonction de longueur propre sur $\mathbb{G}_N(\mathcal{C})$. Alors, pour tout $N \geq 4^{|A(\mathcal{C})|+|\mathcal{G}(\mathcal{C})|}$, $\mathbb{G}_N(\mathcal{C})$ a la propriété de Haagerup centrale.*

Démonstration. Si l'on note $\chi_p^{\mathbb{G}}$ le caractère de la représentation u_p de \mathbb{G} , il existe des entiers $C_p(k)$ tels que

$$\pi(\chi_p^{\mathbb{G}}) = \sum_{k=0}^{t(p)} C_p(k) \chi_k^{S_N^+}.$$

Il faut montrer qu'à n fixé, $\varphi_t \circ \pi(\chi_p^{\mathbb{G}}) / \dim(u_p^{\mathbb{G}})$ tend vers 0 quand $t(p)$ tend vers $+\infty$. Soit $\epsilon > 0$ et soit K_0 tel que pour tout $k > K_0$,

$$\frac{\varphi_t(\chi_k^{S_N^+})}{\dim(u_k^{S_N^+})} < \frac{\epsilon}{2}.$$

On a alors

$$\frac{1}{\dim(u_p^{\mathbb{G}})} \sum_{k > K_0} C_p(k) \varphi_t(\chi_k^{S_N^+}) < \frac{\epsilon}{2} \frac{\sum_{k > K_0} C_p(k) \dim(u_k^{S_N^+})}{\dim(u_p^{\mathbb{G}})}$$

et comme π préserve les dimensions puisque c'est un morphisme de groupes quantiques, la fraction du membre de droite ci-dessus est plus petite que 1. On a donc

$$\frac{\varphi_t \circ \pi(\chi_p^{\mathbb{G}})}{\dim(u_p^{\mathbb{G}})} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\sum_{k=0}^{K_0} C_p(k) \varphi_t(\chi_k^{S_N^+})}{\sum_{k=0}^{t(p)} C_p(k) \dim(u_k^{S_N^+})}.$$

En majorant $\varphi_t(\chi_k^{S_N^+})$ par $C_0 \dim(u_k^{S_N^+})$ on se ramène à des estimations standard sur les dimensions des représentations de S_N^+ , qui se font exactement comme dans [Fre14, Thm 6.11]. \square

Caractérisation des groupes quantiques libres

Nous avons expliqué dans l'introduction qu'il existait plusieurs raisons pour lesquelles certains groupes quantiques sont dits "libres". L'une d'entre elles est la correspondance entre combinatoire des partitions et combinatoire des partitions non-croisées dans le passage des probabilités classiques aux probabilités libres. Celle-ci est bien sûr illustrée par toute la théorie de ce chapitre. Cependant, cette approche permet également d'éclairer un autre aspect des groupes quantiques libres. L'idée est cette fois que leurs algèbres d'opérateurs se comportent comme celles associées à des groupes libres ou des produits libres de groupes. Pour aborder plus précisément ce point de vue, nous définissons un analogue du semi-anneau $\mathbf{N}[\Gamma]$ d'un groupe discret Γ .

Définition 2.2.21. Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact et soit $\text{Irr}(\mathbb{G})$ l'ensemble des classes d'équivalences de représentations irréductibles de \mathbb{G} . Le semi-anneau de fusion $R^+(\mathbb{G})$ de \mathbb{G} est le semi-anneau $(\mathbf{N}[\text{Irr}(\mathbb{G})], \oplus, \otimes)$, où les opérations sont induites par la somme directe et le produit tensoriel.

Remarque 2.2.22. Le groupe de Grothendieck du semi-anneau $R^+(\mathbb{G})$ n'est autre que l'anneau de fusion $R(\mathbb{G})$ utilisé dans la Section 1.4.2.

Si \mathbb{G} est le dual d'un groupe discret classique Γ , alors son semi-anneau de fusion est isomorphe à $\mathbf{N}[\Gamma]$. L'étude des règles de fusion de plusieurs groupes quantiques compacts a mené T. Banica et R. Vergnioux à axiomatiser, dans [BV09], une notion de *semi-anneau de fusion libre* capturant les propriétés nécessaires à la preuve d'analogues de résultats de structure des algèbres d'opérateurs associées aux groupes libres. Le résultat de A. Chirvasitu [Fre17, Thm A.1.1] montre en effet que pour presque tout groupe quantique libre, la méthode de Powers s'adapte pour montrer la simplicité de la C^* -algèbre réduite et l'unicité de la trace. Cette notion repose sur la définition suivante :

Définition 2.2.23. Un *ensemble de fusion* est un ensemble S muni d'une involution $x \mapsto \bar{x}$ (appelée conjugaison) et d'une opération de fusion

$$* : S \times S \rightarrow S \cup \{\emptyset\}.$$

Soit S un ensemble de fusion. On considère le monoïde libre $F(S)$ sur S , i.e. l'ensemble de tous les mots sur S . L'opération de fusion sur S s'étend au semi-groupe abélien $\mathbf{N}[F(S)]$ de la façon suivante : si $w_1 \dots w_n, w'_1 \dots w'_k \in F(S)$, alors

- $\overline{w_1 \dots w_n} = \bar{w}_n \dots \bar{w}_1$,
- $(w_1 \dots w_n) * (w'_1 \dots w'_k) = w_1 \dots (w_n * w'_1) \dots w'_k$,

le membre de droite de cette dernière équation étant par convention 0 dès que l'un des deux mots est vide ou que $w_n * w'_1 = \emptyset$. Nous pouvons maintenant faire de $\mathbf{N}[F(S)]$ un *semi-anneau* $(R^+(S), \oplus, \otimes)$ en posant

$$w \otimes w' = \sum_{\substack{w=az \\ w'=zb}} ab \oplus a * b.$$

Définition 2.2.24. Un semi-anneau R^+ est dit *libre* s'il existe un ensemble de fusion S tel que R^+ est isomorphe à $R^+(S)$. Un groupe quantique compact \mathbb{G} est dit *libre* si $R^+(\mathbb{G})$ est libre.

Remarque 2.2.25. S. Raum a montré dans [Rau12, Lem 3.2] que si R^+ est libre, alors son groupe de Grothendieck R est un anneau libre au sens usuel, c'est-à-dire un anneau de polynômes (commutatifs ou non).

Tous les exemples de groupes quantiques mentionnés précédemment sont libres :

- Pour U_N^+ , $S = \{x, x^*\}$ avec $x * x^* = x^* * x = x * x = x^* * x^* = \emptyset$.
- Pour O_N^+ , $S = \{x\}$ avec $x^* = x$ et $x * x = \emptyset$.
- Pour S_N^+ , $S = \{x\}$ avec $x^* = x$ et $x * x = x$.
- Pour $\widehat{\Gamma} \wr S_N^+$, $S = \Gamma$ avec la conjugaison et la fusion donnés respectivement par l'inverse et la loi de groupe.

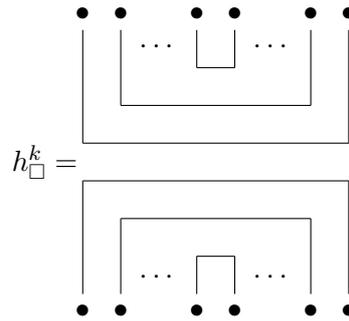
Cette liste suggère l'existence d'un lien entre partitions non-croisées et semi-anneaux de fusion libres qui demande à être clarifié.

Nous avons entrepris cette clarification d'abord partiellement dans [Fre14] pour les groupes quantiques aisés unitaires, puis en toute généralité dans [Fre17]. Pour expliquer ces travaux, il nous faut d'abord donner une meilleure description de la théorie des représentations dans le cas des partitions non-croisées. Nous résumerons ici les résultats essentiels, démontrés (dans le cas sans couleur, l'adaptation au cas coloré est expliqué dans [Fre17, Sec 3.3]) dans [FW16, Sec 5.2] et [Fre14, Prop 3.7].

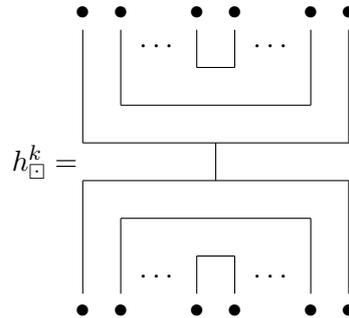
Théorème 2.2.26 (F.-Weber). *Soit \mathcal{C} une catégorie de partitions coloriées non-croisées. Alors*

- *Pour toute partition projective p , u_p est une représentation irréductible,*
- *Toute représentation irréductible est équivalente à u_p pour un certain p ,*
- *u_p est équivalente à u_q si et seulement si $p \sim q$,*
- *On a une décomposition en somme directe $u^w = \bigoplus_p u_p$.*

Quant aux règles de fusion, les partitions mélangeantes non-croisées doivent avoir une forme particulière qui permet de mieux décrire l'opération $*_h$. Notons h_{\square}^k la partition dans $\mathcal{C}(x_0^{2k}, x_0^{2k})$ dans laquelle pour tout $1 \leq i \leq k$, le i -ème point de chaque rangée est relié au $2k - i$ -ième point. Notons de même h_{\square}^k la même partition où en plus les blocs contenant les points 1 et $2k$ sur chaque rangée sont reliés pour former un bloc de taille 4. En voici des représentations graphiques :



et



Toute partition mélangeante est obtenue en concaténant l'une des deux précédentes par des partitions de la forme $|$. Posons, pour deux partitions projectives p et q et $1 \leq k \leq \min(t(p), t(q))$,

$$p \square^k q = p *_{|t(p)-k} \otimes h_{\square}^k \otimes_{|t(q)-k} q$$

$$p \square^k q = p *_{|t(p)-k} \otimes h_{\square}^k \otimes_{|t(q)-k} q$$

On a alors la formule simplifiée

$$u_p \otimes u_q = u_{p \otimes q} \oplus \bigoplus_{k=1}^{\min(t(p), t(q))} u_{p \square^k q} \oplus u_{p \square^k q}.$$

Ceci signifie qu'on dispose, dans le cas des partitions non-croisées, d'une description complète du semi-anneau de fusion de \mathbb{G} à partir de la catégorie de partitions \mathcal{C} . Reste à savoir comment le fait que le semi-anneau de fusion soit libre s'exprime sur \mathcal{C} . S. Raum a remarqué dans [Rau12, Rem 4.4] que si \mathbb{G} a une représentation non-triviale de dimension 1, alors $R^+(\mathbb{G})$ n'est pas libre. Or, il est facile de voir ([Fre14, Lem 5.1]) que u_p est de dimension 1 si et seulement si $t(p) = 0$. Alors, p est de la forme b^*b où b est une partition sur une seule ligne. Si $b \in \mathcal{C}$, $p \sim \emptyset$, autrement dit u_p est triviale. Ainsi, l'existence d'une représentation non-triviale de dimension 1 implique l'existence d'une partition b sur une ligne telle que $b^*b \in \mathcal{C}$ mais $b \notin \mathcal{C}$. Il s'agit d'un phénomène d'absence de *bloc-stabilité* au sens suivant :

Définition 2.2.27. Une catégorie de partitions coloriées \mathcal{C} est dite *bloc-stable* si pour toute partition $p \in \mathcal{C}$ et tout bloc b de p , $b \in \mathcal{C}$.

Par récurrence, si \mathcal{C} est bloc-stable alors toute sous-partition d'une partition de \mathcal{C} est encore dans \mathcal{C} , donc $\mathbb{G}_N(\mathcal{C})$ n'a pas de représentation non-triviale de dimension 1. Le premier pas vers la caractérisation des semi-anneaux de fusion libre est la réciproque de cette observation, prouvée dans [Fre14, Prop 4.12].

Proposition 2.2.28. Une catégorie de partitions coloriées non-croisées \mathcal{C} est bloc-stable si et seulement si pour toute partition b sur une ligne, $b^*b \in \mathcal{C}$ implique $b \in \mathcal{C}$.

La bloc-stabilité est une propriété forte pour une catégorie de partitions et on peut donc espérer qu'il s'agissait de la seule obstruction à la liberté du semi-anneau de fusion. C'est l'objet de [Fre14, Thm 4.18], l'un des principaux résultats de ce travail :

Théorème 2.2.29 (F.). Soit \mathcal{C} une catégorie de partitions non-croisées, soit $N \geq 4$ un entier et soit $\mathbb{G}_N(\mathcal{C})$ le groupe quantique de partitions associé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbb{G}_N(\mathcal{C})$ est libre.
2. $\mathbb{G}_N(\mathcal{C})$ n'a pas de représentation non-triviale de dimension 1.
3. \mathcal{C} est une catégorie de partitions bloc-stable.

Démonstration. D'après la discussion précédente, la seule implication à prouver est (3) \Rightarrow (1). La preuve complète est longue et technique, mais l'idée générale est assez simple. Partant de la catégorie de partitions \mathcal{C} , on construit un ensemble de fusion S formé des classes d'équivalences de partitions projectives telles que $t(p) = 1$. On vérifie que $[p] \mapsto [p^*]$ y définit une involution et $[p] * [q] = [p \square q]$ une opération de fusion. Nous noterons $R^+(\mathcal{C})$ le semi-anneau de fusion libre correspondant.

En remarquant que toute partition projective non-croisée peut s'écrire comme une concaténation horizontale de partitions projectives avec un seul bloc transversal, on peut définir une application surjective $\Phi : R^+(\mathcal{C}) \rightarrow R^+(\mathbb{G}_N(\mathcal{C}))$ par

$$[p_1] \cdots [p_n] \mapsto u_{p_1 \otimes \cdots \otimes p_n}.$$

La bloc-stabilité est alors exactement la propriété nécessaire pour prouver l'injectivité de Φ . \square

Les partitions non-croisées permettent donc de produire des groupes quantiques libres. Cette constatation soulève la question réciproque : dans quelle mesure un groupe quantique libre est-il associé à des partitions non-croisées ? Une réponse est donnée par [Fre17, Thm 5.2.12].

Théorème 2.2.30 (F.). Soit \mathbb{G} un groupe quantique libre. Alors, il existe une catégorie de partitions non-croisées bloc-stable \mathcal{C} telle que pour tout entier $N \geq 4$, $R^+(\mathbb{G}) = R^+(\mathbb{G}_N(\mathcal{C}))$.

Ce résultat peut être démontré directement en construisant, à partir d'un ensemble de fusion S tel que $R^+(\mathbb{G}) = R^+(S)$, une catégorie de partitions S -coloriées bloc-stable \mathcal{C}_S telle que $R^+(\mathcal{C}_S) = R^+(S)$. Cela dit, on peut retrouver ce résultat en poussant l'étude plus loin et en classifiant tous les semi-anneaux de fusion libres provenant d'un groupe quantique compact. C'est l'objet de la section suivante.

Classification

Il est maintenant naturel de chercher à classifier les semi-anneaux de fusion libres. La première question est de savoir à quelle condition un ensemble de fusion S peut produire le semi-anneau de fusion d'un groupe quantique compact.

Définition 2.2.31. Un ensemble de fusion S est dit *admissible* s'il existe un groupe quantique compact \mathbb{G} tel que $R^+(\mathbb{G}) = R^+(S)$.

Il est facile de trouver des conditions nécessaires pour cela en utilisant les propriétés de la théorie des représentations des groupes quantiques compacts. Celles-ci peuvent s'exprimer par la définition suivante :

Définition 2.2.32. Un ensemble de fusion S est dit

- *Associatif* si l'opération de fusion $*$ est associative,
- *Antisymétrique* si $\overline{x * y} = \overline{y} * \overline{x}$ pour tous $x, y \in S$,
- *De Frobenius* si $x = y * z$ si et seulement si $\overline{x} * y = \overline{z}$.

Dans la preuve du Théorème 2.2.30 mentionnée ci-dessus, les trois propriétés précédentes suffisent. On en déduit donc l'énoncé suivant :

Corollaire 2.2.33. *Un ensemble de fusion S est admissible si et seulement s'il est associatif, antisymétrique et de Frobenius.*

Pour aborder la classification des ensembles de fusion admissibles, nous allons d'abord donner un exemple supplémentaire. Rappelons que tout groupe Γ fournit un ensemble de fusion dont l'involution est donnée par l'inverse et la composition par la loi de groupe. Plus généralement, si \mathcal{G} est un *groupoïde* discret, alors l'ensemble de ses flèches est aussi un ensemble de fusion. L'exemple le plus simple est un groupoïde à deux objets avec une flèche x et son inverse \overline{x} entre les objets (ainsi que les morphismes identités de chaque objet). Cet ensemble de fusion est admissible et provient d'après [Rau12, Cor 5.13] du groupe quantique hyperoctaédral complexifié \tilde{H}_N^+ (voir Définition 2.2.37).

Il s'agit d'un exemple différent des précédents car bien que la composition ne soit pas toujours définie (auquel cas le résultat est \emptyset) contrairement au cas d'un groupe, un élément x est toujours composable avec \overline{x} , ce qui n'est pas vrai pour O_N^+ et U_N^+ . Ceci suggère la décomposition suivante : étant donné un ensemble de fusion S , on pose

- $\mathcal{H}(S) = \{x \in S \mid x * \overline{x} \neq \emptyset\}$,
- $\mathcal{O}(S) = \{x \notin \mathcal{H}(S) \mid x = \overline{x}\}$,
- $\mathcal{U}(S) = \{x \notin \mathcal{H}(S) \mid x \neq \overline{x}\}$.

Cette décomposition est moins anodine qu'elle n'y paraît. En effet, [Fre17, Lem 5.3.2] affirme que S peut se retrouver à partir de ces trois sous-ensembles au sens suivant :

Lemme 2.2.34. *Chacun des sous-ensembles de la décomposition ci-dessous est un ensemble de fusion. De plus, si $x, y \in S$ appartiennent à deux sous-ensembles différents, alors $x * y = \emptyset$.*

Il suit de ce résultat et de [Fre17, Lem 5.4.1] que si l'on sait réaliser chacun des trois ensembles à l'aide d'un groupe quantique compact, alors on pourra réaliser S comme un produit libre. De plus, comme leurs noms l'indiquent, $\mathcal{O}(S)$ et $\mathcal{U}(S)$ peuvent être réalisées avec des produits libres de copies de O_N^+ et U_N^+ . Il suffit donc de se concentrer sur $\mathcal{H}(S)$.

L'idée est alors de décomposer à nouveau $\mathcal{H}(S)$ en union disjointe de groupoïdes. Pour ce faire, définissons la relation d'équivalence suivante :

$$x \sim y \text{ si } x * \overline{y} \neq \emptyset.$$

Notons que la transitivité n'est pas évidente et demande à être prouvée, voir [Fre17, Lem 5.2.2]. Il suit de la définition que si x et y appartiennent à des classes d'équivalence distinctes, alors $x * y = \emptyset$. Cependant, ces classes d'équivalence ne sont pas des ensembles de fusion. En effet, si $x \sim y$, pourquoi aurait-on $x \sim \overline{y}$? Cela serait vrai si, par exemple, $\overline{y} * y = y * \overline{y}$. On peut donc définir

$$\Gamma(S) = \{x \in S \mid \overline{x} * x = x * \overline{x}\}$$

et considérer la relation d'équivalence induite. Alors, les classes d'équivalences sont des ensembles de fusion, et même des groupes par [Fre17, Lem 5.3.4]. Ceci est conforme à l'intuition des

groupoïdes : si $\bar{x} * x = x * \bar{x}$, cela signifie que la flèche x appartient au groupe des automorphismes d'un objet. Nous venons donc de trouver les objets de notre groupoïde : ils sont indexés par les classes d'équivalences dans $\Gamma(S)$. De plus, les groupes d'automorphismes de ces objets sont les classes d'équivalences elles-mêmes.

