

# MARTINGALES POUR LA FINANCE

---

une introduction aux mathématiques financières

---

**Christophe Giraud**

Cours et Exercices corrigés.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Le Cours</b>	<b>7</b>
<b>0</b>	<b>Introduction</b>	<b>8</b>
0.1	Les produits dérivés . . . . .	8
0.2	L'objet des mathématiques financières . . . . .	12
0.3	Principe de la couverture des produits dérivés . . . . .	12
0.4	Modèle à un pas - deux états . . . . .	13
<b>1</b>	<b>Espérance conditionnelle</b>	<b>17</b>
1.1	Conditionnement par rapport à un événement . . . . .	18
1.2	Le cas discret . . . . .	19
1.2.1	Conditionnement par rapport à une variable aléatoire . . . . .	19
1.2.2	Conditionnement par plusieurs variables aléatoires . . . . .	21
1.3	Cadre à densité . . . . .	22
1.4	Caractérisation et propriétés . . . . .	23
1.4.1	Caractérisation . . . . .	23
1.4.2	Propriétés . . . . .	25
1.5	Exercices . . . . .	29
1.5.1	Jeu télévisé . . . . .	29
1.5.2	Un petit calcul . . . . .	30
1.5.3	Un autre calcul . . . . .	30
1.5.4	Encore un calcul! . . . . .	30
1.5.5	Marche aléatoire . . . . .	30
1.5.6	*Somme et produit aléatoires . . . . .	31
1.5.7	*Une formule générique . . . . .	31
1.5.8	A propos de l'inégalité de Jensen . . . . .	31
1.5.9	Espérance conditionnelle et meilleure approximation $\mathcal{F}_n$ -mesurable de $X$ . . . . .	32
1.5.10	*Cohérence des différentes définitions / de la caractérisation . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Martingales</b>	<b>34</b>
2.1	Exemple fondateur : un joueur au casino . . . . .	34
2.2	Temps d'arrêt . . . . .	36
2.2.1	Information $\mathcal{F}_n$ . . . . .	36

2.2.2	Temps d'arrêt . . . . .	38
2.3	Martingales . . . . .	39
2.3.1	Définition . . . . .	39
2.3.2	Théorème d'arrêt . . . . .	41
2.4	Exercices . . . . .	45
2.4.1	Une autre formulation de la propriété de martingale . . . . .	45
2.4.2	Pour s'entraîner ! . . . . .	45
2.4.3	Deux formules utiles . . . . .	45
2.4.4	Temps d'atteinte d'une barrière . . . . .	45
2.4.5	La pièce truquée . . . . .	46
2.4.6	Décomposition de Doob . . . . .	46
2.4.7	*Généalogie de Galton-Watson . . . . .	46
2.4.8	*Première inégalité maximale (Doob) . . . . .	48
2.4.9	*Seconde inégalité maximale (Doob) . . . . .	48
2.4.10	*Identité de Wald . . . . .	49
2.4.11	*Martingales de carré intégrable . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Marché Bond-Stock</b>	<b>50</b>
3.1	Le marché Bond-Stock (ou marché B-S) . . . . .	50
3.1.1	Évolution . . . . .	50
3.1.2	Probabilités risque-neutre . . . . .	52
3.1.3	Portefeuilles autofinancés . . . . .	54
3.2	Arbitrage et martingales . . . . .	56
3.3	Complétude du marché . . . . .	57
3.4	Le lemme de Girsanov . . . . .	58
3.5	Exercices . . . . .	59
3.5.1	Variation d'un portefeuille autofinancé . . . . .	59
3.5.2	Valeur réactualisée d'un portefeuille autofinancé . . . . .	59
3.5.3	Valeur réactualisée d'un portefeuille autofinancé (bis) . . . . .	59
3.5.4	*Changement de probabilité : le lemme de Girsanov . . . . .	60
3.5.5	Détermination d'une probabilité risque-neutre . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Couverture des options européennes</b>	<b>62</b>
4.1	Position du problème . . . . .	62
4.2	Prix d'une option dans un marché complet . . . . .	63
4.3	Et dans un marché incomplet ? . . . . .	64
4.4	Exercices . . . . .	65
4.4.1	Un calcul de prix d'option . . . . .	65
4.4.2	Un autre calcul de prix d'option . . . . .	65
4.4.3	Relation Call-Put . . . . .	66
4.4.4	Modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein . . . . .	66
4.4.5	*Modèles de Black-Scholes et Merton (non corrigé) . . . . .	67
4.4.6	Problème : Option Margrabe . . . . .	68

<b>5</b>	<b>Couverture des options américaines</b>	<b>70</b>
5.1	Problématique . . . . .	70
5.2	Prix d'une option américaine . . . . .	71
5.3	Le principe de programmation dynamique . . . . .	72
5.4	Décomposition de Doob . . . . .	73
5.5	Preuve du Théorème 5.1 . . . . .	74
5.6	Exercices . . . . .	75
5.6.1	Evaluation d'un prix d'option sans programmation dynamique . . . . .	75
5.6.2	Calcul du prix d'un call américain . . . . .	76
5.6.3	Option russe . . . . .	76
5.6.4	*Preuve du Principe de Programmation Dynamique . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Mouvement brownien</b>	<b>78</b>
6.1	Processus en temps continu . . . . .	78
6.2	Mouvement brownien . . . . .	79
6.2.1	Loi Gaussienne . . . . .	79
6.2.2	Définition du mouvement brownien . . . . .	79
6.2.3	Propriétés du mouvement brownien . . . . .	80
6.3	Martingales en temps continu . . . . .	81
6.4	Exercices . . . . .	81
6.4.1	Propriétés de base . . . . .	81
6.4.2	Variation quadratique . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Calcul d'Itô</b>	<b>83</b>
7.1	Problématique . . . . .	83
7.2	Intégrale d'Itô . . . . .	84
7.3	Processus d'Itô . . . . .	85
7.4	Formule de Girsanov . . . . .	88
7.4.1	Exponentielle stochastique . . . . .	88
7.4.2	Formule de Girsanov . . . . .	88
7.5	Exercices . . . . .	89
7.5.1	Avec la formule d'Itô . . . . .	89
7.5.2	De l'exponentielle stochastique . . . . .	90
7.5.3	Avec Girsanov . . . . .	90
7.5.4	*De la formule de Girsanov . . . . .	90
7.5.5	*Fonctions d'échelle . . . . .	90
7.5.6	Formule de Cameron-Martin . . . . .	91
<b>8</b>	<b>Modèle de Black et Scholes</b>	<b>92</b>
8.1	Modèle de Black et Scholes . . . . .	92
8.1.1	Évolution du marché . . . . .	92
8.1.2	Portefeuille . . . . .	93
8.1.3	Probabilité risque-neutre . . . . .	94

8.2	Couverture des options européennes dans le modèle Black-Scholes . . . . .	94
8.3	Exercices . . . . .	98
8.3.1	La formule de Black et Scholes . . . . .	98
8.3.2	L'équation aux dérivées partielles de Black et Scholes . . . . .	99
8.3.3	La valeur au temps $t$ du portefeuille $\Pi^*$ . . . . .	99
<b>A</b>	<b>Rappels de probabilités</b>	<b>100</b>
A.1	Événements . . . . .	100
A.2	Variables aléatoires . . . . .	100
A.3	Convergence de variables aléatoires . . . . .	102
<b>B</b>	<b>Construction de l'intégrale d'Itô</b>	<b>104</b>
<b>II</b>	<b>Les Corrigés</b>	<b>108</b>
<b>9</b>	<b>Exercices du Chapitre 1</b>	<b>109</b>
<b>10</b>	<b>Exercices du Chapitre 2</b>	<b>116</b>
<b>11</b>	<b>Exercices du Chapitre 3</b>	<b>126</b>
<b>12</b>	<b>Exercices du Chapitre 4</b>	<b>130</b>
<b>13</b>	<b>Exercices du Chapitre 5</b>	<b>136</b>
<b>14</b>	<b>Exercices du Chapitre 6</b>	<b>140</b>
<b>15</b>	<b>Exercices du Chapitre 7</b>	<b>143</b>
<b>16</b>	<b>Exercices du Chapitre 8</b>	<b>147</b>

# Préface

Ce livre est conçu comme une première introduction aux raisonnements et aux outils mathématiques utilisés en finance pour l'évaluation et la couverture des produits dérivés. Tant par son style que par son contenu, il s'adresse à un lecteur utilisateur d'outils mathématiques plutôt que mathématicien. Les publics visés sont les élèves des grandes écoles et les étudiants en master MASS, finance ou ingénierie mathématique. Cependant, il intéressera aussi les étudiants en mathématiques ou en économie soucieux d'élargir leur champ de connaissances.

La théorie de la couverture des produits dérivés en finance est basée sur des outils mathématiques sophistiqués : processus stochastiques, calcul d'Itô, etc. Toute introduction à cette théorie se trouve confrontée au dilemme soit d'exposer rigoureusement la théorie en s'adressant (exclusivement) à des mathématiciens, soit de s'adresser au plus grand nombre en esquivant les mathématiques sous-jacentes. Cet ouvrage, accessible à toute personne ayant suivi un cours de base en probabilités, propose une introduction conjointe à la théorie de la couverture des produits dérivés et aux mathématiques sur lesquels elle est fondée. Il est conçu comme un cours de mathématiques pour la finance : il ne vise donc pas à construire une structure parfaitement rigoureuse et cohérente, mais plutôt à familiariser le lecteur avec divers outils mathématiques utilisés en finance. L'objectif est d'apprendre à mener à terme un calcul impliquant des martingales ou le calcul d'Itô, plutôt que d'exposer la subtile théorie de ces objets. Ce point de vue nous a conduit à donner une présentation intuitive et simplifiée de certaines notions (mesurabilité, intégrale d'Itô) quitte à sacrifier un peu de rigueur à la clarté d'exposition. Cependant, tous les résultats énoncés sont exacts et par souci de complétude, les conditions techniques qui assurent leur validité (telles que *mesurable* ou *intégrable*) sont indiquées entre parenthèses, dans une police de caractères de taille réduite.

