PROPRIÉTÉ (T) ET GROUPES FONDAMENTAUX DES FACTEURS DE TYPE II_1

AMAURY FRESLON

Résumé. Nous présentons la propriété (T) de Kazhdan pour les groupes discrets ainsi que sa généralisation aux algèbres de von Neumann finies. Ensuite, nous énonçons et démontrons un célèbre résultat de A. Connes : le groupe fondamental d'un facteur de type II_1 possèdant la propriété (T) est dénombrable.

Table des matières

1. Introduction

Lorsque F. Murray et J. von Neumann ont défini le groupe fondamental d'un facteur de type II_1 dans [MvN37], ils ne sont parvenus à calculer que celui du facteur hyperfini $\mathcal{R}$, qui est égale à $\mathbb{R}_+^*$. La question s'est alors posée de savoir s'il existait des facteurs de type II_1 dont le groupe fondamental n'est pas égal à $\mathbb{R}_+^*$. La réponse affirmative à cette question a été donnée par A. Connes dans [Con80]. En adaptant un outil issu de la théorie géométrique des groupes, la propriété (T) de Kazhdan, il a exhibé une classe de facteurs de type II_1 dont le groupe fondamental est dénombrable. C'est ce résultat que nous allons exposer.

Nous commencerons par rappeler les définitions et résultats essentiels concernant la propriété (T) et sa version relative dans le cadre des groupes discrets. Nous expliquerons ensuite comment cette propriété peut se définir dans le cadre des algèbres de von Neumann finies ainsi que le lien entre cette définition, celle pour les groupes discrets et la notion d'inclusion rigide introduite par S. Popa dans [Pop06]. Enfin, nous démontreront le théorème de Connes grâce à une étude du groupe des automorphismes extérieurs des facteurs de type II_1 possédant la propriété (T).

2. Groupes discrets

Dans ce document, Γ désignera toujours un groupe discret dénombrable et Λ un sous-groupe de Γ. Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, on notera $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ le groupe des opérateurs unitaires de $\mathcal{H}$. Une représentation unitaire de Γ est un couple $(\pi, \mathcal{H})$ formé d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et d'un morphisme de groupes
$$\pi : \Gamma \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

2.1. La propriété (T).

La propriété (T) est une propriété de rigidité des représentations unitaires d'un groupe topologique localement compact. Elle a été formulée pour le première fois par D. Kazhdan dans [Kaz67]. Nous allons ici nous restreindre au cas des groupes discrets. Afin de donner une définition la plus claire possible, nous commençons par introduire la notion de vecteur presque invariant.

Définition 2.1. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, A une partie de $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ et $\delta > 0$. Un vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ est dit (A, δ)-*invariant* si
$$\sup_{a\in A} \|a(\xi) - \xi\| \leqslant \delta\|\xi\|.$$
Il est dit A-invariant si $a(\xi) = \xi$ pour tout $a \in A$.

Définition 2.2. On dit qu'une représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ de Γ *admet presque des vecteurs invariants* si pour toute partie finie $F \subset \Gamma$ et pour tout $\delta > 0$, il existe un vecteur $(\pi(F), \delta)$-invariant non nul dans $\mathcal{H}$. On dit que $(\pi, \mathcal{H})$ admet un *vecteur invariant* s'il existe une vecteur $\pi(\Gamma)$-invariant non nul dans $\mathcal{H}$.

Définition 2.3 (Kazhdan, 67)**.** On dit que Γ a la *propriété (T)* (ou que Γ est un *groupe de Kazhdan*) si toute représentation unitaire de Γ qui admet presque des vecteurs invariants admet un vecteur invariant.

Exemple 2.4. Le groupe $SL_n(\mathbb{Z})$ des matrices $n \times n$ de déterminant 1 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ a la propriété (T) pour tout $n \geqslant 3$ (voir [Sha99]).

La définition 2.3 est en fait équivalente à une version plus forte. Avant de la donner, remarquons que Γ a la propriété (T) si et seulement si toute représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ admettant une suite généralisée (ξ_i) de vecteurs unitaires tels que pour tout $g \in \Gamma$,
$$\|\pi(g)\xi_i - \xi_i\| \longrightarrow 0, \tag{1}$$
admet un vecteur invariant.

Proposition 2.5. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) Il existe $F \subset \Gamma$ finie et $\delta > 0$ tels que toute représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ de Γ admettant un vecteur $(\pi(F), \delta)$-invariant admet un vecteur invariant non nul.

(2) Γ a la propriété (T).

Démonstration. L'implication $1 \Rightarrow 2$ est évidente. Nous allons donc simplement prouver l'implication $2 \Rightarrow 1$. Procédons par contraposée et supposons que pour toute partie finie F de Γ et pour tout $\delta > 0$ il existe une représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ de Γ admettant un vecteur unitaire $(\pi(F), \delta)$-invariant mais n'admettant pas de vecteur invariant. Quand F décrit l'ensemble des parties finies de Γ ordonné par l'inclusion et δ parcourt l'intervalle $(0, 1]$ avec son ordre naturel, on obtient une famille ordonnée $(\pi_i, \mathcal{H}_i)_i$ de représentations unitaires de Γ et une famille $(\xi_i)_i$ de vecteurs unitaires tels que pour tout i, $\xi_i \in \mathcal{H}_i$ et pour toute $F \subset \Gamma$ finie,

$$\sup_{g \in F} \|\pi_i(g)\xi_i - \xi_i\| \longrightarrow 0.$$

Considérons maintenant la représentation unitaire $(\oplus_i \pi_i, \oplus_i \mathcal{H}_i)$. La suite généralisée de vecteurs unitaires ξ_i vérifie (1) mais la représentation ne possède pas de vecteurs invariants, autrement dit Γ n'a pas la propriété (T). $\square$

Le résultat précédent peut être affiné en une version quantitative. C'est cette définition de la propriété (T) qui sera généralisée aux algèbres de von Neumann.

Proposition 2.6. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $F \subset \Gamma$ finie et $\delta > 0$ tels que toute représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ de Γ admettant un vecteur $(\pi(F), \delta)$-invariant ξ admet un vecteur invariant η tel que $\|\xi - \eta\| \leqslant \varepsilon$.

(2) Il existe $F \subset \Gamma$ finie et $\delta > 0$ tels que toute représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ de Γ admettant un vecteur $(\pi(F), \delta)$-invariant admet un vecteur invariant (i.e. Γ a la propriété (T)).

Démonstration. L'implication $1 \Rightarrow 2$ est évidente. Nous allons donc simplement prouver l'implication $2 \Rightarrow 1$. Soient F et δ donnés par l'hypothèse. Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de Γ, soit $\mathcal{H}_0$ le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$ des vecteurs invariants et soit $\mathcal{H}_1$ son supplémentaire orthogonal. Comme $\mathcal{H}_0$ est globalement invariant, $\mathcal{H}_1$ l'est aussi. Comme $\mathcal{H}_1$ ne contient pas de vecteur invariant, il existe pour tout $\zeta \in \mathcal{H}_1$ un élément $g \in F$ tel que

$$\|\pi(g)\zeta - \zeta\| > \delta\|\zeta\|.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ fixé et soit $\delta' > 0$. Si ξ est un vecteur unitaire $(\pi(F), \delta')$-invariant et si $\xi_0 \oplus \xi_1$ est la décomposition de ξ dans $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, on a, pour un certain $g \in F$,

$$\|\xi - \xi_0\| = \|\xi_1\| < \frac{1}{\delta}\|\pi(g)(\xi_1) - \xi_1\| = \frac{1}{\delta}\|\pi(g)\xi - \xi\| \leqslant \frac{\delta'}{\delta}.$$

Pour conclure, il faut donc trouver $\delta' > 0$ tel que $\delta'/\delta < 1$ (afin que $\xi_0 \neq 0$) et $\delta'/\delta \leqslant \varepsilon$. On peut par exemple prendre

$$\delta' := \min\left\{\frac{\delta}{2}, \delta\varepsilon\right\}.$$

$\square$

La démonstration de la proposition 2.6 donne en fait un résultat plus fort. Donnons d'abord une définition supplémentaire.