Dans un groupoïde, tout morphisme est inversible, donc dès qu'il existe au moins un morphisme entre deux objets, on connaît l'ensemble de tous les morphismes : il est isomorphe en tant qu'espace homogène au groupe d'automorphisme des objets (qui doivent être isomorphes). Autrement dit, il nous suffit de savoir entre quels objets il existe un morphisme pour connaître toute la structure du groupoïde.

Ainsi posé, le problème peut se traiter par des raisonnements et des manipulations relativement élémentaires, mais qui sont tout de même fastidieuses et nécessitent d'introduire beaucoup de notations. Nous nous contenterons donc de formuler le résultat final [Fre17, Thm 5.3.21] :

Théorème 2.2.35 (F.). *Tout ensemble de fusion admissible est caractérisé à isomorphisme près par un triplet de fusion $(n_{\mathcal{O}}, n_{\mathcal{U}}, \mathcal{G})$ où $n_{\mathcal{O}}$ et $n_{\mathcal{U}}$ sont des entiers et \mathcal{G} est un groupoïde discret.*

Un telle classification n'a d'utilité que s'il est possible d'en déduire une classification des groupes quantiques libres. Le problème se pose alors de savoir en quel sens on souhaite obtenir cette classification. La notion la plus générale dans ce cadre est la R^+ -équivalence.

Définition 2.2.36. Deux groupes quantiques compacts \mathbb{G}_1 et \mathbb{G}_2 sont dits R^+ -équivalents si

$$R^+(\mathbb{G}_1) \simeq R^+(\mathbb{G}_2).$$

Le Théorème 2.2.30 affirme donc que tout groupe quantique compact libre est R^+ -équivalent à un groupe quantique de partitions. Pour obtenir une classification à R^+ -équivalence près de tous les groupes quantiques compacts libres, il ne nous reste donc plus qu'à produire un groupe quantique de partitions pour chaque triplet de fusion. Pour ce faire, il faut comprendre quel groupe quantique compact associer à un groupoïde. L'objet de base est alors le groupe quantique compact \tilde{H}_N^+ mentionné précédemment, que nous définissons maintenant.

Définition 2.2.37. Soit $N \in \mathbf{N}$ et soit $C(\tilde{H}_N^+)$ le quotient de la C^* -algèbre $C(U_N^+)$ par les relations

$$u_{ki}u_{kj}^* = 0 = u_{ik}u_{jk}^*$$

pour tous $1 \leq k \leq N$ et $i \neq j$. Si Δ est le coproduit induit, alors le groupe quantique compact $\tilde{H}_N^+ = (C(\tilde{H}_N^+), \Delta)$ est appelé le *groupe quantique hyperoctaédral complexifié*.

Les règles de fusion de \tilde{H}_N^+ ont été calculées pour la première fois par S. Raum dans [Rau12, Cor 5.13] et retrouvées par les méthodes de partitions coloriées dans [Fre14, Cor 4.29]. Si on considère maintenant un groupoïde discret général \mathcal{G} , il s'écrit comme une union disjointe de groupoïdes *connexes*, au sens où entre tout couple d'objets il y a au moins un morphisme. Cette décomposition se traduira par un produit libre au niveau des groupes quantiques compacts. En supposant maintenant \mathcal{G} connexe, il est complètement déterminé par la donnée d'un groupe et par son nombre d'objets. Pour traduire ceci, commençons par remarquer que dans $C(\tilde{H}_N^+)$, les sous- C^* -algèbres engendrées respectivement par les coefficients de $u^{\bar{x}*x}$ et de $u^{x*\bar{x}}$ sont isomorphes à $C(S_N^+)$. On peut donc poser la définition suivante :

Définition 2.2.38. Soit Λ un groupe discret et soit n un entier. On définit alors un groupe quantique compact $Z_N^+(\Lambda, n)$ par

$$Z_N^+(\Lambda, n) = \left(\hat{*}_{S_N^+}^n \tilde{H}_N^+ \right) \underset{S_N^+}{*} \left(\hat{\Lambda} \lambda_* S_N^+ \right).$$

Remarque 2.2.39. Le cas $n = 0$ redonne le produit en couronne libre $\hat{\Lambda} \lambda_* S_N^+$. À l'inverse, si Λ est trivial et $n = 1$ on obtient \tilde{H}_N^+ .

Il est maintenant facile de vérifier que si \mathcal{G} est un groupoïde connexe à n objets de groupes d'automorphismes isomorphes à Λ , le semi-anneau de fusion correspondant est isomorphe à celui de $Z_N^+(\Lambda, n)$. En s'appuyant sur ce fait, [Fre17, Thm 5.4.7] fournit une classification complète :

Théorème 2.2.40. *Soit \mathbb{G} un groupe quantique libre. Alors, \mathbb{G} est R^+ -équivalent à un produit libre de copies de O_N^+ , U_N^+ et $Z_N^+(\Lambda, n)$.*

Une façon de renforcer cette classification pourrait être de décrire tous les groupes quantiques libres à équivalence monoïdale près. L'avantage est que cette notion se comporte bien avec le produit libre, de sorte qu'il suffit de classifier à équivalence monoïdale près O_N^+ , U_N^+ et $Z_N^+(\Lambda, n)$. Pour O_N^+ , on sait (voir par exemple [BDRV06, Thm 5.3] pour une preuve) que tout groupe quantique R^+ -équivalent est monoïdalement équivalent à $SU_q(2)$, où $q + q^{-1} = N$ et $0 < q < 1$. De même, tout groupe quantique R^+ -équivalent à U_N^+ est monoïdalement équivalent à la complexification libre de $SU_q(2)$. Quant à $Z_N^+(\Lambda, n)$, c'est là que nos connaissances sont incomplètes. P. Tarrago et F. Lemeux ont prouvé dans [LT16] que le produit en couronne libre $\widehat{\Gamma} \lambda_* S_N^+$ est monoïdalement équivalent à $\widehat{\Gamma} \lambda_* SO_q(3)$ (voir [FP16, Def 2.6] pour la définition). On peut donc proposer la conjecture suivante :

Problème 9. Montrer que si \mathbb{G} est un groupe quantique libre, alors \mathbb{G} est monoïdalement équivalent à un produit libre de copies de

- $SU_q(2)$,
- $\widetilde{SU}_q(2)$,
- $\left(\widehat{\ast}_{SO_q(3)}^n \left(\widetilde{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} \lambda_* SO_q(3) \right) \right)_{SO_q(3)} \widehat{\ast}_{SO_q(3)} \left(\widehat{\Lambda} \lambda_* SO_q(3) \right)$.

L'étape finale sera, alors, de passer de l'équivalence monoïdale à l'isomorphisme. Encore une fois, le résultat est déjà connu pour O_N^+ et U_N^+ et l'on dispose d'un candidat raisonnable pour le reste, construit à l'aide du *groupe quantique d'automorphismes* d'une C^* -algèbre de dimension finie B munie d'un état ψ (défini par S. Wang dans [Wan98]).

Problème 10. Montrer que si \mathbb{G} est un groupe quantique libre, alors \mathbb{G} est isomorphe à un produit libre de copies de

- O_F^+ ,
- U_F^+ ,
- $\left(\widehat{\ast}_{\text{QAut}(B, \psi)}^n \left(\widetilde{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} \lambda_* \text{QAut}(B, \psi) \right) \right)_{\text{QAut}(B, \psi)} \widehat{\ast}_{\text{QAut}(B, \psi)} \left(\widehat{\Lambda} \lambda_* \text{QAut}(B, \psi) \right)$.

2.3 Le cas de deux couleurs

Le travail exposé dans la section précédente règle en un sens le problème des groupes quantiques compacts associés à des catégories de partitions coloriées non-croisées bloc-stables. L'étape suivante est évidemment de retirer l'hypothèse de bloc-stabilité tout en continuant de supposer les partitions non-croisées afin de pouvoir exploiter les résultats de [FW16]. La situation devient alors nettement plus compliquée. Dans le cas d'une seule couleur, on dispose aujourd'hui d'une classification complète (pas seulement dans le cas non-croisé) due aux efforts combinés de nombreuses personnes et explicitement décrite dans [RW16]. Si on a deux couleurs $\{\circ, \bullet\}$ telles que $\bar{\circ} = \bullet$, une classification des groupes quantiques compacts de partitions non-croisées correspondants a été obtenue par P. Tarrago et M. Weber dans [TW17] et [TW18b]. Ceci nous conduit au cas de deux couleurs qui ne sont pas inverses l'une de l'autre, i.e. $\mathcal{A} = \{x, y\}$ avec $\bar{x} = x$ et $\bar{y} = y$.

2.3.1 Classification

Nous avons obtenu dans [Fre19b] une classification complète des groupes quantiques de partitions non-croisées sur deux couleurs qui sont leur propre inverse. Au-delà des nombreux nouveaux exemples qu'elle fournit et de ses intérêts théoriques, cette classification repose sur une méthode nouvelle et qui semble pouvoir être plus facilement généralisable que d'autres. Nous la décrivons donc avant de donner un aperçu de la classification ainsi obtenue.

Stratégie générale

L'idée est de faire reposer tout le raisonnement sur les résultats de [FW16] exposés dans la Section 2.2.2. Considérons donc une catégorie de partitions non-croisées \mathcal{C} coloriées par l'ensemble $\{x, y\}$ avec $\bar{x} = x$ et $\bar{y} = y$ et soit $p \in \mathcal{C}$. On peut faire tourner les points de p jusqu'à obtenir une partition sur une seule ligne que nous noterons \tilde{p} et qui est dans \mathcal{C} par hypothèse. Alors, $q = \tilde{p}^* \tilde{p} \in \mathcal{C}$ est une partition projective et la représentation u_q correspondante est, d'après [Fre14, Lem 5.1], de dimension 1. De plus, elle est triviale puisque $\tilde{p} \in \mathcal{C}$. Ainsi, toute partition de \mathcal{C} peut se voir comme une relation de la forme $u = 1$ pour une certaine représentation u de dimension 1.

Afin de rendre la remarque précédente plus rigoureuse, notons \mathcal{C}' la plus petite sous-catégorie de partitions de \mathcal{C} contenant toutes les partitions projectives de \mathcal{C} . Alors, $\mathbb{G}_N(\mathcal{C}')$ est un groupe quantique de partitions et, si $p \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'$, alors $q = \tilde{p}^* \tilde{p} \in \mathcal{C}'$ par définition donc $C(\mathbb{G}_N(\langle \mathcal{C}', p \rangle))$ est obtenu en quotientant $C(\mathbb{G}_N(\mathcal{C}'))$ par la relation $u_q = 1$. Pour plus de commodité, donnons un nom à ce type de relation :

Définition 2.3.1. Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact. Un autre groupe quantique compact \mathbb{H} est un *quotient par des relations de dimension 1* s'il existe des représentations u_1, \dots, u_k de \mathbb{G} de dimension 1 telles que $C(\mathbb{H})$ soit le quotient de $C(\mathbb{G})$ par l'idéal engendré par u_1, \dots, u_k .

La stratégie consiste donc, étant donnée une catégorie de partitions coloriées \mathcal{C} , à d'abord calculer \mathcal{C}' et le groupe quantique compact associé, puis à classifier les relations de dimension 1. Au cours de ce travail, deux opérations particulières sont apparues, qui permettent de décrire la catégorie \mathcal{C}' et que nous allons donc détailler :

- Étant donnés trois groupes quantiques compacts $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$ et \mathbb{H} ainsi que des injections

$$i_k : C(\mathbb{H}) \rightarrow C(\mathbb{G}_k)$$

pour $k = 1, 2$, on peut former le produit libre amalgamé $\mathbb{G}_1 \hat{*}_{\mathbb{H}} \mathbb{G}_2$ qui s'obtient en identifiant, dans le produit libre de C^* -algèbres $C(\mathbb{G}_1) * C(\mathbb{G}_2)$, $i_1(x)$ avec $i_2(x)$ pour tout $x \in C(\mathbb{H})$. Cependant, si $t \in C(\mathbb{G}_1 \hat{*}_{\mathbb{H}} \mathbb{G}_2)$ est une représentation de dimension 1, alors on peut à la place quotienter le produit libre amalgamé par la relation

$$ti_1(x)t^{-1} = i_2(x).$$

De plus, l'ensemble des t vérifiant cette relation sera toujours une classe à gauche notée K . Nous appellerons donc ce quotient le *produit libre amalgamé tordu par K* .

- Dans le même esprit, si l'on dispose d'un seul groupe quantique compact \mathbb{G} , d'une représentation u quelconque et d'une représentation t de dimension 1, alors on peut quotienter $C(\mathbb{G})$ par les relations

$$tu_{ij} = u_{ij}t$$

pour tout $1 \leq i, j \leq \dim(u)$.

L'ensemble des t vérifiant la relation sera automatiquement un groupe. Un tel groupe quantique sera appelé un *quotient par des relations de commutations* de \mathbb{G} .

Ces deux constructions sont moins élémentaires qu'il n'y paraît. Elles sont importantes pour nous à cause du résultat suivant qui regroupe [Fre19b, Prop 3.8, Prop 3.10 et Prop 3.13] :

Proposition 2.3.2. *La classe des groupes quantiques de partitions non-croisées est stable par les deux opérations précédentes³, ainsi que par quotient par des relations de dimension 1.*

Ceci montre déjà que, contrairement aux groupe quantiques libres, les groupes quantiques de partitions non-croisées forment une théorie riche et variée. De plus, on est mené à se demander si, réciproquement, tout groupe quantique de partitions non-croisées peut s'obtenir en utilisant les opérations précédentes à partir de groupes quantiques libres. C'est afin de tester la pertinence de cette question que je me suis attelé à la classification des groupes quantiques de partitions non-croisées sur deux couleurs. Les résultats permettent de corriger cette première intuition pour formuler une conjecture générale plausible.

3. Pour le produit libre amalgamé tordu, il est cependant nécessaire que les inclusions du sous-groupe soient toutes deux données par des partitions.

Produits en couronnes de paires

Nous ne suivrons pas ici l'ordre dans lequel la classification est établie dans l'article [Fre19b], mais un ordre suggéré par la question du lien précis entre groupes quantiques libres et groupes quantiques de partitions non-croisées. La classification des groupes quantiques libres montre qu'il faut deux ingrédients pour obtenir, par produits libres éventuellement amalgamés, tous les groupes quantiques libres : les groupes quantiques libres à une couleur, et les produits en couronne libres. Nous allons commencer par généraliser les seconds pour autoriser des représentations de dimension un.

Rappelons que si Γ est un groupe discret et si $S \subset \Gamma$ est une partie génératrice symétrique contenant l'élément neutre e , on peut construire une catégorie de partitions S -coloriée $\mathcal{C}_{\Gamma,S}$ en considérant toutes les partitions non-croisées p coloriées par S telles que, dans chaque bloc, le produit (de gauche à droite) des couleurs de la rangée supérieure est égal, comme élément de Γ , au produit (de gauche à droite) des couleurs de la rangée inférieure. Alors, pour $N \geq 4$, on a

$$\mathbb{G}_N(\mathcal{C}_{\Gamma,S}) = \widehat{\Gamma} \wr S_N^+.$$

Remarquons que le résultat ne dépend pas de S . Par définition, $\mathcal{C}_{\Gamma,S}$ est bloc-stable et le groupe quantique n'a donc pas de représentation non-triviale de dimension 1. Il existe une façon naturelle d'en ajouter, qui nécessite d'abord d'introduire quelques notations.

Pour deux mots w et w' sur un ensemble de couleurs \mathcal{A} , on note $\pi(w, w')$ l'unique partition à un seul bloc dans $NC^{\mathcal{A}}(w, w')$. On note également $\beta(w, w')$ l'unique partition dans $NC^{\mathcal{A}}(w, w')$ avec exactement un bloc formé de tous les points de la rangée supérieure et un bloc formé de tous les points de la rangée inférieure. Voici une description graphique de ces partitions :

$$\pi(w, w') = \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_{n-1} & w_n \\ \hline & \cdots & & \\ \hline w'_1 & w'_2 & w'_{k-1} & w'_k \end{array} \quad \beta(w, w') = \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_{n-1} & w_n \\ \hline & \cdots & & \\ \hline w'_1 & w'_2 & w'_{k-1} & w'_k \end{array}$$

Fixons maintenant Γ et S comme ci-dessus, et considérons un élément non-trivial $\gamma \in \Gamma$. Si $g_1, \dots, g_n \in S$ sont tels que $g_1 \cdots g_n = \gamma$, on peut ajouter

$$\beta_\gamma = \beta(g_1 \cdots g_n, g_1 \cdots g_n)$$

à $\mathcal{C}_{\Gamma,S}$. Alors, u_{β_γ} est une représentation de dimension 1 qui est non-triviale. On vérifie facilement (voir [Fre19b, Sec 3.2]) que le choix des générateurs représentant γ n'importe pas, et qu'ajouter β_γ revient à ajouter β_λ pour tous les éléments λ du sous-groupe engendré par γ . Ces remarques conduisent à la définition suivante :

Définition 2.3.3. Soit Γ un groupe discret, Λ un sous-groupe de Γ et S une partie génératrice symétrique de Γ contenant l'élément neutre. On note alors $\mathcal{C}_{\Gamma,\Lambda,S}$ la catégorie de partitions engendrée par $\mathcal{C}_{\Gamma,S}$ et β_λ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Les groupes quantiques de partition associés sont appelés *produits en couronne libres de paires* et notés $H_N^{++}(\Gamma, \Lambda)$.

Nous verrons dans la Section 2.3.2 qu'il est possible de décrire la théorie des représentations de ces objets grâce aux outils de [FW16]. Les produits en couronne libres de paires apparaissent naturellement quand on essaie de classifier les groupes quantiques de partitions non-croisées sur deux couleurs. De fait, ils possèdent une propriété de rigidité surprenante, qui est à l'origine de la stratégie de classification décrite dans la Section 2.3.1. La voici telle qu'établie dans [Fre19b, Thm 3.18] :

Théorème 2.3.4 (F.). Soit Γ un groupe discret, Λ un sous-groupe de Γ et S une partie génératrice symétrique de Γ contenant l'élément neutre. Si \mathcal{C} est une catégorie de partitions non-croisées contenant $\mathcal{C}_{\Gamma,\Lambda,S}$, alors il existe un sous-groupe $\Lambda \subset \tilde{\Lambda} \subset \Gamma$ et un sous-groupe normal $\Lambda_0 \subset \tilde{\Lambda}$ tel que pour tout $N \geq 4$,

$$\mathbb{G}_N(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{G}_N(\mathcal{C}_{\Gamma/\Lambda_0, \tilde{\Lambda}/\Lambda_0, S}).$$

Classification et conjectures

Rappelons qu'il existe sept groupes quantiques libres sur une couleur :

$$O_N^+, H_N^+, B_N^+, B_N^+ \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, B_N^+ * \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, S_N^+ \text{ et } S_N^+ \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

De plus, les versions signées permettent, en quotientant par des relations de dimension 1, de retrouver les versions non-signées. Il n'y a donc que quatre groupes quantiques compacts à considérer. Le résultat principal de notre travail, obtenu en combinant [Fre19b, Thm 4.4, Prop 5.5, Prop 5.6, Thm 5.8, Thm 6.5, Prop 7.2, Prop 7.6, Prop 7.11, Prop 7.12, Thm 7.14], peut s'énoncer comme suit :

Théorème 2.3.5 (F.). *Soit \mathbb{G} un groupe quantique de partitions \mathcal{A} -coloriées non-croisées. Si \mathbb{G} n'est pas un produit en couronne de paire, alors il existe*

$$\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2 \in \{O_N^+, H_N^+, B_N^+ * \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, S_N^+ * \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\}$$

tel que \mathbb{G} soit obtenu à partir de $\mathbb{G}_1 \hat{*} \mathbb{G}_2$ à l'aide des opérations suivantes :

- produit libre amalgamé tordu,
- relations de commutation entre une représentation de dimension 1 et une représentation de dimension supérieure,
- relations de dimension 1.

