ANALYSE HARMONIQUE SUR LES GROUPES QUANTIQUES

AMAURY FRESLON

Résumé. Le but de cet exposé est de présenter les résultats de [DCFY14], obtenus en collaboration avec K. De Commer et M. Yamashita. Nous avons choisi d'adopter le point de vue des séries de Fourier et d'éviter toute définition formelle des groupes quantiques discrets.

1. Des séries de Fourier aux propriétés d'approximation

1.1. **Convergence des séries de Fourier.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue 2π-périodique. On souhaite approcher f avec les contraintes suivantes :

- On n'a sur f qu'une donnée "spectrale", c'est-à-dire la suite de ses coefficients de Fourier $(\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$.
- On ne peut calculer que des sommes finies.
- On veut un "contrôle" sur les approximations.

Il est naturel de commencer par s'intéresser aux sommes partielles de la série de Fourier de f :

$$S_n(f) : t \mapsto \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikt}.$$

On dispose alors d'un résultat de convergence en moyenne quadratique bien connu.

Théorème 1.1 (Parseval). *Pour tout $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\|S_n(f) - f\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Remarque 1.2. L'inégalité de Bessel donne de plus un contrôle sur les sommes partielles : $\|S_n(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Toutefois, la convergence en moyenne quadratique est pour nous une notion trop faible. Nous voudrions une convergence utilisant une meilleur norme, par exemple la norme uniforme $\|.\|_\infty$. Cela n'est pas possible pour $S_n(f)$ sans hypothèse supplémentaire sur f (par exemple f de classe C^1 par morceaux). On peut par contre changer le procédé de sommation en posant :

$$\sigma_n(f) : t \mapsto \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)(t).$$

On a alors un résultat de convergence uniforme :

Théorème 1.3 (Fejèr). *Pour tout $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

De plus, on dispose, comme dans la Remarque 1.2, d'un contrôle sur la norme de $\sigma_n(f)$. En effet, on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\sigma_n(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty. \tag{1}$$

1.2. **Pondération des séries de Fourier et moyennabilité.** Nous allons réécrire le résultat précédent d'une façon qui se prête mieux à la généralisation. En notant S^1 le cercle unité, nous utiliserons désormais l'isomorphisme naturel $C_{2\pi}(\mathbb{R}) \simeq C(S^1)$ pour nous ramener à des fonctions sur S^1, nous permettant d'exploiter la topologie compacte de cet espace.

Remarque 1.4. Les monômes trigonométriques $t \mapsto e^{ikt}$ peuvent alors être vus comme les coefficients des représentations irréductibles de S^1. Ils peuvent également être vus comme les images des éléments $k \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}[\mathbb{Z}]$ par la dualité de Pontryagin $\widehat{\mathbb{Z}} \simeq S^1$.

Posons $\varphi_n(k) = \max\left(0, 1 - \dfrac{|k|}{n+1}\right)$. On peut alors exprimer $\sigma_n(f)$ comme une somme de Fourier pondérée :

$$\sigma_n(f)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(k)\widehat{f}(k)e^{ikt}.$$

Avec cette description, on peut décomposer l'action de l'opérateur $\sigma_n : C(S^1) \to C(S^1)$ de la façon suivante :

(1) On associe à f sa série de Fourier $\widehat{f} \in C_0(\widehat{S^1}) \simeq C_0(\mathbb{Z})$.

(2) On multiplie $\varphi_n = (\varphi_n(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\widehat{f} = (\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ coefficient par coefficient (ce n'est pas un produit de convolution). Si $\widehat{f}$ et φ_n sont vues comme des matrices infinies agissant par convolution sur $\ell^2(\mathbb{Z})$, cette multiplication est leur *produit de Schur* $\varphi_n \times \widehat{f}$ (i.e. le produit coefficient par coefficient dans la base canonique).

(3) On effectue la transformée de Fourier inverse de $\varphi_n \times \widehat{f}$.

À cause du point (2), un tel opérateur est appelé *multiplicateur de Fourier* ou *multiplicateur de Schur* (parfois *multiplicateur de Herz-Schur*). Nous pouvons maintenant reformuler le Théorème de Féjèr en termes d'existence de multiplicateurs de Fourier avec de "bonnes" propriétés d'approximation.

Théorème 1.5 (Féjèr)**.** *Il existe une suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de multiplicateurs de Fourier sur $C(S^1)$ satisfaisant :*

- *Le rang de σ_n est fini pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *Pour tout $f \in C(S^1)$, $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*
- *L'application σ_n est* complètement positive *pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Le troisième point est une très forte amélioration de l'inégalité (1).

Définition 1.6. Soit A une C*-algèbre. Une matrice $U \in M_N(A)$ est dite positive s'il existe une matrice V telle que $U = V^*V$. Une application linéaire $T : A \to A$ est dite complètement positive si pour tout entier N et toute matrice $U = (u_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant N} \in M_N(A)$ positive, la matrice $(T(u_{ij}))_{1\leqslant i,j\leqslant N}$ est encore positive.