Définition 2.7. Soit Γ un groupe possédant la propriété (T). On appelle *paire de Kazhdan* associée à Γ tout couple (F,δ) tel que toute représentation unitaire $(\pi,\mathcal{H})$ de Γ admettant des vecteurs $(\pi(F),\delta)$-invariants admette un vecteur invariant.

Corollaire 2.8. *Soit Γ un groupe discret possédant la propriété (T) et (F,δ) une paire de Kazhdan pour Γ. Soit $(\pi,\mathcal{H})$ une représentation unitaire de Γ possédant des vecteurs $(\pi(F),\delta)$-invariants, soit $\mathcal{H}_0$ le sous-espace non réduit à 0 de $\mathcal{H}$ des vecteurs invariants et soit P le projecteur orthogonal sur $\mathcal{H}_0$. Alors, pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout vecteur $(\pi(F),\varepsilon\delta)$-invariant ξ, on a :*

$$\|\xi - P(\xi)\| \leqslant \varepsilon\|\xi\|.$$

Démonstration. La preuve de ce résultat est en fait incluse dans celle de la proposition 2.6. □

De même que tout ce qui précède, le corollaire suivant est encore vrai dans le cadre des algèbres de von Neumann finies. Les démonstrations sont similaires, aussi ne les donnons nous que dans le cas des groupes.

Corollaire 2.9. *Soient Γ_1 et Γ_2 des groupes discrets possédant la propriété (T), alors $\Gamma_1\times\Gamma_2$ possède la propriété (T).*

Démonstration. Soient (F_1,δ_1) et (F_2,δ_2) des paires de Kazhdan contenant le neutre (on peut toujours l'ajouter) respectivement pour Γ_1 et Γ_2. On pose $F := F_1\times F_2$ et $\delta := \min(\delta_1,\delta_2)$. Soit $(\pi,\mathcal{H})$ une représentation unitaire de $\Gamma_1\times\Gamma_2$ possédant des vecteurs $(\pi(F),\delta)$-invariants. Cette représentation possède entre autre des vecteurs $(\pi(F_1\times\{e_2\}),\delta_1)$-invariants, donc la représentation de Γ_1 associée (le faisant agir par $\pi(\Gamma_1\times\{e_2\})$) possède un vecteur fixe. Notons $\mathcal{H}_1$ le sous-espace non réduit à zéro des vecteurs fixes par Γ_1. Comme les représentations associées de Γ_1 et Γ_2 commutent, $\mathcal{H}_1$ est stable par Γ_2 et est donc une sous-représentation de $\Gamma_1\times\Gamma_2$. Soit

$$\varepsilon := \frac{\delta}{2+\delta}$$

et soit ξ un vecteur $(\pi(F),\varepsilon\delta)$-invariant. Quitte à renormaliser ξ si sa norme est plus grande que 1 (ce qui ne change pas la $(\pi(F),\varepsilon\delta)$-invariance), on a alors, pour tout $g\in F$,

$$\begin{aligned}
\|\pi(g)P(\xi)-P(\xi)\| &\leqslant \|\pi(g)P(\xi)-\pi(g)\xi\| + \|\pi(g)\xi-\xi\| + \|\xi-P(\xi)\| \\
&= 2\|P(\xi)-\xi\| + \|\pi(g)\xi-\xi\| \\
&\leqslant 2\varepsilon+\varepsilon\delta \\
&\leqslant \delta.
\end{aligned}$$

Cela implique entre autre que la sous représentation unitaire $(\pi,\mathcal{H}_1)$ de Γ_2 admet un vecteur $(\pi(\{e_1\}\times F_2),\delta_2)$-invariant, donc qu'elle admet un vecteur invariant non nul. Un tel vecteur est alors invariant pour $\Gamma_1\times\Gamma_2$. Ainsi, (F,δ) est une paire de Kazhdan pour $\Gamma_1\times\Gamma_2$, qui a la propriété (T). □

Bien qu'elles ne soient pas utilisées dans la suite de ce document, nous regroupons sous forme d'une proposition les propriétés les plus simples des groupes de Kazhdan (voir [BdlHV08] pour les démonstrations ainsi qu'un traitement complet du sujet).

Proposition 2.10. *Soit Γ un groupe discret,*

(1) *Si Γ possède la propriété (T), alors Γ est finiment engendré.*

(2) *Si Γ est moyennable, alors Γ possède la propriété (T) si et seulement s'il est fini (donc si Γ est fini, il a la propriété (T)).*

(3) *Γ possède la propriété (T) si et seulement si pour tout ensemble de représentations unitaires $\mathcal{R}$ de Γ, la représentation triviale 1_Γ de Γ est isolée (i.e. le singleton $\{1_\Gamma\}$ est ouvert) dans l'espace $\mathcal{R} \cup \{1_\Gamma\}$ muni de la topologie de Fell.*

2.2. **La propriété (T) relative.** La notion de propriété (T) relative à un sous-groupe a été développée par G. Margulis dans [Mar82]. Il s'agit d'une généralisation de la propriété (T) pour un couple formé d'un groupe discret et de l'un de ses sous-groupes.

Définition 2.11 (Margulis, 82)**.** On dit que le couple (Γ, Λ) a la *propriété (T) relative* si toute représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ de Γ qui admet presque des vecteurs invariants admet un vecteur $\pi(\Lambda)$-invariant.

De même que dans le cas de la propriété (T), la définition précédente est équivalente à un énoncé quantitatif plus précis.

Proposition 2.12. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe $F \subset \Gamma$ finie et $\delta > 0$ tels que toute représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ de Γ admettant un vecteur unitaire $(\pi(F), \delta)$-invariant admet un vecteur $\pi(\Lambda)$-invariant.*

(2) *Le couple (Γ, Λ) a la propriété (T) relative*

Démonstration. Les preuves des propositions 2.5 et 2.6 s'adaptent sans difficultés avec les légères modifications nécessaires. □

Remarque 2.13. On notera que le groupe Γ a la propriété (T) si et seulement si le couple (Γ, Γ) a la propriété (T) relative.

Nous donnons une autre caractérisation de la propriété (T) relative en termes de fonctions de type positif, qui ne sera pas utilisée dans la suite. Rappelons qu'une application

$$\varphi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$$

est dite *de type positif* si pour tous $g_1, \ldots, g_n \in \Gamma$ et pour tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \bar{\alpha}_i \alpha_j \varphi(g_i^{-1} g_j) \geqslant 0.$$

Si de plus $\varphi(1) = 1$, on dit que φ est *normalisée*. Pour une démonstration du résultat suivant, voir par exemple [Jol05].

Proposition 2.14. *Le couple (Γ, Λ) a la propriété (T) relative si et seulement si toute suite (φ_n) de fonctions de type positif normalisée sur Γ qui converge ponctuellement vers 1 converge uniformément vers 1 sur Λ.*

Exemple 2.15. Nous donnons deux exemples classiques :

- Le couple $(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2)$ a la propriété (T) relative (voir [Bur91]).
- Si Γ a la propriété (T) et si H est un groupe discret, alors $(H \times \Gamma, \Gamma)$ a la propriété (T) relative.

