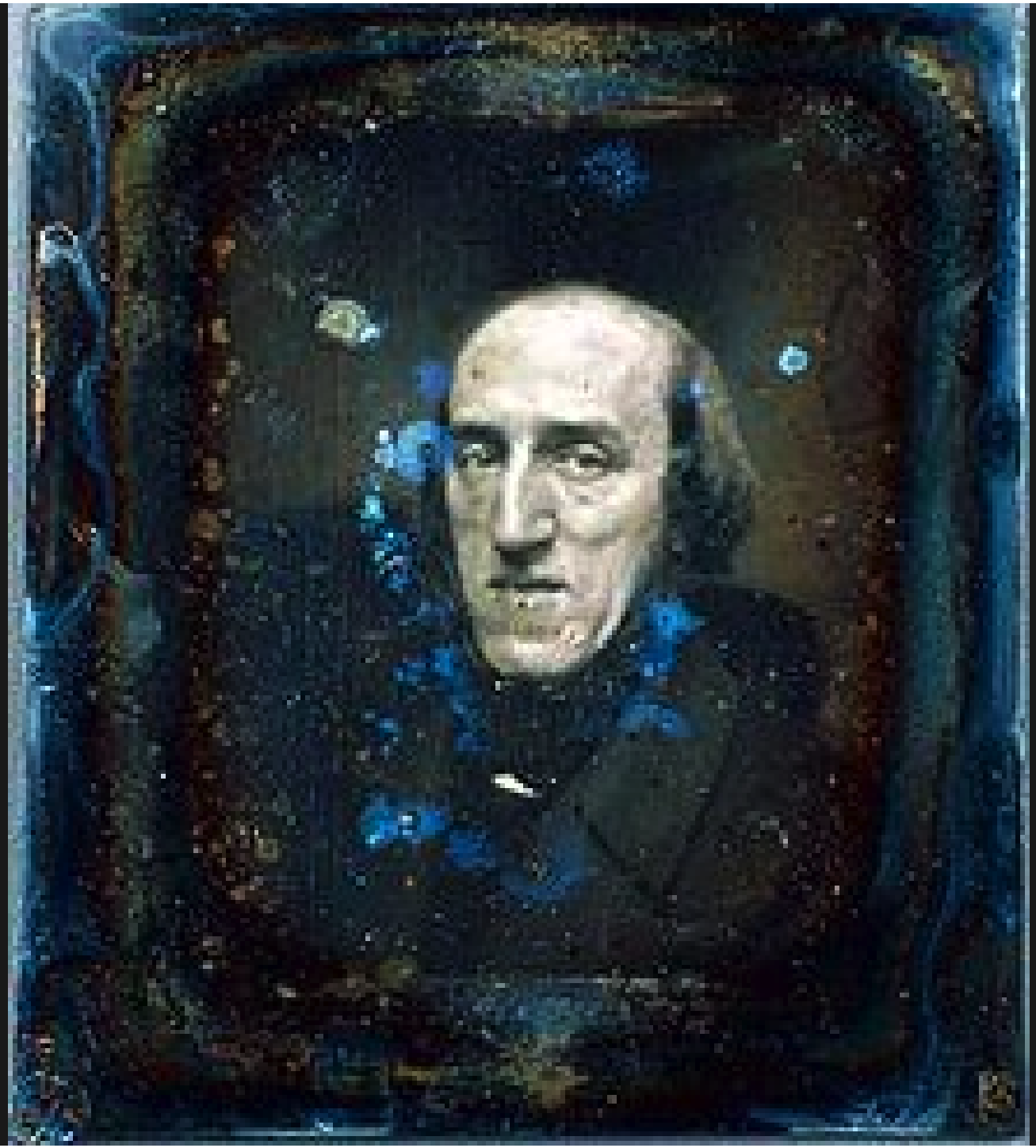
Photograph by Chris Reich



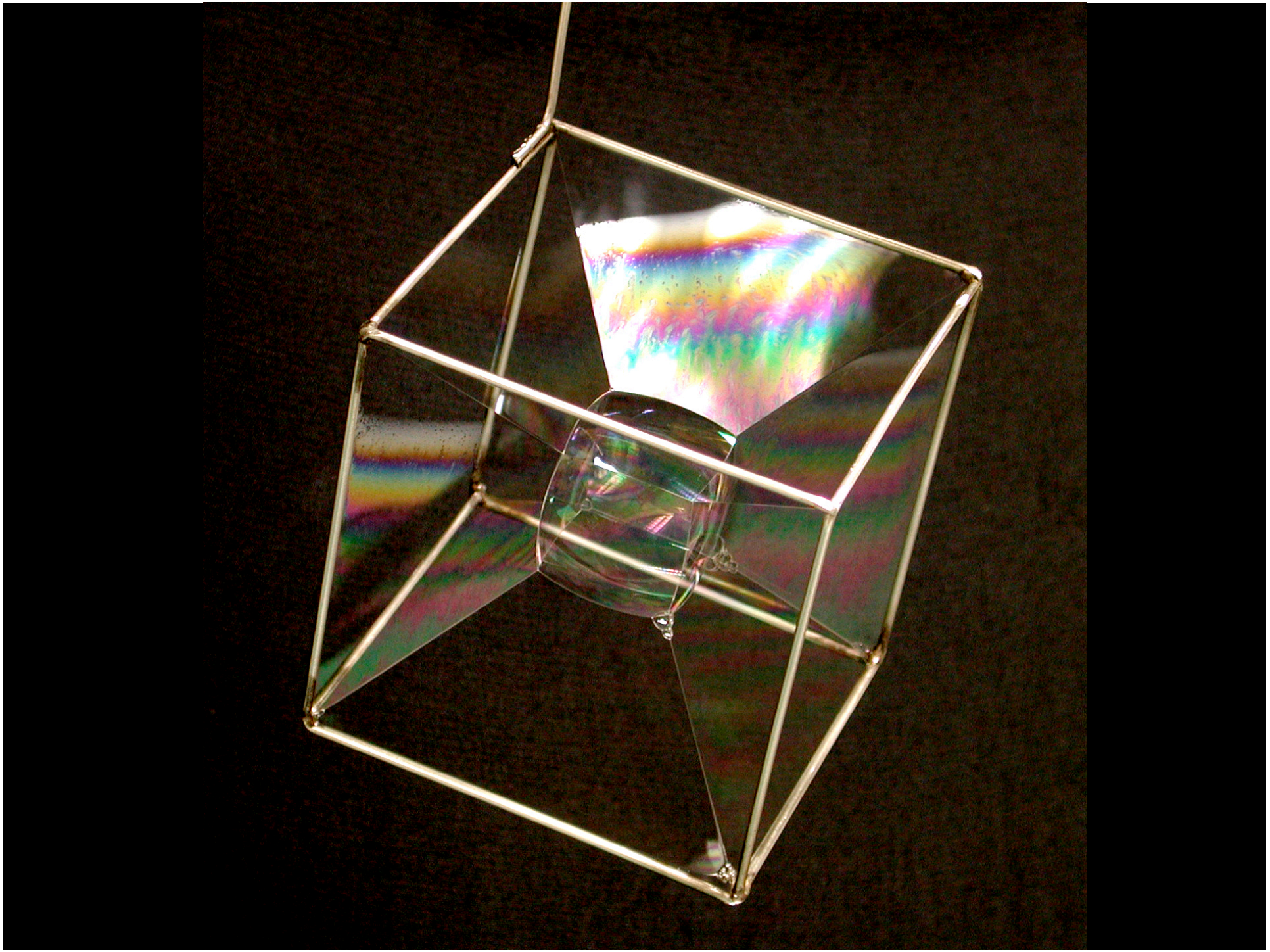
# Films de savon et mathématiques

Mons, Mars 2012

Guy David, Université de Paris Sud 11 (Orsay)

Joseph Plateau (1801-1883), physicien belge, est plus connu pour son intérêt pour la persistance rétinienne, mais a laissé son nom à un problème célèbre (le problème de Plateau), qui a donné lieu à de nombreux résultats très intéressants de mathématiques (Douglas, Federer-Fleming, Reifenberg, De Giorgi).

Il s'agit par exemple de savoir si, étant donné une courbe tracée dans l'espace, il existe une surface qui s'appuie sur cette courbe, et a une aire (= surface) minimale.



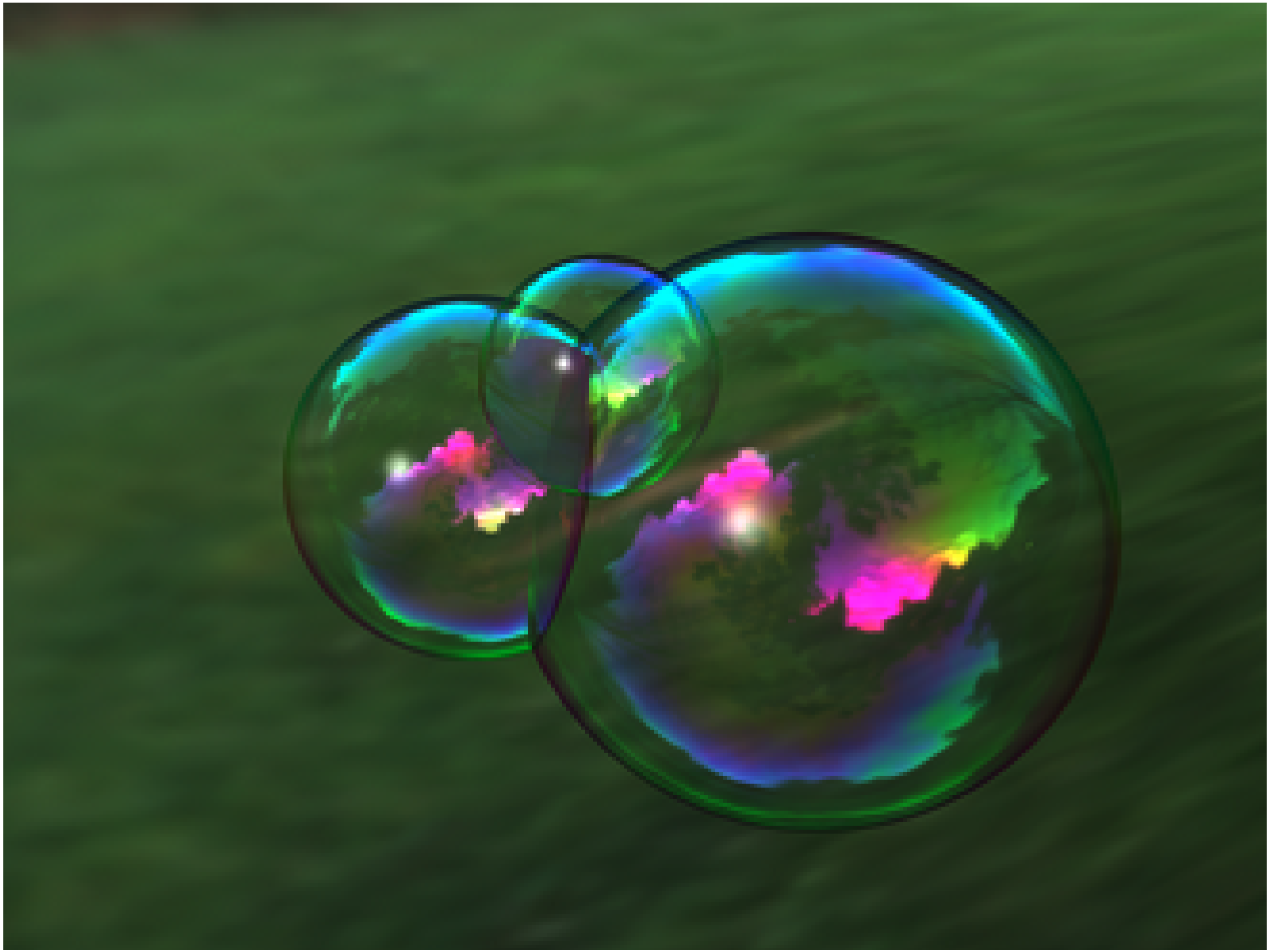


Image by John M. Sullivan,
Technische Universität Berlin, used by permission.