Il est facile de montrer que si $T : A \to A$ est une application linéaire positive, alors $\|T\| = \|T(1)\|$. Puisque $\sigma_n(1) = 1$, on en déduit que pour tout entier N et toute matrice $(f_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant N} \in M_N(C(S^1))$,

$$\|(\sigma_n(f_{ij}))_{1\leqslant i,j\leqslant N}\| \leqslant \|(f_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant N}\|. \tag{2}$$

Remarque 1.7. La norme utilisée ici est la norme d'opérateur dans $\mathcal{B}(L^2(S^1)^{\otimes N})$ qui contient naturellement $M_N(C(S^1))$.

1.3. **Propriétés d'approximation.** En théorie géométrique des groupes, le Théorème 1.5 peut se reformuler de la façon suivante : le groupe $\mathbb{Z}$ est *moyennable*. Pour cela il suffit de remarquer que, via la dualité de Pontryagin entre S^1 et $\mathbb{Z}$, $C(S^1)$ s'identifie à la *C^*-algèbre réduite* de $\mathbb{Z}$.

Définition 1.8. Soit Γ un groupe discret. On considère sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\Gamma)$ les opérateurs $(\lambda(g))_{g\in\Gamma}$ définis par

$$\lambda(g)\delta_h = \delta_{gh}.$$

La $\mathbb{C}$-algèbre engendrée par ces opérateurs est notée $\mathbb{C}[\Gamma]$ et appelée *l'algèbre de groupe* de Γ. L'adhérence de $\mathbb{C}[\Gamma]$ dans $\mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$ pour la norme d'opérateur est appelée la *C^*-algèbre réduite* de Γ et notée $C_r^*(\Gamma)$.

Dans ce contexte, un multiplicateur de Fourier est une application linéaire $T : C_r^*(\Gamma) \to C_r^*(\Gamma)$ telle que pour tout $g \in \Gamma$, il existe $\varphi(g) \in \mathbb{C}$ tel que

$$T(\lambda(g)) = \varphi(g)\lambda(g).$$

Remarque 1.9. De même que les monômes trigonométriques peuvent être vus comme des représentations irréductibles, les opérateurs $\lambda(g)$ sont les représentations irréductibles d'un groupe *quantique* compact $\widehat{\Gamma}$ en dualité de Pontryagin généralisée avec Γ.

Définition 1.10. Un groupe discret Γ est moyennable s'il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de multiplicateurs de Fourier sur $C_r^*(\Gamma)$ satisfaisant :

- Le rang de T_n est fini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Pour tout $x \in C_r^*(\Gamma)$, $\|T_n(x) - x\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- L'application T_n est complètement positive pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Malheureusement, de nombreux groupes intéressants ne sont pas moyennables, à commencer par les groupes libres. On souhaite donc définir une notion plus faible préservant les mêmes caractéristiques : approximation en norme, par des multiplicateurs de Fourier de rang fini, en gardant un bon contrôle sur la norme. Ces considérations mènent à la définition de la *moyennabilité faible*.

Définition 1.11. Un groupe discret Γ est faiblement moyennable s'il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de multiplicateurs de Fourier sur $C_r^*(\Gamma)$ satisfaisant :

- Le rang de T_n est fini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Pour tout $x \in C_r^*(\Gamma)$, $\|T_n(x) - x\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- La quantité $K = \limsup_n \|T_n\|_{cb}$ est finie.

De plus, la borne inférieure des constantes K sur l'ensemble des suites $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant les hypothèses est notée $\Lambda_{cb}(\Gamma)$ et appelée *constante de Cowling-Haagerup* de Γ.

Le troisième point utilise la *norme complètement bornée*. Si $T^{(N)}$ désigne l'extension d'une application linéaire $T : A \to A$ à l'algèbre des matrices $M_N(A)$, alors

$$\|T\|_{cb} = \sup_N \|T^{(N)}\|.$$

Il s'agit donc d'un affaiblissement de la moyennabilité. Il existe de nombreux exemples de groupes faiblement moyennables, notamment les groupes hyperboliques (N. Ozawa dans [Oza08]) et les groupes agissant proprement sur des complexes cubiques CAT(0) de dimension finie (E. Guentner et N. Higson dans [GH10]). La constante de Cowling-Haagerup a été calculée dans certains cas par J. de Cannière, M. Cowling et U. Haagerup dans [dCH85] et [CH89] :

- $\Lambda_{cb}(\mathbb{F}_n) = 1$.
- Si Γ est un réseau dans $SO(n,1)$ ou dans $SU(n,1)$, alors $\Lambda_{cb}(\Gamma) = 1$.
- Si Γ est un réseau dans $Sp(n,1)$, alors $\Lambda_{cb}(\Gamma) = 2n-1$.
- Si Γ est un réseau dans $F_{4(-20)}$, alors $\Lambda_{cb}(\Gamma) = 21$.

2. Propriétés d'approximations pour les groupes quantiques

Nous allons maintenant aborder des exemples qui ne sont plus des groupes compacts ou discrets mais des *groupes quantiques*. Plutôt que d'introduire la théorie abstraite de ces objets, nous allons étudier un exemple particulièrement important : les versions quantiques du groupe $SU(2)$, construites par S.L. Woronowicz dans [Wor87]. Dans toute la suite, on fixe un réel non nul $-1 \leqslant q \leqslant 1$.