Nous aurons besoin dans la section suivante de la reformulation de la propriété (T) relative donnée par P. Jolissaint dans [Jol05].

Théorème 2.16 (Jolissant, 05). *Le couple* (Γ, Λ) *a la propriété (T) relative si et seulement si toute représentation unitaire* $(\pi, \mathcal{H})$ *de* Γ *admettant presque des vecteurs invariants admet un* sous-espace vectoriel $\pi(\Lambda)$-stable de dimension finie *non-trivial.*

3. Algèbres de von Neumann finies

3.1. **Rappels et notations.** Une algèbre de von Neumann M est dite *finie* si toute isométrie de M est unitaire, c'est-à-dire si pour tout $v \in M$,

$$v^*v = 1 \Longrightarrow vv^* = 1.$$

L'ensemble des éléments unitaires d'une algèbre de von Neumann M sera noté $\mathcal{U}(M)$. Une algèbre de von Neumann est finie si et seulement si elle admet un *état tracial fidèle normal* (voir [Dix69, Thm III.8.1.1]), c'est à dire une forme linéaire positive (donc continue) unifère $\tau : M \to \mathbb{C}$ telle que

- Pour tout $x \in M$, $\tau(x^*x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ (i.e. τ est fidèle).
- τ est faiblement continue sur les parties bornées de M (i.e. τ est normale).
- Pour tous $x, y \in M$, $\tau(xy) = \tau(yx)$ (i.e. τ est une trace).

Dans ce document, « trace » signifiera toujours « état tracial fidèle normal ». On note $L^2(M, \tau)$ le séparé complété de M pour la semi-norme $\|.\|_2$ associée au produit scalaire défini pour tous $x, y \in M$ par

$$\langle x, y \rangle_{L^2(M,\tau)} := \tau(y^*x).$$

L'image d'un élément $x \in M$ dans $L^2(M, \tau)$ sera notée $\widehat{x}$. De plus, on dispose d'une représentation π de M sur $L^2(M, \tau)$ donnée par

$$\pi(a).\widehat{x} = \widehat{ax}.$$

Soient M et N deux algèbres de von Neumann, une application

$$\phi : M \longrightarrow N$$

est dite *complètement positive* (en abgrégé c.p.) si pour tout entier n, l'extension naturelle

$$\phi^{(n)} : M_n(M) \longrightarrow M_n(N)$$

est positive. Une application sera dite u.c.p. si elle est unifère et complètement positive. Une application ϕ sur une algèbre de von Neumann munie d'une trace τ est dite τ*-invariante* si $\tau \circ \phi = \tau$.

Si M est un algèbre de von Neumann munie d'une trace τ fixée et si $\mathcal{H}$ est un (M, M)-bimodule, un vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ sera dit *tracial* si pour tout $x \in M$,

$$\langle x.\xi, \xi \rangle = \tau(x) = \langle \xi.x, \xi \rangle.$$

Si B est une sous-algèbre de von Neumann de M et si $\mathcal{H}$ est un (M,M)-bimodule, un vecteur $\eta \in \mathcal{H}$ sera dit *B-central* si pour tout $y \in B$,

$$y.\eta = \eta.y.$$

Soit M une algèbre de von Neumann munie d'une trace τ fixée. On peut associer à toute application u.c.p. τ-invariante $\phi : M \to M$ un (M,M)-bimodule hilbertien $\mathcal{H}$ et un vecteur tracial $\xi \in \mathcal{H}$ tels que pour tout triplet (a,x,y) d'éléments de M,

$$\langle a\xi x, y\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \phi(a)\widehat{x}, \widehat{y}\rangle_{L^2(M,\tau)}. \tag{2}$$

Réciproquement, si $\mathcal{H}$ est un (M,M)-bimodule et $\xi \in \mathcal{H}$ est un vecteur tracial, il existe une application u.c.p. τ-invariante $\phi : M \to M$ vérifiant l'équation (2).

Le lemme suivant nous sera utile.

Lemme 3.1. *Soit (M,τ) une algèbre de von Neumann finie munie d'une trace fixée. Alors toute application u.c.p. $\phi : M \to M$ vérifie*

$$\phi(x^*x) \geqslant \phi(x)^*\phi(x).$$

Pour tout $x \in M$. Si de plus ϕ est τ-invariante, alors pour tout $x \in M$,

$$\|\phi(x)\|_2 \leqslant \|x\|_2.$$

Démonstration. Le théorème de Stinespring (voir [BO08, Thm 1.5.3]) assure l'existence d'une représentation π de M et d'une isométrie V dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tels que

$$\phi(x) = V^*\pi(x)V.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \phi(x^*x) &= V^*\pi(x^*x)V \\ &= V^*\pi(x)^*VV^*\pi(x)V + V^*\pi(x)^*(1-VV^*)\pi(x)V \\ &\geqslant \phi(x)^*\phi(x). \end{aligned}$$

La deuxième partie de la proposition est maintenant évidente en utilisant la définition de la norme $\|.\|_2$, la positivité de τ et la τ-invariance de ϕ. □

3.2. **Rigidité et propriété (T).** La propriété (T) pour les algèbres de von Neumann a été introduite par A. Connes et V. Jones dans l'article [CJ85]. La propriété relative a quant à elle été introduite par S. Popa dans [Pop06].

Définition 3.2 (Popa, 06)**.** Soit (M,τ) un algèbre de von Neumann finie avec une trace fixée et soit B une sous-algèbre de von Neumann de M. On dit que le couple (M,B) a la propriété (T) relative si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et une partie finie F de M tels que : pour tout (M,M)-bimodule $\mathcal{H}$ et pour tout vecteur unitaire tracial ξ de $\mathcal{H}$ tel que pour tout $x \in F$,

$$\|x\xi - \xi x\| \leqslant \delta,$$

il existe un vecteur B-central η dans $\mathcal{H}$ tel que

$$\|\xi - \eta\| \leqslant \varepsilon.$$

On dit que M a la propriété (T) si le couple (M,M) a la propriété (T) relative.

Remarque 3.3. Il eſt possible de définir sur tout ensemble $\mathcal{R}$ de (M,M)-bimodules une topologie similaire à la topologie de Fell. Soit T le (M,M)-bimodule trivial. Alors M a la propriété (T) si et seulement si pour tout ensemble $\mathcal{R}$ de (M,M)-bimodules, T eſt isolé dans $\mathcal{R}\cup\{T\}$. C'eſt cette définition de la propriété (T) que A. Connes a utilisé dans [Con80].

Cette définition eſt analogue à celle de la propriété (T) relative pour les groupes discrets, comme nous le verrons dans le théorème 3.7. Toutefois, ce n'eſt pas la définition originelle de S. Popa. Cette dernière s'appuie sur la notion de rigidité d'une inclusion d'algèbres de von Neumann et nous sera utile pour la preuve du théorème 4.2. Si M eſt une algèbre de von Neumann, on note $\mathbb{B}_1(M)$ sa boule unité.

Définition 3.4 (Popa, 06)**.** Soit (M,τ) un algèbre de von Neumann finie avec une trace fixée et soit B une sous-algèbre de von Neumann de M. On dit que l'inclusion $B\subset M$ eſt *rigide* si pour tout $\varepsilon>0$ il exiſte $\delta>0$ et une partie finie $F\subset M$ telle que pour toute application u.c.p. τ-invariante ϕ de M dans M on ait :

$$\sup_{x\in F}\|\phi(x)-x\|_2\leqslant\delta\Longrightarrow\sup_{x\in\mathbb{B}_1(B)}\|\phi(x)-x\|_2\leqslant\varepsilon.$$

Le dictionnaire exiſtant entre applications complètement positives et bimodules permet de relier la rigidité et la propriété (T). Avant de donner un énoncé précis, rappelons un résultat classique de géométrie des espaces de Hilbert.