Ici on s'intéressera surtout à un problème différent, aussi abordé par Plateau, qui est la description locale des films et bulles de savon (à quoi ils ressemblent quand on les regarde de près).

Malgré la variété des formes aux grandes échelles, on ne voit en fait que trois types de comportements aux petites échelles: des surfaces lisses, trois demi-plans qui se rejoignent en une droite en faisant des angles de 120 degrés (on dira, une singularité de type $Y$), et un comportement plus compliqué, où six faces triangulaires, faisant des angles égaux, se rencontrent en un point. Plus précisément, l'ensemble ressemble au cône sur l'union des arêtes d'un tétraèdre régulier. On appelera cela une singularité de type $T$.

Questions de mathématiques: comment modéliser le comportement d'un film ou une bulle, quels sont les principes qui font que ce sont effectivement les seuls comportements possibles, et démontrer que c'est bien le cas dans les modèles qu'on a construits.

**Minimiser l'aire.**

Le programme d'aujourd'hui est de donner quelques pistes sur les mathématiques qui interviennent dans le sujet, d'essayer d'expliquer pourquoi le problème n'est pas si simple, et de confirmer que certains résultats ne sont venus que récemment, et que des questions naturelles sont encore sans réponse à ce jour.

Description vague d'un film de savon: de longues molécules avec une tête hydrophile et une queue hydrophobe, qui s'alignent en deux couches minces (la tête au milieu, avec un peu d'eau). Les molécules s'attirent.

Le principe général de la description des films de savon, déjà connu de Plateau, est que l'on obtient les configurations qui minimisent une énergie, dont le terme principal est justement la surface totale du film ou de la bulle.

Penser à une bille pouvant rouler sur une surface, l'énergie (potentielle de gravitation) est juste proportionnelle à la hauteur de la bille,

qui en principe se stabilise là où (localement) la hauteur est minimale.

Notre énergie peut comporter d'autres termes, venant de la gravité, du vent, de la pression interne dans le cas des bulles (je dirai bulle plutôt que film quand de l'air est coincé à l'intérieur), et autres. Mais, à cause d'homogénéités différentes, beaucoup de ces termes comptent moins que la surface aux petites échelles.

Le fait que la surface totale intervienne peut se deviner en additionnant les forces (et donc ensuite les potentiels) de cohésion des molécules, et en passant à la limite; la chose la plus surprenante pour moi est à quel point ce modèle si simple est performant.

Ce qui est beaucoup plus délicat (mais dont on parlera peu ici), est de dire comment on décrit le fait que le film s'attache au bord. Diverses notion donnent des modèles différents, souvent très intéressants mahématiquement, mais qui décrivent plus ou moins bien les films.

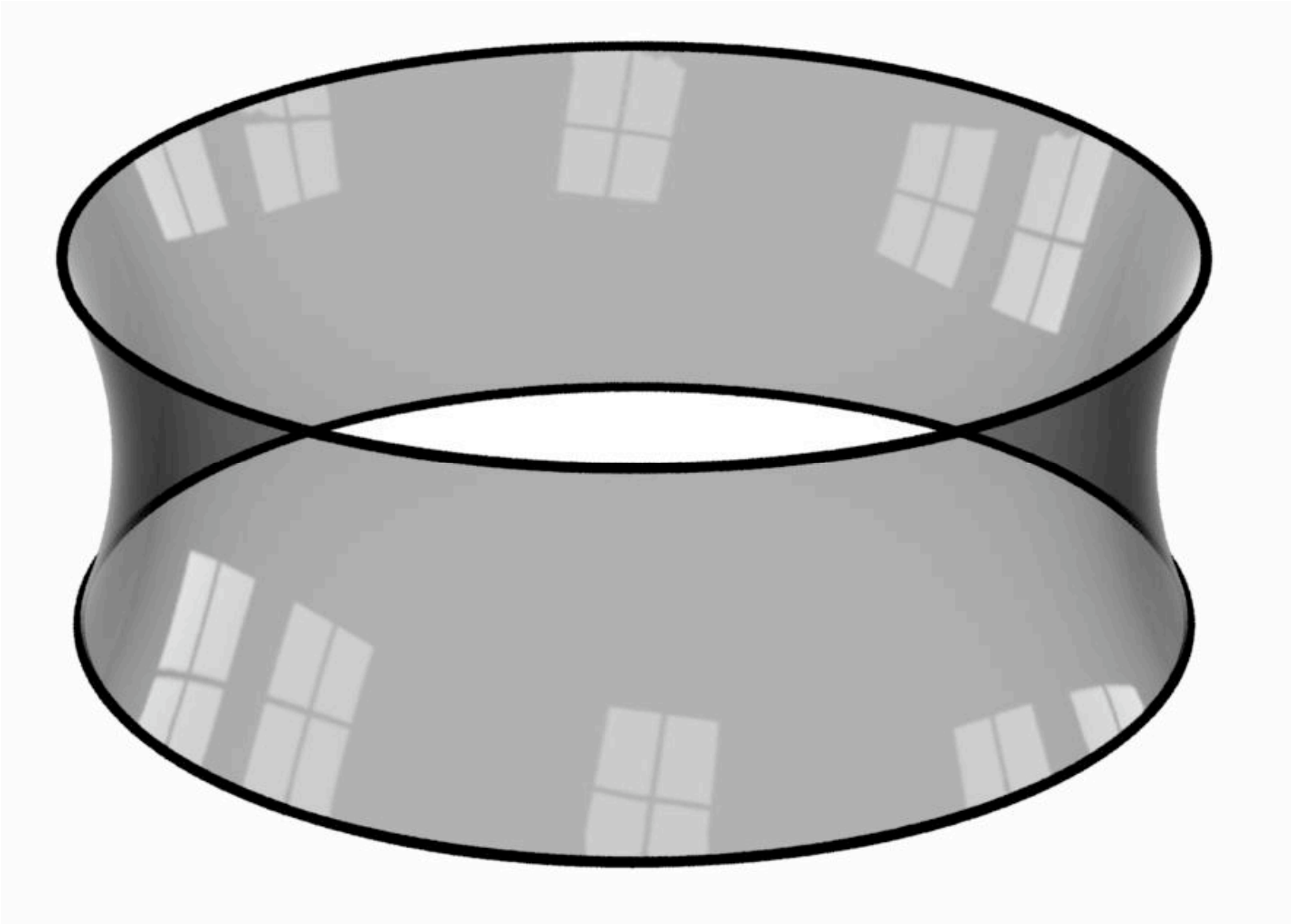
Ici on regardera surtout la "régularité" locale d'un film $E$, loin du bord où il est attaché.

**Courbure moyenne.**

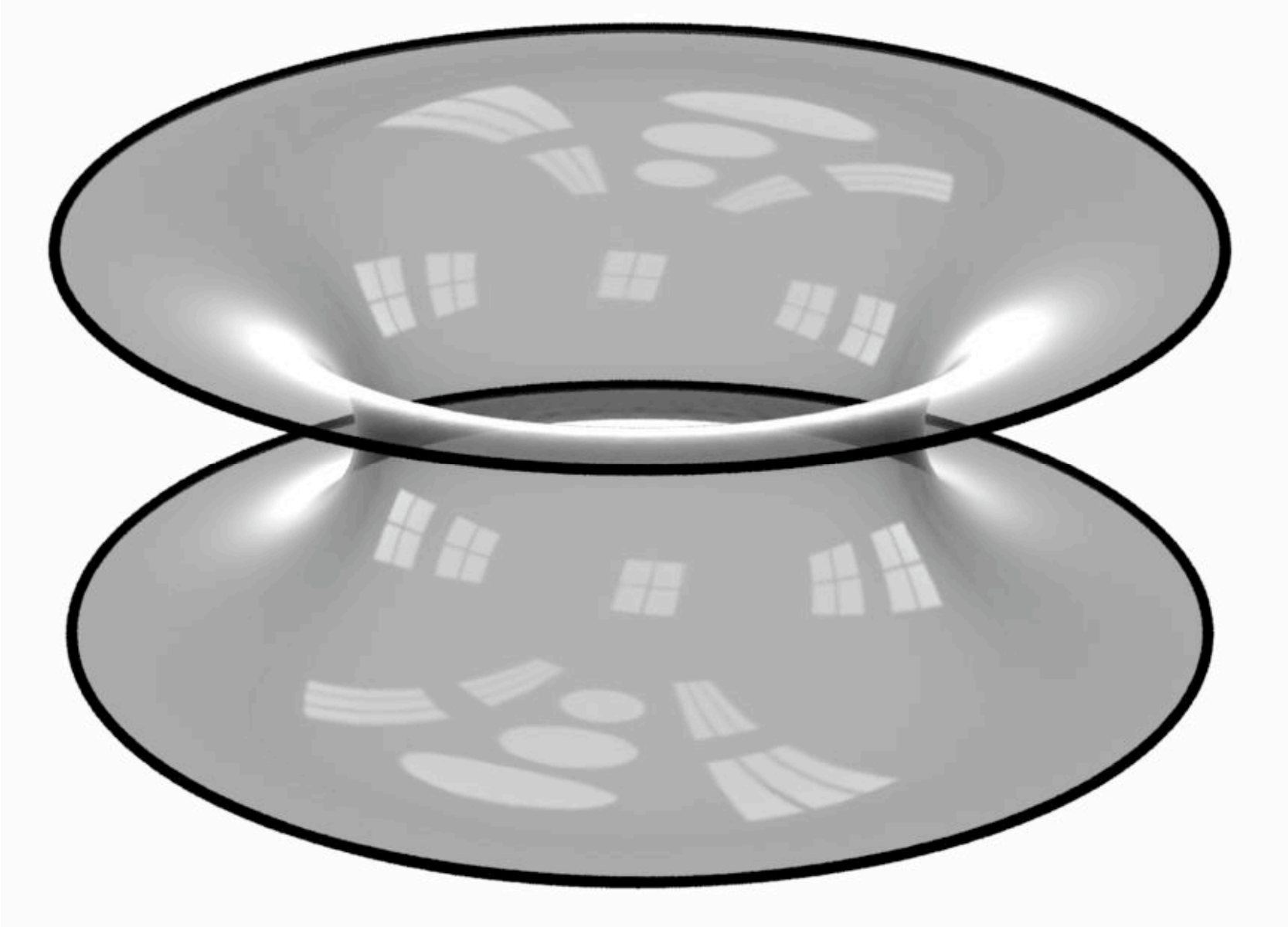
Dans le cas lisse (quand le film $E$ est, dans certaines coordonnées, le graphe d'une fonction qui a au moins 2 dérivées), un calcul de dérivée permet de montrer que la courbure moyenne de $E$ est nulle [Dessin].