2.1. Déformations de $SU(2)$. Considérons le produit tensoriel d'espaces de Hilbert $H = \ell^2(\mathbb{N}) \otimes \ell^2(\mathbb{Z})$. On considère, pour $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $e_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ définie par $e_k(m) = 1$ si $k = m$ et $e_k(m) = 0$ sinon. On notera également e_k la restriction à $\mathbb{N}$ de cette fonction. On définit sur H deux opérateurs linéaires bornés α et γ de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha(e_n \otimes e_k) & = & \delta_{n\neq 0}\sqrt{1-q^{2n}}\,(e_{n-1} \otimes e_k) \\ \gamma(e_n \otimes e_k) & = & q^n\,(e_n \otimes e_{k-1}) \end{array} \right.$$

Définition 2.1. On note $\mathcal{A}_q$ l'algèbre engendrée par α, α^*, γ et γ^*. L'adhérence de $\mathcal{A}_q$ dans $\mathcal{B}(H)$ pour la norme d'opérateur est une C*-algèbre notée A_q.

Remarque 2.2. On peut montrer que la C*-algèbre A_q est toujours nucléaire et même de type I. Cet objet ne semble donc pas intéressant du point de vue des propriétés d'approximation. Cependant, nous allons nous intéresser aux propriétés utilisant des multiplicateurs de Fourier spécifiques, ce qui modifie considérablement le problème.

On peut montrer que $\mathcal{A}_q$ est la $\mathbb{C}$-algèbre involutive universelle engendrée par deux éléments a et c satisfaisant les relations

$$\left\{ \begin{array}{ccc} ac & = & qca \\ ac^* & = & qc^*a \\ cc^* & = & c^*c \\ a^*a + c^*c & = & 1 \\ aa^* + q^2cc^* & = & 1 \end{array} \right.$$

via l'unique morphisme d'algèbres involutives envoyant a sur α et c sur γ. Ces relations peuvent s'écrire de façon plus synthétique sous la forme

$$u^*u = \mathrm{Id}_{M_2(A_q)} = uu^*,$$

où

$$u = \begin{pmatrix} a & -qc^* \\ c & a^* \end{pmatrix}$$

En particulier, pour $q = 1$, on obtient l'algèbre universelle engendrée par les coefficients d'une matrice unitaire, qui s'interprète naturellement à l'aide du groupe $SU(2)$.

Proposition 2.3. *La C*-algèbre A_1 est isomorphe à l'algèbre $C(SU(2))$ des fonctions continues sur le groupe $SU(2)$. Cet isomorphisme se restreint en un isomorphisme entre l'algèbre $\mathcal{A}_1$ et l'algèbre des* fonctions représentatives *sur $SU(2)$.*

La Proposition 2.3 suggère de penser à A_q comme à une déformation de $C(SU(2))$, d'où la notation courante $A_q = C(SU_q(2))$.

Remarque 2.4. Les formules

$$\begin{cases} \Delta_q(\alpha) &= \alpha\otimes\alpha - q\gamma^*\otimes\gamma \\ \Delta_q(\gamma) &= \gamma\otimes\alpha + \alpha^*\otimes\gamma \end{cases}$$

définissent un unique morphisme de C*-algèbres $\Delta_q : A_q \to A_q \otimes A_q$ qui fait de la paire (A_q, Δ_q) un *groupe quantique compact* au sens de [Wor98]. L'isomorphisme avec $C(SU(2))$ pour $q = 1$ transporte alors cette structure de groupe quantique sur la structure de groupe de $SU(2)$, justifiant la notation $SU_q(2)$. Remarquons que la définition de Δ_q a pour but de faire de u une représentation de $SU_q(2)$, appelée *représentation fondamentale*.

Pour définir des multiplicateurs de Fourier sur A_q, il nous faut une graduation remplaçant celle donnée par les éléments du groupe discret Γ dans la section précédente. Cette graduation est donnée par le résultat suivant :

Proposition 2.5. *Il existe des sous-espaces vectoriels $\left(\mathcal{A}_q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que*

- $\mathcal{A}_q = \cup_n \mathcal{A}_q^n$,
- $\mathcal{A}_q^n\mathcal{A}_q^m \subset \bigoplus_{j=0}^{\min(n,m)} \mathcal{A}_q^{n+m-2j}$.

Démonstration. Il s'agit de calculs élémentaires utilisant les relations décrites plus haut entre les opérateurs α et γ. □

Remarque 2.6. La relation (**??**) rappelle la règle du produit tensoriel de représentations irréductibles de $SU(2)$. Ce n'est pas un hasard. En effet, $SU_q(2)$ a la même théorie des représentations que $SU(2)$ et les sous-espaces $\mathcal{A}_q^n$ correspondent aux combinaisons linéaires de coefficients de la représentation irréductible indexée par n (ou $n/2$ suivant les conventions).