Proposition 3.5. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{D}$ une partie bornée de $\mathcal{H}$. Il exiſte une unique boule fermée de rayon minimal contenant $\mathcal{D}$, dont la frontière eſt appelée* sphère circonscrite *à $\mathcal{D}$. De plus, le centre de cette sphère appartient à la fermeture convexe de $\mathcal{D}$.*

Démonſtration. Soit $\mathcal{C}$ la fermeture convexe de $\mathcal{D}$. Il s'agit d'un convexe complet borné dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Considérons l'application

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{H} & \to & \mathbb{R}_*^+\\ x & \mapsto & \sup\limits_{y\in\mathcal{C}}\|x-y\|\end{array}\right.$$

Cette application eſt bien définie car $\mathcal{C}$ eſt borné. Si $x\in\mathcal{H}$, il exiſte un unique $x'\in\mathcal{C}$ tel que

$$\|x-y\|\geqslant\|x'-y\|$$

pour tout $y\in\mathcal{C}$ (voir par exemple [CCM97, Thm X.4.2]). Ainsi,

$$\inf_{x\notin\mathcal{C}}f(x)\geqslant\inf_{x\in\mathcal{C}}f(x)$$

et f possède une borne inférieure qui eſt égale à sa borne inférieure sur $\mathcal{C}$. Or f eſt faiblement semi-continue inférieurement (comme borne supérieure d'une famille de fonctions semi-continues inférieurement), donc sa reſtriction au convexe faiblement fermé $\mathcal{C}$ atteint sa borne inférieures. Ainsi f possède un minimum R qu'elle atteint en un point x_0 de $\mathcal{C}$. Soit x un point de $\mathcal{C}$ tel que $f(x)=R$ et $y:=(x_0+x)/2$. Si $z\in\mathcal{C}$, l'égalité du parallélogramme appliquée aux vecteurs $y-z$ et $(x-x_0)/2$ donne

$$\|y-z\|^2=\frac{1}{2}(\|x-z\|^2+\|x_0-z\|^2)-\left\|\frac{x-x_0}{2}\right\|^2\leqslant R^2-\left\|\frac{x-x_0}{2}\right\|^2.$$

Ainsi, en posant

$$r := \sqrt{R^2 - \left\|\frac{x-x_0}{2}\right\|^2},$$

on voit que $\mathcal{C}$ est inclus dans la boule de centre y et de rayon r, ce qui par minimalité donne $r = R$ et $x = x_0$. Il suffit maintenant de remarquer que toute boule fermée contenant $\mathcal{D}$ contient également $\mathbb{C}$ pour conclure. $\square$

Théorème 3.6 (Popa, 06)**.** *Soit (M,τ) un algèbre de von Neumann finie avec une trace fixée et soit B une sous-algèbre de von Neumann de M. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) L'inclusion $B \subset M$ est rigide.

(2) Le couple (M,B) a la propriété (T) relative.

Démonstration. Procédons par double implication.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Soit $\varepsilon > 0$ et soient F une partie finie de M et $\delta > 0$ donnés par la rigidité de l'inclusion pour le paramètre $\varepsilon^2/2$. Soit $\mathcal{H}$ un (M, M)-bimodule et $\xi \in \mathcal{H}$ un vecteur unitaire tracial tel que pour tout $x \in F$,

$$\|x\xi - \xi x\| \leqslant \delta.$$

Soit $\phi : M \to M$ l'application τ-invariante u.c.p. associée au couple (H,ξ). Comme

$$\begin{aligned}
\|\phi(x)-x\|_2^2 &= \|\phi(x)\|_2^2 + \|x\|_2^2 - 2\mathfrak{Re}(\langle\phi(x),x\rangle)\\
&= \|\phi(x)\|_2^2 + \|x\|_2^2 - 2\mathfrak{Re}(\langle x\xi,\xi x\rangle)\\
&\leqslant 2\|x\|_2^2 - 2\mathfrak{Re}(\langle x\xi,\xi x\rangle)\\
&= \|x\xi - \xi x\|^2\\
&\leqslant \delta^2
\end{aligned}$$

pour tout $x \in F$ (en utilisant le lemme 3.1 pour passer la deuxième à la troisième ligne), on a $\|\phi(x) - x\|_2 \leqslant \varepsilon^2/2$ pour tout $x \in \mathbb{B}_1(M)$. Par conséquent, si $u \in \mathcal{U}(B)$,

$$\begin{aligned}
\|\xi - u\xi u^*\|^2 &= \|\xi\|^2 + \|u\xi u^*\|^2 - 2\mathfrak{Re}(\langle\xi,u\xi u^*\rangle)\\
&= 2 - 2\mathfrak{Re}(\langle u\xi,\xi u\rangle)\\
&= 2 - 2\mathfrak{Re}(\tau(\phi(u)u^*))\\
&= 2\mathfrak{Re}(\tau(1-\phi(u)u^*))\\
&\leqslant 2\|1-\phi(u)u^*\|_2\\
&\leqslant \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Considérons maintenant l'ensemble

$$\mathcal{D} := \{u\xi u^*, u \in \mathcal{U}(B)\}$$

et notons η le centre de la sphère circonscrite à $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{H}$ (voir proposition 3.5). Notons que η appartient à la fermeture convexe de $\mathcal{C}$. Soit $u \in \mathcal{U}(B)$. On observe que $u\mathcal{C}u^* = \mathcal{C}$ et que le centre de la sphère circonscrite à $u\mathcal{C}u^*$ est $u\eta u^*$. On a donc $u\eta u^* = \eta$ par unicité de la sphère circonscrite. Ainsi η est B-central. D'autre part, η étant dans la fermeture convexe de $\mathcal{D}$, on a

$$\|\xi - \eta\| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui conclut.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Soit $\varepsilon > 0$, F une partie finie de M et $\delta' > 0$ donnés par l'hypothèse pour le paramètre $\varepsilon/2$. On pose

$$\delta := \frac{\delta'^2}{2\max_{x\in F}\|x\|_2}.$$

Soit $\phi : M \to M$ une application u.c.p. τ-invariante telle que pour tout $x \in F$,

$$\|\phi(x) - x\|_2 \leqslant \delta.$$

Soit $(\mathcal{H}, \xi)$ le couple formé d'un (M,M)-bimodule et d'un vecteur unitaire tracial associé à ϕ. Pour tout $x \in F$,

$$\begin{aligned}
\|x\xi - \xi x\|^2 &= \|x\xi\|^2 + \|\xi x\|^2 - 2\mathfrak{Re}(\langle x\xi, \xi x\rangle) \\
&= 2\|x\|_2^2 - 2\mathfrak{Re}(\tau(\phi(x)x^*)) \\
&= 2\mathfrak{Re}(\tau((x - \phi(x))x^*)) \\
&\leqslant 2\|x - \phi(x)\|_2\|x\|_2 \\
&\leqslant \delta'^2.
\end{aligned}$$

Il existe donc un élément B-central η dans $\mathcal{H}$ tel que $\|\xi - \eta\| \leqslant \varepsilon/4$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{B}_1(B)$,

$$\begin{aligned}
\|x - \phi(x)\|_2^2 &= \|x\|_2^2 + \|\phi(x)\|_2^2 - 2\mathfrak{Re}(\tau(\phi(x)x^*)) \\
&\leqslant 2\|x\xi\|^2 - 2\mathfrak{Re}(\langle x\xi, \xi x\rangle) \\
&= 2\mathfrak{Re}(\langle x\xi, x\xi - \xi x) \\
&\leqslant 2\|x\xi\|\|x\xi - \xi x\| \\
&= 2\|x\xi\|\|x(\xi - \eta) - (\xi - \eta)x\| \\
&\leqslant 4\|x\|_\infty\|x\xi\|\|\xi - \eta\| \\
&\leqslant 4\|x\|_\infty^2\|\xi\|\|\xi - \eta\| \\
&\leqslant \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui conclut.