Les résultats obtenus dans [Fre19b] sont en fait plus précis :

- Premièrement, le groupe des représentations de dimension 1 est toujours un groupe diédral. On peut donc décrire facilement tous ses sous-groupes et identifier ceux qui sont distingués. Ces derniers donnent les relations de dimension 1 tandis que les premiers donnent les relations de commutation et les classes à gauche tordant les produits libres amalgamés.
- Deuxièmement, les représentations avec lesquelles on peut ajouter des relations de commutation sont en fait très limitées. Remarquons d'abord qu'il est équivalent d'ajouter des relations de commutation avec le sous-groupe quantique engendré par la représentation en question. Nous avons montré que dans tous les cas sauf celui où $\mathbb{G}_1 = S_N^{+'}$ et $\mathbb{G}_2 = H_N^+$ (ou l'inverse), il suffit de prendre des relations de commutation avec l'unique sous-groupe quantique strict d'un des facteurs.
- Dans plusieurs cas, on peut montrer que des relations de commutation sont automatiquement vérifiées ou qu'il n'est pas possible d'en rajouter. Par exemple, on ne peut ajouter de relations de commutations dans un produit libre amalgamé tordu.

Toutes ces considérations permettent d'établir une liste de toutes les catégories de partitions possibles. Elle est donnée dans [Fre19b, Thm 8.1] et nous ne la reproduisons pas ici parce qu'elle est longue et, à notre avis, peu éclairante quant aux possibles prolongements de ce travail. En effet, tel qu'il est énoncé le Théorème 2.3.5 se prête à la généralisation. Pour la formuler, commençons par donner un nom aux groupe quantiques de partitions que nous avons étudiés.

Définition 2.3.6. Un groupe quantique de partitions est dit *de type orthogonal* si toutes les couleurs sont leur propre inverse.

Nous pouvons donc proposer, sous forme de problème ouvert, la généralisation suivante du Théorème 2.3.5 :

Problème 11. Tout groupe quantique de partitions non-croisées de type orthogonal est-il soit un produit en couronne libre de paire, soit obtenu à partir de groupes quantiques aisés orthogonaux par des produits libres amalgamés tordus, des relations de commutation et des relations de dimension 1 ?

Pour passer d'un tel énoncé au cas général, il faut regarder la classification des groupes quantiques aisés unitaires donnés par des partitions non-croisées par P. Tarrago et M. Weber [TW17]. Il s'avère qu'ils peuvent tous être obtenus à partir de produits en couronne libres et de groupes quantiques aisés orthogonaux en utilisant une famille de constructions appelées *complexifications*, que nous allons maintenant décrire.

Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact muni d'une représentation fondamentale u . Pour $d \in \mathbf{N}$, si z désigne la représentation fondamentale de $\overline{\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}}$, on considère la sous- C^* -algèbre de $C(\mathbb{G}) * C^*(\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})$ engendrée par les coefficients de uz . La restriction du coproduit en fait un groupe quantique compact appelé *d-complexification libre* de \mathbb{G} . Si on remplace le produit libre par un produit tensoriel, on obtient la *d-complexification tensorielle*. Il existe également une version tordue de la complexification libre appelée *d-complexification libre r-auto-adjointe*. On est alors mené à énoncer une deuxième question :

Problème 12. Tout groupe quantique de partitions non-croisées est-il soit un produit en couronne de paire, soit obtenu à partir d'un groupe quantique de partitions non-croisées de type orthogonal en utilisant des complexifications ?

2.3.2 Calculs explicites

Les résultats de notre travail en commun avec M. Weber [FW16] donnent une méthode générale pour calculer la théorie des représentations d'un groupe quantique de partitions, qui est particulièrement efficace si les partitions sont toutes non-croisées. Malheureusement, à l'époque de ce travail les seuls exemples non-croisés connus étaient les groupes quantiques aisés orthogonaux et leur théorie des représentations avait déjà été calculée par d'autres moyens. Au moins avons-nous pu alors donner une preuve unifiée et simple de tous ces résultats.

Mais en autorisant des couleurs, on obtient de nombreux nouveaux exemples qu'il est possible d'étudier. Dans l'article [Fre18a], nous avons calculé la théorie des représentations de deux des familles de groupes quantiques apparus dans la classification de la Section 2.3.1. Ce travail montre qu'une utilisation judicieuse des résultats de [FW16] permet facilement d'obtenir toutes les informations sur les représentations d'un groupe quantique de partitions. Dans toute cette section, l'ensemble des couleurs est égal à $\mathcal{A} = \{x, y\}$ avec $x^{-1} = x$ et $y^{-1} = y$.

Groupes quantiques bi-orthogonaux

La première famille que nous avons étudiée est formée des groupes quantiques obtenus en quotientant $C(O_N^+ \hat{*} O_N^+)$ par des relations de dimension 1. Il suit des résultats de [Fre19b] que pour tout entier $\ell \in \mathbf{N}$ il existe un unique tel groupe quantique de partitions non-croisées dont la catégorie de partitions est

$$\mathcal{C}_\ell = \langle D_{xy}^* D_{xy}, D_{xy}^{\otimes \ell} \rangle,$$

où D_{xy} désigne la partition \sqcup coloriée par x et y . On note $O_N^{++}(\ell)$ ce groupe quantique compact. L'étude commence par la classification des représentations irréductibles de $O_N^{++}(\ell)$. Pour cela, il faut trouver les partitions projectives de \mathcal{C}_ℓ , ce qui est difficile pour une catégorie de partitions définies par des générateurs. L'idée est donc de plonger \mathcal{C}_ℓ dans une catégorie qui, elle, sera définie par un propriété globale des partitions qui la composent. Pour ce faire, remarquons qu'étant donné un mot w sur \mathcal{A} , on peut lui associer un élément du groupe diédral infini $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ en envoyant x sur le générateur de la première copie de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et y sur le générateur de la seconde. Notons $\varphi(w)$ cet élément.

Définition 2.3.7. Soit ℓ un entier et soit Γ_ℓ le sous-groupe de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ engendré par $\varphi(xy)^\ell$. Une partition $p \in NC(w, w')$ est dite *ℓ -admissible* si $\varphi(w)\varphi(w')^{-1} \in \Gamma_\ell$. On note \mathcal{D}_ℓ la catégorie de toutes les partitions en paires non-croisées ℓ -admissibles.

L'intérêt de cette définition repose sur les deux remarques suivantes :

- \mathcal{D}_ℓ est une catégorie de partitions coloriées (cela suit du fait que Γ_ℓ est un sous-groupe normal de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$),

- Les générateurs de \mathcal{C}_ℓ appartiennent à \mathcal{D}_ℓ , donc $\mathcal{C}_\ell \subset \mathcal{D}_\ell$.

Pour classifier les partitions projectives de \mathcal{D}_ℓ à équivalence près, il est utile de constater qu'elle s'écrivent toujours comme une concaténation horizontale de partitions projectives transverses et de partitions projectives non-transverses. Les premières sont de la forme $\begin{smallmatrix} |x \\ |y \end{smallmatrix}$, tandis que les secondes correspondent aux représentations de dimension un, qu'on peut classifier directement pour $O_N^{++}(\ell)$ (voir [Fre19b, Lem 4.3]) :

Proposition 2.3.8. *Pour $1 \leq k \leq N$, posons*

$$s = \sum_{m=1}^N u_{km}^x u_{km}^y \in C(O_N^{++}(\ell)).$$

Alors, s est une représentation de dimension un (i.e. $\Delta(s) = s \otimes s$) d'ordre ℓ et qui engendre le groupe des représentations de dimension un de $O_N^{++}(\ell)$.

Poursuivant le raisonnement précédent, il suffit donc de trois générateurs pour engendrer toutes les représentations irréductibles : u^x , u^y et s . Cependant, on peut remarquer qu'en effectuant une rotation sur la partitions $D_{xy}^* D_{xy}$, on obtient la partition $D_{xy} \otimes \pi(y, x)$ qui donne une équivalence entre $u^x \otimes s$ et u^y . Il suit que seules deux classes d'équivalences sont nécessaires. De plus, comme u^y est auto-contragrédiente, on a

$$u^x \otimes s \sim u^y \sim \overline{u^y} \sim \overline{u^x \otimes s} \sim s^{-1} \otimes \overline{u^x} \sim s^{-1} \otimes u^x,$$

qui nous donne une relation entre nos deux générateurs. L'un des résultats principaux de ce travail, [Fre18a, Thm 3.5], dit que c'est la seule relation. C'est pour le prouver que la catégorie de partitions \mathcal{D}_ℓ est utile. Pour expliquer ceci, introduisons d'abord le monoïde abstrait qui servira à indexer les classes d'équivalences de représentations irréductibles :

Définition 2.3.9. Soit ℓ un entier et soit W_ℓ le monoïde produit libre $\mathbf{N} * \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$. Si X et θ sont les générateurs respectivement de \mathbf{N} et $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$, on note M_ℓ le quotient de W_ℓ par la relation

$$X\theta = \theta^{-1}X.$$

La décomposition en concaténations horizontales et les arguments précédents donnent une façon naturelle d'indexer toute classe d'équivalence de partitions projectives de \mathcal{C}_ℓ par un élément de M_ℓ . Supposons que deux classe d'équivalence de partitions distinctes correspondent au même élément de M_ℓ . On a alors

$$\theta^k X^n \sim \theta^{k'} X^{n'}.$$

Des raisons de dimension font que l'on doit nécessairement avoir $n = n'$, ce qui mène donc à $\theta^k \sim \theta^{k'}$. Au niveau des partitions, on doit alors avoir

$$(D_{xy}^* D_{xy})^{|k-k'|} \sim \emptyset$$

et donc $D_{xy}^{|k-k'|} \in \mathcal{C}_\ell \subset \mathcal{D}_\ell$. Par définition de \mathcal{D}_ℓ , on a alors $\varphi(xy)^{|k-k'|} \in \Gamma_\ell$, ce qui donne $k = k' \pmod{\ell}$. Or, une telle relation est déjà vérifiée dans M_ℓ . Cet argument et d'autres nous ont permis de donner dans [Fre18a, Thm 3.5] une description complète de la théorie des représentations de $O_N^{++}(\ell)$.

Théorème 2.3.10 (F.). *Il existe une bijection entre les classes d'équivalences de représentations irréductibles de $O_N^{++}(\ell)$ et M_ℓ qui envoie $[u^x]$ sur X et $[s]$ sur θ . La contragrédiente est donnée par l'unique involution antimultiplicative $x \mapsto \bar{x}$ sur W_ℓ telle que $\overline{\overline{X}} = X$ et $\overline{\overline{\theta}} = \theta^{-1}$. Enfin, les règles de fusion sont données par la formule*

$$\theta^k X^n \otimes X^{n'} \theta^{k'} = \bigoplus_{i=0}^{\min(n, n')} \theta^k X^{n+n'-2i} \theta^{k'}.$$

Comme on peut s'en douter d'après les explications précédentes, la preuve fonctionne en fait pour toute catégorie de partitions \mathcal{C} telle que $\mathcal{C}_\ell \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{D}_\ell$. Ceci n'est bien sûr pas un hasard, et on peut aisément en déduire que les deux extrémités de l'inclusion précédente sont en fait identiques :

Corollaire 2.3.11. *On a l'égalité de catégories de partitions $\mathcal{C}_\ell = \mathcal{D}_\ell$.*

Produits en couronnes libres de paires

Notre seconde famille d'exemples est donnée par les produits en couronne libres de paires. Encore une fois, nous allons commencer par décrire une catégorie de partitions plus pratique à manipuler que $\mathcal{C}_{\Gamma,\Lambda,S}$ et qui la contient. Nous aurons besoin pour cela de la définition suivante :

Définition 2.3.12. Soit p une partition de $\{1, \dots, k+\ell\}$. Une sous-partition q de p est dite *pleine* si c'est une partition d'un sous-ensemble de la forme $\{a, \dots, a+b\}$ pour $1 \leq a \leq a+b \leq k+\ell$.

Comme précédemment, pour un mot w sur $\{x, y\}$ on note $\varphi(w)$ l'élément de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ correspondant.

Définition 2.3.13. On note $\mathcal{D}_{\Gamma,\Lambda,S}$ l'ensemble de toutes les partitions $p \in NC^S(w, w')$ telles que

- $\varphi(w) = \varphi(w')$,
- Pour toute sous-partition pleine q de p avec pour coloriage supérieur v et pour coloriage inférieur v' , on a $\varphi(v)^{-1}\varphi(v') \in \Lambda$.

Contrairement au cas de \mathcal{D}_ℓ dans la Section 2.3.2, il n'est pas évident que $\mathcal{D}_{\Gamma,\Lambda,S}$ est une catégorie de partitions. La preuve de ce fait est l'objet de [Fre18a, Lem 4.2]. On peut alors commencer à décrire la théorie des représentations de $H_N^{++}(\Gamma, \Lambda)$. Il est plus simple de commencer par les représentations de dimension 1 qui, comme on peut s'y attendre, sont données par Λ d'après [Fre18a, Lem 4.3] :

Lemme 2.3.14. L'application $\lambda \mapsto \beta_\lambda$ donne un isomorphisme de groupes

$$\mathcal{G}(H_N^{++}(\Gamma, \Lambda)) \simeq \Lambda.$$

Pour décrire les autres représentations, nous allons d'abord définir le monoïde abstrait qui les décrit. On définit une relation binaire \sim sur le monoïde libre $F(\Gamma)$ sur Γ de la façon suivante : pour tous $g_1, \dots, g_n \in \Gamma$ et $\lambda \in \Lambda$,

$$g_1 \cdots (g_{i-1} \cdot \lambda) g_i g_{i+1} \cdots g_n \sim g_1 \cdots g_{i-1} (\lambda \cdot g_i) g_{i+1} \cdots g_n.$$

le quotient par la clôture transitive de \sim est noté $W(\Gamma, \Lambda)$. Nous pouvons maintenant donner la théorie des représentations, établie dans [Fre18a, Thm 4.4],

Théorème 2.3.15 (F.). Soit $\gamma \in \Gamma$ et $g_1, \dots, g_n \in S$ tels que $\gamma = g_1 \cdots g_n = \gamma$. L'application

$$\pi(g_1 \cdots g_n, g_1 \cdots g_n) \mapsto \gamma \in W(\Gamma, \Lambda)$$

induit un isomorphisme entre les classes d'équivalence de représentations irréductibles de $H_N^{++}(\Gamma, \Lambda)$ de dimension strictement plus grande que 1 et $W(\Gamma, \Lambda)$.

Les règles de fusion sont plus délicates à décrire. Elles reposent sur deux lois de composition binaires sur $W(\Gamma, \Lambda)$. Soient $a = a_1 \cdots a_n$, $b = b_1 \cdots b_m$ et $c = c_1 \cdots c_\ell$ des mots sur S avec $\varphi(c) \in \Lambda$, on pose

$$\begin{aligned} a \bullet_c b &= a_1 \cdots a_{n-1} (a_n \cdot \varphi(c)) b_1 \cdots b_m = a_1 \cdots a_n (\varphi(c) \cdot b_1) b_2 \cdots b_m \\ a * b &= a_1 \cdots a_{n-1} (a_n \cdot \varphi(c) \cdot b_1) b_2 \cdots b_m. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le dernier résultat de cette section :

Proposition 2.3.16. Les règles de fusion de $H_N^{++}(\Gamma, \Lambda)$ sont

$$\begin{aligned} (w_1 \dots w_n) \otimes (w'_1 \dots w'_{n'}) &= \sum_{w=az, w'=z'b, \varphi(zz') \in \Lambda} a \bullet_{zz'} b + a *_{zz'} b \\ \lambda \otimes (w_1 \dots w_n) &= (\lambda \cdot w_1) w_2 \dots w_n \end{aligned}$$

2.4 Produits en couronnes de partitions

La théorie des groupes quantiques de partitions est très générale et permet de produire de nombreux exemples. Même en se restreignant au cas des partitions non-croisées, nous sommes encore loin de comprendre la classe de groupes quantiques compacts obtenus. Mais il existe aussi des exemples qui ne rentrent pas dans ce cadre. Par exemple, M. Bloss a montré dans [Blo03] (un travail qui a été redémontré et étendu dans un formalisme plus proche du nôtre par A.J. Kennedy et M. Parvathi dans [KP04]) qu'on pouvait construire la catégorie des représentations du produit en couronne $G \wr S_N$, quand G est un groupe fini, à l'aide de partitions avec une structure supplémentaire : le groupe G agit sur l'ensemble \mathcal{A} des couleurs. Cette construction ne se ramène pas à celle exposée précédemment car ici G est vu comme un groupe discret et non pas compact. Nous verrons d'ailleurs dans la Section 2.4.3 qu'il n'est possible de relier ces idées aux groupes quantiques de partitions que quand G est abélien.

2.4.1 Moyennes d'opérateurs associés aux partitions

Commençons par expliquer la construction de M. Bloss, reformulée dans notre langage. On considère l'ensemble P^G de toutes les partitions coloriées par les éléments du groupe G . Étant donnée une telle partition p et un élément $g \in G$, on peut multiplier les couleurs de tous les points de p par g à gauche et noter $g.p$ le résultat. On peut également choisir des éléments $g_1, \dots, g_{b(p)} \in G$ et multiplier les couleurs des points du k -ième bloc de p par g_k à gauche, et noter $(g_1, \dots, g_{b(p)}) . p$ le résultat. L'idée est alors de moyenner les opérateurs T_p à l'aide de ces actions, de la façon suivante : on pose

$$L_p = \sum_{g \in G} T_{g.p}$$

$$M_p = \sum_{g_1, \dots, g_{b(p)} \in G} T_{(g_1, \dots, g_{b(p)}) . p}$$

Un calcul élémentaire mais fastidieux (voir [FS18, Lem 3.3]) montre qu'étant donné un espace de Hilbert de dimension finie $V = \mathbf{C}^N$, les espaces

$$\text{Mor}_\times(k, l) = \{L_p \mid p \in P^G\}$$

$$\text{Mor}_l(k, l) = \{M_p \mid p \in P^G\}$$

vérifient les propriétés de la Définition 2.1.6 et donnent donc des \mathbf{C}^* -catégories monoïdales concrètes qu'on notera respectivement $\mathfrak{C}_\times(G, N)$ et $\mathfrak{C}_l(G, N)$. Par la dualité de Tannaka-Krein telle qu'énoncée dans le Théorème 2.1.8, on obtient alors deux groupes quantiques compacts $\mathbb{G}_\times(G, N)$ et $\mathbb{G}_l(G, N)$. Les résultats principaux de [Blo03] sont les isomorphismes suivants :

Théorème 2.4.1 (Bloss). *Soit G un groupe fini et N un entier. Alors,*

$$\mathbb{G}_\times(G, N) \simeq G \times S_N$$

$$\mathbb{G}_l(G, N) \simeq G \wr S_N$$

2.4.2 Interpolation entre produits en couronnes classique et libre

La généralisation se propose maintenant d'elle-même : il suffit, dans la définition des \mathbf{C}^* -catégories monoïdales concrètes ci-dessus, de ne considérer que les opérateurs associés à des partitions provenant d'une catégorie de partitions \mathcal{C} fixée. On obtient ainsi de nouvelles \mathbf{C}^* -catégories monoïdales concrètes notées $\mathfrak{C}_\times(G, N, \mathcal{C})$ et $\mathfrak{C}_l(G, N, \mathcal{C})$. Nous avons, dans un travail en commun [FS18] avec A. Skalski, étudié les groupes quantiques compacts que l'on pouvait ainsi obtenir. Mentionnons tout d'abord que nous avons déjà réglé le cas de $\mathfrak{C}_\times(G, N, \mathcal{C})$ dans [Fre17, Prop 4.3.1] :

Théorème 2.4.2 (F.). *Le groupe quantiques compact associé à $\mathfrak{C}_\times(G, N, \mathcal{C})$ est isomorphe au produit direct $G \times \mathbb{G}_N(\mathcal{C})$.*

Nous nous sommes donc concentrés sur $\mathfrak{C}_\lambda(G, N, \mathcal{C})$ et, par analogie avec le cas classique, nous avons noté le groupe quantique compact associé $G \wr \mathbb{G}_N(\mathcal{C})$ et nous l'avons appelé *produit en couronne de partitions* de G par $\mathbb{G}_N(\mathcal{C})$. Nous savons déjà que si $\mathbb{G}_N(\mathcal{C}) = S_N$, on retrouve le produit en couronne classique. Qu'en est-il si $\mathbb{G}_N(\mathcal{C}) = S_N^+$, retrouve-t-on le produit en couronne libre ?