Notre objectif est de comprendre les propriétés d'approximations associées à cette graduation. Plus précisément, un multiplicateur de Fourier sur A_q sera une application linéaire $T : A_q \to A_q$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\varphi_n \in \mathbb{C}$ satisfaisant

$$T_{|\mathcal{A}_q^n} = \varphi(n)\mathrm{Id}_{\mathcal{A}_q^n}.$$

Remarque 2.7. La véritable généralisation d'un multiplicateur de Fourier dans ce cadre est donnée par une famille de matrices $T_n \in M_{d(n)}$, chacune agissant sur l'espace $\mathcal{A}_q^n$ après son identification à $\mathbb{C}^{d(n)}$. Toutefois, nous ne nous intéressons qu'aux multiplicateurs *centraux*, c'est-à-dire tels que toutes les matrice T_n soient scalaires.

Le premier résultat dans cette direction, négatif, est obtenu en combinant [Ban97], [BDRV06] et [Fre13].

Théorème 2.8. *La C^*-algèbre A_q n'est pas moyennable par rapport à la graduation $(\mathcal{A}_q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Se pose alors la question de la moyennabilité faible, résolue dans [DCFY14].

Théorème 2.9 (F., F.-De Commer-Yamashita)**.** *La C^*-algèbre A_q est faiblement moyennable par rapport à la graduation $(\mathcal{A}_q^n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, sa constante de Cowling-Haagerup est égale à* 1.

Nous allons maintenant expliquer la preuve de ce résultat, qui passe par une autre propriété d'approximation : la *propriété de Haagerup*.

2.2. **La propriété de Haagerup.** Avant de construire une suite de multiplicateurs de Fourier satisfaisant les hypothèses de la moyennabilité faible, nous allons construire une suite auxiliaire donnant la propriété de Haagerup grâce à [DCFY14, Prop 9]

Théorème 2.10 (F.-De Commer-Yamashita)**.** *Il existe une famille de multiplicateurs de Fourier $(T_t)_{t\in(0,1)}$ sur A_q déterminés par $(T_t)_{|\mathcal{A}_q^n} = \varphi_t(n)\mathrm{Id}_{\mathcal{A}_q^n}$ et telle que :*
- *Pour tout $t \in (0,1)$, $\varphi_t(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*
- *Pour tout $x \in A_q$, $\|T_t(x) - x\| \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 0$.*
- *Pour tout $t \in (0,1)$, l'application linéaire T_t est complètement positive.*

Pour démontrer ce résultat, nous allons construire des multiplicateurs qui sont des *opérateurs de convolution*, c'est-à-dire de la forme

$$T_t = (\imath \otimes \psi_t) \circ \Delta_q.$$

Une telle application est complètement positive dès que la forme linéaire ψ_t est *positive*. Une technique pour construire de telles formes linéaires est de prendre une représentation de C^*-algèbre π sur un espace de Hilbert K et un vecteur $\xi \in K$. Alors, la formule

$$\psi : x \mapsto \langle \pi(x)\xi, \xi \rangle$$

définit une forme linéaire positive. C'est cette stratégie que nous allons employer.

Preuve des deux premières propriétés. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on dispose d'une *représentation d'algèbre* π_z de $\mathcal{A}_q$ sur un espace de Hilbert K (lié à la *sphère de Podleś standard* S_q^2) et d'un vecteur $\xi \in K$ ne dépendant pas de z tels que, en posant, $\psi_z : x \mapsto \langle \pi_z(x)\xi, \xi\rangle$, T_z est un multiplicateur de Fourier déterminé par

$$\varphi_z(k) = \frac{\mu_k(|q|^z + |q|^{-z})}{\mu_k(|q| + |q|^{-1})},$$

où μ_k est le k-ième *polynôme de Tchebyshev* de seconde espèce. Il est facile de vérifier que pour $t \in (0,1)$, ces multiplicateurs vérifient les deux premiers points du Théorème 2.10. □

Remarque 2.11. Les polynômes de Tchebyshev sont intimement liés à la théorie des représentations de $SU_q(2)$. Leur apparition ici n'est donc pas surprenante.

Il reste à prouver que les applications T_t sont complètement positives. Cependant, les représentations π_z ne sont pas des représentations de C*-algèbres. En effet $\pi_z(x)^*$ n'est en général pas égal à $\pi_z(x^*)$ et il n'est par conséquent pas possible d'appliquer notre stratégie. Pour remédier à cela, nous allons modifier le produit scalaire de K afin que, pour $t \in (0,1)$, π_t devienne une représentation de C*-algèbre.