Voici comment on fait. On va comparer $E$ avec des ensembles $F_t$, définis pour $t \in [-t_0, t_0] \subset \mathbb{R}$. On se débrouillera pour que, si $A(t)$ désigne la surface totale de $F_t$, l'on puisse calculer la dérivée de $A(t)$ en $t = 0$. Noter que $F_t = E$ quand $t = 0$, et que donc $A(t)$ est minimal quand $t = 0$, puisque $E$ minimise l'aire. Donc $A'(0) = 0$, et on aura obtenu une information.

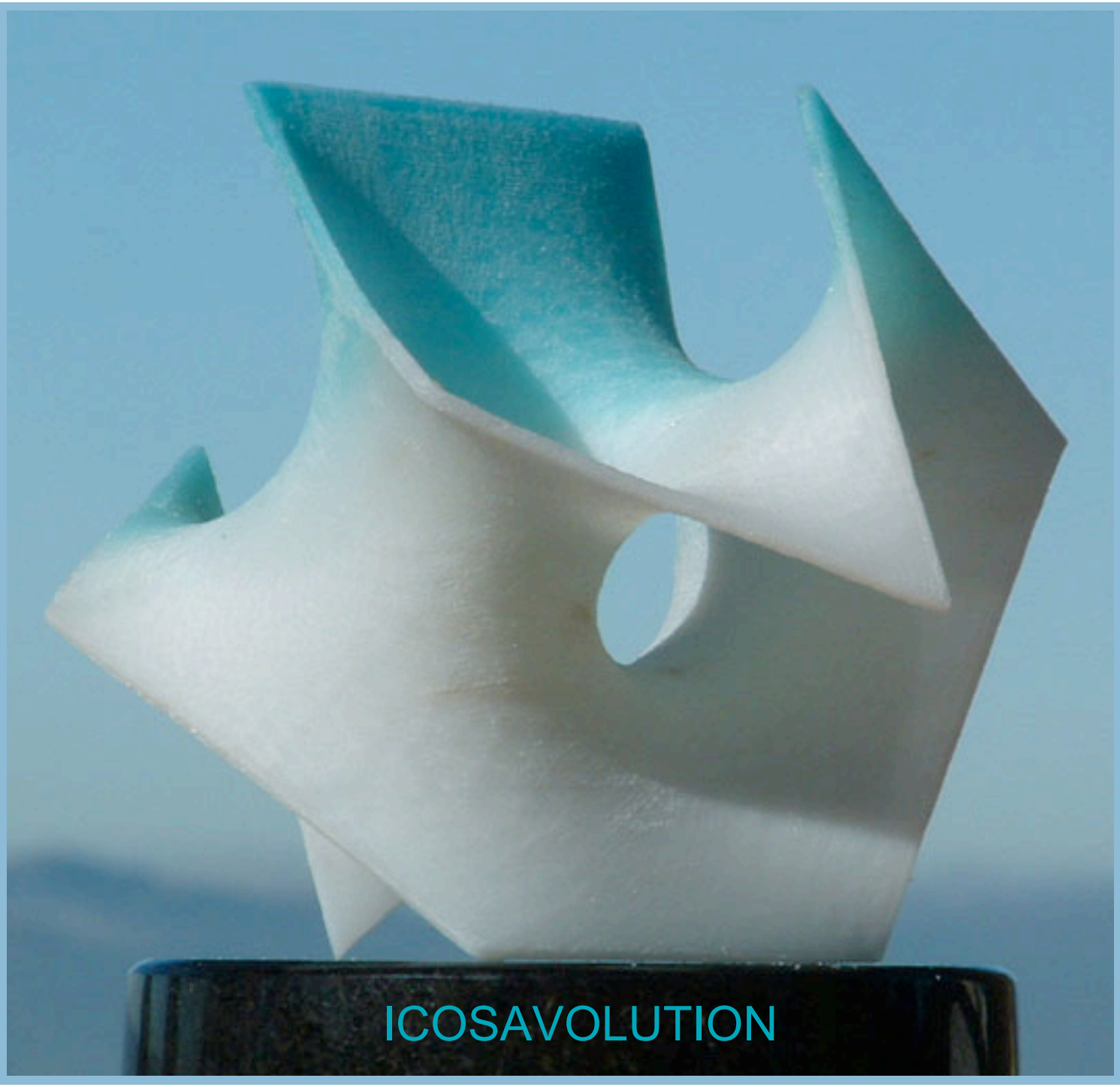
Pour construire $F_t$, on déforme $E$ en utilisant un champ de vecteurs: on prend n'importe quelle fonction $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, nulle loin du point de $E$ que l'on veut étudier, et disons avec deux dérivées, et on essaie $F_t = \varphi_t(E)$, où $\varphi_t(x) = x + tv(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^3$. Il se trouve que les calculs peuvent être faits, que $A(t)$ est bien dérivable près de 0, et les calculs donnent la condition sur la courbure moyenne de $E$.



A CATENOID. Image by John M. Sullivan,
Technische Universität Berlin, used by permission.



A CATENOID. Image by John M. Sullivan,
Technische Universität Berlin, used by permission.



ICOSAVOLUTION

Dans le cas d'une bulle de savon, on ajouterait un terme de pression à la surface, on ferait le même calcul, et on trouverait que la courbure moyenne est proportionnelle à la différence de pression entre les deux cotés de $E$. Donc quand $E$ est une sphère, par exemple, on connait la pression à l'intérieur: elle est proportionnelle à l'inverse du rayon de la sphère.

## Mesure de Hausdorff

Mais les choses deviennent intéressantes quand on ne sait pas que $E$ est une surface lisse! On ne veut pas trop savoir a priori à quoi $E$ ressemble, puisque c'est ce qu'on veut démontrer à partir de la minimisation de l'énergie!

Mais alors, commet calcule-t-on la surface de $E$? Heureusement, on peut utiliser la mesure de Hausdorff de dimension 2. Les mesures de Hausdorff (de dimensions diverses) sont les mêmes mesures qu'on utilise pour mesurer la taille des ensembles fractals.

Il se trouve donc que pour $E \subset \mathbb{R}^3$ quelconque, on peut définir un nombre $\mathcal{H}^2(E) \in [0, +\infty]$, qui est est le bon substitut de la surface de $E$, au sens où par exemple $\mathcal{H}^2(E)$ est bien la surface de $E$ quand $E$ est une surface lisse.

**F. Almgren and J. Taylor**

Reste à modéliser le fait que $\mathcal{H}^2(E)$ est le plus petit possible, au moins quand on regarde loin du bord d'attache.

A mon avis, la meilleure description locale à ce jour est celle d'Almgren (dans les années 1970) qui dit que $E$ est un ensemble fermé (toute limite d'une suite de points de $E$ est encore dans $E$), tel que si $B$ est une boule qui ne rencontre pas le bord, et si $F$ est obtenu en déformant $E$ dans $B$ (donc sans rien bouger hors de $B$, voir ci-dessous), alors

$$\mathcal{H}^2(E \cap B) \leq \mathcal{H}^2(F \cap B).$$

On dit que $F$ est obtenu par déformation de $E$ dans $B$ si $F = f(E)$, où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est une fonction continue (en pratique, on demande Lipschitzienne) telle que $f(x) = x$ pour $x$ hors de $B$, et $f(x) \in B$ pour $x \in B$. On appelle alors $E$ un ensemble minimal (au sens d'Almgren).

La question est: à quoi ressemble un ensemble minimal?

Réponse (dans $\mathbb{R}^3$): près de chaque point, à un cône minimal.

Et il y a exactement (à translation et rotation près) trois types de cônes minimaux: les plans, les $Y$, et les $T$ (comme ci-dessus).

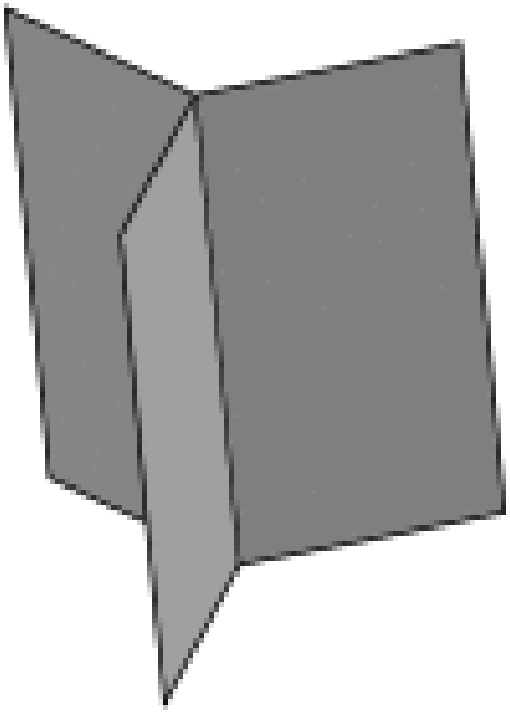
**Théorème de Jean Taylor (1976).** *Si $E$ est un ensemble minimal réduit, alors pour tout $x \in E$, il existe une betite boule $B(x,r)$ dans laquelle $E$ est $C^1$-équivalent à un cône minimal.*

Ne faites pas attention au mot "réduit"; c'est pour éviter de travailler à un ensemble supplémentaire de mesure nulle près.