L'intégralité du livre est basée sur les cours de *Calcul stochastique pour la finance* donnés dans le cadre des masters MASS et mathématiques appliquées de l'université de Nice - Sophia Antipolis ainsi que du master IMAMIS de U.P. Manila. Après une brève introduction aux produits dérivés et à la problématique du cours, les deux premiers chapitres présentent deux concepts importants en mathématiques financières : l'espérance conditionnelle et les martingales. Les trois chapitres suivants traitent de l'évaluation et de la couverture d'options dans des modèles probabilistes discrets. Les chapitres 6 et 7 sont consacrés au mouvement brownien et au calcul d'Itô qui permettent d'analyser le modèle de Black et Scholes abordé au chapitre 8. La mise en pratique étant indispensable à l'as-

simulation d'un cours, chaque chapitre se conclut par une série d'exercices. Ceux à visée un peu plus théorique ou nécessitant un peu plus d'aisance en mathématiques sont repérés par une étoile \*. Vous trouverez les corrigés de chaque exercice à la fin de l'ouvrage, classés par chapitre. Au risque de radoter des banalités, nous rappelons que lire le corrigé d'un exercice sans l'avoir cherché un certain temps / tenté différentes solutions / écrit des formules (erronées ou non), ne sert à peu près à rien. Mieux vaut chercher un seul exercice que de lire tous les corrigés. Il nous semble que commettre des erreurs, puis les comprendre est une étape primordiale de l'apprentissage.

Conçu comme une première introduction aux mathématiques financières, ce livre ne requiert comme prérequis qu'un cours de base en probabilités (de niveau universitaire). Pour assister le lecteur, l'annexe A fournit un rappel des principaux résultats qui lui seront utiles. La contrepartie de la simplicité de ce cours est son insuffisance pour devenir "spécialiste" en mathématiques financières. La lecture du petit livre de Chabardes & Delcaux [2] ou du gros tome (classique) de Hull [4] vous permettra d'en apprendre bien plus sur les produits dérivés. Pour parfaire votre apprentissage du calcul stochastique, vous pouvez vous tourner vers l'ouvrage très pédagogique d'Oksendal [8] ou aborder ceux (beaucoup plus complets et ardu) de Karatzas & Shreve [5] ou de Revuz & Yor [10]. Enfin, pour approfondir vos connaissances en mathématiques financières, le cours de Lamberton & Lapeyre [6] est incontournable, ainsi que l'excellent ouvrage de Demange & Rocher [3].

Ce livre a été en partie rédigé alors que j'étais invité à HEC Montréal. Je tiens à remercier très chaleureusement le département de mathématiques et en particulier Bruno Rémillard pour leur accueil. Je souhaite aussi remercier Philippe Dumont pour m'avoir transmis une partie de ses notes de cours et Nicolas Rousseau pour ses commentaires et m'avoir encouragé à rédiger cet ouvrage. Enfin, mes plus profonds remerciements vont à Dominique Charland pour son soutien, sa patience et ses illustrations.

# Première partie

## Le Cours



# Chapitre 0

## Introduction

L'objet de ce cours est de présenter les outils mathématiques de bases utilisés pour l'évaluation et la couverture des produits dérivés. Les deux premiers chapitres introduisent deux concepts fondamentaux pour la suite : l'espérance conditionnelle et les martingales. Les trois chapitres suivants sont consacrés à la couverture et la détermination du prix d'une option dans des modèles discrets. Enfin, les chapitres 6 et 7 apportent les outils probabilistes nécessaires (mouvement brownien, calcul d'Itô) à l'étude du modèle de Black et Scholes (Chapitre 8).

---

Dans ce chapitre introductif, vous trouverez une brève description de quelques produits dérivés (option d'achat européenne, américaine, etc), une présentation de la problématique du cours et une initiation aux méthodes des mathématiques financières sur un exemple très simple : le modèle à "un pas - deux états"

### 0.1 Les produits dérivés

Pour mieux comprendre l'objet de ce cours, commençons par une présentation schématique des produits financiers. On distingue les produits dérivés, des titres de base.

– Les titres de base : ce sont des titres<sup>1</sup> tels que les actions<sup>2</sup> (*shares / stock*) ou les obligations<sup>3</sup> (*bond*).

---

<sup>1</sup>Instrument négociable, coté ou susceptible de l'être, représentant selon le cas une part du capital social de l'émetteur (action ou part), une part d'un emprunt à long terme émis par une société ou une collectivité publique (obligation), un droit de souscrire une valeur de l'émetteur (bon ou droit de souscription), ou encore une option ou un contrat à terme négociable sur une marchandise, sur une valeur ou sur un autre instrument financier (Source : grand dictionnaire terminologique).

<sup>2</sup>Titre cessible et négociable, nominatif ou au porteur, représentant une participation au capital social d'une société par actions, auquel sont attachés différents droits définis dans la législation ou les statuts de la société (Source : grand dictionnaire terminologique).

<sup>3</sup>Titre d'emprunt collectif remis par une société ou une collectivité publique à ceux qui lui prêtent des capitaux pour répondre à une demande d'emprunt à long terme (Source : grand dictionnaire terminologique).

- Les produits dérivés : ce sont aussi des titres, mais ils ont la particularité que leur valeur dépend du cours d'un titre de base<sup>4</sup>, appelé *actif sous-jacent* ou simplement *sous-jacent*. Les produits dérivés sont des produits "d'assurance" qui permettent de réduire ou d'éliminer certains risques financiers (liés aux fluctuations des taux de change, aux fluctuations du cours des matières premières, etc), mais qui peuvent aussi être utilisés à des fins spéculatives.

Citons deux marchés importants en France où se négocient des produits dérivés : le MATIF (Marché à Terme International de France) et le MONEP (Marché des Options Négociables de Paris).

## Exemples de produits dérivés

Certains agents financiers ou industriels peuvent souhaiter transférer certains risques financiers, soit par choix commercial, soit parce qu'ils n'entrent pas dans le cadre de leurs compétences, soit parce qu'il est moins coûteux de les faire supporter par un intermédiaire spécialisé.

### Exemples :

1. Une société aéronautique européenne tient sa comptabilité en euros et signe ses contrats en dollars, payables à la livraison. Entre la signature du contrat et la livraison le taux de change euro/dollar va fluctuer. L'entreprise est donc soumise à un risque de change. Si elle ne souhaite pas l'assumer, elle va chercher sur le marché des changes à le faire supporter par une société spécialisée.
2. Le cours du cuivre est très fluctuant. Une mine de cuivre souhaite se prémunir contre ces variations de cours. Elle va chercher un contrat qui lui permettra à une certaine échéance de vendre son cuivre à un prix minimal  $K$ . Ce contrat s'appelle une option de vente (voir ci-dessous).

Pour éliminer ce type de risque, les produits financiers usuels sont les options d'achat et de vente. Ce sont des produits dérivés classiques.

### Définition - Option d'achat européenne - (*european call*)

*Contrat qui donne à son détenteur (ou acheteur) le droit mais non l'obligation d'acheter un actif (tel qu'une action, un baril de pétrole, etc) à une date  $N$  (l'échéance) au prix  $K$ , dit prix d'exercice (strike), fixé à l'avance. Ce contrat a un prix  $C$  (la prime).*

Si on note  $S_n$  le cours de l'actif sous-jacent au temps  $n$ , il peut se produire deux cas de figure à l'échéance  $N$  :

---

<sup>4</sup>tel que le cours d'une action, le prix d'une marchandise, un cours de change, un indice de prix, etc

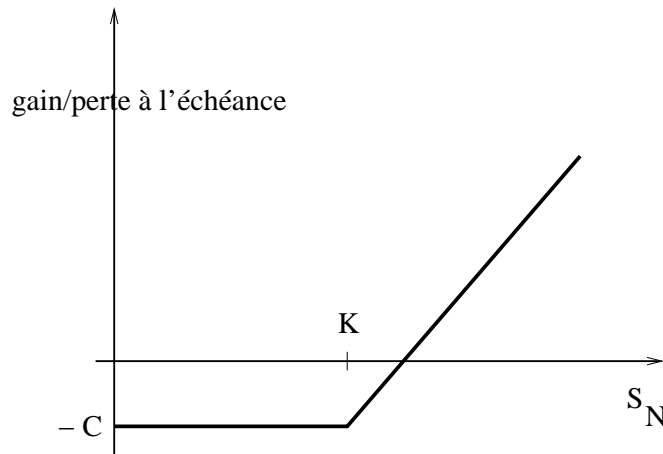


FIG. 1 – Gain/perte d'un acheteur d'une option d'achat européenne

- soit  $S_N < K$  : le détenteur (ou acheteur) de l'option a le droit d'acheter au prix  $K$  un actif qu'il pourrait acheter moins cher sur le marché. Ce droit n'a aucun intérêt. Il ne l'exerce donc pas et il ne se passe rien.
- soit  $S_N \geq K$  : le détenteur de l'option d'achat peut acheter l'actif moins cher que sur le marché, ce qu'il fait. Le vendeur de l'option doit donc acheter l'actif au prix  $S_N$  et le revendre au prix  $K$  à l'acheteur. Cela revient à payer  $S_N - K$  au détenteur de l'option d'achat.

En conclusion : au temps  $n = 0$  l'acheteur paie  $C$  au vendeur de l'option d'achat. Au temps  $N$ , il reçoit le maximum de  $S_N - K$  et 0, noté  $(S_N - K)_+$ . La Figure 1 représente le gain (ou la perte) final du détenteur d'une option d'achat européenne en fonction de la valeur  $S_N$  de l'actif sous-jacent à l'échéance.

On appelle fonction de paiement (*payoff*) la quantité d'argent que reçoit le détenteur d'une option à l'échéance. Dans le cas d'une option d'achat européenne, la fonction de paiement est  $f = (S_N - K)_+$ .