□

3.3. **Lien avec les groupes discrets.** Nous allons dans cette section relier les notions de propriété (T) relative pour les groupes discrets et pour les algèbres de von Neumann. Nous commençons par rappeler quelques constructions.

Soit Γ un groupe discret et $\mathcal{H} := \ell^2(\Gamma)$ l'espace de Hilbert des suites de carré sommable à coefficients dans Γ. Le *représentation régulière gauche* de Γ est la représentation unitaire $(\lambda, \mathcal{H})$ définie par

$$\lambda(s)f : t \mapsto f(s.t)$$

pour tous $s, t \in \Gamma$ et $f \in \ell^2(\Gamma)$. Le bicommutant de $\lambda(\Gamma)$ dans $\mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$, noté $L(\Gamma)$, est une algèbre de von Neumann appelée *algèbre de von Neumann du groupe* Γ.

Les représentations unitaires de Γ sont reliées aux bimodules hilbertiens sur $L(\Gamma)$ de la façon suivante. Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de Γ, on munit l'espace de Hilbert

$$\mathcal{K} := \mathcal{H} \otimes \ell^2(\Gamma)$$

des actions suivantes de $\lambda(\Gamma)$: quels que soient $s, t \in \Gamma$ et $\xi \in \mathcal{H}$, on pose

$$\begin{aligned} u_s.(\xi \otimes \delta_t) &= (\pi(s)\xi) \otimes \delta_{st} \\ (\xi \otimes \delta_t).u_s &= \xi \otimes \delta_{ts} \end{aligned}$$

Ces deux actions commutent et se prolongent à $L(\Gamma)$, munissant ainsi $\mathcal{K}$ d'une structure de $(L(\Gamma), L(\Gamma))$-bimodule.

Comme on peut s'y attendre, les notions de propriété (T) relative pour les groupes discrets et pour les algèbres de von Neumann coïncident. Cela dit, la démonstration n'est pas immédiate.

Théorème 3.7 (Popa, 10)**.** *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) Le couple (Γ, Λ) *a la propriété (T) relative.*

(2) Le couple $(L(\Gamma), L(\Lambda))$ *a la propriété (T) relative.*

Démonstration. Posons $B := L(\Lambda)$ et $M := L(\Gamma)$.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ et $F \subset \Gamma$ finie tels que toute représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ de Γ possédant un vecteur unitaire $(\pi(F), \delta)$-invariant ξ admette un vecteur $\pi(\Lambda)$-invariant η tel que $\|\xi - \eta\| \leqslant \varepsilon$. Soit $\mathcal{H}$ un (M, M)-bimodule muni d'un vecteur unitaire tracial ξ tel que

$$\|u_s\xi - \xi u_s\| \leqslant \delta$$

pour tout $s \in F$. On définit une représentation unitaire

$$\pi : \Gamma \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

par

$$\pi_s(\eta) = u_s \eta u_s^*.$$

Alors, le vecteur unitaire ξ est $(\pi(F), \delta)$-invariant et il existe un vecteur $\pi(\Lambda)$-invariant $\eta \in \mathcal{H}$ tel que $\|\xi - \eta\| \leqslant \varepsilon$. Comme η est $\pi(\Lambda)$-invariant, il est B-central et le couple (M, B) a la propriété (T) relative.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Fixons $\varepsilon > 0$.Il est évident qu'on peut se contenter de prouver le résultat pour $\varepsilon < 1$. Il existe $\delta > 0$ et $F \subset M$ finie tels que pour tout (M, M)-bimodule $\mathcal{H}$ et tout vecteur unitaire tracial $\xi \in \mathcal{H}$ tel que pour tout $x \in F$, $\|x\xi - \xi x\| \leqslant \delta$, il existe un vecteur B-central $\eta \in \mathcal{H}$ tel que $\|\xi - \eta\| \leqslant \varepsilon$. Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de Γ admettant des vecteurs presque invariants et soit $\mathcal{K}$ le (M,M)-bimodule associé. Soit $(\zeta_i)_i$ un suite généralisée de vecteurs unitaires de $\mathcal{H}$ telle que pour tout $x\in\Gamma$,

$$\|\pi(x)\zeta_i-\zeta_i\|\longrightarrow 0,$$

et soit $(\xi_i)_i$ la suite de vecteurs de $\mathcal{K}$ définie par

$$\xi_i:=\zeta_i\otimes\delta_e.$$

Remarquons que les vecteurs unitaires ξ_i sont traciaux puisque pour tout $s\in\Gamma$,

$$\begin{array}{rcl}\langle u_s.\xi_i,\xi_i\rangle & = & \langle\pi(s)\zeta_i,\zeta_i\rangle\langle\delta_s,\delta_e\rangle\\ & = & \delta_{s,e}\\ & = & \tau(s)\\ & = & \langle\delta_s,\delta_e\rangle\\ & = & \langle\xi_i.u_s,\xi_i\rangle.\end{array}$$

De plus, pour tout $x\in M$,

$$\|x.\xi_i-\xi_i.x\|\longrightarrow 0.$$

Soit i_0 un indice tel que pour tout $x\in F$,

$$\|x.\xi_{i_0}-\xi_{i_0}.x\|\leqslant\delta,$$

et soit

$$\xi:=\xi_{i_0}.$$

Alors, il existe une vecteur B-central $\eta\in\mathcal{K}$ tel que $\|\xi-\eta\|\leqslant\varepsilon$. Soit $f\in\mathcal{K}$ une combinaison linéaire finie de tenseurs purs

$$f=\sum_{t\in\Gamma}f(t)\otimes\delta_t.$$

La B-centralité de f s'écrit, pour tout $s\in\Lambda$,

$$\sum_{t\in\Gamma}f(t)\otimes\delta_t=u_{s^{-1}}.\left(\sum_{t\in\Gamma}f(t)\otimes\delta_t\right).u_s=\sum_{t\in\Gamma}\pi(s^{-1})f(t)\otimes\delta_{s^{-1}ts}.$$

Autrement dit, on a pour tout $t\in\Gamma$,

$$f(sts^{-1})=\pi(s)f(t).$$

Par densité, on voit que cette condition est vérifiée par tout élément B-central de $\mathcal{K}$ et donc en particulier par η. Soit $t\in\Gamma$ tel que $\eta(t)\neq 0$. Puisque η est de carré sommable, $\{sts^{-1},s\in\Lambda\}$ est fini. On en déduit que $\{\eta(sts^{-1}),s\in\Lambda\}$ engendre un sous-espace $\pi(\Lambda)$-invariant de $\mathcal{H}$ non-trivial de dimension finie. Le théorème 2.16 permet alors de conclure.

□

4. Application aux facteurs de type II_1

On appelle *facteur de type II_1* toute algèbre de von Neumann finie M de dimension infinie dont le centre $M \cap M'$ est trivial (i.e. réduit à $\mathbb{C}.1$). Si Γ est un groupe discret, alors $L(\Gamma)$ est un facteur de type II_1 si et seulement si Γ est à classes de conjugaisons infinies (ICC en abrégé).