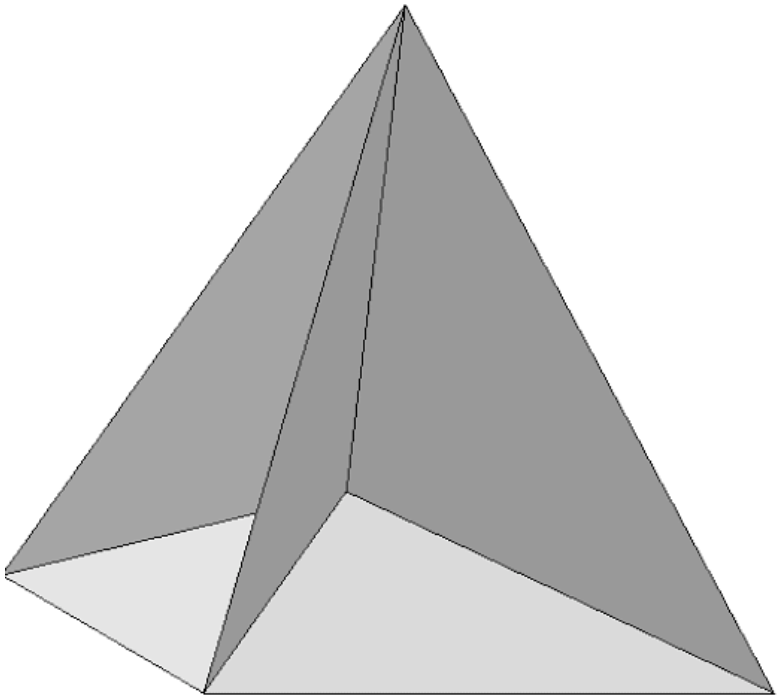
Equivalent signifie qu'il existe un cône minimal $Z$ centré en $x$, une bijection $\varphi$, continûment dérivable ainsi que son inverse, telle que $\varphi(x) = x$, et $D\varphi(x) = Id$, et pourlaquelle

$$E \cap B(x,r) = \varphi(Z) \cap B(x,r).$$

En particulier $E$ a un un cône tangent en $x$, ce cône est minimal, et il dépend continûment de $x$.

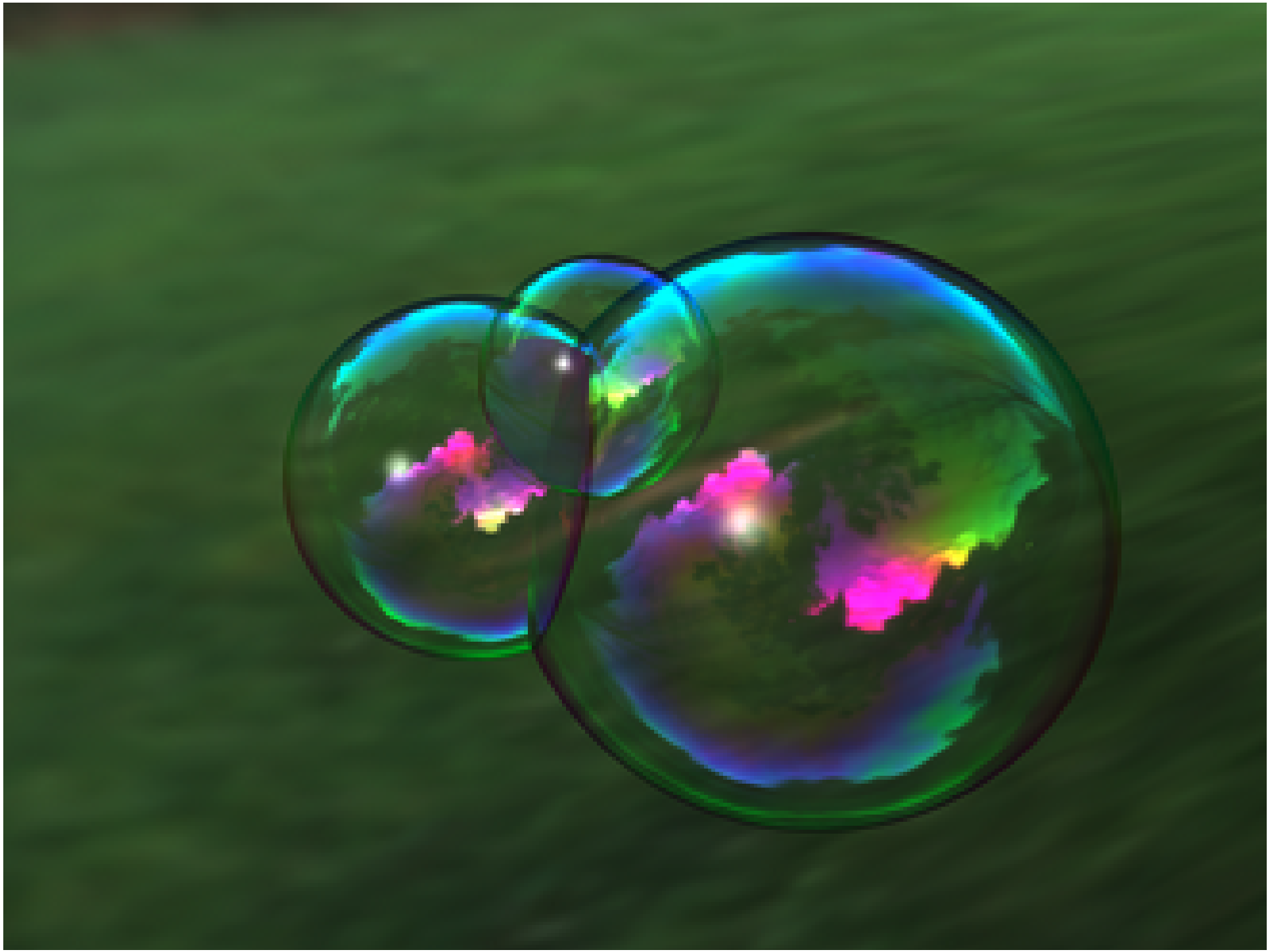


Y



T

Pictures from Brakke's site



Il y a quelques résultats de régularité, bien plus faibles, pour les ensembles minimaux de dimensions supérieures, et aussi (un peu plus faibles) pour les ensembles minimaux de dimension 2 dans $\mathbb{R}^n$.

D'autres notions de minimalité donnent des résultats de régularité différents. Les plus classiques (courants minimaux, surfaces minimales) donnent (en dimensions assez petites) que $E$ est lisse.

Ce sont des beaux théorèmes, mais aussi une indication que le modèle d'Almgren est meilleur pour les films de savon.

On ne sait pas s'il existe de bons analogues du théorème de J. Taylor pour des ensembles de dimensions 3 ou plus.

Et la régularité jusqu'au bord, même dans $\mathbb{R}^3$, est essentiellement inconnue.

Enfin, dans les cadres comme celui d'Almgren, l'existence de solutions pour le problème de Plateau est encore inconnue en général.

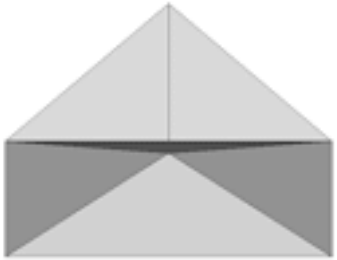
**Monotonie, limites d'explosion**

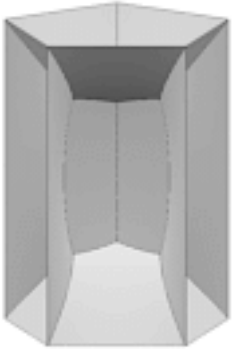
On donne quelques notions qui sont intervenues dans l'étude (menant, notamment, au théorème ci-dessus).

Une propriété utile des ensembles minimaux: pour $x \in E$, la fonction qui associe à $r > 0$ la densité $\frac{1}{r^2}\mathcal{H}^2(E \cap B(x,r))$ est croissante. Ceci ne se voit pas trop sur les films de savon, mais c'est très utile.

En particulier, ceci permet de montrer que les limites d'explosion de $E$ en un point $x$ sont des cônes minimaux. Une étape intermédiaire importante dans l'étude locale.

La liste des cônes minimaux dans $\mathbb{R}^3$ est assez facile à obtenir (Plateau, Lamarle, Heppes): on sait que leur intersection avec la sphère est une union d'arcs de cercles qui se coupent avec des angles de 120 degrés, on trouve la liste, et on élimine les cônes qui ne sont pas minimaux.





## La double bulle

Un autre théorème récent (1995-2000): la manière d'entourer deux volumes $v_1$ et $v_2$ donnés d'air, à l'aide d'un ensemble dont l'aire (la mesure $\mathcal{H}^2$) est la plus petite possible, est donnée par la double bulle sphérique correspondante.

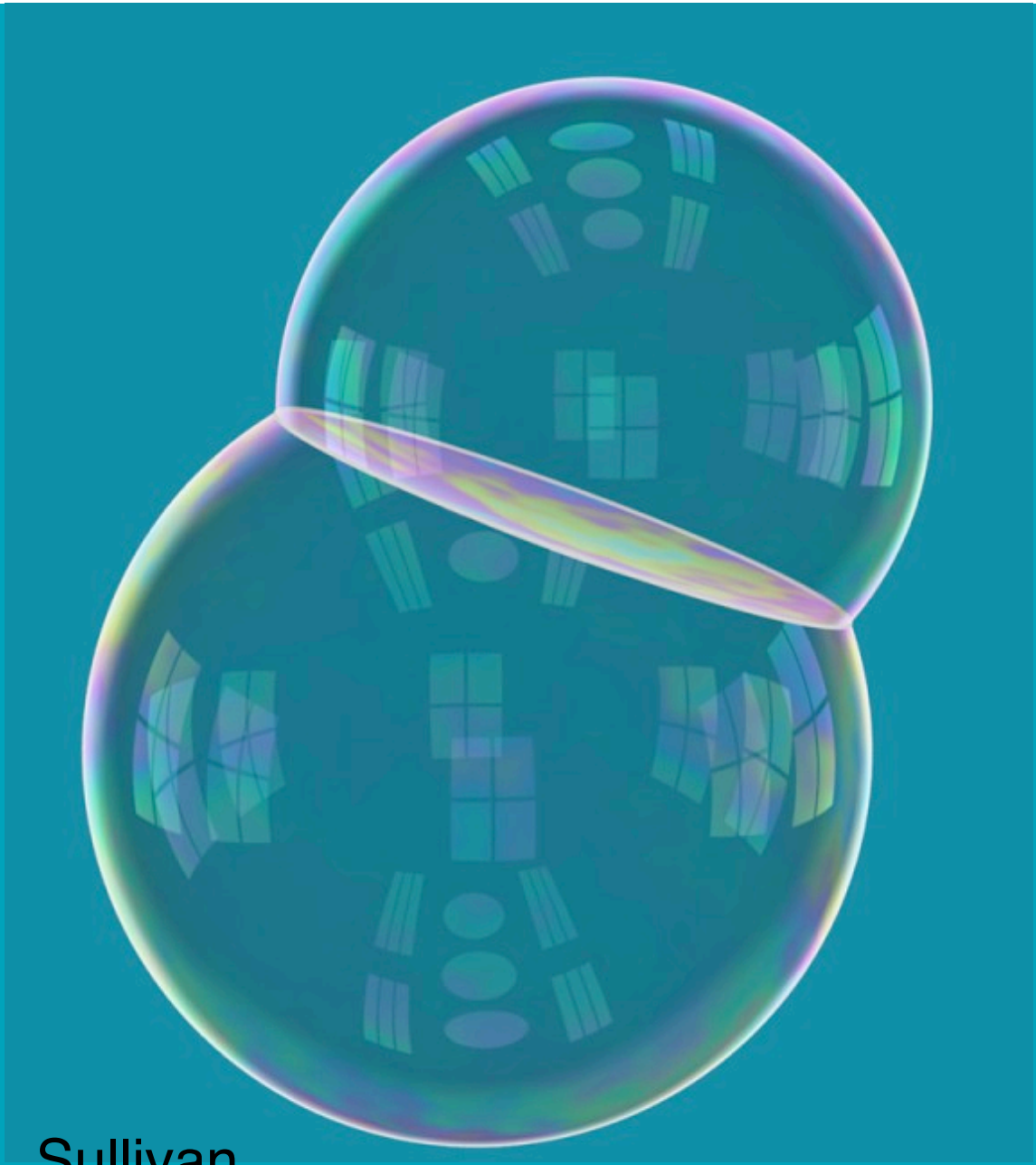


Image by John M. Sullivan,
Technische Universität Berlin, used by permission.