**Définition** - Option de vente européenne - (*European put*)

*Contrat qui donne à son détenteur le droit mais non l'obligation de vendre un actif à une date  $N$  (l'échéance) au prix  $K$  fixé à l'avance. Ce contrat a un prix  $C$ . Dans ce cas la fonction de paiement est  $f = (K - S_N)_+$ .*

La Figure 2 trace le gain final du détenteur d'une option de vente européenne en fonction de la valeur  $S_N$  de l'actif sous-jacent à l'échéance.

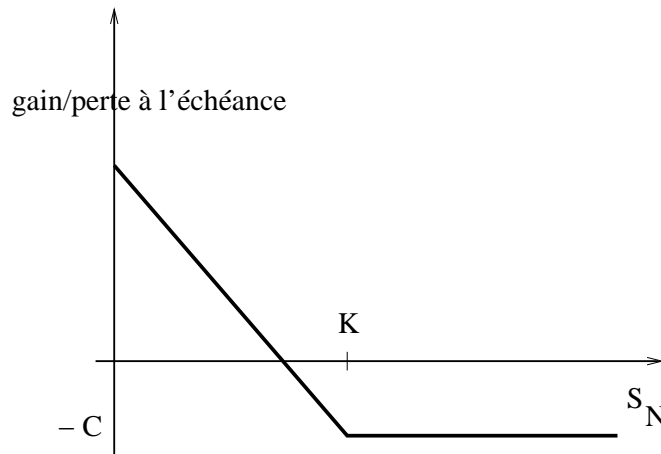


FIG. 2 – Gain/perte d'un acheteur d'une option de vente européenne

**Définition** - Option d'achat (resp. vente) américaine - (*american call / put*)

*Contrat qui donne à son détenteur le droit mais non l'obligation d'acheter (resp. vendre) un actif à n'importe quelle date avant la date N (l'échéance) au prix  $K$  fixé à l'avance. Ce contrat a un prix  $C$ .*

Il existe bien d'autres types d'options, appelées options exotiques. Par exemple l'option d'achat Collar a pour fonction de paiement  $f = \min(\max(K_1, S_N), K_2)$ , celle de Boston  $f = (S_N - K_1)_+ - (K_2 - K_1)$ , avec  $K_1 < K_2$ , etc. Nous recommandons au lecteur désireux de mieux connaître les produits dérivés, le petit livre de Chabardes et Delcaux [2] ou le gros tome de Hull [4].

**Remarque :** Nous avons souligné l'usage des options comme produit d'assurance. Elles peuvent aussi être utilisées comme produit de spéculation à fort potentiel, mais aussi à fort risque. Voyons cela sur un exemple. Une action  $S$  cote aujourd'hui 100 Euros. Vous pressentez une hausse du cours de cette action dans le mois à venir et vous avez 1500 Euros à investir.

Une première possibilité est d'acheter 15 actions. Si dans un mois le cours est passé à 110 Euros (comme vous l'aviez anticipé), vous avez gagné  $15 \times (110 - 100) = 150$  Euros. A contrario, si le cours passe à 90 Euros, vous avez perdu 150 Euros.

Une alternative est d'investir dans des options d'achat européennes plutôt que dans des actions. Supposons qu'une option d'achat européenne d'un mois et de prix d'exercice 95 coûte 7.5 Euros (voir l'exercice à la fin du chapitre). Vous pouvez acheter 200 options avec vos 1500 Euros. Si le cours passe à 110 Euros, vous exercez votre droit et percevez  $200 \times (110 - 95) = 3000$  Euros, d'où un bénéfice de  $3000 - 1500 = 1500$  Euros. Par contre, si le cours passe à 90 Euros, vous ne percevez rien et vous avez perdu vos 1500 Eu-

ros investis. Pour un usage spéculatif, les produits dérivés permettent donc d'augmenter substantiellement les gains potentiels mais aussi les pertes par un "effet de levier".

## 0.2 L'objet des mathématiques financières

L'institution (une banque) qui vend des produits dérivés est confrontée à deux questions :

1. Quel est le prix "équitable"  $C$  d'un produit dérivé ? c'est le problème du calcul du prix du produit dérivé (la *prime*).
2. Comment gérer la prime reçue (au temps 0) de telle sorte qu'à l'échéance  $N$  l'institution puisse faire face à son engagement (c'est à dire verser la fonction de paiement  $f$  au client) ? C'est le problème de la *couverture* du produit dérivé.

L'objet essentiel des mathématiques financières est de répondre à ses deux questions. Nous soulignons en particulier que le problème est bien "comment gérer les produits dérivés ?" et non pas "comment spéculer sur les marchés financiers ?".

Pour répondre à ces deux questions, la première étape consiste à modéliser les marchés. L'avenir étant incertain, ces modèles sont de type probabilistes. En effet, le cours du sous-jacent d'un produit dérivé fluctue aléatoirement au cours du temps ; il sera modélisé par un *processus stochastique*<sup>5</sup>. Par exemple, le célèbre modèle de Black et Scholes<sup>6</sup> décrit l'évolution de l'actif sous-jacent par un mouvement brownien géométrique (voir le Chapitre 8). Une fois le marché modélisé, il faut répondre aux deux questions précédentes. Plus le modèle est complexe, plus son analyse est difficile. Dans ce cours, nous considérerons deux modèles simples de marché : le modèle discret et le modèle de Black et Scholes. Nous verrons comment calculer le prix d'une option et la couvrir sous diverses hypothèses simplificatrices, telles que

- l'absence de coûts de transaction (pour l'achat ou la vente d'un titre),
- l'absence de dividende sur les titres,
- la possibilité d'emprunt illimité,
- l'existence d'acheteurs et de vendeurs pour toute quantité et tout type de produits financiers (marché liquide).

Les outils mathématiques utilisés seront les martingales introduites au Chapitre 2 et le calcul d'Itô, présenté au Chapitre 7.

## 0.3 Principe de la couverture des produits dérivés

Le principe de la couverture du risque des produits dérivés diffère fondamentalement de celui de la couverture du risque d'une assurance classique (contre le vol, le feu, etc).

Pour faire face à ses obligations, un assureur classique vend beaucoup de contrats et compte sur le fait que la probabilité qu'un trop grand nombre de sinistres aient lieu simultanément

<sup>5</sup>On appelle processus stochastique une "valeur" qui évolue aléatoirement au cours du temps

<sup>6</sup>prix Nobel d'économie en 1997 avec Merton.

est suffisamment faible. Cette stratégie de couverture du risque, s'appelle "couverture du risque par *diversification*".

Une telle stratégie de couverture n'est pas adéquate pour les produits dérivés (entre autre à cause de la forte corrélation entre les cours des différents produits financiers). La banque doit donc éliminer le risque sur *un seul contrat*. Le principe est le suivant. Considérons une option d'achat européenne. La banque va utiliser la prime  $C$  ainsi qu'un emprunt pour acheter un peu de sous-jacent  $S$ . On dit qu'elle se constitue un portefeuille. Au cours du temps, elle va faire varier la quantité de sous-jacent dans son portefeuille, de telle sorte qu'à l'échéance elle dispose d'une richesse  $(S_N - K)_+$ .

Dans l'exemple suivant, nous mettons en oeuvre ce principe dans le modèle le plus simple possible : le modèle à un pas - deux états. Nous mettons à profit cet exemple pour introduire de façon élémentaire les méthodes qui seront développées par la suite pour des modèles plus complexes.

## 0.4 Modèle à un pas - deux états

Dans ce modèle on suppose qu'il n'y a que deux dates, aujourd'hui et l'échéance ( $N = 1$ ), et que le cours  $S_N$  de l'actif  $S$  à l'échéance ne peut prendre que deux valeurs  $S_+$  ou  $S_-$ . On note  $S_0$  le cours de l'actif  $S$  aujourd'hui. Outre la possibilité d'investir sur l'actif  $S$ , un agent financier peut aussi emprunter ou placer de l'argent au taux  $r$ .

On veut calculer le prix et la couverture d'une option d'échéance  $N$  et de fonction de paiement  $f$  de la forme  $f = g(S_N)$  (s'il s'agit d'une option d'achat européenne  $g(x) = (x - K)_+$ ). Pour faire face à son engagement, le vendeur de l'option va investir sur le marché financier. Il va acheter une quantité  $\gamma$  (à déterminer) d'actif  $S$ , et aussi  $\beta$  unités monétaires : si  $\beta$  est négatif, cela correspond à un emprunt au taux  $r$ , si  $\beta$  est positif, cela correspond à un placement rémunéré au (même) taux  $r$ . On dit que le vendeur de l'option se constitue un *portefeuille*  $\Pi = (\beta, \gamma)$ , composé de  $\beta$  unités monétaires et  $\gamma$  actifs  $S$ . La valeur de son portefeuille aujourd'hui est  $X_0 = \beta + \gamma S_0$ . Demain, elle sera  $X_N = \beta(1 + r)^N + \gamma S_N$  (on rappelle que  $N = 1$  dans ce paragraphe).

Pour que le vendeur puisse honorer son contrat, il faut que la valeur de son portefeuille au temps  $N$  soit supérieure à la fonction de paiement, c'est-à-dire :

$$X_N \geq g(S_N).$$

Imaginons que dans le cas  $S_N = S_+$  ou  $S_N = S_-$ , la valeur du portefeuille soit strictement supérieure à la valeur de la fonction de paiement  $g(S_N)$ . Alors le vendeur aurait l'opportunité de gagner de l'argent avec une probabilité strictement positive, sans prendre de risque. Une telle opportunité, s'appelle une *opportunité d'arbitrage* en finance. On considère que cela est impossible (marché équilibré) ; on dit que l'on fait l'hypothèse "d'absence d'opportunité d'arbitrage". En conséquence, on doit avoir  $X_N = g(S_N)$ , donc  $(\beta, \gamma)$  est l'unique

solution du système d'équations

$$\begin{cases} \beta(1+r)^N + \gamma S_+ &= g(S_+) \\ \beta(1+r)^N + \gamma S_- &= g(S_-). \end{cases}$$

Cette solution est donnée par

$$\gamma = \frac{g(S_+) - g(S_-)}{S_+ - S_-} \quad (1)$$

et

$$\beta = (1+r)^{-N} \frac{g(S_-)S_+ - g(S_+)S_-}{S_+ - S_-}.$$

La formule (1) est communément appelée "formule du delta de couverture". Le portefeuille  $\Pi$  ainsi constitué par le vendeur, a une valeur initiale  $X_0 = \beta + \gamma S_0$ . Cette valeur correspond au coût du contrat. Le prix équitable  $C$  de l'option (la prime) sera donc  $C = \beta + \gamma S_0$ .