4.1. **Automorphismes extérieurs.** Soient M un facteur de type de II_1 et $u \in M$ un élément unitaire, on définit l'automorphisme Ad_u de M par

$$\mathrm{Ad}_u : x \mapsto uxu^*.$$

L'ensemble des automorphismes de la forme Ad_u pour $u \in M$ unitaire forme un sous-groupe distingué du groupe $\mathrm{Aut}(M)$ des automorphismes de M. Ce sous-groupe, noté $\mathrm{Inn}(M)$, est appelé *groupe des automorphismes intérieurs* de M. On définit le *groupe des automorphismes extérieurs* de M, noté $\mathrm{Out}(M)$, par

$$\mathrm{Out}(M) := \mathrm{Aut}(M)/\mathrm{Inn}(M).$$

Proposition 4.1. *Soit M un facteur de type II_1 tel que $L^2(M)$ soit séparable en norme $\|.\|_2$, alors* $\mathrm{Aut}(M)$ *est un groupe polonais (i.e. homéomorphe à un espace métrique séparable complet).*

Démonstration. Soit G le sous-groupe de $\mathcal{U}(L^2(M))$ formé des éléments u vérifiant

$$uMu^* = M,$$

nous allons montrer que $G \simeq \mathrm{Aut}(M)$. Soit θ un automorphisme de M, on définit un opérateur u_θ sur $L^2(M)$ par

$$u_\theta(\widehat{x}) = \widehat{\theta(x)}.$$

Comme tout automorphisme d'un facteur de type II_1 préserve la trace (elle est unique, voir [Dix69, Thm III.4.4.3]), θ est unitaire. De plus, pour tous $x, y \in M$,

$$\begin{aligned} u_\theta \pi(x) u_\theta^* \widehat{y} &= u_\theta \pi(x) u_{\theta^{-1}} \widehat{y} \\ &= u_\theta \pi(x) \widehat{\theta^{-1}(y)} \\ &= u_\theta \widehat{x\theta^{-1}(y)} \\ &= \widehat{\theta(x)y} \\ &= \pi(\theta(x))\widehat{y} \end{aligned}$$

et $u_\theta \in G$. L'application qui à θ associe u_θ est continue si $\mathrm{Aut}(M)$ est muni de la topologie de la convergence ponctuelle en norme $\|.\|_2$ et G de la topologie opérateur forte. Il est également clair que G est un sous-groupe fermé de $\mathcal{U}(L^2(M))$. Il suffit donc de montrer que ce dernier groupe est polonais (pour la topologie opérateur forte) pour conclure. Soit donc $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne $\mathcal{H}$. Le groupe topologique $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ est métrisable par la distance

$$d(u,v) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \|u(e_n) - v(e_n)\|.$$

Soient F_k le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$ engendré par $(e_n)_{1\leqslant n\leqslant k}$ et P_k le projecteur sur ce sous-espace. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{U}_k$ l'ensemble des opérateurs unitaires de $\mathcal{H}$ fixant tous les e_n pour $n > k$. Soit $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$, $\xi \in F_k$ de norme 1 et $\varepsilon > 0$. Il existe un entier m tel que

$$\|P_m u(\xi) - u(\xi)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $p := \max(m,k)$ et $\zeta \in F_p$ un vecteur de norme 1 tel que

$$\|\zeta - P_p u(\xi)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il existe un opérateur unitaire v sur F_p tel que $v(\xi) = \zeta$. On prolonge v par l'identité pour obtenir un opérateur $\widetilde{v} \in \mathcal{U}_p$ tel que

$$\|u(\xi) - \widetilde{v}(\xi)\| < \varepsilon.$$

Ainsi, $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_k$ est dense dans $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. Comme $\mathcal{U}_k$ est séparable pour tout k, $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ est séparable, ce qui conclut la preuve. □

La taille du groupe $\mathrm{Out}(M)$ peut être très variable. La première application de la propriété (T) aux algèbres de von Neumann est le théorème 4.2 de A. Connes ([Con80]). Il est à mettre en regard avec le fait que tout groupe topologique localement compact dont tout point admet un système fondamental dénombrable de voisinages peut se plonger dans $\mathrm{Out}(\mathcal{R})$, où $\mathcal{R}$ désigne le facteur hyperfini de type II_1.

Théorème 4.2 (Connes, 80)**.** *Soit M un facteur de type II_1 ayant la propriété (T), alors le groupe* $\mathrm{Out}(M)$ *est dénombrable.*

Démonstration. Fixons $\varepsilon = 1/2$. La propriété (T) implique l'existence d'une partie finie F de M et d'un réel strictement positif δ tels que si ϕ est un automorphisme de M (donc entre autre une application u.c.p.) vérifiant $\|\phi(x) - x\|_2 \leqslant \delta$ pour tout $x \in F$, alors $\|\phi(y) - y\|_2 \leqslant \varepsilon\|y\|_2$ pour tout $y \in M$. Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(M)$ un tel automorphisme, nous allons montrer que ϕ est intérieur. Remarquons que pour tout unitaire $u \in M$,

$$\|\phi(u)u^* - 1\|_2 \leqslant \frac{1}{2}.$$

Soit $\mathcal{C}$ l'enveloppe convexe fermée de $\{\phi(u)u^*, u \in \mathcal{U}(M)\}$ dans M. $\mathcal{C}$ est faiblement compact (car incluse dans la boule unité). Nous allons maintenant nous intéresser à un élément de norme minimale dans $\mathcal{C}$. Son existence est assurée par le lemme suivant.

Lemme 4.3. *L'application $x \mapsto \|x\|_2$ est faiblement semi-continue inférieurement.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite convergeant faiblement vers un élément x, alors

$$\begin{aligned}
\|x\|_2^2 &= \langle x, x\rangle \\
&= \lim\langle x_n, x\rangle \\
&= \lim|\langle x_n, x\rangle| \\
&\leqslant \liminf \|x_n\|_2\|x\|_2
\end{aligned}$$

et $\|x\|_2 \leqslant \liminf \|x_n\|_2$. □

L'application semi-continue inférieurement $\|.\|_2$ admet donc un minimum m dans le convexe compact faible $\mathcal{C}$. Soient x et y deux éléments de $\mathcal{C}$ de norme m et soit $z := (x+y)/2 \in \mathcal{C}$. L'égalité du parallélogramme donne

$$\|x-y\|_2^2 = 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2) - \|x+y\|_2^2 = 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2) - 4\|z\|_2^2 \leqslant 0.$$

Il y a donc un unique élément minimisant la norme $\|.\|_2$ sur $\mathcal{C}$. Notons w cet élément. L'application $x \mapsto \|1-x\|_2$ étant semi-continue inférieurement,

$$\|w-1\| \leqslant \frac{1}{2}$$

et w est non nul. De plus, pour tout $u \in \mathcal{U}(M)$, $\phi(u)wu^*$ est dans $\mathcal{C}$ et est de même norme que w. Par unicité, on a donc, pour tout $u \in \mathcal{U}(M)$,

$$\phi(u)wu^* = w$$

et

$$\begin{aligned} w^*wu &= uw^*\phi(u)^*wu \\ &= uw^*\phi(u^*)\phi(u)wu^*u \\ &= uw^*w. \end{aligned}$$

Ainsi, w^*w est central et, M étant un facteur, il existe un $\lambda > 0$ tel que $w^*w = \lambda.1$. En posant

$$v := \frac{w}{\sqrt{\lambda}}$$

on a alors $\phi = \mathrm{Ad}_v$.