Pour répondre à cette question, il est nécessaire de donner une autre description du groupe quantique compact $G \wr \mathbb{G}_N(\mathcal{C})$, cette fois-ci directement par générateurs et relations. Pour cela, nous nous sommes inspirés de l'idée des *matrices sudoku* utilisées par T. Banica et R. Vergnioux dans [BV09] (qui est le cas $G = \mathbf{Z}/s\mathbf{Z}$).

Définition 2.4.3. Soit G un groupe fini, N un entier et A une C^* -algèbre. Une (G, N) -matrice *sudoku* à coefficients dans A est une matrice $U \in M_{N \times |G|}(A)$ de la forme

$$U = [Q_{h^{-1}g}]_{g, h \in G},$$

où $Q_g \in M_N(A)$ pour tout $g \in G$.

Comme nous l'avons expliqué au début de ce chapitre, étant donné une partition p et un entier N , on peut produire un ensemble de relations pour une matrice $u \in M_N(A)$ à coefficients dans une C^* -algèbre A , en imposant que la matrice u commute avec l'opérateur T_p . Concrètement, si $p \in P(k, \ell)$, cette relation s'écrit

$$\sum_{t_1, \dots, t_\ell=1}^N \delta_p(\mathbf{i}, \mathbf{t}) u_{i_1 t_1} \cdots u_{i_k t_\ell} = \sum_{s_1, \dots, s_k=1}^N \delta_p(\mathbf{s}, \mathbf{j}) u_{s_1 j_1} \cdots u_{s_k j_\ell}$$

pour tous (i_1, \dots, i_ℓ) et tout (j_1, \dots, j_k) . L'ensemble de ces relations pour toutes les partitions p d'une catégorie de partitions \mathcal{C} sera appelé *l'ensemble des \mathcal{C} -relations*⁴. On a alors la description alternative suivante du produit en couronne de partitions prouvée dans [FS18, Thm 3.14] :

Théorème 2.4.4 (F.-Skalski). *Soit G un groupe fini, N un entier et \mathcal{C} une catégorie de partitions. Soit A la C^* -algèbre universelle engendrée par une (G, N) -matrice sudoku vérifiant les \mathcal{C} -relations. Alors, il existe un isomorphisme*

$$C(G \wr \mathbb{G}_N(\mathcal{C})) \rightarrow A$$

tel que l'image du coproduit est donnée sur la matrice sudoku par

$$\Delta((Q_h)_{ij}) = \sum_{k=1}^N \sum_{g \in G} (Q_g)_{ik} \otimes (Q_{h^{-1}g})_{kj}.$$

Grâce à ce résultat, il est possible de comparer notre construction à celle du produit en couronne libre de J. Bichon [Bic04] et de prouver, dans [FS18, Thm 3.23], qu'elles coïncident :

Théorème 2.4.5 (F.-Skalski). *Soit G un groupe fini et N un entier. Alors,*

$$G \wr S_N^+ \simeq G \wr_* S_N^+$$

Ce résultat est intéressant car il montre que notre construction *interpole* les deux notions de produit en couronne. En effet, le produit en couronne libre $G \wr_* S_N$ n'est jamais un groupe classique si $N \geq 2$, tandis que notre construction recouvre à la fois les cas classiques et libres. Une question naturelle à ce stade est de savoir ce qui se passe si on considère des groupes quantiques qui ne sont ni classiques ni libres. On ne connaît malheureusement pas de groupe quantique $S_N \subset \mathbb{G} \subset S_N^+$. On pourrait cependant considérer d'autres groupes quantiques de partitions.

Problème 13. Étudier le groupe quantique compact $G \wr O_N^*$, où G est un groupe fini et O_N^* est le *groupe quantique orthogonal semi-libéré* (voir par exemple [BV10] pour une description de cet objet).

4. Une étude très générale et détaillée des objets que l'on peut construire à partir de ces relations a été entreprise par M. Weber dans [Web17a] et [Web17b].

En ce qui concerne les groupes quantiques de partitions non-croisées, nous avons pu identifier un autre cas important dans [FS18, Thm 3.20] : celui du groupe quantique hyperoctaédral H_N^+ .

Théorème 2.4.6 (F.-Skalski). *Soit G un groupe fini et N un entier. Alors,*

$$G \wr H_N^+ \simeq (G \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \wr S_N^+$$

Comme on sait de plus par [BV09, Thm 3.4] que $H_N^+ = \widehat{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} \wr_* S_N^+$, on a l'égalité

$$G \wr (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \wr S_N^+) = (G \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \wr S_N^+.$$

Remarquons pour conclure qu'en prenant les abélianisations des deux membres et en utilisant [FS18, Prop 3.15], on obtient la même égalité en remplaçant S_N^+ par S_N .

2.4.3 Le cas abélien

Pour aller plus loin dans l'étude des produits en couronnes de partitions, nous allons nous restreindre au cas où le groupe G est abélien. Alors, il est possible de ramener l'étude du produit en couronne de partition au cadre des groupes quantiques de partitions exposé dans la Section 2.2.1.

Pour cela, considérons la représentation dite *fondamentale* de $G \wr \mathbb{G}_N(\mathcal{C})$, c'est-à-dire celle donnée par la (G, N) -matrice sudoku U . Par définition de $\mathfrak{C}_l(G, N, \mathcal{C})$, les morphismes de U vers U sont donnés par les opérateurs M_p où la partition non-coloriée sous-jacente à p est soit l'identité $|$, soit formée de deux points. Dans le second cas, il n'y a qu'un seul tel opérateur, obtenu en moyennant la partition formée de deux points coloriés par e . Dans le premier cas, il existe $g \in G$ tel que M_p est obtenu en moyennant $|_g^e$. Il y a donc $|G|$ tels opérateurs et ils engendrent une copie de l'algèbre $\mathbf{C}[G]$ du groupe G . Si G est abélien, cette algèbre n'est autre que l'algèbre $C(\widehat{G})$ des fonctions sur le dual de Pontryagin de G . Cette dernière étant commutative, ses projecteurs minimaux sont les fonctions indicatrices de ses points. Ceci mène à la définition suivante, pour $\chi \in \widehat{G}$:

$$P_\chi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) M_{|_g^e}.$$

On vérifie facilement (voir [FS18, Lem 4.1]) que les P_χ sont des projections orthogonales dont la somme vaut 1. De plus, si ε désigne le caractère de la représentation triviale, alors P_χ est minimale pour tout $\chi \neq \varepsilon$, tandis que ε est soit minimale, soit somme de deux projections minimales. Ce dernier cas n'apparaît que si la partition composée de deux points est dans \mathcal{C} . Pour simplifier, nous supposons désormais que ce n'est pas le cas. Cette décomposition en projecteurs minimaux deux à deux orthogonaux donne immédiatement la décomposition de U en somme de représentations irréductibles :

Définition 2.4.7. Pour $\chi \in \widehat{G}$, posons $u^\chi = P_\chi U P_\chi$. Alors, les représentations u^χ sont irréductibles et

$$U = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} u^\chi.$$

Les représentations u^χ sont appelées *représentations basiques* de $G \wr \mathbb{G}_N(\mathcal{C})$.

Nous pouvons maintenant voir le lien avec les groupes quantiques de partitions : toute représentation de $G \wr \mathbb{G}_N(\mathcal{C})$ étant incluse dans une puissance tensorielle de U , elle est également incluse dans un produit tensoriel de représentations basiques. Il suffit donc de décrire les entrelaceurs entre ces derniers produits tensoriels en termes de partitions. Pour ce faire, il est nécessaire de moyennner les entrelaceurs à l'aide des caractères. À ce stade, nous avons besoin de notations supplémentaires : étant donné un k -uplet $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_k)$ de caractères de G et un k -uplet $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_k)$ d'éléments de G , on pose

$$\chi(\mathbf{g}) = \prod_{i=1}^k \chi_i(g_i).$$

Définition 2.4.8. Soit $p \in \mathcal{C}(k, \ell)$ une partition, soit $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_k)$ un k -uplet de caractères de G et soit $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_\ell)$ un ℓ -uplet de caractères de G . L'opérateur moyenné associé est

$$F_p(\chi, \rho) = \sum_{\mathbf{g}=(g_1, \dots, g_k)} \sum_{\mathbf{h}=(h_1, \dots, h_\ell)} \chi(\mathbf{g}) \bar{\rho}(\mathbf{h}) M_{p(\mathbf{g}, \mathbf{h})},$$

où $p(\mathbf{g}, \mathbf{h})$ est la partition p coloriée avec les éléments de \mathbf{g} dans le rang supérieur et les éléments de \mathbf{h} dans le rang inférieur.

Ces opérateurs sont les candidats naturels pour engendrer linéairement les espaces de morphismes entre $u^{\chi_1} \otimes \dots \otimes u^{\chi_k}$ et $u^{\rho_1} \otimes \dots \otimes u^{\rho_\ell}$. Toutefois, vérifier ceci nécessite en particulier de savoir que la composition de deux tels opérateurs a encore la même forme. Il s'agit d'un calcul délicat qui aboutit à la formule suivante ([FS18, Prop 4.6]) :

Proposition 2.4.9 (F.-Skalski). *Pour tous $p \in \mathcal{C}(\ell, m)$, $q \in \mathcal{C}(m, k)$, et des ensembles de caractères χ, ρ, χ', ρ' , on a*

$$F_p(\chi, \rho) F_q(\chi', \rho') = |G|^{b(p)+b(q)-b(pq)+\ell} N^{\text{rl}(p,q)} \delta(\rho, \chi') F_{pq}(\chi, \rho').$$

La formule précédente paraît compliquée, mais il suffit de renormaliser les opérateurs en posant

$$\tilde{F}_p(\chi, \rho) = |G|^{(k+\ell)/2-b(p)} F_p(\chi, \rho)$$

pour obtenir la formule plus simple

$$\tilde{F}_p(\chi, \rho) \tilde{F}_q(\chi', \rho') = N^{\text{rl}(p,q)} \delta(\rho, \chi') \tilde{F}_{pq}(\chi, \rho').$$

Cette dernière est semblable à la relation vérifiée par les opérateurs T_p pour les groupes quantiques de partitions, nous ne sommes donc plus très loin du but et la définition de la bonne catégorie de partitions est naturelle.

Définition 2.4.10. Soit Γ un groupe discret et \mathcal{C} une catégorie de partitions non-coloriées. On note $\mathcal{C}[\Gamma]$ la catégorie de partitions coloriées par Γ (avec l'involution donnée par l'inversion dans le groupe) dont les partitions sous-jacentes sont les éléments de \mathcal{C} , et telles que dans tout bloc, le produit des éléments de la rangée supérieure est égal dans Γ au produit des éléments de la rangée inférieure.

On a alors l'un des résultats principaux de notre travail, [FS18, Thm 4.11] :

Théorème 2.4.11 (F.-Skalski). *Soit G un groupe abélien fini et soit \mathcal{C} une catégorie de partitions, alors*

$$G \wr \mathbb{G}_N(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{G}_N(\mathcal{C}[\widehat{G}]).$$

2.4.4 Généralisations

Il existe des généralisations naturelles du cadre que nous venons de décrire. Par exemple, plutôt que de colorier les partitions par les éléments de G , on pourrait les colorier par les éléments d'un ensemble X muni d'une action α de G . La construction des opérateurs moyennés M_p^α s'étend à ce cadre et produit encore une C^* -catégorie monoïdale concrète, donnant ainsi un groupe quantique compact que nous noterons $G \wr_\alpha \mathbb{G}_N(\mathcal{C})$. La caractérisation en termes de matrices sudoku admet une généralisation à ce cadre établie dans [FS18, Prop 5.3] :

Théorème 2.4.12 (F.-Skalski). *Soit G un groupe fini et soit X un ensemble fini muni d'une action α de G . Alors, $C(G \wr_\alpha \mathbb{G}_N(\mathcal{C}))$ est la C^* -algèbre universelle engendrée par les coefficients d'une matrice*

$$\mathcal{V} = \left(\mathcal{V}_{i,x}^{j,y} \right)_{1 \leq i, j \leq N, x, y \in X}$$

telle que

- $\mathcal{V}_{i,x}^{j,y} = 0$ pour tous $1 \leq i, j \leq N$ si x et y ne sont pas dans la même orbite,

- Pour tout $x \in X$, la matrice $(\mathcal{V}_{i,g_1.x}^{j,g_2.x})_{1 \leq i,j \leq N, g_1, g_2 \in G}$ est unitaire et vérifie les \mathcal{C} -relations,
- Pour tous $s, t \in G$ et tous $x, y \in X$,

$$\sum_{g \in \text{Stab}(x)} \mathcal{V}_{i,th.x}^{j,s.x} = \sum_{h \in \text{Stab}(y)} \mathcal{V}_{i,t.y}^{j,sg.y}.$$

Quelques cas particuliers peuvent être facilement décrits :

- Si l'action est triviale, alors $G \wr_{\alpha} \mathbb{G}_N(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{G}_N(\mathcal{C})$,
- Si l'action est libre et transitive, alors on est rammené à la situation de G agissant sur lui-même, donc $G \wr_{\alpha} \mathbb{G}_N(\mathcal{C}) \simeq G \wr \mathbb{G}_N(\mathcal{C})$,
- Si l'action est transitive mais pas libre, on peut identifier X à G/H pour un sous-groupe H de G . Alors, le noyau de l'action est l'enveloppe normale \overline{H} de H (c'est-à-dire le plus grand sous-groupe normal de G inclus dans H) et on a

$$G \wr_{\alpha} \mathbb{G}_N(\mathcal{C}) \simeq (G/\overline{H}) \wr \mathbb{G}_N(\mathcal{C}).$$

À partir de ces résultats, on peut envisager de décomposer une action générale selon ses orbites, l'action sur chaque orbite étant transitive. Toutefois, les relations entre les coefficients de la représentation fondamentale correspondant à diverses orbites n'est pas claire, et nous n'avons donc pas pu déterminer comment "recoller" les produits en couronnes de chaque orbite.

Le fait d'avoir dissocié le groupe G de l'espace X qui colore les points des partitions permet de prendre le problème par l'autre bout. Soit \mathcal{A} un ensemble de couleurs et \mathcal{C} une catégorie de partitions \mathcal{A} -coloriées. Pourquoi ne pas faire agir un groupe G sur \mathcal{A} ? Pour que les constructions se comportent bien, l'action doit respecter les couleurs au sens suivant :

Définition 2.4.13. Une action est dite *coloriée* si $\overline{g.x} = g.\overline{x}$.

On peut alors définir un produit en couronne via la C^* -catégorie monoïdale concrète associée. Cependant, il n'y a pas de façon naturelle d'obtenir une caractérisation en termes de matrices sudoku, ce qui fait que l'étude de ces groupes quantiques reste pour l'instant un problème ouvert. Nous sommes néanmoins parvenus à identifier dans [FS18, Prop 5.6] un cas particulier. Rappelons que le produit en couronne libre $(\widehat{\mathbf{Z}/s\mathbf{Z}}) \wr_{*} S_N^{+}$ est associé à la catégorie de partitions $\mathcal{C}_{\mathbf{Z}/s\mathbf{Z}, \{-1,0,1\}}$ coloriée par la partie génératrice symétrique $\{-1,0,1\}$. Le groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ agit par inversion sur cet ensemble de couleur et on peut donc considérer le produit en couronne correspondant.

Proposition 2.4.14 (F.-Skalski). *On a un isomorphisme naturel*

$$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \wr_{\alpha} (\widehat{\mathbf{Z}/s\mathbf{Z}} \wr_{*} S_N^{+}) \simeq (\widehat{\mathbf{Z}/s\mathbf{Z}} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \wr_{*} S_N^{+}$$

où, dans le membre de droite, $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ agit sur $\widehat{\mathbf{Z}/s\mathbf{Z}}$ par inversion.

La preuve de cet isomorphisme repose sur des arguments ad hoc, mais il est naturel de supposer qu'ils peuvent être obtenus comme cas particuliers d'un résultat plus général.

Problème 14. Soit Γ un groupe discret et soit $S \subset \Gamma$ une partie génératrice symétrique contenant l'élément neutre. Si G est un groupe fini agissant sur S avec $g.x^{-1} = (g.x)^{-1}$ pour tout $x \in S$, y a-t-il un isomorphisme

$$G \wr_{\alpha} (\widehat{\Gamma} \wr_{*} S_N^{+}) \simeq (\widehat{\Gamma} \rtimes G) \wr_{*} S_N^{+} ?$$

Chapitre 3

Aspects probabilistes

« La beauté ne nous offre que des *probabilités* sur le compte d'une femme, et encore des probabilités sur ce qu'elle est de sang froid ; »

Stendhal, *De l'amour*

Ce dernier chapitre est consacré aux aspects probabilistes des groupes quantiques compacts. Par “probabilistes”, il faut entendre l'étude d'objets et de problèmes inspirés de la théorie des probabilités et adaptés au cadre non-commutatif. On parle alors parfois de *probabilités quantiques* ou de *probabilités non-commutatives*.

3.1 Marches aléatoires non-commutatives

3.1.1 Le grand tour

Le *Grand Tour* est un ensemble d'algorithmes de visualisation de grandes données introduit par D. Asimov dans [Asi85]. L'idée consiste à organiser les grandes données en une famille de vecteurs dans \mathbf{R}^N , avec N grand, puis à les projeter sur des espaces de petite dimension afin de pouvoir les visualiser. En voici un exemple élémentaire mais riche : on fixe un angle $\theta \in]0, \pi]$ et on commence par projeter les données dans le plan engendré par les deux premières coordonnées. Puis, on fait tourner le plan d'un angle θ dans une direction aléatoire et on projette dans le nouveau plan, et ainsi de suite. L'utilisation de cet algorithme soulève spontanément deux questions pratiques :

- Va-t-on ainsi visualiser “presque toutes” les projections planes possibles ?
- Si oui, combien de temps faut-il pour les avoir “presque toutes” visualisées ?