**En résumé :** au temps  $t = 0$ , l'acheteur verse  $C = \beta + \gamma S_0$  au vendeur. Avec cette prime, le vendeur se constitue un portefeuille composé de  $\gamma$  actifs  $S$  et  $\beta$  unités monétaires.

Au temps  $N$ , soit l'actif vaut  $S_+$ , et alors le vendeur verse  $g(S_+)$  à l'acheteur, soit l'actif vaut  $S_-$ , auquel cas le vendeur verse  $g(S_-)$  à l'acheteur.

- **Exercice :** Déterminez le prix d'une option d'achat européenne et son portefeuille de couverture  $(\beta, \gamma)$ , lorsque  $S_0 = 100$ ,  $K = 95$ ,  $r = 0$ ,  $S_+ = 110$  et  $S_- = 90$  (corrigé à la fin du chapitre).

**Remarque fondamentale :** Le prix de l'option que l'on vient de calculer, ainsi que la composition  $(\beta, \gamma)$  du portefeuille de couverture ne dépendent pas de la probabilité que l'actif  $S$  prenne la valeur  $S_+$  ou  $S_-$  !?!

Pourquoi ?

Car on a cherché à se couvrir dans tous les cas et non pas en moyenne. Si on veut être couvert dans tous les cas, peu importe que la probabilité de hausse soit supérieure ou non à celle de baisse, puisque notre couverture doit marcher dans les deux cas. Nous n'avons donc effectué aucun raisonnement de type probabiliste (à la différence de la couverture par diversification).

Cependant, on peut interpréter le prix de l'option comme l'espérance de gain de son acheteur, non pas sous la probabilité réelle (dont on a vu qu'elle n'intervenait pas), mais sous une autre probabilité (artificielle) appelée probabilité risque-neutre. Cette remarque est la clef de voûte des méthodes de couverture d'options développées par la suite.

Examinons cela de plus près dans le cas d'une option d'achat européenne. Notons  $\mathbb{P}^*$  la probabilité, dite risque-neutre, définie par

$$\mathbb{P}^*(S_N = S_+) = p^* := \frac{(1+r)^N S_0 - S_-}{S_+ - S_-} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^*(S_N = S_-) = 1 - p^* = \frac{S_+ - (1+r)^N S_0}{S_+ - S_-}.$$

Pour que  $\mathbb{P}^*$  soit bien une probabilité, on supposera que  $S_- < S_0(1+r)^N < S_+$  (cette condition correspond à une condition d'absence d'opportunité d'arbitrage). La probabilité  $\mathbb{P}^*$  a été choisie de telle sorte que  $S_0 = \mathbb{E}^* [(1+r)^{-N} S_N]$ . En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^* [(1+r)^{-N} S_N] &= (1+r)^{-N} S_+ p^* + (1+r)^{-N} S_- (1-p^*) \\ &= \frac{(1+r)^{-N} S_+ ((1+r)^N S_0 - S_-) + (1+r)^{-N} S_- (S_+ - (1+r)^N S_0)}{S_+ - S_-} \\ &= S_0. \end{aligned}$$

On appelle *valeur réactualisée* de  $S_n$  la quantité  $(1+r)^{-n} S_n$ . Elle correspond au nombre d'unités monétaires qu'il est possible d'acheter avec un actif  $S$  au temps  $n$ . La probabilité  $\mathbb{P}^*$  a donc été choisie de telle sorte que l'évolution de la valeur réactualisée de l'actif  $S$  n'ait pas de tendance à la hausse ou à la baisse en moyenne. Nous généraliserons cette approche ultérieurement par la théorie des martingales.

Relions le prix  $C$  de l'option à la probabilité  $\mathbb{P}^*$ . Pour une option d'achat européenne, la fonction de paiement est  $g(S_N) = (S_N - K)_+$ . Si  $S_- < K < S_+$  on a  $g(S_+) = S_+ - K$  et  $g(S_-) = 0$ , donc le prix de l'option est

$$C = \beta + \gamma S_0 = -(1+r)^{-N} \frac{(S_+ - K)S_-}{S_+ - S_-} + \frac{S_+ - K}{S_+ - S_-} S_0 = \frac{(S_+ - K)(S_0 - (1+r)^{-N} S_-)}{S_+ - S_-}. \quad (2)$$

Calculons maintenant la valeur moyenne de la fonction de paiement réactualisée  $(1+r)^{-N} (S_N - K)_+$  sous la probabilité  $\mathbb{P}^*$

$$\mathbb{E}^* [(1+r)^{-N} (S_N - K)_+] = p^* (1+r)^{-N} (S_+ - K) = \frac{(S_+ - K)(S_0 - (1+r)^{-N} S_-)}{S_+ - S_-}. \quad (3)$$

En comparant (2) et (3), on voit que le prix  $C$  de l'option est égal à la valeur moyenne sous la probabilité risque-neutre  $\mathbb{P}^*$  de la fonction de paiement réactualisée :

$$\boxed{C = \mathbb{E}^* [(1+r)^{-N} (S_N - K)_+] .}$$

Nous généraliserons cette formule dans les chapitres 4, 5 et 8.



**Corrigé de l'exercice**

On a

$$C = \frac{(S_+ - K)(S_0 - (1+r)^{-N}S_-)}{S_+ - S_-} = 15 \times 10/20 = 7.5$$

$$\gamma = \frac{S_+ - K}{S_+ - S_-} = 15/20 = 0.75$$

$$\beta = -\frac{(S_+ - K)S_-}{S_+ - S_-} = -15 \times 90/20 = -67.5$$

La valeur de  $\beta$  est négative, cela correspond à un emprunt. En résumé, la banque touche la prime de 7.5 et emprunte 67.5. Avec ces  $7.5 + 67.5 = 75$  elle achète 0.75 actif  $S$ .

A l'échéance :

- Si  $S_N = S_+ = 110$ . La banque vend son 0.75 actif  $S$  ce qui lui rapporte  $0.75 \times 110 = 82.5$ . Avec cet argent, elle rembourse son emprunt de 67.5. Elle dispose donc de  $82.5 - 67.5 = 15$ , ce qui est exactement la somme nécessaire pour verser  $110 - 95 = 15$  à l'acheteur.
- Si  $S_N = S_- = 90$ . En vendant son 0.75 actif  $S$ , la banque récupère  $0.75 \times 90 = 67.5$  ce qui lui permet de rembourser son emprunt. Elle ne doit rien à l'acheteur (le prix du marché est inférieur au prix d'exercice).

# Chapitre 1

## Espérance conditionnelle

**Objectif :** L'objectif de ce chapitre est de formaliser la notion d'espérance conditionnelle, sachant une information  $\mathcal{I}$ .

---

L'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire  $X$  sachant une information  $\mathcal{I}$  est "la valeur moyenne attendue pour  $X$  lorsque l'on connaît l'information  $\mathcal{I}$ ." Par exemple, lançons deux dés à 6 faces et regardons la somme  $S$  des deux valeurs obtenues. Notons  $X_1$  la valeur obtenue avec le premier dé et  $X_2$  celle obtenue avec le second dé, ainsi  $S = X_1 + X_2$ . Avant de lancer le premier dé, on ne dispose d'aucune information sur  $S$ , donc la valeur moyenne attendue pour  $S$  est simplement

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = 7.$$

Après le lancer du premier dé, on connaît la valeur de  $X_1$ . Avec cette information, on s'attend à avoir en moyenne pour  $S$

$$X_1 + \mathbb{E}(X_2) = X_1 + 7/2.$$

Cette dernière quantité est ce que l'on appelle l'espérance conditionnelle de  $S$  sachant  $X_1$ , elle est notée  $\mathbb{E}(S | X_1)$ . L'objet de ce chapitre est de formaliser cette notion et de fournir les outils qui permettent de calculer les espérances conditionnelles.

Nous allons commencer par quelques rappels sur le conditionnement par un événement, avant de définir l'espérance conditionnelle dans les cadres discret et à densité. Ensuite nous donnerons une caractérisation de l'espérance conditionnelle, puis les propriétés qui permettent de calculer cette quantité efficacement.

---

**Notations :** Dans ce chapitre et les suivants  $\Omega$  représente l'univers des possibles,  $\mathcal{F}$  désigne l'ensemble de tous les événements possibles et  $\mathbb{P}(A)$  est la probabilité qu'un événement  $A \in \mathcal{F}$  ait lieu.

## 1.1 Conditionnement par rapport à un événement

Nous rappelons dans ce paragraphe la notion de conditionnement par rapport à un événement.

**Rappel :** Soit  $B$  un événement de probabilité  $\mathbb{P}(B) > 0$ . La *probabilité conditionnelle* d'un événement  $A$  sachant l'événement  $B$  est

$$\mathbb{P}(A | B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Cette quantité représente "la probabilité que l'événement  $A$  ait lieu, sachant que l'événement  $B$  a lieu."

**Remarque :** Si l'événement  $A$  est indépendant<sup>1</sup> de l'événement  $B$  alors

$$\mathbb{P}(A | B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A).$$

Cette égalité traduit que la réalisation de l'événement  $B$  n'apporte pas d'information sur la probabilité que se réalise l'événement  $A$ .