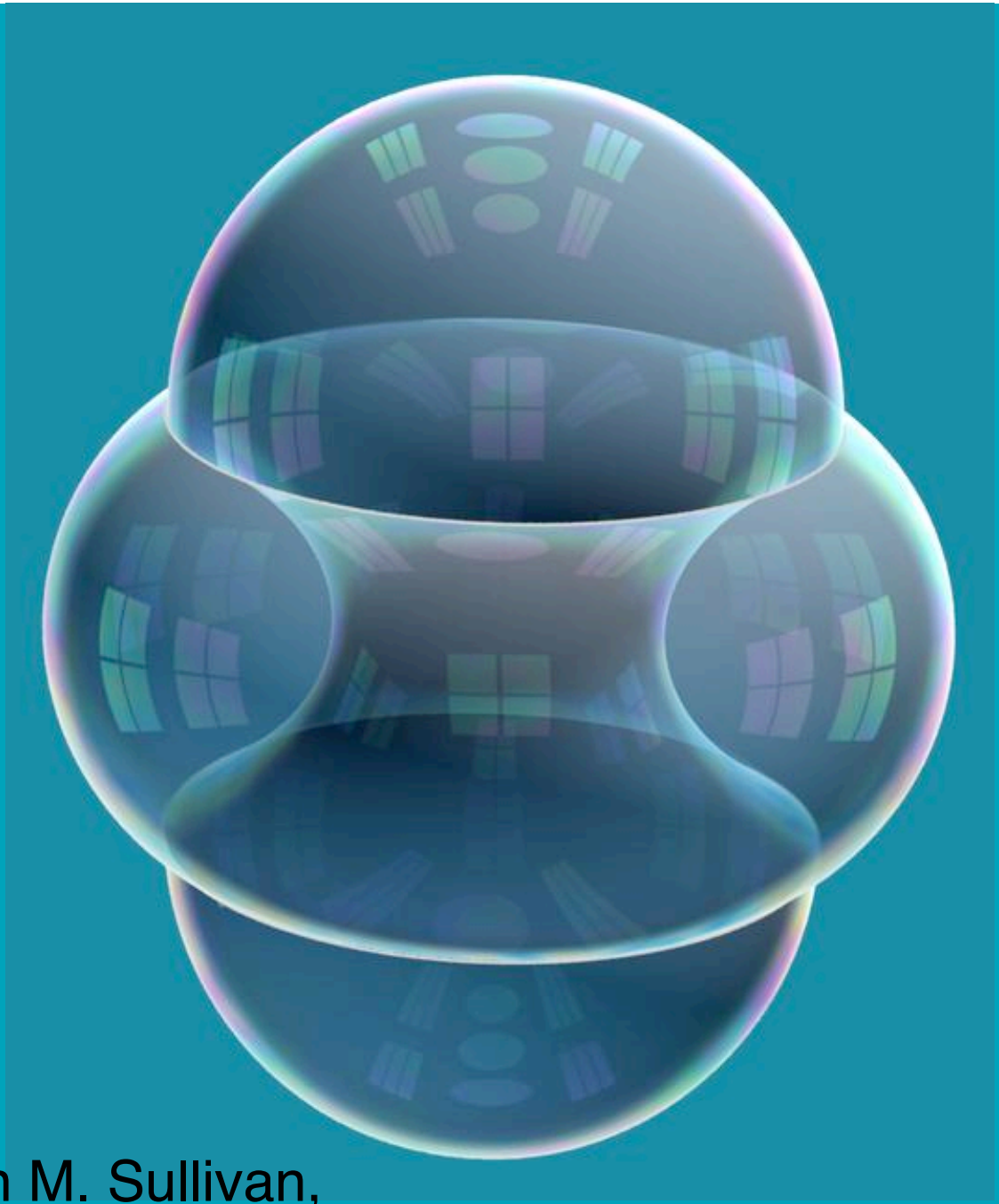
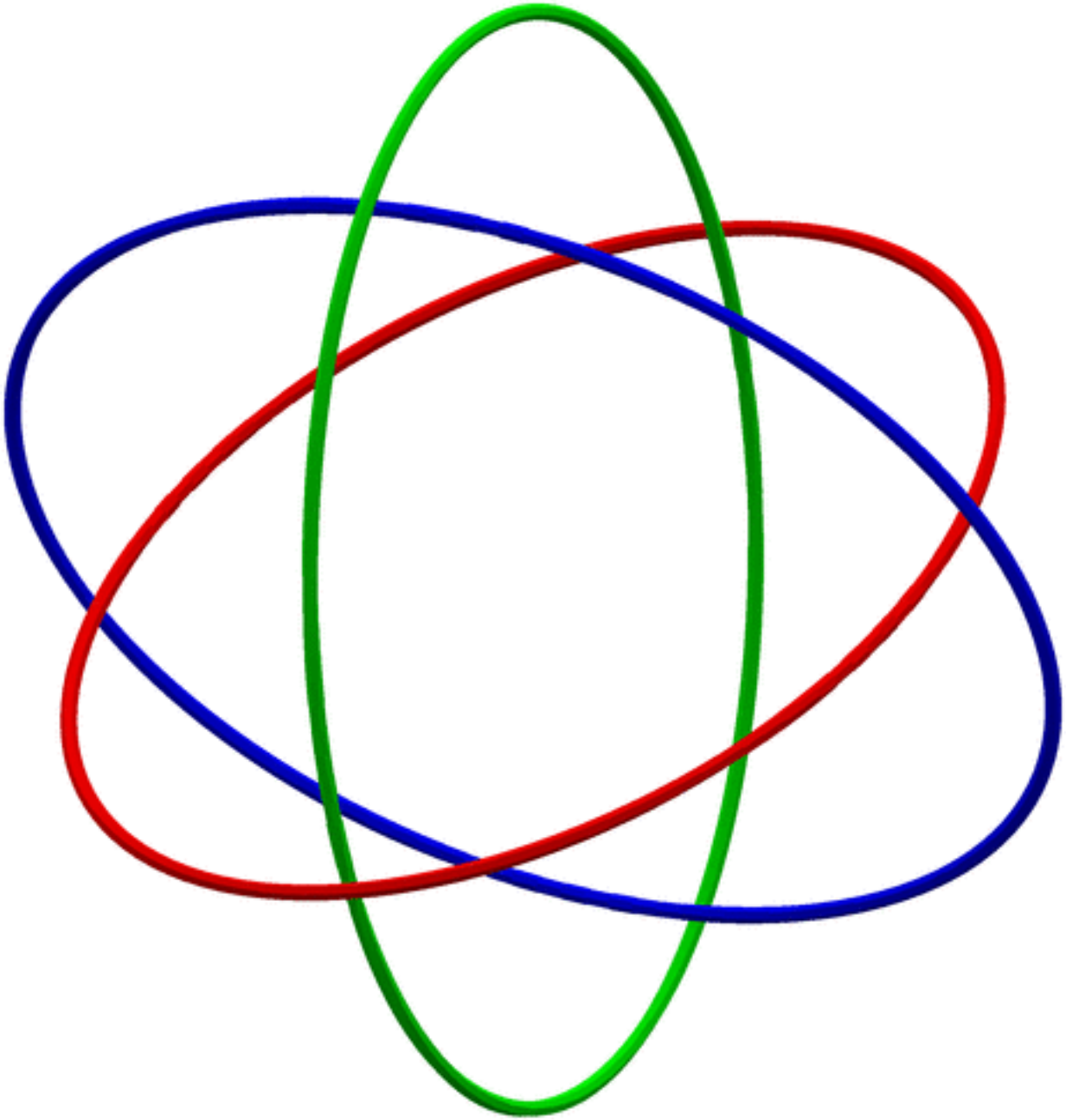
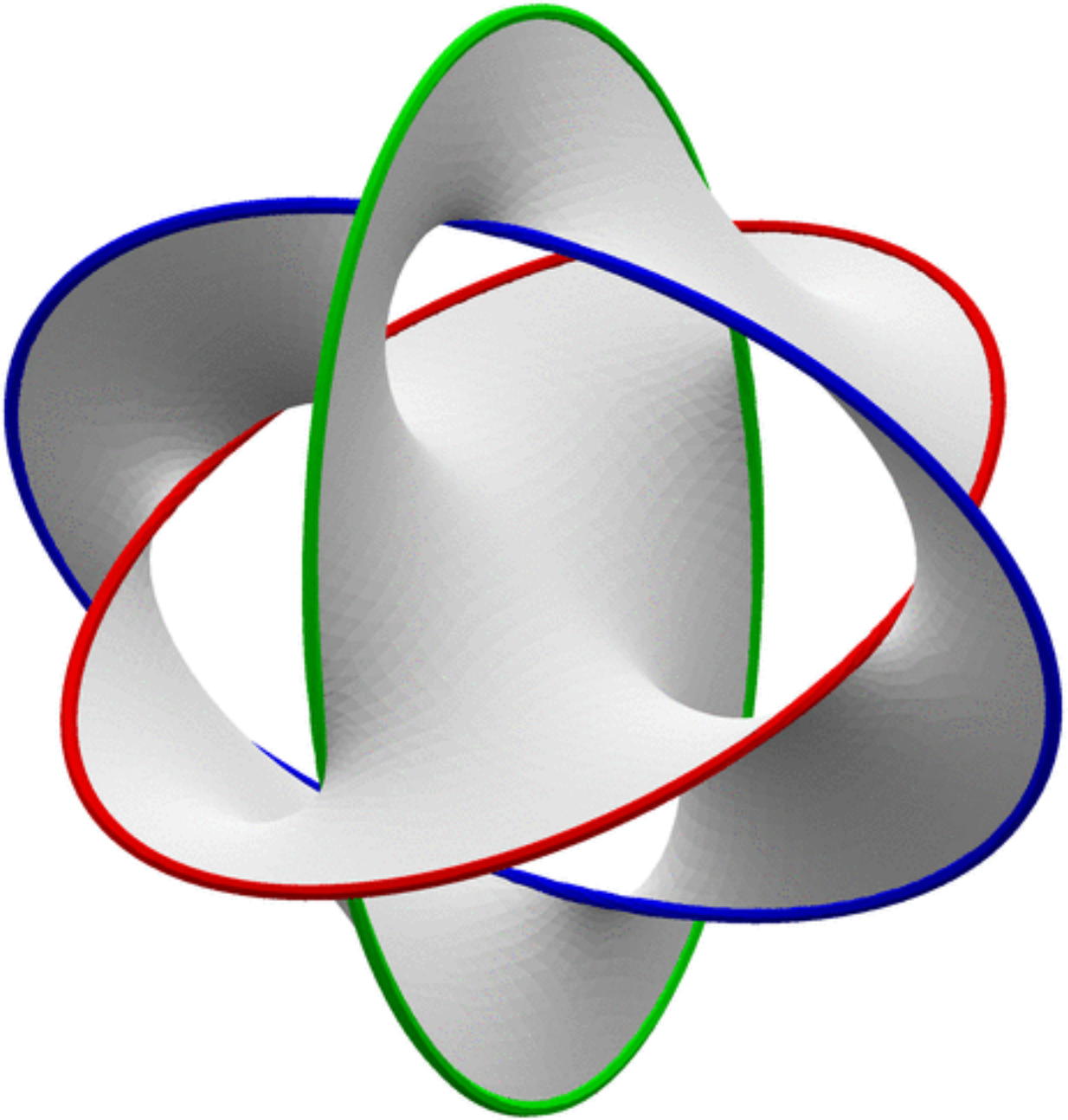
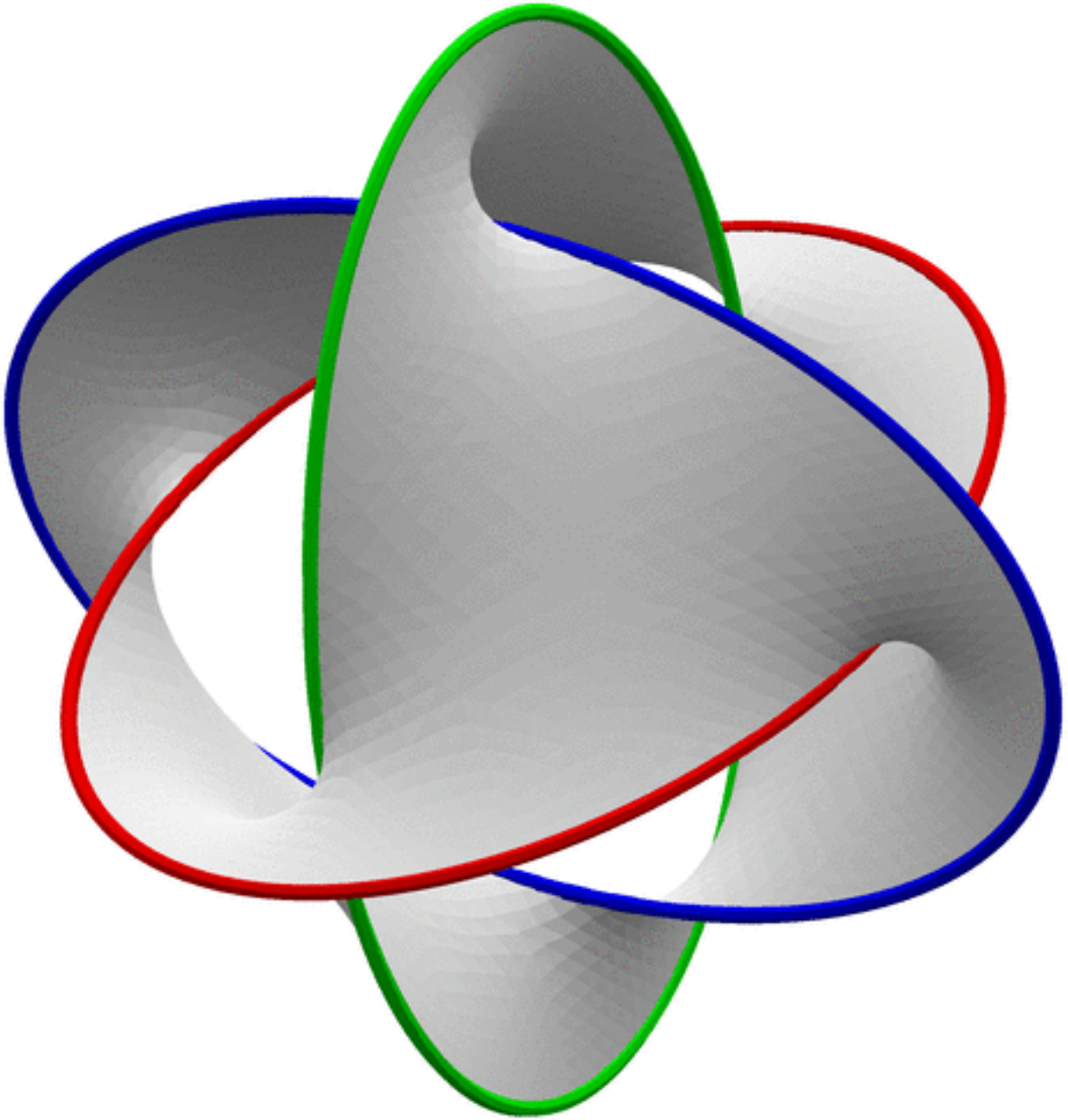