Lemme 2.12 (Voigt). *Pour tout $t \in (0,1)$ il existe un produit scalaire $\langle .,. \rangle_t$ sur K tel que la représentation induite par π_t sur la complétion K_t de K pour ce produit scalaire soit une représentation de C*-algèbre. De plus, la forme linéaire ψ_t sur K se prolonge à K_t.*

Remarque 2.13. Le Lemme 2.12, originellement [Voi11, Lem 4.3], est intimement lié à la conjecture de Baum-Connes pour le groupe quantique $SU_q(2)$. Plus précisément, il s'agit de l'ingrédient technique essentiel pour prouver que la sphère de Podleś standard S_q^2 est équivalente, en KK-théorie équivariante par le double de Drinfel'd de $SU_q(2)$, à $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Fin de la preuve du Théorème 2.10. Par le Lemme 2.12, l'application T_t est complètement positive pour tout $t \in (0,1)$. Les deux premières propriétés étant satisfaites par $(T_t)_{t\in(0,1)}$, la preuve est terminée. □

2.3. **Moyennabilité faible.** L'idée fondamentale pour prouver la moyennabilité faible est de tronquer les multiplicateurs de Fourier T_t du Théorème 2.10 par des projections de rang fini. En effet, le résultat suivant est évident :

Lemme 2.14. *Supposons que pour tout $t \in (0,1)$, l'application T_t soit limite en norme $\|.\|_{cb}$ d'une suite de multiplicateurs de Fourier de rang fini. Alors, A_q est faiblement moyennable et sa constante de Cowling-Haagerup est égale à 1.*

Il existe des candidats naturels pour ces approximations de rang fini. Notons P_k la projection de $\mathcal{A}_q$ sur $\mathcal{A}_q^k$. L'opérateur T_t peut alors s'écrire :

$$T_t = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_t(k) P_k.$$

Remarque 2.15. Cette description rappelle que pour $x \in A_q$, la famille d'éléments $(P_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est en un sens la transformée de Fourier de x. Ceci peut être rendu rigoureux en introduisant la notion de *groupe quantique discret*.

On est donc mené à poser, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{t,n} = \sum_{k=0}^{n} \varphi_t(k) P_k. \tag{3}$$

Il est clair que les multiplicateurs de Fourier $T_{t,n}$ sont de rang fini et que, par convergence ponctuelle de $T_{t,n}$ vers T_t quand $n \to \infty$,

$$\|T_{t,n}(x) - x\| \underset{(t,n)\to(1,+\infty)}{\longrightarrow} 0$$

pour tout $x \in A_q$. Il reste donc à montrer que la convergence précédente a également lieu en norme $\|.\|_{cb}$. Il existe deux stratégies pour prouver ce résultat de convergence.

2.3.1. *Première stratégie.* Il est clair que pour tout $t \in (0,1)$, $\varphi_t(k)$ décroît exponentiellement avec k. Il suffit donc de montrer que $\|P_k\|_{cb}$ croît suffisamment lentement pour obtenir la convergence normale de la série (3), ce qui est suffisant pour conclure. Un tel contrôle a été établi dans [Fre13, Thm 5.4].

Théorème 2.16 (F.). *Il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré 2 et une fonction $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout q satisfaisant $|q| \leqslant 1/\sqrt{3}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\|P_k\|_{cb} \leqslant f(q) P(k)$$

sur A_q.

Remarque 2.17. Ce résultat découle d'une version complètement bornée des *inégalités de Haagerup* pour le groupe libre et est donc lié à la *propriété de décroissance rapide* (ou propriété RD).

La combinaison du Théorème 2.16 et du Théorème 2.10 donne, via le Lemme 2.14, une preuve du Théorème 2.9. Toutefois, le résultat n'est obtenu que pour $|q| \leqslant 1/\sqrt{3}$, ce qui n'est pas pleinement satisfaisant. Nous allons donc maintenant donner une autre preuve, fonctionnant pour tout $q \in (-1,1)$.

2.3.2. *Seconde stratégie.* La seconde stratégie, utilisée dans [DCFY14], s'inspire d'une idée de N. Ozawa développée dans [BO08]. Donnons d'abord une extension holomorphe de la famille d'applications linéaires T_t qui est une sorte d'analogue de la famille holomorphe de représentations uniformément bornées construite par T. Pytlik et R. Swarcz pour le groupe libre dans [PS86].

Proposition 2.18. *Pour tout $z \in \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}, -1 \leqslant \Re(z) \leqslant 1\}$, il existe une application linéaire complètement bornée $Q_z : A_q \to A_q$ telle que :*

- *L'application $z \mapsto Q_z$ est holomorphe de $\mathcal{D}$ dans l'espace de Banach des applications complètement bornées de A_q dans elle-même muni de la norme $\|.\|_{cb}$.*
- *Pour tout $t \in (0,1)$, Q_t est un multiple positif (non nul) de T_t.*

Démonstration. De nouveau, les applications linéaires Q_z vont êtres construites comme opérateurs de convolution. Il suffit par conséquent de construire une famille holomorphe de formes linéaires bornées qui, pour t réel, sont multiples des formes linéaires ψ_t. Rappelons tout d'abord la notation des *q-coefficients binomiaux* :

$$(x;q)_n = (1-x)(1-xq)\dots(1-xq^{n-1}).$$

On définit une suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$p_n(z) = \frac{q^n}{\sqrt{(q^2;q^2)_n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^2;q^2)_n}{(q^2;q^2)_k (q^2;q^2)_{n-k}} q^{z(n-2k)}.$$