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$  une variable aléatoire à valeurs dans un sous-ensemble fini  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$  de  $\mathbb{R}$ . À partir de  $\mathbb{P}(\cdot | B)$  on peut définir l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant l'événement  $B$  par

$$\mathbb{E}(X | B) := \sum_{x \in \mathcal{X}} x \mathbb{P}(X = x | B). \quad (1.1)$$

Cette quantité est un nombre réel. Elle représente "la valeur moyenne attendue pour  $X$  sachant que l'événement  $B$  a lieu."

**Exemples :**

- lançons un dé à 6 faces, et notons  $X$  la valeur prise par ce dé. Si  $B$  est l'événement "X est supérieur ou égal à trois", alors la valeur moyenne attendue pour  $X$  sachant  $B$  est  $\mathbb{E}(X | B) = \sum_{i=1}^6 i \mathbb{P}(X = i | B)$ . Comme  $\mathbb{P}(B) = 2/3$ , il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = i | B) &= \frac{3}{2} \mathbb{P}(\{X = i\} \cap B) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \text{ ou } 2 \\ 3/2 \times 1/6 = 1/4 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement,  $\mathbb{E}(X | B) = \frac{1}{4}(3 + 4 + 5 + 6) = 9/2$ .

<sup>1</sup>voir l'annexe A pour un rappel de cette notion

2. Reprenons l'exemple de l'introduction de ce chapitre avec les deux dés. Considérons l'événement  $B := \{X_1 = 5\}$ . Comme les événements  $\{X_2 = i - 5\}$  et  $\{X_1 = 5\}$  sont indépendants (car  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendants) on a

$$\mathbb{P}(S = i \mid X_1 = 5) = \mathbb{P}(X_2 = i - 5 \mid X_1 = 5) = \mathbb{P}(X_2 = i - 5).$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(S = i \mid X_1 = 5) = \begin{cases} 1/6 & \text{si } i \in \{6, \dots, 11\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S \mid X_1 = 5) &= \sum_{i=2}^{12} i \mathbb{P}(S = i \mid X_1 = 5) \\ &= (6 + \dots + 11)/6 = 5 + 7/2. \end{aligned}$$

Plus généralement, pour  $j \in \{1, \dots, 6\}$  on trouve  $\mathbb{E}(S \mid X_1 = j) = j + 7/2$ .

Dans la suite, nous n'allons plus considérer le conditionnement par rapport à un événement mais par rapport à une ou plusieurs variables aléatoires. L'espérance conditionnelle ne sera alors plus un nombre réel comme dans ce paragraphe, mais une variable aléatoire. Nous commençons par le cas le plus simple où toutes les variables aléatoires prennent un nombre fini de valeurs.

## 1.2 Le cas discret

### 1.2.1 Conditionnement par rapport à une variable aléatoire

Commençons par nous forger une intuition de cette notion sur un exemple.

- **Exemple.** Imaginons un jeu en 2 étapes : première étape on lance un dé et on appelle  $Z$  la valeur obtenue. Deuxième étape, on relance  $Z$  fois le dé et on multiplie entre elles les  $Z$  valeurs obtenues. On appelle  $X$  ce produit.

On sait calculer  $\mathbb{E}(X \mid Z = 5)$ . Si  $Z(\omega) = 5$ , on relance 5 fois le dé de manière indépendante, donc

$$\mathbb{E}(X \mid Z = 5) = \mathbb{E}(Z_1 \cdots Z_5) = \mathbb{E}(Z_1) \cdots \mathbb{E}(Z_5)$$

où  $Z_1, \dots, Z_5$  sont les 5 valeurs obtenues lors des 5 lancers de dé. On trouve finalement  $\mathbb{E}(X \mid Z = 5) = m \times \dots \times m = m^5$ , où  $m = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 7/2$  est la valeur moyenne obtenue pour un lancer. Plus généralement, si  $i \in \{1, \dots, 6\}$ , on a  $\mathbb{E}(X \mid Z = i) = m^i$ . Autrement dit, lorsqu'on connaît la valeur de  $Z$ , on s'attend à avoir

en moyenne pour  $X$  la valeur  $m^Z$ . Dans ce cas l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $Z$  sera

$$\mathbb{E}(X | Z) := m^Z.$$

L'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(X | Z)$  est donc une variable aléatoire. Elle est telle que, si  $Z(\omega) = i$ , alors  $\mathbb{E}(X | Z)(\omega) = \mathbb{E}(X | Z = i)$ .

Nous allons maintenant généraliser cette notion à deux variables aléatoires quelconques  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$  et  $Z : \Omega \rightarrow \mathcal{Z}$ , où  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$  et  $\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_n\}$  sont deux sous-ensembles finis de  $\mathbb{R}$ .

**Définition** - Espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $Z$  -

*L'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $Z$ , notée  $\mathbb{E}(X | Z)$ , est une variable aléatoire, définie par*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X | Z) : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto h(Z(\omega)), \end{aligned}$$

où  $h : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction définie par  $h(z) = \mathbb{E}(X | Z = z)$  quel que soit  $z \in \mathcal{Z}$ . La quantité  $\mathbb{E}(X | Z = z)$  est celle définie par (1.1) avec  $B = \{Z = z\}$ .

**Attention!**  $\mathbb{E}(X | Z = z)$  est un nombre réel, mais  $\mathbb{E}(X | Z)$  est bien une variable aléatoire. En effet,  $\mathbb{E}(X | Z)(\omega)$  dépend de  $\omega$  car la valeur que prend  $Z(\omega)$  dépend de  $\omega$ .

- **Exemple.** Soit  $Z$  une variable aléatoire uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$  (c'est-à-dire telle que  $\mathbb{P}(Z = i) = 1/n$  pour  $i = 1, \dots, n$ ) et  $\varepsilon$  une variable aléatoire indépendante de  $Z$ , telle que  $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = p$  et  $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1 - p$ .

On pose  $X = \varepsilon Z$  qui est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans  $\{-n, \dots, n\}$ . Nous allons calculer  $\mathbb{E}(X | Z)$ . Pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on a

$$\mathbb{E}(X | Z = j) = \sum_{i=-n}^n i \mathbb{P}(X = i | Z = j)$$

avec  $\mathbb{P}(X = i | Z = j) = 0$  si  $i \notin \{-j, j\}$  car  $X = \pm Z$ . Il reste donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X | Z = j) &= -j \mathbb{P}(X = -j | Z = j) + j \mathbb{P}(X = j | Z = j) \\ &= -j \mathbb{P}(\varepsilon = -1 | Z = j) + j \mathbb{P}(\varepsilon = 1 | Z = j). \end{aligned}$$

Les variables aléatoires  $\varepsilon$  et  $Z$  étant indépendantes, les événements  $\{\varepsilon = -1\}$  et  $\{Z = j\}$  le sont aussi, donc

$$\mathbb{P}(\varepsilon = -1 | Z = j) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1 - p$$

et de même  $\mathbb{P}(\varepsilon = 1 \mid Z = j) = \mathbb{P}(\varepsilon = 1) = p$ . Finalement, on obtient

$$\mathbb{E}(X \mid Z = j) = -j(1 - p) + jp = j(2p - 1)$$

et  $\mathbb{E}(X \mid Z) = (2p - 1)Z$ .

- **Exo** : Vérifiez que l'on peut écrire  $\mathbb{E}(X \mid Z)$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X \mid Z)(\omega) &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mathbf{1}_{\{Z(\omega)=z\}} \mathbb{E}(X \mid Z = z) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mathbf{1}_{\{Z(\omega)=z\}} \left[ \sum_{x \in \mathcal{X}} x \mathbb{P}(X = x \mid Z = z) \right]. \end{aligned}$$

### 1.2.2 Conditionnement par plusieurs variables aléatoires

Considérons  $n + 1$  variables aléatoires

$$\begin{aligned} X &: \Omega \rightarrow \mathcal{X}, \\ Z_1 &: \Omega \rightarrow \mathcal{Z}_1, \\ &\vdots \\ Z_n &: \Omega \rightarrow \mathcal{Z}_n. \end{aligned}$$

avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$  et  $\mathcal{Z}_1 = \{z_{1,1}, \dots, z_{k_1,1}\}, \dots, \mathcal{Z}_n = \{z_{1,n}, \dots, z_{k_n,n}\}$  des sous-ensembles finis de  $\mathbb{R}$ . Nous allons étendre la définition précédente au cas à plusieurs variables. Pour tout  $z_1 \in \mathcal{Z}_1, \dots, z_n \in \mathcal{Z}_n$ , la formule (1.1) donne

$$\mathbb{E}(X \mid Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n) = \sum_{x \in \mathcal{X}} x \mathbb{P}(X = x \mid Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n).$$

Cette quantité est un nombre réel.

**Définition** - Espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $Z_1, \dots, Z_n$  -

*On appelle espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $Z_1, \dots, Z_n$  la variable aléatoire  $\mathbb{E}(X \mid Z_1, \dots, Z_n)$  définie par*

$$\mathbb{E}(X \mid Z_1, \dots, Z_n)(\omega) := h(Z_1(\omega), \dots, Z_n(\omega)),$$

*où  $h : \mathcal{Z}_1 \times \dots \times \mathcal{Z}_n \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction à  $n$  variables définie par*

$$h(z_1, \dots, z_n) = \mathbb{E}(X \mid Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n), \text{ pour tout } z_1 \in \mathcal{Z}_1, \dots, z_n \in \mathcal{Z}_n.$$

En pratique, on n'utilise jamais cette formule pour calculer l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(X \mid Z_1, \dots, Z_n)$ . Il est en général bien plus efficace d'utiliser les propriétés que nous verrons au paragraphe 1.4.2.