Pour y répondre, il faut formaliser la méthode, ce qui se fait naturellement en termes de marches aléatoires. Plus précisément, considérons, dans le groupe compact SO_N , la mesure uniforme μ_θ sur l'ensemble des rotations planes d'angle θ . Autrement dit, si \mathcal{C}_θ désigne l'ensemble de ces rotations et h la mesure de Haar, on a

$$\mu_\theta = \frac{1}{h(\mathcal{C}_\theta)} h(\cdot \mathbf{1}_{\mathcal{C}_\theta}).$$

On construit alors une suite $(g_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans SO_N en posant

- $g_0 = \text{Id}$,
- $g_{k+1} = g \cdot g_k$ ou g est indépendant de g_k et suit la loi μ_θ .

Alors, la variable aléatoire g_k appliquée au plan engendré par les deux premières coordonnées donne exactement le “plan aléatoire” dans lequel on projette les données au bout de k étapes.

Nous avons donc ramené notre problème à l'étude d'une marche aléatoire sur le groupe orthogonal, ce qui permet de formuler rigoureusement les deux questions ci-dessus. Pour ce

faire, remarquons que la loi de g_k , est donnée par la k -ième puissance de convolution μ_θ^{*k} de μ_θ qui, sur un borélien A de SO_N , est donnée par

$$\mu^{*k}(A) = \mu^{\otimes k} \left(\left\{ (g_1, \dots, g_k) \in G^k \mid g_k \cdots g_1 \in A \right\} \right).$$

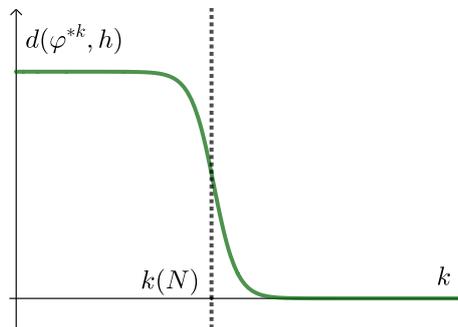
On peut ainsi dire qu'on visitera tous les plans si μ_θ^{*k} tend vers la mesure uniforme, c'est-à-dire la mesure de Haar de SO_N . Quant à la seconde question, il s'agit de trouver une majoration de la distance entre μ_θ^{*k} et la mesure du Haar qui soit suffisamment explicite en k . C'est en cherchant de telles majorations pour d'autres marches aléatoires que P. Diaconis et ses coauteurs ont découvert un phénomène surprenant, appelé *cut-off phenomenon* en anglais, parfois traduit par *phénomène de convergence abrupte*. Il existe plusieurs définitions de la convergence abrupte en fonction de la situation étudiée, en voici une des plus générales :

Définition 3.1.1. Soit $(G_N, \mu_N)_{N \in \mathbb{N}}$ une suite de groupes compacts munis d'une mesure de probabilité μ_N . On dit que cette suite a une *convergence abrupte* de paramètre $k(N)$ si pour tout $\varepsilon > 0$,

- $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\inf_{k < (1-\varepsilon)k(N)} d(\mu_N^{*k}, h_N) \right) = 1,$
- $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sup_{k > (1+\varepsilon)k(N)} d(\mu_N^{*k}, h_N) \right) = 0,$

où h_N désigne la mesure de Haar de G_N .

Ce phénomène s'illustre habituellement de la façon suivante :



Cet énoncé appelle plusieurs remarques :

- Il dépend d'une distance d sur l'ensemble des mesures de probabilités de G . Nous considérerons ici la *distance en variation totale*, donnée par

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = \sup_{A \subset G} |\mu(A) - \nu(A)|,$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des boréliens A de G .

- La convergence abrupte implique en particulier que la marche aléatoire converge vers la mesure de Haar. Dans le cas des groupes compacts, il existe un critère simple pour déterminer la convergence et la limite d'une marche aléatoire¹. Mais dans le cas quantique, ce critère n'est plus vrai et la convergence abrupte nous servira en particulier dans la suite à prouver la convergence.

1. La marche aléatoire converge si et seulement si son support n'est pas contenu dans une classe à gauche par rapport à un sous-groupe normal, et sa limite est alors la mesure de Haar sur le sous-groupe fermé engendré par son support. Voir par exemple [Str60].

- Le phénomène de convergence abrupte n'a de sens que pour une famille infinie de groupes, et surtout pour N grand. Il ne concerne donc que des marches aléatoires qui peuvent se définir uniformément sur toute une famille de groupes. Celles correspondant à μ_θ en sont un exemple.
- L'entier $k(N)$ peut, au vu de cet énoncé, être considéré comme le moment à partir duquel la marche aléatoire est "bien mélangée". Avant, elle est loin de la mesure de Haar mais après, la distance se comporte comme une exponentielle décroissante.

Concluons cette introduction en donnant un résultat majeur concernant le grand tour d'angle θ . La combinaison des travaux de J. Rosenthal dans [Ros94] d'une part, et de ceux de B. Hough et Y. Jiang dans [HJ17] d'autre part, montrent que la marche aléatoire donnée par μ_θ a une convergence abrupte de paramètre

$$k(N) = \frac{N \ln(N)}{2(1 - \cos(\theta))}.$$

3.1.2 Une version quantique du grand tour

Dans le travail [Fre19a], nous nous sommes intéressé à une version quantique de la marche aléatoire précédente, c'est-à-dire en remplaçant SO_N par le groupe quantique libre orthogonal O_N^+ . Le premier problème qui se pose est de définir l'analogue d'une mesure et d'une marche aléatoire sur un groupe quantique compact.

Le point de départ consiste à remplacer la mesure μ par la forme linéaire associée sur $C(G)$:

$$\varphi_\mu : f \mapsto \int_G f d\mu.$$

On peut alors décrire la forme linéaire associée à μ^{*2} de la façon suivante :

$$\varphi_{\mu^{*2}}(f) = \int_G f(g_2 g_1) d\mu \otimes \mu = (\varphi_\mu \otimes \varphi_\mu) \circ \Delta(f).$$

Le membre de droite ayant un sens pour n'importe quel groupe quantique compact, nous pouvons en tirer la définition suivante :

Définition 3.1.2. Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact et soit φ un état sur $C(\mathbb{G})$. On définit par récurrence une suite $(\varphi^{*k})_{k \in \mathbf{N}}$ par $\varphi^{*0} = \varepsilon$ et

$$\varphi^{*(k+1)} = (\varphi \otimes \varphi^{*k}) \circ \Delta = (\varphi^{*k} \otimes \varphi) \circ \Delta.$$

La *marche aléatoire sur \mathbb{G} de loi φ* est alors simplement la suite $(\varphi^{*k})_{k \in \mathbf{N}}$.

Pour attaquer notre problème, il ne nous manque plus qu'un analogue de la mesure μ_θ sur O_N^+ . Pour le trouver, nous allons décomposer μ_θ en exploitant le fait qu'elle est invariante par conjugaison. Pour toute fonction $f \in C(O_N)$, l'application

$$\tilde{f} : g \mapsto \int_G f(kgk^{-1}) dk$$

est une fonction centrale, c'est-à-dire invariante par conjugaison. Par conséquent, si R_θ désigne une rotation plane d'angle θ , on a $\varphi_{\mu_\theta}(\tilde{f}) = \tilde{f}(R_\theta)$. Ceci nous donne donc la description alternative suivante : pour tout $k \in G$, $\varphi_{\mu_\theta}(f) = \varphi_{\mu_\theta}(f(k \cdot k^{-1}))$, d'où en intégrant

$$\varphi_{\mu_\theta}(f) = \varphi_{\mu_\theta}(\tilde{f}) = \tilde{f}(R_\theta).$$

Pour lui donner un sens dans le cadre quantique, notons d'abord que l'algèbre des fonctions centrales sur un groupe compact coïncide avec l'algèbre engendrée par les caractères des représentations. Notons donc $C(O_N^+)_0$ la sous-C*-algèbre de $C(O_N^+)$ engendrée par les caractères. Alors, il existe une *espérance conditionnelle* $\mathbb{E} : C(O_N^+) \rightarrow C(O_N^+)_0$ donnée explicitement par

$$\mathbb{E}(u_{ij}^n) = \delta_{ij} \frac{\chi_n}{d_n}.$$

Considérons maintenant la surjection canonique $\pi : C(O_N^+) \rightarrow C(O_N)$. En la composant avec l'évaluation en R_θ , on obtient un morphisme $\text{ev}_\theta : C(O_N^+) \rightarrow \mathbf{C}$ et on peut donc définir un état

$$\varphi_\theta : x \mapsto \text{ev}_\theta \circ \mathbb{E}(x).$$

Cet état est par construction entièrement déterminé par sa restriction à $C(O_N^+)_0$, qui est engendrée par χ_1 . Plus précisément, on a $\chi_n = P_n(\chi_1)$, où P_n est le n -ième polynôme de Chebyshev normalisé de seconde espèce (nous les avons définis dans la preuve du Théorème 1.1.15). Quant à l'évaluation de χ_1 , puisque les coefficients u_{ij} de la représentation fondamentale de O_N^+ sont envoyés sur les fonctions coefficients de O_N , l'image de χ_1 n'est autre que la fonction trace (non normalisée). Ainsi,

$$\varphi_\theta(u_{ij}^n) = \delta_{ij} \frac{\varphi_\theta(\chi_n)}{d_n} = \delta_{ij} \frac{P_n(N-2+2\cos(\theta))}{d_n}.$$

Avant de passer à l'étude de la marche aléatoire correspondant à φ_θ , faisons une remarque. Il peut paraître surprenant que nous ayons défini l'état φ_θ sur le groupe quantique O_N^+ alors que dans le cas classique la marche aléatoire reste confinée dans SO_N . La raison en est qu'il n'existe, en un sens, pas de version quantique de SO_N . De fait, le résultat de la section suivante montrera que la marche aléatoire associée à φ_θ converge bien vers l'état de Haar de O_N^+ . Ceci est à rapprocher du fait que O_N^+ est *connexe* en un certain sens (voir [Wan09, Def 3.1 et Thm 4.1]).

3.1.3 Le phénomène de convergence abrupte

Nous allons maintenant montrer qu'un phénomène de convergence abrupte a lieu pour la marche aléatoire associée à φ_θ . Pour ce faire, il nous faut d'abord une distance, inspirée de la distance en variation totale. L'idée qui guide la définition est de remplacer les parties mesurables par des projections dans une algèbre de von Neumann, puisque les projections de $L^\infty(X)$ sont exactement les parties mesurables de X . On obtient alors :

Définition 3.1.3. Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact et soient φ_1, φ_2 des états sur $L^\infty(\mathbb{G})$. Leur *distance en variation totale* est donnée par

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{TV} = \sup_{p \in \mathcal{P}(L^\infty(\mathbb{G}))} |\varphi_1(p) - \varphi_2(p)|,$$

où $\mathcal{P}(L^\infty(\mathbb{G}))$ désigne l'ensemble des projections de $L^\infty(\mathbb{G})$.

Remarquons que cette définition n'a de sens que si les états sont définis sur l'algèbre de von Neumann de \mathbb{G} , ce qui n'est pas toujours le cas. Cela dit, si la suite d'états φ^{*k} converge vers l'état de Haar h , on peut espérer qu'à partir d'un certain rang elle soit *absolument continue* par rapport à h au sens suivant :

Définition 3.1.4. Un état φ sur $C(\mathbb{G})$ est dit *absolument continu* par rapport à l'état de Haar si $\varphi|_{\mathcal{O}(\mathbb{G})}$ s'étend en une forme linéaire normale sur $L^\infty(\mathbb{G})$.

La recherche de techniques pour borner explicitement la distance en variation totale est une part active de l'étude des marches aléatoires sur les groupes depuis de nombreuses années. Toutefois, dans le cadre des groupes quantiques, le premier travail sur le sujet est celui de J.P. McCarthy [McC19]. Dans ce travail, l'auteur généralise un lemme de P. Diaconis et M. Shahshahani dans [DS81] qui exploite astucieusement la transformée de Fourier. Plus précisément, étant donnée une représentation irréductible u^α d'un groupe quantique compact \mathbb{G} et un état φ sur $C(\mathbb{G})$, on définit la transformée de Fourier de φ en α comme étant la matrice

$$\widehat{\varphi}(\alpha) = \left(\varphi(u_{ij}^\alpha) \right)_{1 \leq i, j \leq \dim(\alpha)}.$$

On a alors :

Proposition 3.1.5. *Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact et φ un état sur $C(\mathbb{G})$. Si φ^{*k} est absolument continu par rapport à l'état de Haar, alors*

$$\|\varphi^{*k} - h\|_{TV}^2 \leq \frac{1}{4} \sum_{\alpha \in \text{Irr}(\mathbb{G})} d_\alpha^2 \text{Tr} \left(\widehat{\varphi}(\alpha)^{k*} \widehat{\varphi}(\alpha)^k \right)$$

Démonstration. Ce résultat a d'abord été prouvé dans le cas des groupes finis dans [DS81, Lem 14], dans le cas des groupes quantiques finis dans [McC19, Lem 3.10] puis dans le cas général dans [Fre19a, Lem 2.7], mais l'argument est toujours le même.

Le fait que φ^{*k} soit absolument continu par rapport à h se traduit (voir [Tak02, Thm V.2.18]) par l'existence d'un élément $a_{\varphi^{*k}} \in L^1(\mathbb{G})$ de $L^\infty(\mathbb{G})$ tel que pour tout $x \in L^\infty(\mathbb{G})$,

$$\varphi^{*k}(x) = h(a_{\varphi^{*k}}x).$$

Alors, on montre facilement (voir par exemple [Fre19a, Lem 2.18]) que

$$\|\varphi^{*k} - h\|_{TV} = \frac{1}{2} \|a_{\varphi^{*k}} - 1\|_1.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\|a_{\varphi^{*k}} - 1\|_1^2 = h(|a_{\varphi^{*k}} - 1|)^2 \leq h(1^*1)h \left((a_{\varphi^{*k}} - 1)^*(a_{\varphi^{*k}} - 1) \right)^2 = \|a_{\varphi^{*k}} - 1\|_2^2.$$

De plus, on dispose d'une transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{G}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{G})$ (voir [Cas13] pour la construction la plus générale), où $\ell^2(\mathbb{G})$ désigne la complétion de la somme des algèbres de matrices $\mathcal{B}(H_\alpha)$ pour le poids

$$\widehat{h} : x \mapsto \sum_{\alpha \in \text{Irr}(\mathbb{G})} d_\alpha \text{Tr}(x).$$

La transformée de Fourier de $a_{\varphi^{*k}}$ est alors $\widehat{\varphi^{*k}} = (\widehat{\varphi^{*k}}(\alpha))_{\alpha \in \text{Irr}(\mathbb{G})}$ et le résultat suit de l'égalité de Plancherel ainsi que du lien entre convolution et transformée de Fourier. \square

Remarque 3.1.6. Notons que bien que la matrice $\widehat{\varphi}^k(\alpha)$ soit mal définie puisqu'elle dépend du choix d'un représentant et d'une base, la quantité apparaissant dans le membre de droite de la Proposition 3.1.5, elle, ne dépend plus de ces choix.

Grâce à ce résultat, nous sommes parvenus à établir le phénomène de convergence abrupte pour φ_θ dans [Fre19a]. Avant cela, il faut s'intéresser à l'absolue continuité de φ_θ^{*k} par rapport à l'état de Haar. Une condition suffisante, plus facile à vérifier que l'existence d'une densité L^1 , est l'existence d'une densité L^2 . On montre ainsi ([Fre19a, Lem 3.6]) le résultat suivant :

Lemme 3.1.7. *Pour $t > 2$, soit $0 < q(t) < 1$ tel que $q(t)^2 + q(t)^{-2} = t$. Alors,*

- Si $q(N - 2(1 - \cos(\theta))) < q(N)^{1-1/k}$, alors φ_θ^{*k} n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Haar.
- Si $q(N - 2(1 - \cos(\theta))) > q(N)^{1-1/k}$, alors φ_θ^{*k} a une densité L^2 , donc est absolument continue par rapport à la mesure de Haar.

Démonstration. Le second point s'obtient en utilisant des majorations élémentaires sur les polynômes de Chebyshev. Quant au premier, il suffit de remarquer que sous la condition indiquée, la suite $\varphi_\theta^{*k}(\chi_n)/\|\chi_n\|_\infty$ n'est pas bornée. \square

Ce résultat révèle un phénomène de *transition de phase* pour la marche aléatoire qui se produit à

$$\kappa(N) = \left\lceil -\frac{\ln(q(N))}{\ln(q(N - 2(1 - \cos(\theta)))/q(N))} \right\rceil \sim \frac{N \ln(N)}{2(1 - \cos(\theta))}.$$

On retrouve donc, pour N grand, le paramètre de convergence abrupte du cas classique. Cependant, nous n'avons pas encore montré la convergence abrupte dans le cas quantique. En effet,

le $\kappa(N)$ ci-dessus est toujours inférieur à $N \ln(N)(2(1 - \cos(\theta)))$ et l'écart entre les deux tend vers $+\infty$ quand N tend vers $+\infty$. Il faut donc étudier ce qui se passe entre ces deux valeurs. De plus, l'existence d'une densité L^2 ne suffit pas à obtenir une borne supérieure aussi fine que ce que nous souhaitons. Toutefois, le seuil du phénomène de transition s'avère être le bon, comme nous l'avons montré dans [Fre19a, Thm 3.12 et Prop 3.15] :

Théorème 3.1.8. *La marche aléatoire associée à φ_θ a une convergence abrupte de paramètre*

$$k(N) = \frac{N \ln(N)}{2(1 - \cos(\theta))}.$$

Plus précisément, pour tout entier N tel que

$$N \geq \frac{2}{2(1 - \cos(\theta))\sqrt{5}} \left(2 + \sqrt{2 + 36(1 - \cos(\theta)^2)} \right) + 2(1 - \cos(\theta)).$$

on a pour tout $c > 0$,

$$\left\| \varphi_\theta^{*N \ln(N)/2(1 - \cos(\theta) - cN)} - h \right\|_{TV} \geq 1 - 200e^{-4c(1 - \cos(\theta))}$$

et

$$\left\| \varphi_\theta^{*N \ln(N)/2(1 - \cos(\theta) + cN)} - h \right\|_{TV} \leq \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{-4c(1 - \cos(\theta))}}} e^{-2c(1 - \cos(\theta))}.$$

Démonstration. La preuve se fait bien évidemment en deux temps. La première inégalité repose sur une application astucieuse (l'idée est due à J. Rosenthal dans [Ros94, Thm 2.1]) de l'inégalité de Chebyshev et est un raisonnement de probabilités classiques. En effet, la sous-algèbre de von Neumann engendrée par le caractère χ_1 de la représentation fondamentale est commutative, donc isomorphe à l'algèbre des fonctions essentiellement bornées sur le spectre de χ_1 . Il suffit alors de trouver une partie de mesure de Haar grande mais dont la mesure correspondant à φ_θ est petite, ce qui se fait grâce à l'inégalité de Chebyshev et à des majorations élémentaires.