Les polynômes p_n sont reliés aux *q-polynômes de Hermite* et en utilisant la relation de récurrence de ces derniers, il est facile de prouver que pour $z \in \mathcal{D}$, le vecteur

$$\eta_z = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(z) e_n \in \ell^2(\mathbb{N})$$

est propre pour α, avec $q^z + q^{-z}$ comme valeur propre. Alors, l'équation

$$\theta_z(x) = \langle x\eta_z, \eta_{\overline{z}}\rangle$$

définit une famille holomorphe de forme linéaires bornées sur la C*-algèbre $C^*(\alpha) \subset A_q$ engendrée par α. Pour étendre ces formes linéaires à A_q, considérons l'isométrie $V : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}) \otimes \ell^2(\mathbb{Z})$ définie par $V(e_n) = e_n \otimes e_0$. Alors, l'application linéaire

$$\mathbb{E} : x \mapsto \imath(VxV^*),$$

définit une *espérance conditionnelle* de A_q sur $C^*(\alpha)$ (ici $\imath$ désigne l'inclusion de cette dernière C*-algèbre dans A_q). Des calculs élémentaires montrent ensuite que $Q_z = (\imath \otimes [\theta_z \circ \mathbb{E}]) \circ \Delta_q$ satisfait toutes les propriétés nécessaires. □

Le reste de la preuve repose alors sur un simple argument d'analyse complexe. Il faut toutefois d'abord savoir que la convergence a lieu au moins pour de petites valeurs de t.

Lemme 2.19. *Pour $0 < t < 1/3$, la suite $(T^3_{t,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norme $\|.\|_{cb}$ vers T^3_t.*

Remarque 2.20. Contrairement au Théorème 2.16, le Lemme 2.19 ne repose que sur une majoration élémentaire de $\|P_k\|_{cb}$. Cette majoration est en fait exponentielle, mais croît moins vite que $\varphi_t(k)$ tant que $0 < t < 1/3$.

Preuve du Lemme 2.14. Soit M_{cb} l'espace de Banach des multiplicateurs de Fourier complètement bornés sur A_q muni de la norme $\|.\|_{cb}$ et soit M^0_{cb} l'adhérence du sous-espace engendré par les multiplicateurs de rang fini. Considérons l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & M_{cb} \\ z & \mapsto & Q^3_z \end{array} \right.$$

D'après le Lemme 2.19, $\Phi(t) = Q_t^3 \in M_{cb}^0$ pour tout $0 < t < 1/3$. Considérons l'espace de Banach quotient $N = M_{cb}/M_{cb}^0$ et l'application quotient

$$\widetilde{\Phi} : (0,1) \longrightarrow N$$

D'après ce qui précède, $\widetilde{\Phi}$ est une application holomorphe identiquement nulle sur $(0,1/3)$. Une telle application est nécessairement identiquement nulle sur tout $\mathcal{D}$. En particulier, pour tout $t \in (0,1)$ T_t^3, étant un multiple de Q_t^3, est limite de multiplicateurs de Fourier rang fini. $\square$

3. Applications

Nous allons présenter deux applications de ces résultats. Le premier est une extension à une large famille de groupes quantiques compact, le second décrit certaines structures des algèbres de von Neumann associées.

3.1. Équivalence monoïdale. À tout groupe quantique compact $\mathbb{G}$ on peut associer une "C*-algèbre réduite" $C_{\text{red}}(\mathbb{G})$ qui est munie d'une filtration canonique. Les espaces de cette filtration sont indexés par les classes d'équivalence de représentations irréductibles de $\mathbb{G}$. Soient donc $\mathbb{G}_1$ et $\mathbb{G}_2$ deux groupes quantiques compacts et soient $(\mathcal{A}_{\mathbb{G}_1}^{\alpha})_{\alpha \in \text{Irr}(\mathbb{G}_1)}$ et $(\mathcal{A}_{\mathbb{G}_2}^{\beta})_{\beta \in \text{Irr}(\mathbb{G}_2)}$ leurs filtrations canoniques. Supposons que l'on dispose d'une bijection $\psi : \text{Irr}(\mathbb{G}_1) \to \text{Irr}(\mathbb{G}_2)$. Alors, à tout multiplicateur de Fourier T sur $C_{\text{red}}(\mathbb{G}_1)$ déterminé par

$$T_{|\mathcal{A}_{\mathbb{G}_1}^{\alpha}} = \varphi(\alpha)\text{Id}_{\mathcal{A}_{\mathbb{G}_1}^{\alpha}}$$

on peut associer le multiplicateur de Fourier T^{ψ} sur $C_{\text{red}}(\mathbb{G}_2)$ déterminé par

$$T^{\psi}_{|\mathcal{A}_{\mathbb{G}_2}^{\beta}} = \varphi \circ \psi^{-1}(\beta)\text{Id}_{\mathcal{A}_{\mathbb{G}_2}^{\beta}}.$$

Toutefois, il est impossible en général de comparer les normes complètement bornées de ces opérateurs. Pour ce faire, il faut que la bijection ψ ait plus de propriétés. C'est ici qu'intervient la notion d'*équivalence monoïdale*. L'idée est que l'application ψ doit s'étendre en une équivalence de catégories monoïdales entre les catégories de représentations de dimension finie de $\mathbb{G}_1$ et $\mathbb{G}_2$. Nous allons toutefois donner une définition plus concrète, introduite par J. Bichon, A. de Rijdt et S. Vaes dans [BDRV06].