### 1.3 Cadre à densité

**Rappel :** Deux variables aléatoires  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , possèdent une densité jointe (par rapport à la mesure de Lebesgue) s'il existe une fonction  $f_{(X,Z)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que pour tout domaine (mesurable)  $\mathcal{D} \subset \text{plan}$ ,

$$\mathbb{P}((X, Z) \in \mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} f_{(X,Z)}(x, z) dx dz .$$

Dans ce cas, on retrouve les densités marginales de  $X$  et  $Z$  par les formules

$$f_X(x) = \int_{z \in \mathbb{R}} f_{(X,Z)}(x, z) dz \quad \text{et} \quad f_Z(z) = \int_{x \in \mathbb{R}} f_{(X,Z)}(x, z) dx .$$

Lorsque l'on a des variables avec une densité jointe, les probabilités  $\mathbb{P}(X = x)$  ou  $\mathbb{P}(Z = z)$  sont nulles, ce qui pose une difficulté pour définir la quantité  $\mathbb{P}(X = x \mid Z = z)$  représentant "la probabilité que  $X = x$  sachant que  $Z = z$ ." Pour contourner cette difficulté, nous allons introduire la densité conditionnelle  $f_X(x \mid Z = z)$  définie par

$$f_X(x \mid Z = z) := \frac{f_{(X,Z)}(x, z)}{f_Z(z)}$$

avec la convention  $0/0 = 0$  et avec  $f_Z(z) = \int_{x \in \mathbb{R}} f_{(X,Z)}(x, z) dx$  d'après le rappel précédent. Remarquez que seul le terme au numérateur dépend de  $x$ . Le terme au dénominateur est une constante de normalisation qui assure que

$$\int_{x \in \mathbb{R}} f_X(x \mid Z = z) dx = 1 \quad \text{lorsque } f_Z(z) \neq 0 .$$

Comment interpréter cette quantité? Tout comme la densité  $f_X(x)$  représente la probabilité que la variable aléatoire  $X$  appartienne à un petit voisinage<sup>2</sup> de  $x$ , la densité conditionnelle  $f_X(x \mid Z = z)$  représente la probabilité que la variable aléatoire  $X$  appartienne à un petit voisinage de  $x$  sachant que  $Z$  appartient à un petit voisinage de  $z$ .

---

<sup>2</sup>Voir les rappels en annexe

**Définition** - Espérance conditionnelle avec une densité jointe -

Si  $X$  et  $Z$  sont deux variables aléatoires réelles (avec  $X$  intégrable) ayant une densité jointe  $f_{(X,Z)}$ , l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $Z$  est la variable aléatoire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X | Z) : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow h(Z(\omega)) \end{aligned}$$

où  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$h(z) = \int_{x \in \mathbb{R}} x f_X(x | Z = z) dx.$$

Il s'agit d'une version "à espace continu" de la formule du 1.2.1.

## 1.4 Caractérisation et propriétés

Dans cette partie, nous allons donner une caractérisation de l'espérance conditionnelle et surtout les propriétés de celle-ci qui permettent de la calculer en pratique.

### 1.4.1 Caractérisation

Notons  $\sigma(Z_1, \dots, Z_n)$  l'information donnée par  $n$  variables aléatoires  $Z_1, \dots, Z_n$ . Lorsqu'il sera possible de prédire la valeur d'une variable aléatoire  $Y$  à partir de l'information  $\sigma(Z_1, \dots, Z_n)$ , on dira que  $Y$  est  $\sigma(Z_1, \dots, Z_n)$ -mesurable. Donnons une formulation plus précise de cette notion.

**Définition** - Variables  $\mathcal{F}_n$ -mesurable -

Considérons  $n + 1$  variables aléatoires réelles  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Z_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \dots, Z_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . La variable aléatoire  $Y$  est dite  $\sigma(Z_1, \dots, Z_n)$ -mesurable s'il existe une fonction  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (mesurable) telle que  $Y(\omega) = h(Z_1(\omega), \dots, Z_n(\omega))$  pour tout  $\omega \in \Omega$ .

Pour abrégé les notations, on note souvent  $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$  et on dit alors simplement que  $Y$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable.

Faisons un petit schéma pour illustrer le cas  $n = 1$  : une variable aléatoire  $Y$  est dite  $\sigma(Z)$ -mesurable s'il existe une fonction (mesurable)  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $Y = h(Z)$ . On peut représenter cela par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{Y} & \mathbb{R} \\ & \searrow & \nearrow \\ Z & \mathbb{R} & h \end{array}$$



De façon moins formelle, une variable aléatoire  $Y$  est  $\sigma(Z_1, \dots, Z_n)$ -mesurable lorsque "en connaissant les valeurs de  $Z_1(\omega), \dots, Z_n(\omega)$ , on connaît la valeur de  $Y(\omega)$ " (grâce à la relation  $Y(\omega) = h(Z_1(\omega), \dots, Z_n(\omega))$ ).

- **Exemples.** Les variables aléatoires  $Y$  suivantes sont  $\sigma(Z_1, \dots, Z_n)$ -mesurables :
  - $Y = Z_1 + \dots + Z_n$ , car  $Y(\omega) = h(Z_1(\omega), \dots, Z_n(\omega))$  avec  $h : \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $h(z_1, \dots, z_n) = z_1 + \dots + z_n$ ,
  - $Y = Z_1^2$ , avec  $h(z_1, \dots, z_n) = z_1^2$ ,
  - $Y = \max(Z_1, \dots, Z_n)$ , avec  $h(z_1, \dots, z_n) = \max(z_1, \dots, z_n)$ ,
  - $Y = Z_1 \times \dots \times Z_{n-1}$ , avec  $h(z_1, \dots, z_n) = z_1 \times \dots \times z_{n-1}$ ,
  - $Y = \begin{cases} 1 & \text{si } Z_n = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ , avec  $h(z_1, \dots, z_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } z_n = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ ,
  - etc.

Jusqu'ici nous avons défini l'espérance conditionnelle dans des cas particuliers (cadre discret, densité jointe) et par des formules. Nous allons maintenant donner une caractérisation de l'espérance conditionnelle qui permet d'en donner une définition dans tous les cas. Elle permet aussi parfois de la calculer, voir l'exercice 1.5.7.

**Caractérisation** - Espérance conditionnelle -

Considérons  $n + 1$  variables aléatoires  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, Z_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \dots, Z_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (avec  $X$  intégrable). Notons  $\mathcal{F}_n := \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$ .

L'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{F}_n$ , notée  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$  (ou bien  $\mathbb{E}(X | Z_1, \dots, Z_n)$ ), est l'unique variable aléatoire vérifiant les deux conditions :

- a)  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable,
- b) pour toute variable aléatoire  $\mathcal{F}_n$ -mesurable (et bornée)  $Y$ , l'égalité  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) Y) = \mathbb{E}(XY)$  a lieu.

En pratique on se sert peu de cette caractérisation. Cependant, retenez bien que

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) \text{ est toujours } \mathcal{F}_n\text{-mesurable.}$$

Les conditions a) et b) peuvent paraître obscures, elles traduisent simplement que l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$  est la "meilleure approximation" que l'on peut avoir de  $X$  par une variable aléatoire  $\mathcal{F}_n$ -mesurable. Nous encourageons le lecteur désireux de mieux comprendre ce point à travailler l'exercice 1.5.9.

Avant d'énoncer les propriétés de l'espérance conditionnelle, trois petites remarques.

**Remarque 1 :** Lorsque  $X, Z_1, \dots, Z_n$  prennent un nombre fini de valeurs, ou lorsque  $X$  et  $Z$  ont une densité jointe, les formules données dans les paragraphes précédents vérifient bien les propriétés a) et b). Pour vous en convaincre, reportez-vous à l'exercice 1.5.10.

**Remarque 2 :** On peut reformuler la condition a) par

a') il existe une fonction  $h$  (mesurable) telle que  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) = h(Z_1, \dots, Z_n)$ .

De même on peut reformuler la condition b) par

b')  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) f(Z_1, \dots, Z_n)) = \mathbb{E}(X f(Z_1, \dots, Z_n))$  pour toute fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (mesurable et bornée).

**Remarque 3 :** Dans la caractérisation de l'espérance conditionnelle "l'unicité" est à comprendre dans le sens suivant : toute variable aléatoire vérifiant les conditions a) et b) est indiscernable<sup>3</sup> de  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ .

## 1.4.2 Propriétés

Jusqu'ici nous avons donné des définitions et une caractérisation de l'espérance conditionnelle. Nous allons maintenant voir comment la calculer. Dans la pratique, pour ce calcul, on n'utilise pas les formules des définitions, mais plutôt les six propriétés suivantes.

### Propriétés fondamentales

Comme précédemment,  $X, Z_1, Z_2, \dots$  sont des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (avec  $X$  intégrable). On note  $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$ .

**P1.**  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(X)$ .

**P2.** Si  $X$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable, alors  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) = X$ .

**P3.** Si  $X$  est indépendante de  $Z_1, \dots, Z_n$  alors  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X)$ .

**P4.** Si  $a, b \in \mathbb{R}$ , alors  $\mathbb{E}(aX + bY | \mathcal{F}_n) = a\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) + b\mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_n)$ .

**P5.** Si  $Y$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable alors  $\mathbb{E}(YX | \mathcal{F}_n) = Y\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ .

**P6.** Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{n+p}) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ .

Donnons une interprétation intuitive de certaines de ces propriétés. Rappelons que la variable aléatoire  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$  est "la meilleure approximation possible de  $X$  par une variable aléatoire  $\mathcal{F}_n$ -mesurable".

**P2.** si  $X$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable, la meilleure approximation  $\mathcal{F}_n$ -mesurable de  $X$  est ...  $X$  elle-même !

**P3.** si  $X$  est indépendante<sup>4</sup> de  $Z_1, \dots, Z_n$ , alors ces dernières variables aléatoires n'apportent pas d'information sur  $X$ . En conséquence, la valeur moyenne attendue pour  $X$  sachant  $\mathcal{F}_n$  est simplement la valeur moyenne attendue pour  $X$ , c'est à dire  $\mathbb{E}(X)$ . Remarquez que dans ce cas, l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$  n'est pas aléatoire.

<sup>3</sup>voir l'Annexe A pour un rappel de cette notion.