La seconde inégalité demande beaucoup plus de calculs. La raison en est que notre énoncé est une inégalité *exacte*, au sens où le membre de droite n'est pas seulement asymptotiquement valable, comme c'est le cas dans la plupart des travaux sur ce sujet. Ceci signifie qu'il ne suffit pas d'effectuer un développement limité du membre de droite de la Proposition 3.1.5. De fait, la différence entre la valeur donnée par la Proposition 3.1.5 et notre majoration décroît plus vite que toute puissance de $1/N$, ce qui complique la preuve. \square

L'énoncé du Théorème 3.1.8 n'a pas la même forme que celui donné dans la Définition 3.1.1, mais il est en fait plus fort. Pour le voir, il suffit de prendre $c = \varepsilon \ln(N)/2(1 - \cos(\theta))$, ce qui donne

$$\inf_{k < (1 - \varepsilon)k(N)} \left\| \varphi^{*k} - h \right\|_{TV} > 1 - 200N^{-2\varepsilon} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$$

et

$$\sup_{k > (1 + \varepsilon)k(N)} \left\| \varphi^{*k} - h \right\|_{TV} < \frac{1}{2\sqrt{1 - N^{-2\varepsilon}}} N^{-\varepsilon} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour définir la mesure μ_θ , nous avons transformé un problème dans \mathbf{R}^N (choix de plans aléatoires) en un problème dans SO_N . Il serait intéressant de pouvoir aller dans l'autre sens. En effet, la compréhension des marches aléatoires sur des groupes permet souvent de comprendre plus généralement les marches aléatoires sur les espaces homogènes. Dans le cas quantique, on peut par exemple considérer la *sphère libre* \mathbb{S}_N^+ définie par la C^* -algèbre

$$C(\mathbb{S}_N^+) = C^* \left(x_1, \dots, x_N \mid x_i^* = x_i \text{ et } \sum_{i=1}^N x_i^2 = 1 \right).$$

Dans les cas classiques, on sait (voir par exemple [Dia88, Sec 3.F]) que l'étude d'un espace homogène est abordable quand il provient d'une *paire de Gelfand*, c'est-à-dire d'un quotient par un sous-groupe aux propriétés particulières. Il s'avère que la sphère libre ne provient pas d'un

sous-groupe de O_N^+ (il s'agit là d'un phénomène typiquement quantique), mais provient tout de même d'une *paire de Gelfand coïdiale* au sens de [Cha94]. On peut donc espérer importer des techniques pour étudier des marches aléatoires. Notons que par universalité, il existe un $*$ -homomorphisme

$$\pi : C(S_N^+) \rightarrow C(O_N^+)$$

envoyant x_i sur u_{1i} . En composant avec φ_θ , on obtient ainsi une mesure de “rotation quantique aléatoire” sur la sphère libre.

Problème 15. La marche aléatoire sur la sphère libre associée à φ_θ a-t-elle une convergence abrupte ?

Le récent travail de B. Das, U. Franz et X. Wang [DFW18] peut fournir un point de départ pour ce genre d'étude.

3.1.4 Autres exemples

Mesure uniforme sur une classe de conjugaison

Nous allons maintenant aborder d'autres exemples de marches aléatoires sur des groupes quantiques compacts pour lesquels un phénomène de convergence abrupte apparaît. Pour cela, il nous faut d'abord généraliser la construction des états φ_θ .

La formule de la Proposition 3.1.5 n'a d'utilité que si on sait majorer efficacement le membre de droite. Or, pour cela, il faut pouvoir calculer des traces de grandes puissances de matrices, ce qui peut être difficile. Un cas particulier, qui simplifie grandement les choses, est celui où les matrices sont scalaires, c'est-à-dire quand $\widehat{\varphi}$ est dans le centre de $\ell^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$. Dans le cas classique, une application du Lemme de Schur montre que $\widehat{\varphi}_\mu$ est central si et seulement si μ est invariante par conjugaison. Le même résultat est vrai dans le cas quantique par un résultat de F. Cipriani, A. Kula et U. Franz [CFK14, Prop 6.9] et un tel état sera désormais dit *central*². Notons que par définition, un état central est entièrement caractérisé par ses valeurs sur les caractères, puisque

$$\varphi(u_{ij}^\alpha) = \delta_{ij} \varphi(u_{ii}^\alpha)$$

ne dépend pas de i et

$$\varphi(\chi_\alpha) = \sum_{i=1}^N \varphi(u_{ii}^\alpha) = d_\alpha \varphi(u_{11}^\alpha).$$

L'état central φ est donc entièrement déterminé par les quantités

$$\varphi(\alpha) = \varphi(u_{11}^\alpha) = \frac{\varphi(\chi_\alpha)}{d_\alpha}.$$

L'état central φ_θ que nous avons étudié provenait de la mesure uniforme sur la classe de conjugaison d'une matrice orthogonale classique et on peut donc chercher à généraliser cette construction. Pour cela, considérons un groupe quantique compact \mathbb{G} et soit G le groupe compact tel que $C(G)$ soit l'abélianisé de $C(\mathbb{G})$. On a donc une surjection

$$\pi_{\text{ab}} : C(\mathbb{G}) \rightarrow C(G)$$

et pour tout élément de $g \in G$, la composition de ce morphisme avec l'évaluation en g donne un morphisme noté $\text{ev}_g : C(\mathbb{G}) \rightarrow \mathbf{C}$. On peut alors définir un état central φ_g sur $C(\mathbb{G})$ en posant, pour tout $\alpha \in \text{Irr}(\mathbb{G})$,

$$\varphi_g(\alpha) = \frac{\text{ev}_g(\chi_\alpha)}{d_\alpha}.$$

Si $\mathbb{G} = G$ et μ_g est la mesure correspondante, on a par définition pour tout caractère χ de G ,

$$\int_G \chi(x) d\mu_g(x) = \chi(g),$$

donc μ_g est la mesure uniforme sur la classe de conjugaison de g . On parvient ainsi à la définition suivante :

2. On vérifie aisément que φ est central si et seulement si l'application l'opérateur de convolution $m_\varphi = (\text{id} \otimes \varphi) \circ \Delta$ est un multiplicateur central au sens de la Définition ??, ce qui justifie la terminologie.

Définition 3.1.9. Soit \mathbb{G} un groupe quantique compact et soit g un élément de l'abélianisé de \mathbb{G} . La mesure uniforme sur la classe de conjugaison de g est l'état central φ_g sur $C(\mathbb{G})$ défini par

$$\varphi_g(\alpha) = \frac{\text{ev}_g(\chi_\alpha)}{d_\alpha}.$$

Notons qu'il n'existe pas, à notre connaissance, de définition raisonnable d'une "classe de conjugaison" dans un groupe quantique compact. Il est donc intéressant de constater qu'on peut par contre définir la mesure uniforme sur la classe de conjugaison d'un élément classique, même si, comme nous allons le voir, celle-ci se comporte de façon surprenante.

Comme première illustration de cette idée, revenons au cas orthogonal et considérons une matrice $g \in O_N$. Le même raisonnement qu'à la sous-section 3.1.2 montre qu'on a

$$\varphi_g(\chi_n) = \frac{P_n(\text{Tr}(g))}{d_n},$$

d'où la constatation suivante : deux matrices orthogonales sont "conjuguées dans O_N^+ " si et seulement si elles ont même trace. Ceci permet d'éclairer le fait qu'il n'y ait pas de "déterminant quantique" ou d'analogue de $SO(N)$ dans O_N^+ .

Si g est une réflexion, on obtient que la mesure uniforme sur la classe de conjugaison quantique des réflexions est donnée par l'évaluation en $N - 2$. Il suffit donc de prendre $\theta = \pi$ pour obtenir un analogue du résultat de U. Porod dans [Por96a] :

Corollaire 3.1.10. *La marche aléatoire associée à la mesure uniforme sur l'ensemble des réflexions orthogonales a une convergence abrupte de paramètre*

$$k(N) = \frac{N \ln(N)}{2}.$$

Ajoutons que dans ce cas les estimations du Théorème 3.1.8 sont valables dès que $N \geq 6$.

Mélanges de rotations aléatoires

Une autre généralisation possible du Théorème 3.1.8 consiste, au lieu de fixer l'angle θ une fois pour toutes, à le choisir aléatoirement à chaque pas. Concrètement, on choisit alors une mesure ν sur le cercle \mathbb{T} et on s'intéresse à l'état

$$\varphi_\nu : x \mapsto \int_{\mathbb{T}} \varphi_\theta(x) d\nu(\theta).$$

Cet état est encore central, mais un calcul direct utilisant la Proposition 3.1.5 est sans espoir sans connaître la mesure ν . Il est malgré tout possible d'obtenir un résultat très général. Avant de l'énoncer, nous allons d'abord regarder les cas qui ne marchent pas.

Supposons que la mesure ν donne un poids non nul à $\{0\}$. Alors, φ_μ s'écrira comme une combinaison convexe de φ_0 et d'un autre état central φ_ν . Or, φ_0 n'est autre que la cointé ε de O_N^+ , et l'on sait depuis les travaux de T. Banica [Ban97, Cor 1] que cette application n'est pas bornée sur $L^\infty(O_N^+)$ pour $N \geq 3$. Comme de plus $\varepsilon^{*k} = \varepsilon$, on voit que l'état φ_ν ne sera jamais borné puisqu'il domine toujours un multiple de la cointé. En particulier, cet état ne sera jamais absolument continu par rapport à l'état de Haar.

Ceci suggère de ne considérer que des mesures telles que $\nu(\{0\}) = 0$, mais il s'avère que nous avons eu besoin d'une hypothèse plus forte pour obtenir dans [Fre19a, Thm 3.17] notre résultat :

Théorème 3.1.11 (F.). *Soit ν une mesure sur $[0, \pi]$ telle qu'il existe $\delta > 0$ vérifiant $\nu([\delta, \pi]) = 1$. Alors, la marche aléatoire associée à φ_ν a une convergence abrupte de paramètre*

$$k(N) = \frac{N \ln(N)}{2 \int_0^\pi (1 - \cos(\theta)) d\nu(\theta)}.$$

Démonstration. Commençons par expliquer l’hypothèse sur la mesure ν . Nous aurons besoin d’effectuer des calculs similaires à ceux du Théorème 3.1.8 pour des valeurs de θ arbitraires. L’inégalité ne sera donc vraie que pour N supérieure à la constante du Théorème 3.1.8 pour tout θ , et cette constante tend vers l’infini quand θ tend vers 0. Ainsi, il nous faut garantir que θ reste loin de 0 pour trouver des entiers N qui vérifient l’inégalité.

Une fois ceci posé, la preuve repose sur une utilisation astucieuse (due à B. Hough et Y. Jiang dans [HJ17, Sec 4]) de l’inégalité de Hoeffding (voir [Hoe63]). On commence par la majoration élémentaire

$$\|\varphi_\nu^{*k} - h\|_{TV} \leq \int_{[\delta, \pi]^k} \|\varphi_{N-2(1-\cos(\theta_k))} * \cdots * \varphi_{N-2(1-\cos(\theta_1))} - h\|_{TV} d\nu(\theta_1) \cdots d\nu(\theta_n)$$

et on pose

$$E = \left\{ (\theta_1, \dots, \theta_k) \in [\delta, \pi]^k \mid 2 \sum_{i=1}^k (1 - \cos(\theta_i)) \leq N \ln(N) + cN \int_0^\pi (1 - \cos(\theta)) d\nu(\theta) \right\}.$$

L’inégalité de Hoeffding permet de majorer la mesure de E , tandis que l’intégrale sur le complémentaire de E se contrôle grâce à la Proposition 3.1.5 et à des calculs très proches de ceux du Théorème 3.1.8. On obtient ainsi la borne supérieure. La borne inférieure, quant à elle, s’obtient par l’inégalité de Chebyshev de la même façon que dans le Théorème 3.1.8. \square

Permutations quantiques aléatoires

La motivation originelle de P. Diaconis, qui a mené à la découverte du phénomène de convergence abrupte, était l’étude des mélanges de jeux de cartes. Un tel mélange peut se modéliser par une marche aléatoire sur le groupe symétrique, et le paramètre de convergence abrupte est alors le nombre d’étapes nécessaires pour que le jeu soit “bien mélangé”. Dans le cadre quantique, on dispose d’un analogue du groupe symétrique, le groupe des permutations quantiques S_N^+ , sur lequel on peut étudier des marches aléatoires.

Pour ce faire, commençons par décrire l’algèbre des caractères. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on pose $Q_n(X) = P_{2n}(\sqrt{X})$. On vérifie aisément par récurrence qu’il s’agit de polynômes et T. Banica a montré dans [Ban99b] que les caractères des représentations irréductibles de S_N^+ sont donnés par

$$\chi_n = Q_n(\chi_1).$$

Il suit que si $\sigma \in S_N$ est une permutation, la mesure uniforme sur la classe de conjugaison quantique de σ ne dépend que de la trace de σ , c’est-à-dire de son nombre de points fixes. On peut donc dire que deux permutations sont “conjuguées dans S_N^+ ” si et seulement si elles ont le même nombre de points fixes. Les techniques précédentes s’adaptent alors, au prix d’un effort calculatoire supplémentaire, pour donner le résultat suivant, qui découle de [Fre19a, Thm 4.4] et [Fre18b, Prop 4.1] :

Théorème 3.1.12 (F.). *La marche aléatoire associée à la mesure uniforme sur la classe de conjugaison quantique des permutations à m points fixes a une convergence abrupte de paramètre*

$$k(N) = \frac{N \ln(N)}{m}.$$

En particulier, si l’on considère les m -cycles, on obtient une convergence abrupte de paramètre $N \ln(N)/m$, ce qui correspond au résultat classique de B. Hough dans [Hou16].

Remarque 3.1.13. Encore une fois, un phénomène de “connexité” ou de “simplicité” se manifeste puisque dans le cas classique cette marche aléatoire ne peut converger vers la mesure de Haar pour des raisons de parité.

Il existe de très nombreuses marches aléatoires centrales sur les groupes symétriques, et le théorème précédent ne couvre qu’une faible partie d’entre elles. Toutefois, un problème se pose dès qu’on essaie d’adapter des exemples plus complexes. En effet, si μ est une mesure de

probabilités sur S_N qui donne un poids non nul à l'élément neutre, alors par un raisonnement similaire à celui de la fin de la Section 3.1.4, l'état central correspondant ne sera jamais borné sur l'algèbre de von Neumann $L^\infty(S_N^+)$. Un exemple concret, tiré d'un problème de génération de permutations aléatoires en informatique, est l'état

$$\psi_{\text{rt}} = \frac{N-1}{N}\psi_2 + \frac{1}{N}\varepsilon,$$

où ψ_2 est la mesure uniforme sur la classe de conjugaison quantique des transpositions.

Une façon de contourner le problème pourrait être de considérer une autre distance que la distance en variation totale. Par exemple, l'opérateur de convolution

$$P_{\psi_{\text{rt}}} = (\text{id} \otimes \psi_{\text{rt}}) \circ \Delta$$

s'étend toujours à $L^\infty(S_N^+)$ (voir par exemple [Bra12, Lem 3.4]) et on peut donc comparer $P_{\psi_{\text{rt}}}$ et P_h pour différentes normes d'opérateurs. Pour la norme subordonnée à $\|\cdot\|_2$, le calcul est facile mais peu intéressant et donne une sorte de convergence abrupte de paramètre $N/2$ (voir [Fre19a, Prop 4.7]). Il y a cependant beaucoup d'autres normes à essayer :

Problème 16. La marche aléatoire associée à ψ_{rt} a-t-elle une convergence abrupte pour les opérateurs de convolution si $L^\infty(S_N^+)$ est munie de l'une des normes suivantes :

- La norme subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$,
- La norme subordonnée à $\|\cdot\|_p$,
- La norme complètement bornée $\|\cdot\|_{cb}$?

Un exemple de mélange de cartes pertinent menant à une marche aléatoire intéressante sur S_N est le *mélange en rafale* (en anglais *riffle shuffle*). Il ne correspond cependant pas à une mesure centrale et il n'y a donc pas de candidat naturel pour un analogue de cette mesure sur S_N^+ . Plus généralement, il est très difficile de définir des états non-centraux sur les groupes quantiques compacts. Dans le cas de S_N^+ , une famille d'états non-centraux a été construite par U. Franz, A. Kula et A. Skalski dans [FKS16, Sec 11] qu'il serait intéressant d'étudier.

Problème 17. Les marches aléatoires associées aux états de [FKS16] ont-elles une convergence abrupte ?

La première et principale difficulté est d'être capable d'exprimer, ou au moins d'estimer, la transformée de Fourier de ces états, afin de pouvoir utiliser la Proposition 3.1.5.

3.2 Réflexions quantiques

3.2.1 Une marche aléatoire sur les réflexions du groupe quantique libre unitaire

Nous avons vu plus haut que la marche aléatoire donnée par la mesure uniforme sur la classe de conjugaison des réflexions dans O_N^+ a une convergence abrupte de paramètre $k(N) = N \ln(N)/2$. Il est donc naturel d'étudier la marche aléatoire correspondante pour des réflexions complexes, c'est-à-dire sur U_N^+ .

Produits libres d'états

Un problème surgit immédiatement si l'on tente de construire des états centraux sur U_N^+ : l'algèbre des caractères n'est pas commutative, on ne peut donc pas se contenter d'évaluer en des points du spectre. Heureusement, de même que le groupe unitaire U_N est une "complexification" du groupe orthogonal O_N , le groupe quantique unitaire U_N^+ peut être vu comme une "complexification" du groupe quantique O_N^+ . Plus précisément, notons \mathbb{T} le groupe des nombres complexes de module 1 et considérons l'algèbre $C(O_N^+) * C(\mathbb{T})$. Si u désigne la représentation

fondamentale de O_N^+ , v celle de U_N^+ et z la fonction identité sur \mathbb{T} , alors d'après [Ban97, Lem 7] l'application

$$v_{ij} \mapsto u_{ij}z$$

s'étend en un isomorphisme entre $C(U_N^+)$ et une sous-algèbre du produit libre. On peut d'ailleurs préciser le résultat précédent en donnant une formule explicite pour les caractères des représentations irréductibles de U_N^+ à partir de ceux de O_N^+ . Cela a été fait par R. Vergnioux et C. Voigt dans [VV13, Prop 4.3] :

Proposition 3.2.1 (Vergnioux-Voigt). *Soient $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les caractères des représentations irréductibles de O_N^+ . Alors, les caractères des représentations irréductibles de U_N^+ sont les éléments de la forme*

$$z^{[\epsilon_0]_-} \chi_{n_1} z^{\epsilon_1} \cdots z^{\epsilon_{p-1}} \chi_{n_p} z^{[\epsilon_p]_+} \in C(O_N^+) * C(\mathbb{T})$$

où $\epsilon_0 \in \{-1, 1\}$, $[\epsilon]_- = \min(\epsilon, 0)$, $[\epsilon]_+ = \max(\epsilon, 0)$ et $\epsilon_{i+1} = (-1)^{n_i+1} \epsilon_i$.

Ceci fournit une méthode pour produire des états sur $C(U_N^+)$. Considérons un état φ sur $C(O_N^+)$ et une mesure de probabilité ν sur \mathbb{T} . Il existe alors un état $\psi_{\varphi, \nu}$ sur $C(O_N^+) * C(\mathbb{T})$, appelé *état produit libre* qui est complètement déterminé par φ et ν et pour lequel les sous-algèbres $C(O_N^+)$ et $C(\mathbb{T})$ sont *librement indépendantes* au sens des probabilités libres³. Cette dernière propriété donne des outils concrets pour calculer les valeurs de $\psi_{\varphi, \nu}$, dont voici un exemple prouvé dans [Fre18b, Lem 2.3] :

Proposition 3.2.2. *Soient $a_1, \dots, a_n \in C(O_N^+)$ et $b_0, \dots, b_n \in C(\mathbb{T})$ et supposons de plus que φ soit un $*$ -homomorphisme. Alors,*

$$\psi_{\varphi, \nu}(b_0 a_1 b_1 \cdots b_{n-1} a_n b_n) = \varphi \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \int_{\mathbb{T}} \left(\prod_{i=0}^n b_i \right) d\nu.$$

Il suffit maintenant de restreindre $\psi_{\varphi, \nu}$ à $C(U_N^+)$ pour obtenir un état. Notons que celui-ci sera central dès que φ l'est et que dans ce cas, la proposition précédente permettra de faire des calculs dès que la restriction de φ à l'algèbre des caractères est un $*$ -homomorphisme, une condition facilement vérifiée.