Nous allons maintenant montrer que $\mathrm{Inn}(M)$ est ouvert pour la topologie de la convergence simple en norme $\|.\|_2$. Soit u un unitaire de M et $\phi \in \mathrm{Aut}(M)$ tel que pour tout $x \in F$,

$$\|\phi(x) - \mathrm{Ad}_u(x)\|_2 \leqslant \delta.$$

Alors $\mathrm{Ad}_{u^*} \circ \phi$ est intérieur d'après la première partie de la preuve, donc ϕ est intérieur. Ainsi $\mathrm{Inn}(M)$ et ouvert dans $\mathrm{Aut}(M)$.

Le groupe quotient $\mathrm{Out}(M)$ est donc discret. Si M est un facteur de type II_1 possédant la propriété (T), alors $L^2(M,\tau)$ est séparable en norme $\|.\|_2$. Ainsi, par la proposition 4.1, $\mathrm{Out}(M)$ est également séparable (car polonais), donc dénombrable. □

4.2. **Dénombrabilité du groupe fondamental.** Si M et un facteur de type II_1 muni d'un état tracial fidèle normal τ, on définit son *groupe fondamental*

$$\mathcal{F}(M) := \{\tau(p)/\tau(q) | p,q \in \mathcal{P}(M), pMp \simeq qMq\}.$$

Nous allons cependant utiliser une autre description de ce groupe. Posons

$$M^\infty := M \bar{\otimes} \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N})).$$

Il s'agit d'un facteur de type II_∞ qui possède une trace semi-finie Tr donnée par

$$\mathrm{Tr} := \tau \otimes \mathrm{Tr}_{\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))}.$$

La trace d'un facteur de type II_∞ étant unique à un scalaire près (voir par exemple [Dix69, Thm III.4.4.2]), il existe pour tout automorphisme ϕ de M^∞ un unique $\lambda > 0$, appelé *module de* ϕ, tel que

$$\mathrm{Tr}\circ\phi = \lambda\,\mathrm{Tr}.$$

L'application $\mathrm{mod} : \mathrm{Aut}(M^\infty) \to \mathbb{R}_+^*$ ainsi définie est de façon évidente un morphisme de groupes.

Proposition 4.4. *Soit M un facteur de type II_1, alors*

$$\mathcal{F}(M) = \mathrm{mod}(\mathrm{Aut}(M^\infty)).$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que $\mathcal{F}(M)$ est l'ensemble des réels strictement positifs λ pour lesquels il existe une projection p dans M^∞ de trace λ telle que

$$p(M^\infty)p \simeq M.$$

Procédons maintenant par double inclusion

(1) Soit $\lambda \in \mathcal{F}(M)$ et p un projecteur de M^∞ de trace λ tel qu'il existe un isomorphisme

$$\rho : M \longrightarrow p(M^\infty)p.$$

Comme $\mathrm{Tr}(p\otimes 1) = \infty$ et que M^∞ est un facteur de type II_∞, $p\otimes 1$ est équivalent à 1 et il existe une isométrie partielle $u \in M^\infty$ telle que

$$uu^* = p\otimes 1 \text{ et } u^*u = 1.$$

Posons alors

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} M^\infty & \to & M^\infty\bar{\otimes}\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N})) \\ x & \mapsto & u(\rho\otimes 1)u^* \end{array} \right. .$$

L'application linéaire θ est multiplicative car $u^*u = 1$. Comme elle commute aux involutions, c'est un $*$-homomorphisme. Il s'agit même d'un isomorphisme, d'inverse

$$\theta^{-1} : x \mapsto (\rho\otimes\mathrm{Id})^{-1}(u^*xu).$$

Soit φ une bijection de $\mathbb{N}\otimes\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $\widetilde{\varphi}$ l'isomorphisme d'espaces de Hilbert associé, défini sur les bases canoniques $(e_{i,j})$ et (e_k) par :

$$\widetilde{\varphi}(e_{i,j}) = e_{\varphi(i,j)}.$$

Soit maintenant

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))\bar{\otimes}\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N})) & \to & \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N})) \\ T & \mapsto & \widetilde{\varphi}\circ T\circ\widetilde{\varphi}^{-1} \end{array} \right.$$

l'isomorphisme induit. On observe que Φ préserve la trace :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\Phi(T)) &= \sum_k \langle \Phi(T)e_k, e_k\rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle \Phi(T)e_{\varphi(i,j)}, e_{\varphi(i,j)}\rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle \widetilde{\varphi}(Te_{i,j}), \widetilde{\varphi}(e_{i,j})\rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle Te_{i,j}, e_{i,j}\rangle \\ &= \mathrm{Tr}(T).\end{aligned}$$

Notons Θ la composition de θ et de Φ. Il s'agit d'un automorphisme de M^∞. Pour calculer son module, il suffit de prendre $h \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ non nul et de calculer

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\circ\Theta(1\otimes h) &= \mathrm{Tr}(u(\rho(1)\otimes h)u^*)) \\ &= \mathrm{Tr}(u^*u(p\otimes h)) \\ &= \mathrm{Tr}(p\otimes h) \\ &= \lambda\,\mathrm{Tr}(h) \\ &= \lambda\,\mathrm{Tr}(1\otimes h).\end{aligned}$$

Ainsi $\lambda \in \mathrm{mod}(\mathrm{Aut}(M^\infty))$.

(2) Soit $\lambda \in \mathrm{mod}(\mathrm{Aut}(M^\infty))$ et $\theta \in \mathrm{Aut}(M^\infty)$ de module λ. Soit $q \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ une projection minimale et

$$p := \theta(1\otimes q).$$

On a $\mathrm{Tr}(p) = \lambda\,\mathrm{Tr}(1\otimes q) = \lambda$ et

$$\begin{aligned}q(M^\infty)q &= \theta((1\otimes p)(M^\infty)(1\otimes p)) \\ &= \theta(M\bar{\otimes}(p\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))p)) \\ &\simeq \theta(M\bar{\otimes}\mathbb{C}) \\ &\simeq M.\end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda \in \mathcal{F}(M)$.

□

L'ingrédient essentiel de la démonstration est le lemme suivant.

Lemme 4.5. *Soit M un facteur de type II_1 et $\phi \in \mathrm{Aut}(M^\infty)$ de module 1. Alors il existe $u \in M^\infty$ unitaire et $\rho \in \mathrm{Aut}(M)$ tels que*

$$\phi = \mathrm{Ad}_u \circ(\rho\otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))}).$$

Démonstration. Soit $(e_{i,j})$ le système d'unités matricielles canonique de $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$. On pose, pour tout couple (i,j) d'indices,

$$f_{i,j} := \phi(1 \otimes e_{i,j}).$$

Par hypothèse sur le module de ϕ, on a

$$\mathrm{Tr}(f_{0,0}) = \mathrm{Tr} \circ \phi(1 \otimes e_{0,0}) = \mathrm{Tr}(1 \otimes e_{0,0}).$$

Or, dans un facteur de type II_∞, deux projections sont équivalentes si et seulement si elles ont même trace. Il existe donc une isométrie partielle $v \in M^\infty$ telle que $vv^* = f_{0,0}$ et $v^*v = 1 \otimes e_{0,0}$. Posons

$$u := \sum_j f_{j,0} v(1 \otimes e_{0,j})$$

et calculons

$$\begin{aligned}
u^*u &= \sum_{j,k} (1 \otimes e_{0,j})^* v^* f_{j,0}^* f_{k,0} v(1 \otimes e_{0,k}) \\
&= \sum_j (1 \otimes e_{j,0}) v^* f_{0,0} v(1 \otimes e_{0,j}) \\
&= \sum_j (1 \otimes e_{j,0}) v^* v v^* v(1 \otimes e_{0,j}) \\
&= 1 \otimes \left(\sum_j e_{j,0} e_{0,0}^2 e_{0,j} \right) \\
&= 1 \otimes \left(\sum_j e_{j,j} \right) \\
&= 1 \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))}.
\end{aligned}$$