<sup>4</sup>dans ce cas, on dit aussi que  $X$  est indépendante de  $\mathcal{F}_n$ .

**P6.** Rappelons que  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{n+p})$  est la meilleure approximation possible de  $X$  qui soit  $\mathcal{F}_{n+p}$ -mesurable. La propriété P6 traduit que la meilleure approximation de cette quantité par une variable  $\mathcal{F}_n$ -mesurable est simplement  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ .

**Remarque importante :** Une variable aléatoire  $Y$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable s'il existe une fonction  $h$  telle que  $Y = h(Z_1, \dots, Z_n)$ . Posons maintenant

$$\begin{aligned} \tilde{h} : \mathbb{R}^{n+p} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (z_1, \dots, z_n, \dots, z_{n+p}) &\mapsto h(z_1, \dots, z_n). \end{aligned}$$

On a  $Y = \tilde{h}(Z_1, \dots, Z_{n+p})$ , donc  $Y$  est aussi  $\mathcal{F}_{n+p}$ -mesurable. Conclusion :

Toute variable aléatoire  $\mathcal{F}_n$ -mesurable est aussi  $\mathcal{F}_{n+p}$ -mesurable.

La réciproque étant fautive. Une conséquence importante est la formule suivante

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_{n+p}) = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n), \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

Cette dernière formule s'obtient facilement grâce à la propriété P2 : la variable aléatoire  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable donc  $\mathcal{F}_{n+p}$ -mesurable, d'où  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_{n+p}) \stackrel{P2}{=} \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ .

**Preuve:** (de certaines propriétés fondamentales)

**P1.** Notons  $Y$  la variable aléatoire constante égale à 1, c'est à dire  $Y(\omega) = 1$  pour tout  $\omega \in \Omega$ . La variable aléatoire  $Y$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable car  $Y = h(Z_1, \dots, Z_n)$ , où  $h(z_1, \dots, z_n) = 1$ . La condition *b*) de la caractérisation de l'espérance conditionnelle donne  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) Y) = \mathbb{E}(XY)$ , et comme  $Y = 1$ , on a  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(X)$ .

**P2.** La variable aléatoire  $X$  vérifie la condition *a*) par hypothèse. Pour tout  $Y$  qui est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable, on a  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(XY)$ , donc  $X$  vérifie aussi la condition *b*). La variable aléatoire  $X$  coïncide donc avec  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ .

**P6.** Posons  $W = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{n+p})$  et  $V = \mathbb{E}(W | \mathcal{F}_n)$ . Nous allons vérifier que  $V$  vérifie les deux conditions *a*) et *b*) de la caractérisation de l'espérance conditionnelle. Déjà, comme  $V$  est l'espérance conditionnelle de  $W$  sachant  $\mathcal{F}_n$ , elle est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable. Elle vérifie donc la condition *a*).

Regardons maintenant la condition *b*). Comme  $W$  est une espérance conditionnelle, pour toute variable aléatoire  $\mathcal{F}_n$ -mesurable  $Y$  on a

$$\mathbb{E}(YV) = \mathbb{E}(Y\mathbb{E}(W | \mathcal{F}_n)) \stackrel{\text{condition } b)}{=} \mathbb{E}(YW) = \mathbb{E}(Y\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{n+p})),$$

la dernière égalité venant de la définition même de  $W$ . Or  $Y$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable, donc elle est  $\mathcal{F}_{n+p}$ -mesurable (voir l'encadré précédent), et  $\mathbb{E}(Y\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{n+p})) \stackrel{P5}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(YX | \mathcal{F}_{n+p})) \stackrel{P1}{=} \mathbb{E}(YX)$ . En conséquence,  $\mathbb{E}(YV) = \mathbb{E}(YX)$  donc  $V$  vérifie aussi la condition *b*). Finalement, on a  $V = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$  ce qui est exactement la propriété P6.  $\square$

**En pratique**

La règle pour calculer l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$ , c'est de séparer dans  $X$  les termes qui sont  $\mathcal{F}_n$ -mesurables de ceux qui sont indépendants de  $\mathcal{F}_n$ , puis appliquer une ou plusieurs des propriétés fondamentales.

Pour les cas récalcitrants, il faudra se tourner vers la formule de l'exercice 1.5.7.

Mettons cette stratégie en pratique sur l'exemple de l'introduction.

**Exemples :**

1. Reprenons l'exemple de l'introduction avec les deux dés. On rappelle que  $X_1$  et  $X_2$  représentent les valeurs obtenues par le premier et le second dé, et  $S = X_1 + X_2$ . Pour calculer  $\mathbb{E}(S \mid X_1)$  nous pourrions utiliser la formule du paragraphe 1.2.1. Cependant, c'est plus simple d'opérer selon la stratégie décrite ci-dessus. En utilisant que  $X_1$  est  $\sigma(X_1)$ -mesurable et que  $X_2$  est indépendant de  $X_1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S \mid X_1) &\stackrel{\mathbf{P4}}{=} \mathbb{E}(X_1 \mid X_1) + \mathbb{E}(X_2 \mid X_1) \\ &\stackrel{\mathbf{P2}}{=} X_1 + \mathbb{E}(X_2 \mid X_1) \\ &\stackrel{\mathbf{P3}}{=} X_1 + \mathbb{E}(X_2) \\ &= X_1 + 7/2. \end{aligned}$$

Remarquez la simplicité des calculs.

2. Poursuivons l'exemple précédent en appelant  $R = X_2/X_1$  le rapport de  $X_2$  par  $X_1$ . En guise d'entraînement, calculons  $\mathbb{E}(R \mid X_1)$ . Comme  $1/X_1$  est  $\sigma(X_1)$ -mesurable (car c'est une fonction de  $X_1$ ) on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R \mid X_1) &\stackrel{\mathbf{P5}}{=} \frac{1}{X_1} \mathbb{E}(X_2 \mid X_1) \\ &\stackrel{\mathbf{P3}}{=} \frac{1}{X_1} \mathbb{E}(X_2) \\ &= 7/(2X_1). \end{aligned}$$

3. Reprenons enfin l'exemple du paragraphe 1.2.1 avec  $X = \varepsilon Z$  où  $Z$  est une variable aléatoire uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$  et  $\varepsilon$  est une variable aléatoire indépendante de  $Z$ , telle que  $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = p$  et  $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1 - p$ . On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X \mid Z) &\stackrel{\mathbf{P5}}{=} Z \mathbb{E}(\varepsilon \mid Z) \\ &\stackrel{\mathbf{P3}}{=} Z \mathbb{E}(\varepsilon) \\ &= (2p - 1)Z. \end{aligned}$$

C'est plus simple que le calcul du 1.2.1, non ? Avec un petit peu d'entraînement, ces calculs deviendront totalement automatiques.

Pour finir, voici trois autres propriétés de l'espérance conditionnelle.

### Propriétés supplémentaires

1. Si  $Y_1, \dots, Y_p$  sont indépendantes de  $X$  et de  $Z_1, \dots, Z_n$  alors

$$\mathbb{E}(X \mid Z_1, \dots, Z_n, Y_1, \dots, Y_p) = \mathbb{E}(X \mid Z_1, \dots, Z_n).$$

2. Si  $X \leq Y$ , alors  $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) \leq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n)$ .

3. si  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convexe, on a l'inégalité de Jensen :

$$\Phi(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)) \leq \mathbb{E}(\Phi(X) \mid \mathcal{F}_n).$$

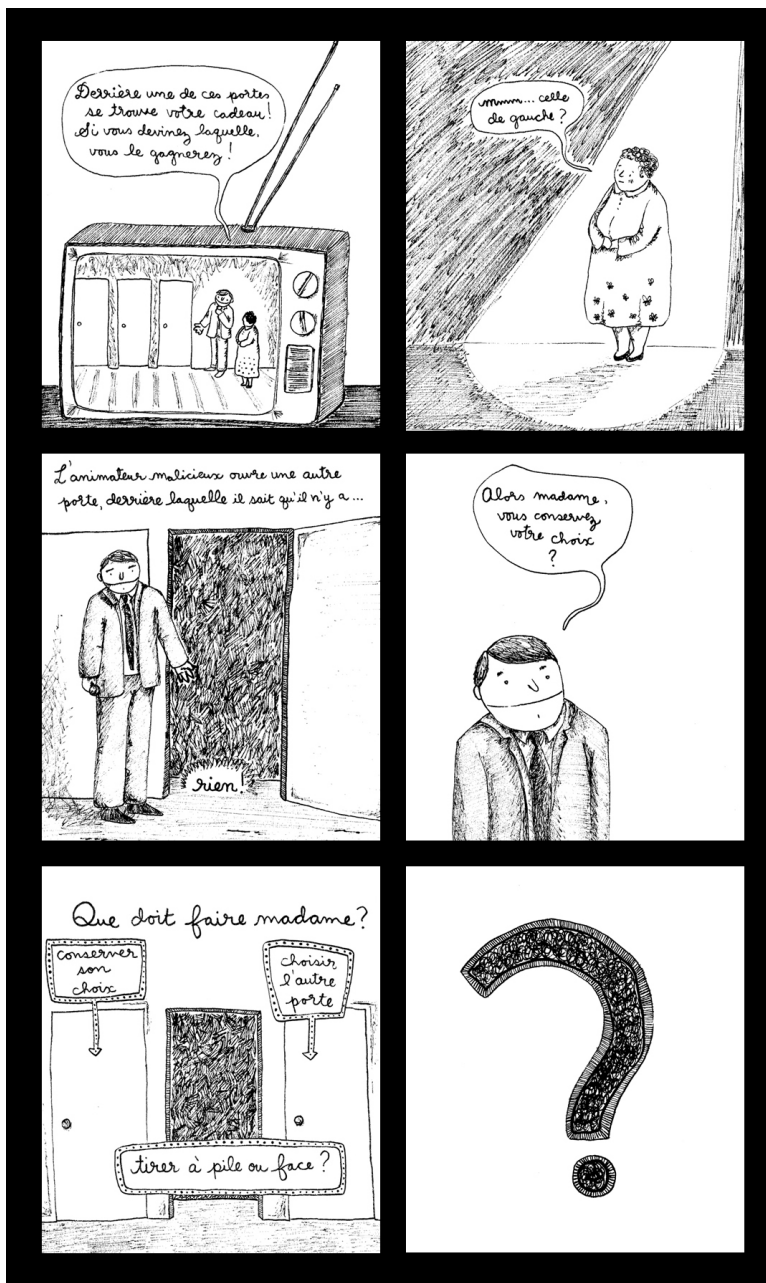
• **Exo** : A l'aide de l'inégalité de Jensen, montrez que  $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)^2 \leq \mathbb{E}(X^2 \mid \mathcal{F}_n)$ .