Réflexion aléatoires

On peut étudier la convergence de marches aléatoires obtenues en prenant le produit libre des états étudiés dans [Fre19a] avec n'importe quelle mesure de probabilité sur \mathbb{T} , et on observe alors le phénomène suivant : la convergence abrupte se produit avec le même paramètre que pour φ , totalement indépendamment de ν . C'est ce qui est prouvé dans [Fre18b, Thm 3.5].

Cependant, nous voulons ici traiter un cas différent : celui d'un mélange de réflexions aléatoires. Nous avons vu dans la Section 3.1.4 que pour un mélange de rotations aléatoires, nous ne pouvions obtenir un résultat général que si la mesure avait un support borné loin de 0. Or nous allons considérer ici une mesure dont le support n'est pas borné à distance de 0. Cela dit, la mesure étant explicite, nous avons tout de même pu mener à bien les calculs.

Pour commencer, considérons la classe de conjugaison quantique d'une réflexion complexe. Une telle réflexion est toujours conjuguée à une matrice de la forme $g_z = \text{diag}(z, 1, \dots, 1)$ pour un $z \in \mathbb{T}$. La mesure uniforme sur la classe de conjugaison quantique de g_z provient d'un produit libre. En effet, si φ_z est l'état central sur $C(O_N^+)$ donné sur l'algèbre des caractères par l'évaluation en $|\text{Tr}(g_z)|$ et si $\nu_z = \delta_{\text{Arg}(\text{Tr}(g_z))}$, alors l'état produit libre correspondant coïncide avec la mesure uniforme. Si $z = e^{i\theta}$, nous noterons ψ_θ cet état.

Les résultats généraux évoqués précédemment montrent que la marche aléatoire associée à ψ_θ a une convergence abrupte de paramètre $N \ln(N)/(N - |\text{Tr}(g)|)$. Or, on a

$$N - |\text{Tr}(g)| = N - \sqrt{N^2 - 2N(1 - \cos(\theta)) + 2(1 - \cos(\theta))} = 1 - \cos(\theta) + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

3. Nous renvoyons le lecteur à [NS06] pour une introduction aux probabilités libres et particulièrement à ses aspects combinatoires.

Ceci signifie que le vrai paramètre de convergence abrupte devrait être $N \ln(N)/(1 - \cos(\theta))$. C'est ce que nous avons prouvé dans [Fre18b, Prop 3.6] :

Proposition 3.2.3. *La marche aléatoire associée à ψ_θ a une convergence abrupte de paramètre*

$$k(N) = \frac{N \ln(N)}{1 - \cos(\theta)}.$$

Considérons maintenant une mesure μ_N sur $[0, 2\pi[$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et de densité

$$\frac{1}{4W_{N-1}} \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|,$$

où W_N désigne la N -ième intégrale de Wallis. On a alors un état ψ_{μ_N} défini sur $C(U_N^+)$ par

$$\psi_{\mu_N}(x) = \int_{\mathbb{T}} \psi_\theta(x) d\mu_N(\theta).$$

Si le résultat du Théorème 3.1.11 sur les mélanges de rotations aléatoires s'appliquait ici, on aurait une convergence abrupte de paramètre $k(N) = N \ln(N)/\tau$, où

$$\tau = \int_0^{2\pi} (1 - \cos(\theta)) d\mu_N(\theta) = 2 \frac{W_{N+1}}{W_{N-1}} = 2 - \frac{2}{N+2}.$$

En négligeant le second terme, on trouve donc $N \ln(N)/2$, qui est exactement le résultat obtenu dans le cas classique par U. Porod dans [Por96b]. Dans [Fre18b, Thm 3.10], nous avons obtenu le même résultat :

Théorème 3.2.4. *La marche aléatoire associée à ψ_{μ_N} a une convergence abrupte de paramètre*

$$k(N) = \frac{N \ln(N)}{2}.$$

Plus précisément, pour $N \geq 12$ on a pour tout $c > 0$

$$\|\varphi_{\mu_N}^{*k(N)-cN} - h\|_{TV} \geq 1 - 101e^{-2c}.$$

et pour tout $c > 4 + \ln(2)$,

$$\|\varphi_{\mu_N}^{*k(N)+cN} - h\|_{TV} \leq \frac{e^2}{\sqrt{2 - 4e^{4-c}}} e^{-c/2}.$$

La stratégie de la preuve est la même que pour le Théorème 3.1.8 et la borne inférieure ne pose pas de difficulté particulière. C'est pour la borne supérieure que les calculs diffèrent, puisqu'il faut ici gérer les intégrales par rapport à la mesure μ_N . Les inégalités utilisées dans [Fre19a] ne sont plus suffisantes et il faut donc reprendre l'étude depuis le début, ce nous avons fait dans [Fre18b, Sec 3.3].

3.2.2 Groupes quantiques de réflexions

Nous avons présenté les marches aléatoires de la Section 3.2.1 comme données par des *réflexions quantiques*, et cette dénomination est justifiée par le lien avec le groupe unitaire et les réflexions complexes. Toutefois, une autre façon d'obtenir des "réflexions aléatoires" pourrait être de considérer des marches aléatoires sur les *groupes de réflexions*. Rappelons qu'un tel groupe H_N^s est donné, pour un entier s , par l'ensemble des matrices de permutations de taille $N \times N$ dans lesquelles tous les coefficients sont remplacés par des racines s -ième de l'unité. L'un des avantages de ces groupes est qu'ils ont également une description comme produits en couronnes :

$$H_N^s = \mathbf{Z}/s\mathbf{Z} \wr S_N.$$

L'égalité précédente suggère donc de définir les *groupes quantiques de réflexions* H_N^{s+} comme les *produits en couronne libres*

$$H_N^{s+} = \mathbf{Z}/s\mathbf{Z} \wr S_N^+.$$

T. Banica et R. Vergnioux ont montré dans [BV09] que cette définition coïncide avec une “libération” des relations définissant les groupes de réflexions. Ce lien est en fait plus profondément donné par leur structure de groupes quantiques de partitions (voir l'Exemple 2.2.5). Notons aussi que nous avons déjà rencontré ces objets comme groupes quantiques d'automorphismes de graphes dans la Section 1.3.

Nous avons donc cherché à étudier des marches aléatoires sur ces groupes quantiques, ou plus généralement sur les produits en couronne libres $\widehat{\Gamma} \wr S_N^+$ avec Γ un groupe fini. Comme dans le cas de U_N^+ , le premier problème qui se pose est celui de savoir construire des états centraux sur le produit en couronne libre. Cette fois-ci, on ne sait pas les plonger dans un produit libre, mais on sait le faire pour un groupe quantique monoïdalement équivalent : c'est le Théorème 1.4.18 de P. Fima et L. Pittau que nous avons utilisé dans la Section 1.4.2.

Ainsi, étant donné une mesure de probabilité ν sur Γ et un état φ sur $C(SU_q(2))$, on obtient un état sur \mathbb{H}_q en restreignant le produit libre. Reste à “transporter” cet état sur le produit en couronne libre. Ceci est possible si φ est central, en vertu de la Proposition 1.1.25 puisque le produit libre des états est alors central. Pour les calculs, il est pratique d'avoir une description des caractères des représentations irréductibles de $\widehat{\Gamma} \wr S_N^+$ en termes de ceux de $SU_q(2)$ et des éléments de Γ . Une telle description est donnée au début de la Section 3 de [FM18]. Si χ_n désigne le n -ième caractère irréductible de $SU_q(2)$, les caractères du produit en couronne libre sont les caractères

$$\chi_{2n_0+1}\gamma_1\chi_{2n_1}\gamma_2\cdots\chi_{2n_{p-1}}\gamma_p\chi_{2n_p+1} \in C^*(\Gamma) * C(SU_q(2))$$

pour toute famille d'entiers $n_0, \dots, n_p \in \mathbf{N}$.

Il ne nous reste maintenant plus qu'à choisir des états centraux sur $SU_q(2)$. Or, nous en avons obtenu dans le Théorème 1.1.15. Nous allons pour des raisons pratiques modifier les notations et définir l'état central φ_t par

$$\varphi_t(n) = \frac{P_n(t)}{P_n(q+q^{-1})}$$

et nous noterons $\psi_{t,\nu}$, pour une mesure de probabilité ν sur Γ , l'état ainsi obtenu sur $\widehat{\Gamma} \wr S_N^+$. Avec ces notations, nous pouvons énoncer le résultat [Fre18b, Thm 4.3] :

Théorème 3.2.5. *Soit Γ un groupe fini, soit ν une mesure de probabilité sur Γ et soit $\tau > 7/4$. Alors, la marche aléatoire associée à $\psi_{N-\tau,\nu}$ a une convergence abrupte de paramètre*

$$k(N) = \frac{N \ln(N)}{\tau}.$$

Plus précisément, pour tout entier N tel que

$$N > \frac{\tau^4/28 + 2\tau^3 - 8\tau^2 + 59\tau - 76}{4\tau - 7},$$

on a pour tout $c > 0$

$$\|\varphi_{N-\tau,\psi}^{*k(N)-cN} - h\|_{TV} \geq 1 - 40e^{-2\tau(\tau+2)/5} e^{4\tau c}$$

et pour tout $c > \ln(1 + \sqrt{|\Gamma|})/2\tau$,

$$\|\varphi_{N-\tau,\psi}^{*k(N)+cN} - h\|_{TV} \leq \frac{e^{-\tau c}}{\sqrt{1 - 1e^{-2\tau c}}} \sqrt{1 + \sqrt{|\Gamma|}}.$$

On remarquera que le paramètre de convergence abrupte ne dépend pas de ν . Par contre, les estimations précises qui permettent de l'établir font intervenir le cardinal de Γ . C'est la raison pour laquelle cette méthode ne s'adapte pas directement au cas des groupes infinis.

Problème 18. Étudier le phénomène de convergence abrupte pour $\widehat{\Gamma} \wr S_N^+$ avec Γ un groupe discret infini. Un premier exemple intéressant à considérer, qui est encore un groupe quantique de réflexions, est $\Gamma = \mathbf{Z}$.

Liste des problèmes

« Mais il ne faut pas toujours épuiser un sujet,
qu'on ne laisse rien à faire au lecteur.
Il ne s'agit pas de faire lire,
mais de faire penser. »

Montesquieu, *De l'esprit des lois* II, XI, 20

Nous avons regroupé ici les énoncés des problèmes de recherches que les travaux exposés dans ce mémoire soulèvent.

Aspects analytiques

Problème 1. La sous-algèbre génératrice de O_N^+ est-elle maximale abélienne ?

Problème 2. Étudier les MASA radiales et génératrices dans les algèbres de von Neumann de U_N^+ et S_N^+ , si possible en transférant des résultats de [FV16].

Problème 3. La sous-algèbre radiale de $L^\infty(O_N^+)$ possède-t-elle la propriété d'absorption moyenne ?

Problème 4. À quelle condition sur un graphe fini X a-t-on que son groupe quantique d'automorphismes est engendré par le stabilisateur quantique d'un point et le groupe classique d'automorphismes ?

Problème 5. À quelle condition sur un graphe transitif (au sens quantique) X le modèle matriciel plat universel est-il intérieurement fidèle ?

Problème 6. Prouver qu'un produit libre de groupes quantiques compacts avec la propriété de Baum-Connes forte a encore la propriété de Baum-Connes forte, même si les facteurs possèdent des actions de torsion non-triviales.

Problème 7. Construire une résolution de \mathbf{C} "la plus courte possible" pour $\widehat{\mathbb{G}} \wr_* S_N^+$, où \mathbb{G} est un groupe libre ou un produit libre de groupes quantiques libres.

Problème 8. Calculer la K-théorie de \mathbb{H}_q pour $\mathbb{G} = \widehat{\Gamma}$, avec Γ un groupe discret de type fini sans torsion.

Aspects algébriques

Problème 9. Montrer que si \mathbb{G} est un groupe quantique libre, alors \mathbb{G} est monoïdalement équivalent à un produit libre de copies de

- $SU_q(2)$,
- $\widetilde{SU}_q(2)$,
- $\left(\widehat{*}_{SO_q(3)}^n(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \widetilde{\wr} SO_q(3)) \right)_{SO_q(3)} \widehat{*} \left(\widehat{\Lambda} \wr_* SO_q(3) \right)$.

Problème 10. Montrer que si \mathbb{G} est un groupe quantique libre, alors \mathbb{G} est isomorphe à un produit libre de copies de

- O_F^+ ,
- U_F^+ ,
- $\left(\widehat{*}_{\text{QAut}(B,\psi)}^n(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \wr \widetilde{\text{QAut}(B,\psi)}) \right)_{\text{QAut}(B,\psi)} \widehat{*} \left(\widehat{\Lambda} \wr \text{QAut}(B,\psi) \right)$.

Problème 11. Tout groupe quantique de partitions non-croisées de type orthogonal est-il soit un produit en couronne libre de paire, soit obtenu à partir de groupes quantiques aisés orthogonaux par des produits libres amalgamés tordus, des relations de commutation et des relations de dimension 1 ?

Problème 12. Tout groupe quantique de partitions non-croisées est-il soit un produit en couronne de paire, soit obtenu à partir d'un groupe quantique de partitions non-croisées de type orthogonal en utilisant des complexifications ?

Problème 13. Étudier le groupe quantique compact $G \wr O_N^*$, où G est un groupe fini et O_N^* est le *groupe quantique orthogonal semi-libéré*.

Problème 14. Soit Γ un groupe discret et soit $S \subset \Gamma$ une partie génératrice symétrique contenant l'élément neutre. Si G est un groupe fini agissant sur S avec $g.x^{-1} = (g.x)^{-1}$ pour tout $x \in S$, y a-t-il un isomorphisme

$$G \wr_{\alpha} (\widehat{\Gamma} \wr S_N^+) \simeq (\widehat{\Gamma} \rtimes G) \wr S_N^+ ?$$

Aspects probabilistes

Problème 15. La marche aléatoire sur la sphère libre associée à φ_{θ} a-t-elle une convergence abrupte ?

Problème 16. La marche aléatoire associée à ψ_{rt} a-t-elle une convergence abrupte pour les opérateurs de convolution si $L^{\infty}(S_N^+)$ est munie de l'une des normes suivantes :

- La norme subordonnée à $\|\cdot\|_{\infty}$,
- La norme subordonnée à $\|\cdot\|_p$,
- La norme complètement bornée $\|\cdot\|_{cb}$?

Problème 17. Les marches aléatoires associées aux états de [FKS16] ont-elles une convergence abrupte ?

Problème 18. Étudier le phénomène de convergence abrupte pour $\widehat{\Gamma} \wr S_N^+$ avec Γ un groupe discret infini. Un premier exemple intéressant à considérer, qui est encore un groupe quantique de réflexions, est $\Gamma = \mathbf{Z}$.

Bibliographie

- [ADC19] Y. ARANO & K. DE COMMER – « Torsion-freeness for fusion rings and tensor C^* -categories », *J. Noncommut. Geom.* **13** (2019), p. 35–58.
- [ADEL04] S. ARMSTRONG, K. DYKEMA, R. EXEL & H. LI – « On embeddings of full amalgamated free product C^* -algebras », *Proc. Amer. Math. Soc.* **132** (2004), no. 7, p. 2019–2030.
- [Asi85] D. ASIMOV – « The grand tour : a tool for viewing multidimensional data », *SIAM journal on scientific and statistical computing* **6** (1985), no. 1, p. 128–143.
- [Ban97] T. BANICA – « Le groupe quantique compact libre $U(n)$ », *Comm. Math. Phys.* **190** (1997), no. 1, p. 143–172.
- [Ban99a] —, « Representations of compact quantum groups and subfactors », *J. Reine Angew. Math.* **509** (1999), p. 167–198.
- [Ban99b] —, « Symmetries of a generic coaction », *Math. Ann.* **314** (1999), no. 4, p. 763–780.
- [Ban05] —, « Quantum automorphism groups of small metric spaces », *Pacific J. Math.* **219** (2005), no. 1, p. 27–51.
- [BBCW19] A. BHATTACHARYA, M. BRANNAN, A. CHIRVASITU & S. WANG – « Kirchberg factorization and residual finiteness for discrete quantum groups », *J. Noncommut. Geom.* (2019).
- [BC08] T. BANICA & B. COLLINS – « Integration over the Pauli quantum group », *J. Geom. and Phys.* **58** (2008), no. 8, p. 942–961.
- [BCF18] M. BRANNAN, A. CHIRVASITU & A. FRESLON – « Topological generation and matrix models for quantum reflection groups », *Arxiv preprint* (2018).
- [BdlHV08] B. BEKKA, P. DE LA HARPE & A. VALETTE – *Kazhdan’s property (T)*, New Mathematical Monographs, vol. 11, Cambridge university press, 2008.
- [BDRV06] J. BICHON, A. DE RIJDT & S. VAES – « Ergodic coactions with large multiplicity and monoidal equivalence of quantum groups », *Comm. math. phys.* **262** (2006), no. 3, p. 703–728.
- [Bic04] J. BICHON – « Free wreath product by the quantum permutation group », *Algebr. Represent. Theory* **7** (2004), no. 4, p. 343–362.
- [Bla98] B. BLACKADAR – *K-theory for operator algebras*, Mathematical Research Institute Publications, vol. 5, Cambridge University Press, 1998.
- [Bla06] —, *Operator algebras*, Encyclopædia of Mathematical Sciences, vol. 122, Springer, 2006.
- [Blo03] M. BLOSS – « G -colored partition algebras as centralizer algebras of wreath products », *J. Algebra* **265** (2003), no. 2, p. 690–710.