Définition 3.1. Une équivalence monoïdale entre $\mathbb{G}_1$ et $\mathbb{G}_2$ est la donnée d'une bijection ψ : $\text{Irr}(\mathbb{G}_1) \to \text{Irr}(\mathbb{G}_2)$ envoyant la représentation triviale sur la représentation triviale et d'isomorphismes

$$\Psi : \text{Hom}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n, \beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_m) \to \text{Hom}(\psi(\alpha_1) \otimes \cdots \otimes \psi(\alpha_n), \psi(\beta_1) \otimes \cdots \otimes \psi(\beta_m))$$

tels que $\Psi(\text{Id}) = \text{Id}$ et pour tous morphismes S et T,

$$\begin{aligned} \Psi(S \circ T) &= \Psi(S) \circ \Psi(T) \\ \Psi(S^*) &= \Psi(S)^* \\ \Psi(S \otimes T) &= \Psi(S) \otimes \Psi(T) \end{aligned}$$

Remarque 3.2. De façon informelle, la seul différence entre deux groupes quantiques monoïdalement équivalents est la dimension des représentations. D'ailleurs, si deux groupes quantiques compacts sont monoïdalement équivalents et si ψ préserve les dimensions, alors ils sont déformation l'un de l'autre par un 2-cocyle.

L'intérêt de cette définition réside dans [Fre13, Prop 6.3] :

Proposition 3.3 (F.). *Soient $\mathbb{G}_1$ et $\mathbb{G}_2$ deux groupes quantiques compacts monoïdalement équivalents et soit $\psi : \mathrm{Irr}(\mathbb{G}_1) \to \mathrm{Irr}(\mathbb{G}_2)$ la bijection associée. Alors, pour tout multiplicateur de Fourier T sur $C_{red}(\mathbb{G}_1)$, on a l'égalité*

$$\|T^{\psi}\|_{cb} = \|T\|_{cb}.$$

On en déduit immédiatement que les propriétés d'approximation se "transportent" à travers l'équivalence monoïdale, ce qui permet d'étendre les résultats obtenus précédemment.

Théorème 3.4 (F., F.-De Commer-Yamashita). *Les groupes quantiques suivants ont la propriété de Haagerup et sont faiblement moyennables avec une constante de Cowling-Haagerup égale à 1 par rapport à leur graduation canonique :*

- *$SU_q(2)$ et $SO_q(3)$ pour tout $-1 \leqslant q \leqslant 1$.*
- *O_F^+ et U_F^+ pour tout $F \in GL_N(\mathbb{C})$.*
- *Le groupe quantique d'automorphismes d'une C^*-algèbre de dimension finie B munie d'un état fidèle ψ.*

Mentionnons également que la moyennabilité faible implique l'exactitude. Ainsi, tous les groupes quantiques du théorème précédent sont exacts.

3.2. **Classification des algèbres de von Neumann.** Ces résultats permettent de mieux comprendre la structure des *algèbres de von Neumann* associées à ces groupes quantiques compacts. Rappelons tout d'abord la définition de cette algèbre dans le cas d'un groupe discret.

Définition 3.5. Soit Γ un groupe discret et soit $C_r^*(\Gamma) \subset \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$ sa C*-algèbre réduite. On définit l'algèbre de von Neumann de Γ comme le bi-commutant

$$L(\Gamma) = C_r^*(\Gamma)'' \subset \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma)).$$

De façon équivalente, $L(\Gamma)$ est l'adhérence de $C_r^*(\Gamma)$ pour la topologie faible d'opérateurs.

Il existe de nombreux outils pour étudier les algèbres de von Neumann. L'un d'eux est la notion de *sous-algèbre de Cartan*.

Définition 3.6. Soit N une algèbre de von Neumann. Une sous-algèbre de von Neumann maximalement abélienne $A \subset N$ est une sous-algèbre de Cartan si l'algèbre de von Neumann engendrée par $\mathcal{N}_N(A)$ est égale à N, où

$$\mathcal{N}_N(A) = \{u \in \mathcal{U}(N),\ uAu^* \subset A\}$$

est le *normalisateur* de A dans N.

Les sous-algèbres de Cartan sont cruciales pour comprendre la structure des algèbres de von Neumann, en particulier dans l'approche dite de *déformation/rigidité* initiée par S. Popa. Elles sont particulièrement liées à la construction de l'algèbre de von Neumann associée à un système dynamique. En effet, si (X,μ) est un espace de probabilités et si Γ est un groupe discret, on peut associer à toute action de Γ sur X préservant la mesure une algèbre de von Neumann

$$N = L^{\infty}(X,\mu) \rtimes \Gamma$$

qui contient $L^{\infty}(X,\mu)$ comme sous-algèbre de Cartan. Cette construction produit une classe très vaste d'algèbres de von Neumann.