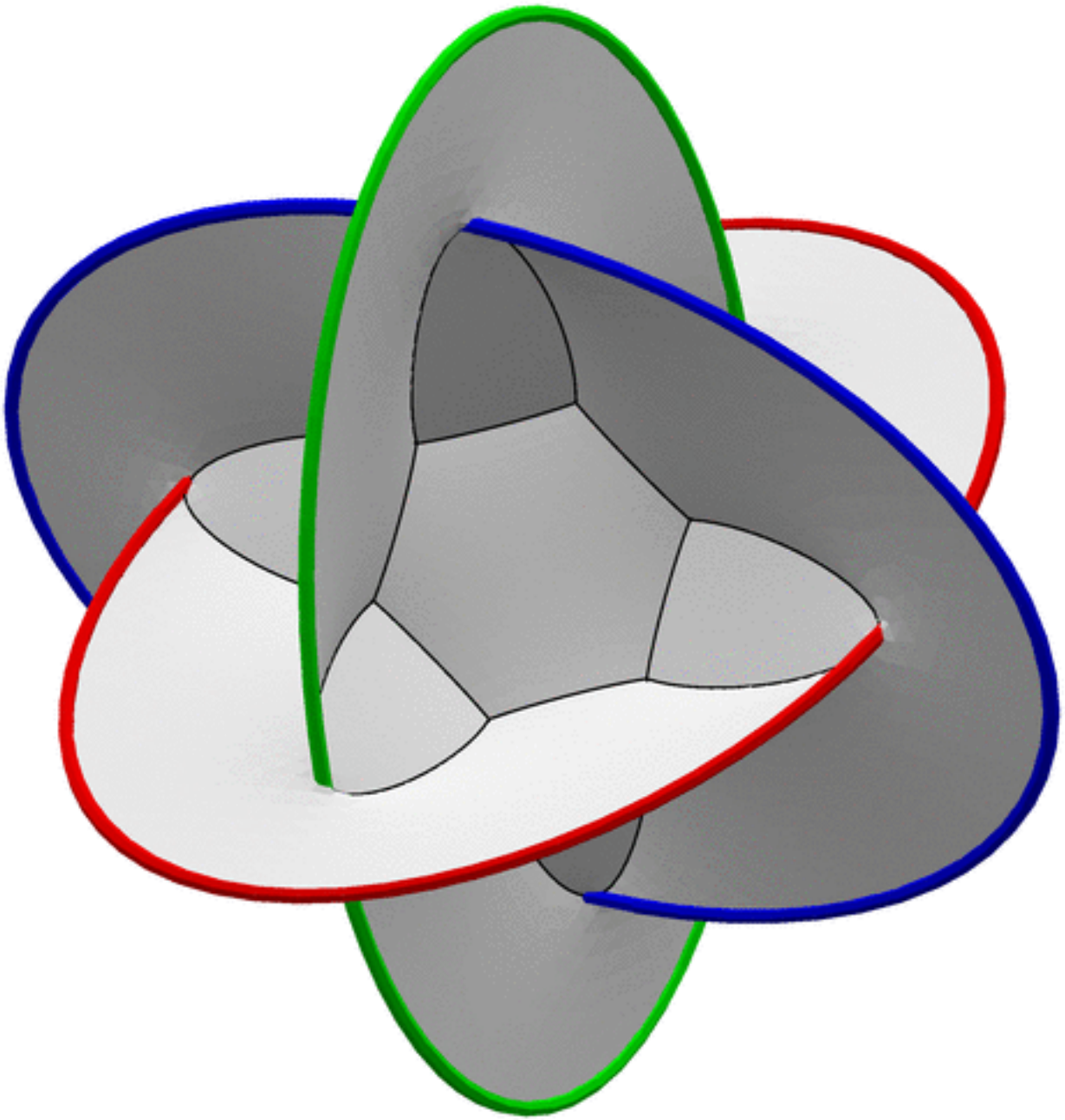
Image by John M. Sullivan,
Technische Universität Berlin, used by permission.

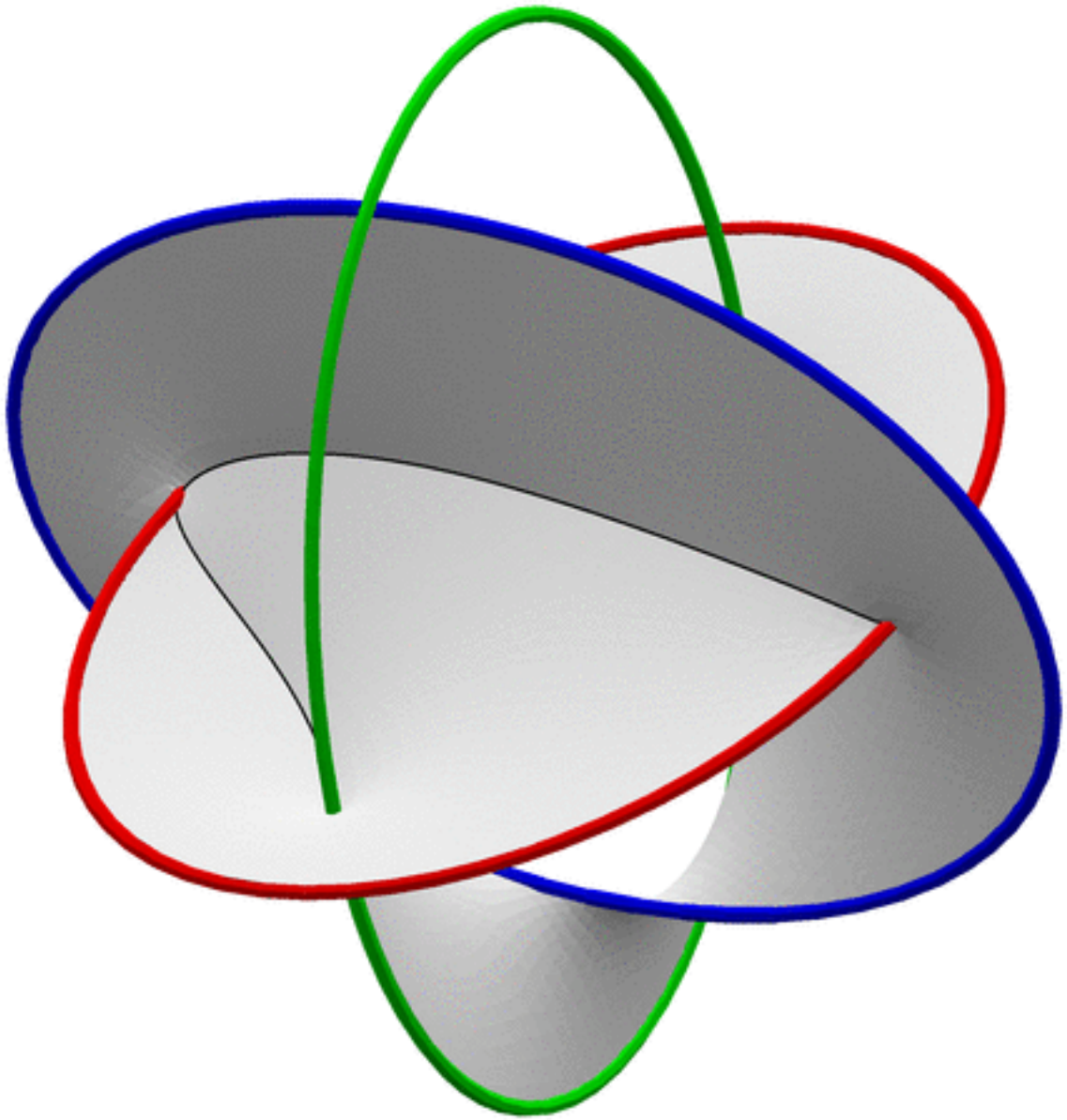
Image by John M. Sullivan,
Technische Universität Berlin, used by permission.