- [BN17] T. BANICA & I. NECHITA – « Flat matrix models for quantum permutation groups », *Adv. in Appl. Math.* **83** (2017), p. 24–46.
- [BO08] N. P. BROWN & N. OZAWA – *C*-algebras and finite-dimensional approximation*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 88, American Mathematical Society, 2008.
- [Bra37] R. BRAUER – « On algebras which are connected with the semisimple continuous groups », *Ann. of Math.* **38** (1937), no. 4, p. 857–872.
- [Bra12] M. BRANNAN – « Approximation properties for free orthogonal and free unitary quantum groups », *J. Reine Angew. Math.* **672** (2012), p. 223–251.
- [Bra13] — , « Reduced operator algebras of trace-preserving quantum automorphism groups », *Doc. Math.* **18** (2013), p. 1349–1402.
- [BS89] S. BAAJ & G. SKANDALIS – « C*-algèbres de Hopf et théorie de Kasparov équivariante », *K-theory* **2** (1989), no. 6, p. 683–721.
- [BS09] T. BANICA & R. SPEICHER – « Liberation of orthogonal Lie groups », *Adv. Math.* **222** (2009), no. 4, p. 1461–1501.
- [BV09] T. BANICA & R. VERGNIoux – « Fusion rules for quantum reflection groups », *J. Noncommut. Geom.* **3** (2009), no. 3, p. 327–359.
- [BV10] — , « Invariants of the half-liberated orthogonal group », in *Ann. Inst. Fourier*, vol. 60, 2010, p. 2137–2164.
- [BW16] A. BROTHIER & C. WEN – « The cup subalgebra has the absorbing amenability property », *Internat. J. Math.* **27** (2016), no. 02, p. 1650013.
- [Cas13] M. CASPERS – « The L^p -Fourier transform on locally compact quantum groups », *J. Operator Theory* **69** (2013), no. 1, p. 161–193.
- [CFK14] F. CIPRIANI, U. FRANZ & A. KULA – « Symmetries of Lévy processes, their Markov semigroups and potential theory on compact quantum groups », *J. Funct. Anal.* **266** (2014), no. 5, p. 2789–2844.
- [CH89] M. COWLING & U. HAAGERUP – « Completely bounded multipliers of the Fourier algebra of a simple Lie group of real rank one », *Invent. Math.* **96** (1989), no. 3, p. 507–549.
- [Cha94] Y. CHAPOVSKII – « Gelfand pair associated with a Hopf algebra and a coideal », *Ukrainian Math. J.* **46** (1994), no. 8, p. 1157–1171.
- [Chi15] A. CHIRVASITU – « Residually finite quantum group algebras », *J. Funct. Anal.* **268** (2015), no. 11, p. 3508–3533.
- [Cun83] J. CUNTZ – « K-theoretic amenability for discrete groups », *J. Reine Angew. Math.* **344** (1983), p. 180–195.
- [Cur10] S. CURRAN – « Quantum rotatability », *Trans. Amer. Math. Soc.* **362** (2010), no. 9, p. 4831–4851.
- [DCFY14] K. DE COMMER, A. FRESLON & M. YAMASHITA – « CCAP for universal discrete quantum groups », *Comm. Math. Phys.* **331** (2014), no. 2, p. 677–701.
- [dCH85] J. DE CANNIÈRE & U. HAAGERUP – « Multipliers of the Fourier algebras of some simple Lie groups and their discrete subgroups », *American J. Math.* **107** (1985), no. 2, p. 455–500.

- [DCY13] K. DE COMMER & M. YAMASHITA – « Tannaka-Krein duality for compact quantum homogeneous spaces I. General theory », *Theory Appl. Categ.* **28** (2013), no. 31, p. 1099–1138.
- [DFSW16] M. DAWS, P. FIMA, A. SKALSKI & S. WHITE – « The Haagerup property for locally compact quantum groups », *J. Reine Angew. Math.* **711** (2016), p. 198–229.
- [DFW18] B. DAS, U. FRANZ & X. WANG – « Invariant Markov semigroups on quantum homogeneous spaces », *arXiv preprint* (2018).
- [Dia88] P. DIACONIS – *Group representations in probability and statistics*, Lecture Notes-Monograph Series, vol. 11, Institute of Mathematical Statistics, 1988.
- [Dri87] V. DRINFEL'D – « Quantum groups », *Proc. Int. Congr. Math.* **1** (1987), no. 2, p. 798–820.
- [DRVV10] A. DE RIJDT & N. VANDER VENNET – « Actions of monoidally equivalent compact quantum groups and applications to probabilistic boundaries », *Ann. Inst. Fourier* **60** (2010), no. 1, p. 169–216.
- [DS81] P. DIACONIS & M. SHAHSHAHANI – « Generating a random permutation with random transpositions », *Prob. Theory Related Fields* **57** (1981), no. 2, p. 159–179.
- [EGNO15] P. ETINGOF, S. GELAKI, D. NIKSHYCH & V. OSTRIK – *Tensor categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 205, American Mathematical Society, 2015.
- [ES92] M. ENOCK & J.-M. SCHWARTZ – *Kac algebras and duality of locally compact groups*, Springer, 1992.
- [FF14] P. FIMA & A. FRESLON – « Graphs of quantum groups and K-amenability », *Adv. Math.* **260** (2014), p. 233–280.
- [FG18] P. FIMA & E. GERMAIN – « The KK-theory of fundamental C*-algebras », *Trans. Amer. Math. Soc.* (2018).
- [Fim13] P. FIMA – « K-amenability of HNN extensions of amenable discrete quantum groups », *J. Funct. Anal.* **265** (2013), no. 4, p. 507–519.
- [FK97] I. FRENKEL & M. KHOVANOV – « Canonical basis in tensor products and graphical calculus for $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ », *Duke Math. J.* **87** (1997), p. 409–480.
- [FKS16] U. FRANZ, A. KULA & A. SKALSKI – « Lévy processes on quantum permutation groups », in *Noncommutative analysis, operator theory and applications*, Birkhäuser, 2016, p. 193–259.
- [FM18] A. FRESLON & R. MARTOS – « Torsion and K-theory for some free wreath products », *Int. Math. Res. Not.* (2018).
- [FP16] P. FIMA & L. PITTAU – « The free wreath product of a compact quantum group by a quantum automorphism group », *J. Funct. Anal.* **27** (2016), no. 7, p. 1996–2043.
- [Fre62] D. FREEDMAN – « Invariants under mixing which generalize de Finetti's theorem », *Ann. Math. Stat.* **33** (1962), no. 3, p. 916–923.
- [Fre13a] A. FRESLON – « Examples of weakly amenable discrete quantum groups », *J. Funct. Anal.* **265** (2013), no. 9, p. 2164–2187.
- [Fre13b] — , « Propriétés d'approximation pour les groupes quantiques discrets », Thèse, Université Paris VII, 2013.
- [Fre14] — , « Fusion (semi)rings arising from quantum groups », *J. Algebra* **417** (2014), p. 161–197.

- [Fre17] —, « On the partition approach to Schur-Weyl duality and free quantum groups – with an appendix by A. Chirvasitu », *Transform. Groups* **22** (2017), no. 3, p. 705–751.
- [Fre18a] —, « On the representation theory of some noncrossing partition quantum groups », *Algebr. Represent. Theory* (2018).
- [Fre18b] —, « Quantum reflections, random walks and cut-off », *Internat. J. Math.* **29** (2018), no. 14, p. 1850101.
- [Fre19a] —, « Cut-off phenomenon for random walks on free orthogonal quantum groups », *Probab. Theory Related Fields* **174** (2019), no. 3–4, p. 731–760.
- [Fre19b] —, « On two-coloured noncrossing partition quantum groups », *Trans. Amer. Math. Soc.* **372** (2019), no. 6, p. 4471–4508.
- [FS18] A. FRESLON & A. SKALSKI – « Wreath products of finite groups by quantum groups », *J. Noncommut. Geom.* **12** (2018), no. 1, p. 29–68.
- [FV16] A. FRESLON & R. VERGNIoux – « The radial MASA in free orthogonal quantum groups », *J. Funct. Anal.* **271** (2016), no. 10, p. 2776–2807.
- [FW16] A. FRESLON & M. WEBER – « On the representation theory of partition (easy) quantum groups », *J. Reine Angew. Math.* **720** (2016), p. 155–197.
- [GH10] E. GUENTNER & N. HIGSON – « Weak amenability of CAT(0)-cubical groups », *Geom. Dedicata* **148** (2010), no. 1, p. 137–156.
- [GK03] D. GOSWAMI & A. KUKU – « A complete formulation of the Baum-Connes conjecture for the action of discrete quantum groups », *K-theory* **30** (2003), no. 4, p. 341–363.
- [Gre78] P. GREEN – « The local structure of twisted covariance algebras », *Acta Math.* **140** (1978), no. 1, p. 191–250.
- [Haa78] U. HAAGERUP – « An example of a non nuclear C*-algebra, which has the metric approximation property », *Invent. Math.* **50** (1978), no. 3, p. 279–293.
- [HJ17] B. HOUGH & Y. JIANG – « Cut-off phenomenon in the uniform plane Kac walk », *Ann. Probab.* **45** (2017), no. 4, p. 2248–2308.
- [Hoe63] W. HOEFFDING – « Probability inequalities for sums of bounded random variables », *J. Amer. Statist. Assoc.* **58** (1963), no. 301, p. 13–30.
- [Hou16] B. HOUGH – « The random k -cycle walk on the symmetric group », *Prob. Theory Related Fields* **165** (2016), no. 1-2, p. 447–482.
- [Iso14] Y. ISONO – « On bi-exactness of discrete quantum groups », *Int. Math. Res. Not.* **2015** (2014), no. 11, p. 3619–3650.
- [Iso15] —, « Examples of factors which have no Cartan subalgebras », *Trans. Amer. Math. Soc.* **367** (2015), p. 7917–7937.
- [Izu02] M. IZUMI – « Non-commutative Poisson boundaries and compact quantum group actions », *Adv. Math.* **169** (2002), no. 1, p. 1–57.
- [Jim85] M. JIMBO – « A q -difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation », *Lett. Math. Phys.* **10** (1985), no. 1, p. 63–69.
- [JMS14] V. JONES, S. MORRISON & N. SNYDER – « The classification of subfactors of index at most 5 », *Bull. Amer. Math. Soc.* **51** (2014), no. 2, p. 277–327.

- [Jon93] V. JONES – « The Potts model and the symmetric group », in *Subfactors : Proceedings of the Taniguchi Symposium on Operator Algebras (Kyuzeso, 1993)*, 1993, p. 259–267.
- [JT91] K. JENSEN & K. THOMSEN – *Elements of KK-theory*, Mathematics : Theory & Applications, Birkhäuser, 1991.
- [JV84] P. JULG & A. VALETTE – « K-theoretic amenability for $SL_2(Q_p)$, and the action on the associated tree », *J. Funct. Anal.* **58** (1984), no. 2, p. 194–215.
- [Kac65a] G. KAC – « Ring groups and the principle of duality I », *Trans. Moscow Math. Soc.* **13** (1965), p. 291–339.
- [Kac65b] —, « Ring groups and the principle of duality II », *Trans. Moscow Math. Soc.* **13** (1965), p. 94–126.
- [Kir94] E. KIRCHBERG – « Discrete groups with Kazhdan’s property T and factorization property are residually finite », *Math. Ann.* **299** (1994), no. 1, p. 551–563.
- [KP04] A. KENNEDY & M. PARVATHI – « G -vertex colored partition algebras as centralizer algebras of direct products », *Comm. Algebra* **32** (2004), no. 11, p. 4337–4361.
- [KS98] R. KOEKOEK & R. SWARTTOUW – « The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q -analogue », *Delft University of Technology, Report no. 98-17* (1998).
- [LMR17] M. LUPINI, L. MANČINSKA & D. ROBERSON – « Nonlocal games and quantum permutation groups », *Arxiv preprint arXiv :1712.01820* (2017).
- [LT16] F. LEMEUX & P. TARRAGO – « Free wreath product quantum groups : the monoidal category, approximation properties and free probability », *J. Funct. Anal.* **270** (2016), no. 10, p. 3828–3883.
- [Mar94] P. MARTIN – « Temperley-Lieb algebras for non-planar statistical mechanics—the partition algebra construction », *J. Knot Theory Ramifications* **3** (1994), no. 1, p. 51–82.
- [McC19] J. MCCARTHY – « Diaconis-shahshahani upper bound lemma for finite quantum groups », *J. Fourier Anal. App.* **25** (2019), p. 2463—2491.
- [MN06] R. MEYER & R. NEST – « The Baum-Connes conjecture via localisation of categories », *Topology* **45** (2006), no. 2, p. 209–259.
- [MN10] R. MEYER & R. NESZT – « Homological algebra in bivariant K-theory and other triangulated categories », in *Triangulated Categories*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, no. 375, 2010, p. 236–289.
- [Muk13] K. MUKHERJEE – « Singular masses and measure-multiplicity invariant », *Houston J. Math.* **39** (2013), no. 2, p. 561–598.
- [MvN43] F. MURRAY & J. VON NEUMANN – « On rings of operators IV », *Ann. of Math.* (1943), p. 716–808.
- [NS06] A. NICA & R. SPEICHER – *Lectures on the combinatorics of free probability*, Lecture Note Series, vol. 335, London Mathematical Society, 2006.
- [NT13] S. NESHVEYEV & L. TUSET – *Compact quantum groups and their representation categories*, Cours Spécialisés, vol. 20, Société Mathématique de France, 2013.
- [OP10a] N. OZAWA & S. POPA – « On a class of II_1 factors with at most one Cartan subalgebra », *Ann. of Math.* **172** (2010), no. 1, p. 713–749.

- [OP10b] — , « On a class of II_1 factors with at most one Cartan subalgebra II », *American J. Math.* **132** (2010), no. 3, p. 841–866.
- [Oza08] N. OZAWA – « Weak amenability of hyperbolic groups », *Groups Geom. Dyn.* **2** (2008), p. 271–280.
- [Pim86] M. PIMSNER – « KK-groups of crossed products by groups acting on trees », *Invent. Math.* **86** (1986), no. 3, p. 603–634.
- [Pop83] S. POPA – « Maximal injective subalgebras in factors associated with free groups », *Adv. Math.* **50** (1983), no. 1, p. 27–48.
- [Por96a] U. POROD – « The cut-off phenomenon for random reflections », *Ann. Probab.* **24** (1996), no. 1, p. 74–96.
- [Por96b] — , « The cut-off phenomenon for random reflections II : Complex and quaternionic cases », *Prob. Theory Related Fields* **104** (1996), no. 2, p. 181–209.
- [PS86] T. PYTLIK & R. SZWARC – « An analytic family of uniformly bounded representations of free groups », *Acta Math.* **157** (1986), no. 1, p. 287–309.
- [PV82] M. PIMSNER & D. VOICULESCU – « K-groups of reduced crossed products by free groups », *J. Operator Theory* **8** (1982), no. 1, p. 131–156.
- [PV14a] S. POPA & S. VAES – « Unique Cartan decomposition for II_1 factors arising from arbitrary actions of free groups », *Acta Math.* **212** (2014), no. 1, p. 141–198.
- [PV14b] — , « Unique Cartan decomposition for II_1 factors arising from arbitrary actions of hyperbolic groups », *J. Reine Angew. Math.* **694** (2014), p. 215–239.
- [Rad91] F. RADULESCU – « Singularity of the radial subalgebra of $\mathcal{L}(F_N)$ and the Pukànsky invariant », *Pacific J. Math.* **151** (1991), no. 2, p. 297–306.
- [Rau12] S. RAUM – « Isomorphisms and fusion rules of orthogonal free quantum groups and their free complexifications », *Proc. Amer. Math. Soc.* **140** (2012), p. 3207–3218.
- [RLL00] M. RØRDAM, F. LARSEN & N. LAUSTSEN – *An Introduction to K-theory for C^* -algebras*, Londond Mathematical Society Student Text, vol. 49, Cambridge University Press, 2000.
- [Ros90] M. ROSSO – « Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compacts de matrices et calcul différentiel non commutatif », *Duke Math. J.* **61** (1990), no. 1, p. 11–40.
- [Ros94] J. ROSENTHAL – « Random rotations : characters and random walks on $SO(n)$ », *Ann. Probab.* **22** (1994), no. 1, p. 398–423.
- [RW16] S. RAUM & M. WEBER – « The full classification of orthogonal easy quantum groups », *Comm. Math. Phys.* **341** (2016), no. 3, p. 751–779.
- [Ser77] J.-P. SERRE – *Arbres, amalgames, SL_2* , Astérisque, vol. 46, Société Mathématique de France, 1977.
- [Str60] K. STROMBERG – « Probabilities on a compact group », *Trans. Amer. Math. Soc.* **94** (1960), no. 2, p. 295–309.
- [Tak02] M. TAKESAKI – *Theory of operator algebras I*, Encyclopædia of Mathematical Sciences, vol. 124, Springer, 2002.
- [TW17] P. TARRAGO & M. WEBER – « Unitary easy quantum groups : the free case and the group case », *Int. Math. Res. Not.* **18** (2017), p. 5710–5750.

- [TW18a] P. TARRAGO & J. WAHL – « Free wreath product quantum groups and standard invariants of subfactors », *Adv. Math.* **331** (2018), p. 1–57.
- [TW18b] P. TARRAGO & M. WEBER – « The classification of tensor categories of two-colored noncrossing partitions », *J. Combin. Theory Ser. A* **154** (2018), p. 464–506.
- [Ued05] Y. UEDA – « HNN extensions of von Neumann algebras », *J. Funct. Anal.* **225** (2005), no. 2, p. 383–426.
- [VDW96] A. VAN DAELE & S. WANG – « Universal quantum groups », *Internat. J. Math.* **7** (1996), p. 255–264.
- [Ver04] R. VERGNIoux – « K-amenability for amalgamated free products of amenable discrete quantum groups », *J. Funct. Anal.* **212** (2004), no. 1, p. 206–221.
- [Ver07] —, « The property of rapid decay for discrete quantum groups », *J. Operator Theory* **57** (2007), no. 2, p. 303–324.
- [vN29] J. VON NEUMANN – « Zur allgemeinen Theorie des Maßes », *Fund. Math.* **13** (1929), no. 1, p. 73–116.
- [Voi96] D. VOICULESCU – « The analogues of entropy and of Fisher’s information measure in free probability theory III : The absence of Cartan subalgebras », *Geom. Funct. Anal.* **6** (1996), no. 1, p. 172–199.
- [Voi11] C. VOIGT – « The Baum-Connes conjecture for free orthogonal quantum groups », *Adv. Math.* **227** (2011), p. 1873 – 1913.
- [Voi17] —, « On the structure of quantum automorphism groups », *J. Reine Angew. Math.* **2017** (2017), no. 732, p. 255–273.
- [VV07] S. VAES & R. VERGNIoux – « The boundary of universal discrete quantum groups, exactness and factoriality », *Duke Math. J.* **140** (2007), no. 1, p. 35–84.
- [VV13] R. VERGNIoux & C. VOIGT – « The K-theory of free quantum groups », *Math. Ann.* **357** (2013), no. 1, p. 355–400.
- [Wan95] S. WANG – « Free products of compact quantum groups », *Comm. Math. Phys.* **167** (1995), no. 3, p. 671–692.
- [Wan98] S. WANG – « Quantum symmetry groups of finite spaces », *Comm. Math. Phys.* **195** (1998), no. 1, p. 195–211.
- [Wan09] S. WANG – « Simple compact quantum groups I », *J. Funct. Anal.* **256** (2009), no. 10, p. 3313–3341.
- [Web13] M. WEBER – « On the classification of easy quantum groups – The nonhyperoctahedral and the half-liberated case », *Adv. Math.* **245** (2013), no. 1, p. 500–533.
- [Web17a] —, « Partition C*-algebras », *arXiv preprint arXiv :1710.06199* (2017).
- [Web17b] —, « Partition C*-algebras II. Link to compact matrix quantum groups », *arXiv preprint arXiv :1710.08662* (2017).
- [Wen16] C. WEN – « Maximal amenability and disjointness for the radial masa », *J. Funct. Anal.* **270** (2016), no. 2, p. 787–801.
- [Wey97] H. WEYL – *The classical groups : their invariants and representations*, Princeton Landmarks in Mathematics, vol. 1, Princeton University Press, 1997.
- [WO93] N. WEGGE-OLSEN – *K-theory and C*-algebras : a friendly approach*, Oxford Science Publications, Oxford University Press, 1993.

- [Wor87a] S. WORONOWICZ – « Compact matrix pseudogroups », *Comm. Math. Phys.* **111** (1987), no. 4, p. 613–665.
- [Wor87b] S. WORONOWICZ – « Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **23** (1987), no. 1, p. 117–181.
- [Wor88] S. WORONOWICZ – « Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(N)$ groups », *Invent. Math.* **93** (1988), no. 1, p. 35–76.
- [Wor98] — , « Compact quantum groups », *Symétries quantiques (Les Houches, 1995)* (1998), p. 845–884.