

MAP433 Statistique

PC5: Introduction aux tests

26 septembre 2014

1 Test pour une certification bio

Pour avoir la certification "bio", un fabricant de produits "bio" doit garantir pour chaque lot un pourcentage d'OGM inférieur à 1%. Il prélève donc $n = 25$ produits par lot et teste si le pourcentage d'OGM est inférieur à 1%. On note X_i le logarithme naturel du nombre de pourcents d'OGM du paquet numéro i .

Modèle : On suppose que les X_i sont indépendants et suivent une loi gaussienne $\mathcal{N}(\theta, 1)$.

1. Pour $\theta_1 > \theta_0$, montrez que le test de Neyman-Pearson de niveau α de $\mathbf{H}_0 : \theta = \theta_0$ contre $\mathbf{H}_1 : \theta = \theta_1$ est de la forme $\bar{X}_n > t_{n,\alpha}$.
2. Pour le fabricant, le pourcentage d'OGM est inférieur à 1% sauf preuve du contraire. Il veut tester l'hypothèse $\mathbf{H}_0 : \theta \leq 0$ contre $\mathbf{H}_1 : \theta > 0$ et il souhaite que pour $\theta \leq 0$ le test se trompe avec une probabilité inférieure à 5%. Calculez un seuil $t_{25,5}$ tel que

$$\sup_{\theta \leq 0} P_{\theta}(\bar{X}_{25} > t_{25,5}) = 5\%.$$

On pourra utiliser que $P(Z > 1.645) \approx 5\%$, pour $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

3. Une association "anti-OGM" veut s'assurer qu'il n'y a effectivement pas plus de 1% d'OGM dans les produits labélisés "bio". En particulier, elle s'inquiète de savoir si le test parvient à éliminer les produits pour lesquels le pourcentage d'OGM dépasse de 50% le maximum autorisé. Quelle est la probabilité que le test ne rejette pas \mathbf{H}_0 lorsque le pourcentage d'OGM est de 1.5% ?
4. Scandalisée par le résultat précédent, l'association milite pour que le test du fabricant prouve effectivement que le pourcentage d'OGM est inférieur à 1%. Pour elle, le pourcentage d'OGM est supérieur à 1% sauf preuve du contraire, donc \mathbf{H}_0 est $\theta > 0$ et \mathbf{H}_1 est $\theta \leq 0$. Proposez un test de \mathbf{H}_0 contre \mathbf{H}_1 tel que la probabilité que le test rejette à tort \mathbf{H}_0 soit inférieure à 5%.

2 Test de Neyman-Pearson

Chercher la région de rejet du test de Neyman-Pearson dans les cas suivants.

1. Loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta)$. Test de $\theta = \theta_0$ contre $\theta = \theta_1$ avec $\theta_1 > \theta_0$.
2. Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Test de $p = p_0$ contre $p = p_1$ pour $p_1 > p_0$. Quel problème rencontre-t-on dans ce cas ?

3 Test de support

Soient X_1, \dots, X_n de loi $\mathcal{U}[0, \theta]$ et $M = \max(X_i)$, $1 \leq i \leq n$. On cherche à tester $H_0 : \theta = 1$ contre $H_1 : \theta > 1$.

1. Pourquoi ne peut-on pas utiliser ici le test de Neyman-Pearson?
2. On propose le test suivant : on rejette H_0 lorsque $M > c$ ($c > 0$ constante donnée). Calculer la fonction de puissance.
3. Quelle valeur prendre pour c pour obtenir un niveau de 5%?
4. Si $n = 20$ et la valeur observée de M est 0.96, que vaut la p -value? quelle conclusion tirer sur H_0 ? Même question pour $M^{obs} = 1.04$.