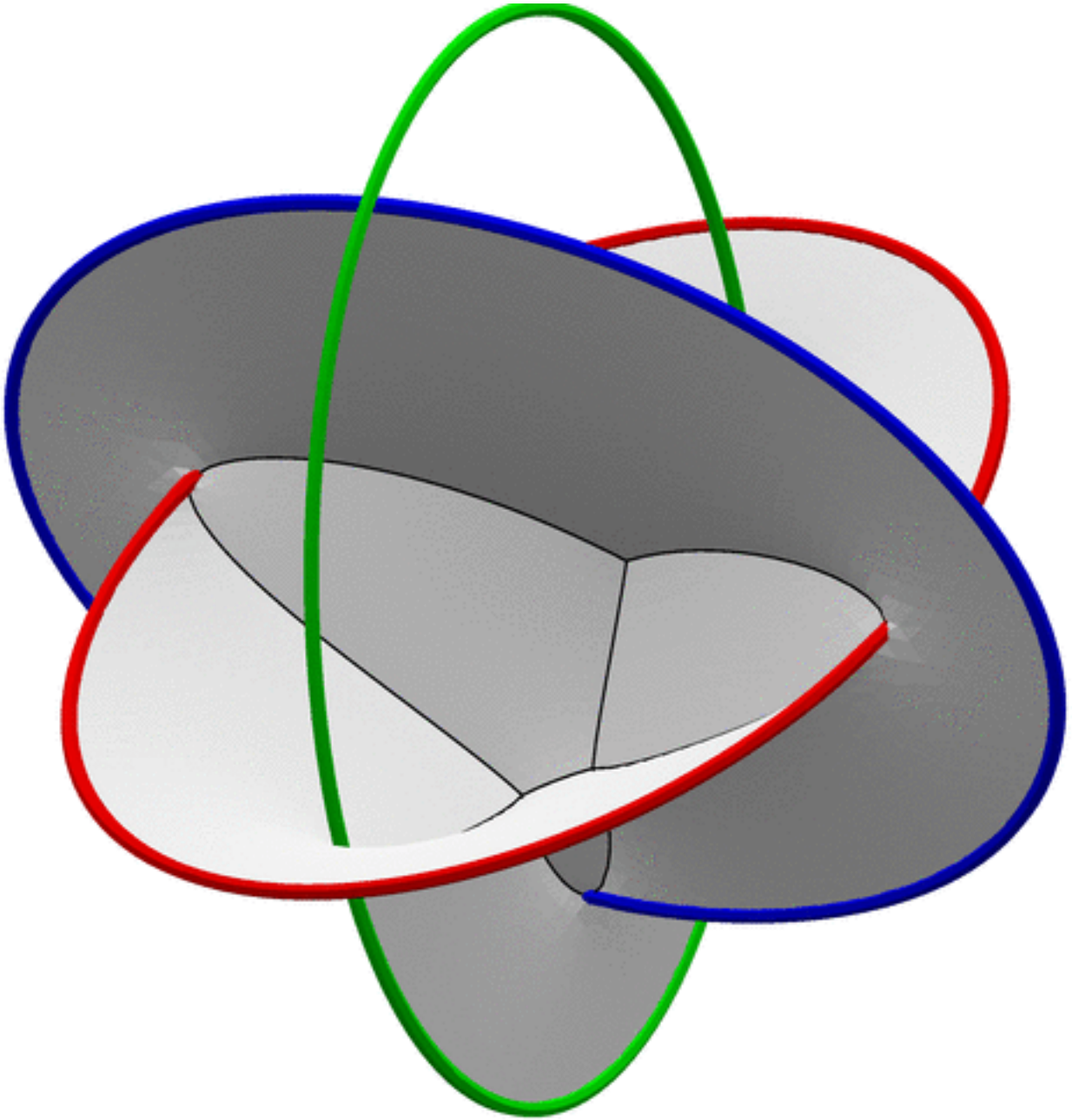




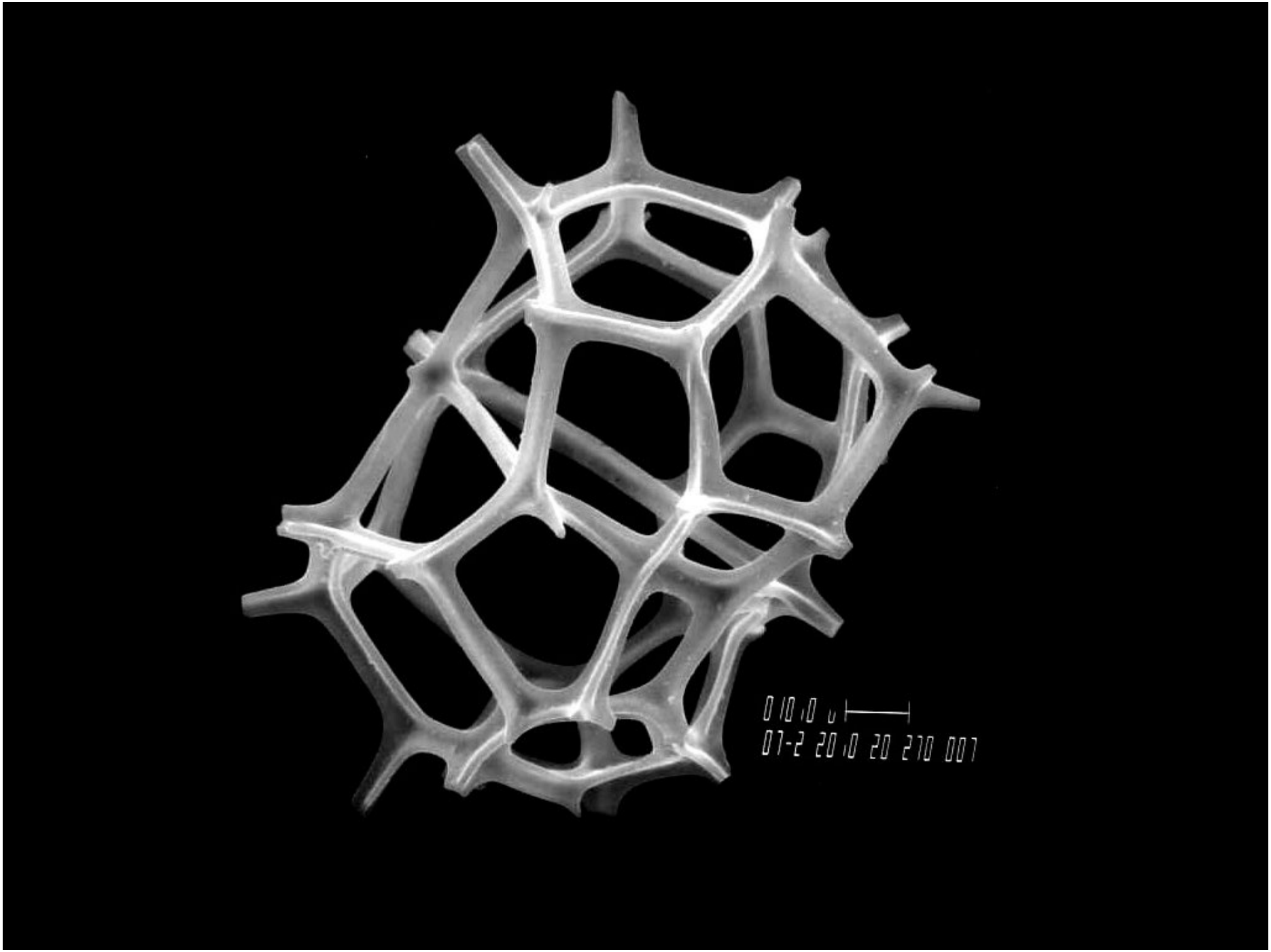








COSTA SURFACE


010.0 u
07-2 20.0 20 270 007

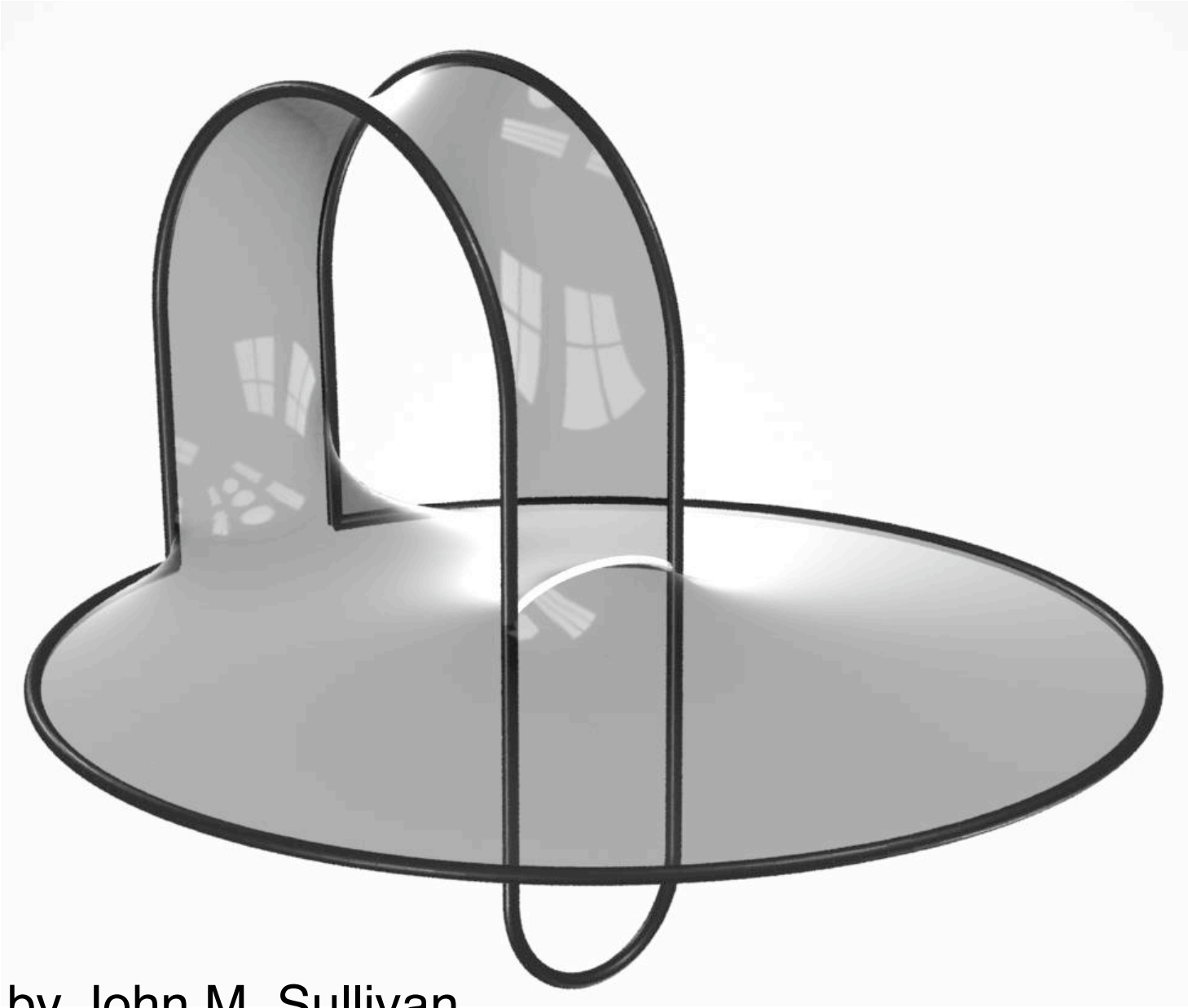


Image by John M. Sullivan,
Technische Universität Berlin, used by permission.

Image by John M. Sullivan,
Technische Universität Berlin, used by permission.

## QUELQUES REFERENCES


[All] W. K. Allard, On the first variation of a varifold. Ann. of Math. 95 (1972), 417–491.

[Al1] F. J. Almgren, Plateau's problem: An invitation to varifold geometry. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1966, xii+74 pp.

[Al2] F. J. Almgren, Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's Theorem. Ann. of Math. (2), Vol. 84 (1966), 277–292.

[Al3] F. J. Almgren, Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems among surfaces of varying topological type and singularity structure. Ann. of Math. (2) 87 (1968) 321–391.

[Al4] F. J. Almgren, Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints. Memoirs of the Amer. Math. Soc. 165, volume 4 (1976), i–199.

[Al5] F. J. Almgren, $Q$-valued functions minimizing Dirichlet's integral and the regularity of area minimizing rectifiable currents up to codimension two. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 8 (1983), no. 2, 327328.

[Br1] K. Brakke, Minimal cones on hypercubes. J. Geom. Anal. vol. 1 (1991), 329–338.

[Br2] K. Brakke, The surface evolver. Experiment. Math. 1 (1992), 141–165.

[Br3] K. Brakke, Minimal surfaces, corners, and wires. J. Geom. Anal. 2 (1992), no. 1, 11–36.

[Br4] K. Brakke, Soap films and covering spaces. J. Geom. Anal. 5 (1995), no. 4, 445–514.

[Da1] G. David, Limits of Almgren-quasiminimal sets. Proceedings of the conference on Harmonic Analysis, Mount Holyoke, A.M.S. Contemporary Mathematics series, Vol. 320 (2003), 119–145.

[Da2] G. David, Quasiminimal sets for Hausdorff measures. Recent de-

velopments in nonlinear partial differential equations, 81–99, Contemp. Math., 439, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[Da3] G. David, Low regularity for almost-minimal sets in $\mathbb{R}^3$. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Vol 18, 1 (2009), 65–246.

[Da4] G. David, $C^{1+\alpha}$-regularity for two-dimensional almost-minimal sets in $\mathbb{R}^n$. J. Geom. Anal. 20 (2010), no. 4, 837–954.

[Da5] G. David, Regularity of minimal and almost minimal sets and cones: J. Taylor's theorem for beginners. Lecture notes for the Séminaires de Mathématiques Supérieures, Espaces métriques mesurés : aspects géométriques et analytiques, held in Montreal in July 1011, to be published.

[DDT] G. David, T. De Pauw, and T. Toro, A generalization of Reifenberg's Theorem in $\mathbb{R}^3$. Geometric And Functional Analysis 18 (2008), 1168-1235.

[DS1] G. David and S. Semmes, Uniform rectifiability and quasiminimizing sets of arbitrary codimension. Memoirs of the A.M.S. Number

687, volume 144, 2000.

[Dp] T. De Pauw, Size minimizing surfaces. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 42 (2009), no. 1, 37–101.

[DpH] T. De Pauw and R. Hardt, Size minimization and approximating problems. Calc. Var. Partial Differential Equations 17 (2003), 405–442.

[Do] J. Douglas, Solutions of the Plateau problem. Trans. Amer. Math. Soc. 33 (1931), no. 1, 263–321.

[Fe1] H. Federer, Geometric measure theory. Grundlehren der Mathematishen Wissenschaften 153, Springer Verlag 1969.

[Fe2] H. Federer, The singular sets of area minimizing rectifiable currents with codimension one and of area minimizing flat chains modulo two with arbitrary codimension. Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970) 767771.

[FF] H. Federer and W.H. Fleming, Normal and integral currents. Ann. of Math.(2) 72 (1960), 458–520.

[Fl] Wendell H. Fleming, On the oriented Plateau problem. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 11 (1962), 6990.

[Ga] R. Garnier, Le problème de Plateau. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, vol. 45 (1928), pp. 53–144.

[HS] R. Hardt and L. Simon, Boundary regularity and embedded solutions for the oriented Plateau problem. Ann. of Math. 110 (1979), 439–486.