On vérifie de même que $uu^* = 1 \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))}$. Ainsi u est unitaire et

$$\begin{aligned}
u(1 \otimes e_{i,j})u^* &= \sum_{k,l} f_{k,0} v(1 \otimes e_{0,k} e_{i,j} e_{l,0}) v^* f_{0,l} \\
&= f_{i,0} v(1 \otimes e_{0,0}) v^* f_{0,j} \\
&= f_{i,0} f_{0,0}^2 f_{0,j} \\
&= f_{i,j}.
\end{aligned}$$

Donc, $Ad_{u^*} \circ \phi(1 \otimes x) = 1 \otimes x$ pour tout $x \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$. Posons, pour tout $a \in M$,

$$R(a) := \mathrm{Ad}_{u^*} \circ \phi(a \otimes 1).$$

Il s'agit d'un $*$-homomorphisme vérifiant, pour tout $x \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$,

$$R(a)(1 \otimes x) = \mathrm{Ad}_{u^*} \circ \phi(a \otimes x) = (1 \otimes x)R(a). \tag{3}$$

Soit $(b_i)_{i\in I}$ une base algébrique de M et $a \in M$. On décompose $R(a)$ (de façon unique) sous la forme

$$R(a) = \sum_{i\in I} b_i \otimes x_i$$

avec $x_i \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ pour tout $i \in I$. L'équation (3) implique que pour tout $x \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$,

$$\sum_{i\in I} b_i \otimes [x_i, x] = 0.$$

Par liberté de la famille (b_i), $[x_i, x] = 0$ quels que soient $i \in I$ et $x \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$. Comme $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ est un facteur, on en déduit que x_i est un homothétie pour tout $i \in I$ et que

$$R(a) = \rho(a) \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))}$$

pour un certain $\rho \in \mathrm{Aut}(M)$, ce qui conclut la preuve. □

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat annoncé.

Théorème 4.6 (Connes, 80)**.** *Soit M un facteur de type II_1 possédant la propriété (T), alors $\mathcal{F}(M)$ est dénombrable.*

Démonstration. Rappelons que si M possède la propriété (T), $M\bar{\otimes}M$ la possède également (voir la proposition 2.9). Nous allons donc simplement construire une injection de $\mathcal{F}(M)$ dans $\mathrm{Out}(M\bar{\otimes}M)$ et conclure grâce au théorème 4.2. Pour tout $\lambda \in \mathcal{F}(M)$ choisissons un automorphisme ϕ_λ de M^∞ de module λ. Comme $\phi_\lambda \otimes \phi_{\lambda^{-1}}$ est un automorphisme de $(M\bar{\otimes}M)^\infty$ de module 1, on peut d'après le lemme 4.5 lui associer un élément $\beta_\lambda \in \mathrm{Out}(M^\infty\bar{\otimes}M^\infty)$, à savoir la classe de l'automorphisme $\rho \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))}$ associé. Il suffit maintenant de montrer que l'on peut se contenter de prendre la classe α_λ de ρ dans $\mathrm{Out}(M\bar{\otimes}M)$ et obtenir une application bien définie. Pour cela, supposons que

$$\rho \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))} = \mathrm{Ad}_u$$

pour un certain $u \in M\bar{\otimes}\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$. En appliquant l'égalité précédente à un élément de la forme $x \otimes 1$ (pour $x \in M$), on obtient

$$(\rho(x) \otimes 1)u = u(x \otimes 1).$$

Soit $\omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_*$ telle que $(\imath \otimes \omega)(u) \neq 0$, on a alors

$$\rho(x)(\imath \otimes \omega)(u) = (\imath \otimes \omega)(u)x.$$

Posons $y := (\imath \otimes \omega)(u) \in M$, ce qui précède ainsi qu'un raisonnement analogue donnent

$$\begin{aligned} \rho(x)y &= yx \\ y^*\rho(x) &= xy^* \end{aligned}$$

pour tout $x \in M$. Ainsi, y^*y est central et comme M est un facteur, il existe un $\gamma > 0$ tel que $y^*y = \gamma.1$. Alors, en posant $v := \frac{y}{\sqrt{\gamma}}$, on a

$$\rho = \mathrm{Ad}_v.$$

Ainsi, l'application

$$\Psi : \lambda \mapsto \alpha_\lambda$$

est bien définie. Si $\mu \neq \lambda$, l'automorphisme $\phi_\mu^{-1} \circ \phi_\lambda$ est extérieur (tout automorphisme intérieur est de module 1), donc $(\phi_\mu \otimes \phi_{\mu^{-1}})^{-1} \circ (\phi_\lambda \otimes \phi_{\lambda^{-1}})$ est extérieur. Ainsi, $\rho_\mu \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))}$ et $\rho_\lambda \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))}$ ne sont pas conjugués par un automorphisme intérieur et l'application Ψ est injective. □

Nous disposons donc désormais d'une vaste classe d'exemples de facteur de type II_1 dont le groupe fondamental est dénombrable, à savoir les facteurs associés à tous les groupes discrets ICC possédant la propriété (T). Cependant, calculer explicitement un tel groupe fondamental reste un problème difficile (voir par exemple [Popo6]).

Références

[BdlHV08] B. Bekka, P. de la Harpe et A. Valette – *Kazhdan's property (T) for locally compact groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.

[BO08] N. P. Brown et N. Ozawa – *C*-algebras and finite dimensional approximation*, AMS, 2008.

[Bur91] M. Burger – « Kazhdan constants for $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ », *J. Reine Angew. Math.* **413** (1991), p. 36–67.

[CCM97] G. Christol, A. Cot et C.-M. Marle – *Topologie*, Ellipses, 1997.

[CJ85] A. Connes et V. F. R. Jones – « Property (T) for von Neumann algebras », *Bull. London Math. Soc.* **17** (1985), no. 1, p. 57–62.

[Con80] A. Connes – « A factor of type II_1 with countable fundamental group », *J. Operator Theory* **4** (1980), no. 1, p. 151–153.

[Dix69] J. Dixmier – *Les algèbres d'opérateurs sur l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann)*, Gauthier-Villars, 1969.

[Jol05] P. Jolissaint – « On property (T) for pairs of topological groups », *Ens. Math.* **51** (2005), no. 2, p. 31–45.

[Kaz67] D. Kazhdan – « Connection of the dual space of a group with the structure of its subgroups », *Funct. Anal. Appl.* **1** (1967), p. 63–65.

[Mar82] G. Margulis – « Finitely additive invariant measures on Euclidian spaces », *Ergodic Th. and Dynam. Sys.* **2** (1982), p. 383–396.

[MvN37] F. J. Murray et J. von Neumann – « On rings of operators II », *Trans. Amer. Math. Soc.* **41** (1937), no. 2, p. 208–248.

[Popo6] S. Popa – « On a class of II_1 factors with Betti numbers invariants », *Ann. of Math.* **163** (2006), p. 809–899.

[Sha99] Y. Shalom – « Bounded generation and Kazhdan's property (T) », *Publ. Math. IHES* **90** (1999), p. 145–168.