Les premiers exemples d'algèbres de von Neumann ne pouvant être obtenues par cette construction car n'ayant pas de sous-algèbre de Cartan ont été obtenus par D.V. Voiculescu dans [Voi96] en utilisant les probabilités libres. Ces résultats ont été réobtenus par N. Ozawa et S. Popa dans [OP10] en utilisant la notion de *bi-exactitude*.

Définition 3.7. Soit Γ un groupe discret. On considère l'action de $\Gamma\times\Gamma$ par multiplication à gauche et à droite sur Γ. Elle induit une action de $\Gamma\times\Gamma$ sur frontière de Stone-Čech $\partial^{\beta}\Gamma$ de Γ. Le groupe Γ est dit bi-exact s'il est exact et si l'action sur $\partial^{\beta}\Gamma$ est moyennable.

Les techniques de N. Ozawa et S. Popa ont été adaptées au cadre des groupes quantiques compacts par Y. Isono dans [Iso14], permettant d'étendre leurs résultats. Dans ce contexte, l'analogue de $L(\Gamma)$ est noté $L^{\infty}(\mathbb{G})$.

Théorème 3.8 (Isono)**.** *Soit $\mathbb{G}$ un groupe quantique compact faiblement moyennable et bi-exact tel que l'algèbre de von Neumann $L^{\infty}(\mathbb{G})$ soit de type* II, *alors tout sous-algèbre de von Neumann $N \subset L^{\infty}(\mathbb{G})$ est soit injective soit sans sous-algèbre de Cartan.*

Tous les groupes quantiques précédemment cités vérifient les hypothèses de ce théorème. Il suffit donc par exemple de prouver que leurs algèbres de von Neumann ne sont pas injectives pour obtenir l'absence de sous-algèbre de Cartan.

Corollaire 3.9. Soit M l'algèbre de von Neumann de l'un des groupes quantiques compacts suivants, alors M n'a pas de sous-algèbre de Cartan :
- U_N^+ pour $N \geqslant 2$.
- O_N^+ pour $N \geqslant 3$.
- Le groupe quantique d'automorphismes d'une C*-algèbre de dimension finie B de dimension supérieure ou égale à 5 munie d'une trace fidèle ψ.

En particulier, aucune de ces algèbres de von Neumann ne peut être obtenue à l'aide d'un système dynamique.

Références

[Ban97] T. Banica, *Le groupe quantique compact libre $U(n)$*, Comm. Math. Phys. **190** (1997), no. 1, 143–172.

[BDRV06] J. Bichon, A. De Rijdt, and S. Vaes, *Ergodic coactions with large multiplicity and monoidal equivalence of quantum groups*, Comm. math. phys. **262** (2006), no. 3, 703–728.

[BO08] N. P. Brown and N. Ozawa, *C*-algebras and finite-dimensional approximation*, AMS, 2008.

[CH89] M. Cowling and U. Haagerup, *Completely bounded multipliers of the Fourier algebra of a simple Lie group of real rank one*, Invent. Math. **96** (1989), no. 3, 507–549.

[DCFY14] K. De Commer, A. Freslon, and M. Yamashita, *CCAP for universal discrete quantum groups*, Comm. Math. Phys. **331** (2014), no. 2, 677–701.

[dCH85] J. de Cannière and U. Haagerup, *Multipliers of the Fourier algebras of some simple Lie groups and their discrete subgroups*, American J. Math. **107** (1985), no. 2, 455–500.

[Fre13] A. Freslon, *Examples of weakly amenable discrete quantum groups*, J. Funct. Anal. **265** (2013), no. 9, 2164–2187.

[GH10] E. Guentner and N. Higson, *Weak amenability of cat(0)-cubical groups*, Geometriae Dedicata **148** (2010), no. 1, 137–156.

[Iso14] Y. Isono, *Examples of factors which have no Cartan subalgebras*, Trans. Amer. Math. Soc. (2014).

[OP10] N. Ozawa and S. Popa, *On a class of II_1 factors with at most one Cartan subalgebra*, Ann. of Math. **172** (2010), no. 1, 713–749.

[Oza08] N. Ozawa, *Weak amenability of hyperbolic groups*, Groups Geom. Dyn. **2** (2008), 271–280.

[PS86] T. Pytlik and R. Szwarc, *An analytic family of uniformly bounded representations of free groups*, Acta Math. **157** (1986), no. 1, 287–309.

[Voi96] D.V. Voiculescu, *The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory III : The absence of Cartan subalgebras*, Geom. Funct. Anal. **6** (1996), no. 1, 172–199.

[Voi11] C. Voigt, *The Baum-Connes conjecture for free orthogonal quantum groups*, Adv. Math. **227** (2011), 1873 – 1913.

[Wor87] S.L Woronowicz, *Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus*, RIMS **23** (1987), no. 1, 117–181.

[Wor98] S.L. Woronowicz, *Compact quantum groups*, Symétries quantiques (Les Houches, 1995) (1998), 845–884.