[Ha] J. Harrison, Solution of Plateau's problem. Preprint.

[He] A. Heppes, Isogonal sphärischen netze. Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math. 7 (1964), 41–48.

[Lam] E. Lamarle, Sur la stabilité des systèmes liquides en lames minces. Mém. Acad. R. Belg. 35 (1864), 3–104.

[Lawl] Gary Lawlor, Pairs of planes which are not size-minimizing. Indiana Univ. Math. J. 43 (1994), 651–661.

[LM1] Gary Lawlor and Frank Morgan, Paired calibrations applied to soap films, immiscible fluids, and surfaces or networks minimizing

other norms. Pacific J. Math. 166 (1994), no. 1, 55–83.

[LM2] G. Lawlor and F. Morgan, Curvy slicing proves that triple junctions locally minimize area. J. Diff. Geom. 44 (1996), 514–528.

[Laws] H. Blaine Lawson Jr, Lectures on minimal submanifolds. Vol. I. Second edition. Mathematics Lecture Series, 9. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1980. iv+178 pp. ISBN: 0-914098-18-7.

[Li1] X. Liang, Ensembles et cônes minimaux de dimension 2 dans les espaces euclidiens. Thesis, Université de Paris-Sud 11, Orsay, December 2010.

[Li2] X. Liang, Almgren-minimality of unions of two almost orthogonal planes in $\mathbb{R}^4$. Preprint, Université de Paris-Sud 11, Orsay, 2011 arXiv:1103.1468.

[Li3] X. Liang, Topological minimal sets and their applications. Preprint, Université de Paris-Sud 11, Orsay, 2011, arXiv:1103.3871.

[Lu] T. D. Luu, Régularité des cônes et ensembles minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$. Thesis, Université de Paris 11, Orsay 2011.

[Ma] P. Mattila, Geometry of sets and measures in Euclidean space. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 44, Cambridge University Press l995.

[Mo1] F. Morgan, Size-minimizing rectifiable currents. Invent. Math. 96 (1989), no. 2, 333–348.

[Mo2] F. Morgan, Minimal surfaces, crystals, shortest networks, and undergraduate research. Math. Intelligencer 14 (1992), no. 3, 37–44.

[Mo3] F. Morgan, Soap films and mathematics. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 54, Part 1, (1993).

[Mo4] F. Morgan, $(M, \varepsilon, \delta)$-minimal curve regularity. Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994), no. 3, 677–686.

[Mo5] F. Morgan, Geometric measure theory. A beginner's guide. Second edition, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1995. x+175 pp.

[Ni1] Johannes C. C. Nitsche, Vorlesungen ber Minimalflchen. Die Grundlehre der mathematischen Wissenschaften, Band 199. Springer-Verlag,

Berlin-New York, 1975. xiii+775 pp.

[Ni2] Johannes C. C. Nitsche, Lectures on minimal surfaces. Vol. 1. Introduction, fundamentals, geometry and basic boundary value problems, Translated from the German by Jerry M. Feinberg. With a German foreword. Cambridge University Press, Cambridge, 1989. xxvi+563 pp. ISBN: 0-521-24427-7.

[Os] R. Osserman, A survey of minimal surfaces, Second edition. Dover Publications, Inc., New York, 1986. vi+207 pp.

[Pl] J. Plateau, Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires. Gauthier-Villars, Paris, 1873.

[Ra1] T. Radó, The problem of least area and the problem of Plateau. Math. Z. 32 (1930), 763–796.

[Ra2] T. Radó, On the problem of Plateau. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 2, Springer, Berlin 1933; Reprinted Chelsea, New York 1951.

[Re1] E. R. Reifenberg, Solution of the Plateau Problem for $m$-dimensional

surfaces of varying topological type. Acta Math. 104, 1960, 1–92.

[Re2] E. R. Reifenberg, An epiperimetric inequality related to the analyticity of minimal surfaces. Ann. of Math. (2) 80, 1964, 1–14.

[Re3] E. R. Reifenberg, On the analyticity of minimal surfaces. Annals of Math. 80 (1964), 15–21.

[Ta1] J. Taylor, Regularity of the singular sets of two-dimensional area-minimizing flat chains modulo 3 in $\mathbb{R}^3$. Invent. Math. 22 (1973), 119–159.

[Ta2] J. Taylor, The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces. Ann. of Math. (2) 103 (1976), no. 3, 489–539.

[Wh] B. White, Regularity of area-minimizing hypersurfaces at boundaries with multiplicity. In "Seminar on Minimal Submanifolds", E. Bombieri Ed., pp. 293–301, Princeton University Press, NJ. 1983.