---

**Remarque** : Pour finir, remarquons que si  $Z_0$  est une valeur déterministe (fixée), son information  $\mathcal{F}_0 = \sigma(Z_0)$  est "vide". En conséquence, on aura  $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(X)$  pour toute variable aléatoire  $X$  (intégrable).

## 1.5 Exercices

### 1.5.1 Jeu télévisé



### 1.5.2 Un petit calcul

On note  $S_1, S_2, \dots$  le cours journalier d'une action. On appelle rendement journalier de l'action le rapport

$$\rho_n := \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}}.$$

Cette quantité est aléatoire et on suppose que le rendement  $\rho_n$  entre le jour  $n - 1$  et le jour  $n$  ne dépend pas des valeurs  $S_1, \dots, S_{n-1}$  prises par l'action dans le passé. Cela revient donc à supposer que  $\rho_n$  est indépendant de  $\mathcal{F}_{n-1} = \sigma(S_1, \dots, S_{n-1})$ . On suppose aussi qu'on connaît la valeur moyenne  $\bar{\rho} = \mathbb{E}(\rho_n)$  du rendement. Calculez  $\mathbb{E}(S_n | \mathcal{F}_{n-1})$ .

### 1.5.3 Un autre calcul

On considère un couple de variables aléatoires réelles  $(X, Y)$  admettant pour densité

$$f(x, y) := n(n-1)(y-x)^{n-2} \mathbf{1}_{(x,y) \in A}$$

où  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ . Montrer que

$$\mathbb{E}(Y|X) = \frac{n-1+X}{n}.$$

### 1.5.4 Encore un calcul !

On lance un dé et appelle  $N$  le chiffre (entre 1 et 6) obtenu. Ensuite, on relance  $N^2$  fois le dé, et on appelle  $S$  la somme totale des chiffres obtenu (y compris avec le premier lancé). Calculer  $\mathbb{E}(S|N)$ .

### 1.5.5 Marche aléatoire

Soit  $(X_n; n \in \mathbb{N})$  une suite de variables aléatoires indépendantes. On s'intéresse à la marche au hasard  $S_n := X_1 + \dots + X_n$  et on note  $m = \mathbb{E}(X_1) < +\infty$  et  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ .

1. Que vaut  $\mathbb{E}(S_{n+1} | \mathcal{F}_n)$  ?
2. Pour  $z \in \mathbb{C}$ , montrer que

$$\mathbb{E}(z^{S_{n+1}} | \mathcal{F}_n) = z^{S_n} \mathbb{E}(z^{X_{n+1}}).$$

En notant  $G(z) = \mathbb{E}(z^{X_1})$ , montrer que si  $X_1, \dots, X_n$  ont la même loi alors

$$\mathbb{E}(z^{S_n}) = [G(z)]^n.$$

### 1.5.6 \*Somme et produit aléatoires

Soit  $N$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}_n$ -mesurable à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et  $X_1, X_2, \dots$  une suite de variables aléatoires toutes indépendantes de  $\mathcal{F}_n$ .

1. Vérifiez l'égalité

$$\sum_{i=1}^N X_i = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N=k\}} \sum_{i=1}^k X_i.$$

2. En déduire la formule

$$\mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^N X_i \mid \mathcal{F}_n \right) = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i).$$

3. On suppose de plus que les  $X_1, X_2, \dots$  sont indépendantes. Pour toute fonction  $g : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$ , montrez successivement que

$$\prod_{i=1}^N g(X_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N=k\}} \prod_{i=1}^k g(X_i)$$

et

$$\mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^N g(X_i) \mid \mathcal{F}_n \right) = \prod_{i=1}^N \mathbb{E}(g(X_i)).$$

### 1.5.7 \*Une formule générique

Soit  $X_n$  une variable aléatoire réelle  $\mathcal{F}_n$ -mesurable et  $U_{n+1}$  une seconde variable aléatoire réelle indépendante de  $\mathcal{F}_n$ . Montrer que pour toute fonction  $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (intégrable) on a

$$\mathbb{E}(H(U_{n+1}, X_n) \mid \mathcal{F}_n) = h(X_n)$$

où  $h(x) = \mathbb{E}(H(U_{n+1}, x))$ .

### 1.5.8 A propos de l'inégalité de Jensen

On rappelle l'inégalité de convexité : si  $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  est une fonction convexe et  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont  $p$  réels positifs vérifiant  $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = 1$  alors

$$\phi \left( \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i \phi(x_i)$$

pour tout  $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ .

1. Démontrer l'inégalité de Jensen  $\phi(\mathbb{E}(X \mid Z)) \leq \mathbb{E}(\phi(X) \mid Z)$  dans le cas où  $X : \Omega \rightarrow \{x_1, \dots, x_p\}$  et  $Z : \Omega \rightarrow \mathcal{Z}$  prennent un nombre fini de valeurs.
2. A l'aide de l'inégalité de Jensen, établir pour  $p > 1$  l'inégalité

$$\mathbb{E}(|X| \mid \mathcal{F}_n)^p \leq \mathbb{E}(|X|^p \mid \mathcal{F}_n).$$



### 1.5.9 Espérance conditionnelle et meilleure approximation $\mathcal{F}_n$ -mesurable de $X$

Supposons que  $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ . Notons  $W_*$  la variable aléatoire vérifiant

$$\mathbb{E}[(X - W_*)^2] = \min_{W \in \mathcal{H}} \mathbb{E}[(X - W)^2]$$

où  $\mathcal{H}$  est l'espace de toutes les variables aléatoires  $W$  qui sont  $\mathcal{F}_n$ -mesurables et vérifient  $\mathbb{E}(W^2) < \infty$ . Nous allons montrer que  $W_*$  satisfait les conditions *a)* et *b)* de la caractérisation de l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ .

Pour la condition *a)* c'est évident : comme  $W_* \in \mathcal{H}$ , la variable  $W_*$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable. Regardons maintenant la condition *b)*. Introduisons la fonction  $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(W) = \mathbb{E}[(X - W)^2]$ . Si vous savez ce qu'est la *différentielle de  $F$* , suivez les questions de la partie I. Sinon, orientez vous vers la partie II (pour une preuve alternative).

#### Partie I -

1. Montrer que la différentielle de  $F$  en  $W$  est

$$DF(W).Y = -\mathbb{E}[(X - W)Y].$$

2. Dédurre de l'équation  $DF(W_*) = 0$  que  $W_*$  vérifie la condition *b)*.
3. Conclure.

#### Partie II -

1. Soit  $Y$  une variable dans  $\mathcal{H}$  et  $\epsilon \in \mathbb{R}^*$ . Dédurre de l'inégalité  $F(W_*) \leq F(W_* + \epsilon Y)$  la borne

$$\epsilon^2 \mathbb{E}(Y^2) - 2\epsilon \mathbb{E}(Y(X - W_*)) \geq 0.$$

2. Conclure en divisant l'inégalité précédente par  $\epsilon$  (attention ! bien séparer les cas  $\epsilon > 0$  et  $\epsilon < 0$ ) et en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0.

### 1.5.10 \*Cohérence des différentes définitions / de la caractérisation

Le but de cet exercice est de vérifier que les formules données aux paragraphes 1.2.1 et 1.3 vérifient bien les conditions *a)* et *b)* de la caractérisation de l'espérance conditionnelle.

1. Soit deux variables aléatoires  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$  et  $Z : \Omega \rightarrow \mathcal{Z}$ , avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$  et  $\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_n\}$  deux ensembles finis de  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $z \in \mathcal{Z}$ , on note

$$h(z) = \mathbb{E}(X | Z = z) = \sum_{x \in \mathcal{X}} x \mathbb{P}(X = x | Z = z).$$

Montrer que la variable aléatoire  $h(Z)$  vérifie les conditions *a')* et *b')* de la caractérisation de l'espérance conditionnelle.

2. Maintenant  $X$  et  $Z$  sont deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ayant une densité jointe  $f_{(X,Z)}$ . On note

$$h(z) = \int_{x \in \mathbb{R}} x f_X(x | Z = z) dx .$$

Montrer que la variable aléatoire  $h(Z)$  vérifie les conditions  $a')$  et  $b')$  de la caractérisation de l'espérance conditionnelle.

# Chapitre 2

## Martingales

**Objectif :** l'objectif de ce chapitre est d'apporter les outils mathématiques nécessaires au calcul du prix d'options : martingales, temps d'arrêt et théorème d'arrêt.

---

Dorénavant nous allons nous intéresser à l'évolution temporelle de certaines quantités aléatoires, telle le cours d'une action  $X$ . Si on note  $X_n$  le cours de l'action à la date  $n$ , nous allons donc étudier le comportement de la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On appelle processus stochastique (ou processus aléatoire) une telle suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de variables aléatoires indexées par  $\mathbb{N}$ .

### 2.1 Exemple fondateur : un joueur au casino

Nous allons introduire un certain nombre de notions mathématiques (martingales, temps d'arrêt, etc) à travers l'exemple de la fortune d'un joueur au casino.

Considérons donc un joueur au casino et formalisons sa fortune :

- On note  $J$  l'ensemble des jeux. Un jeu est donc un  $j \in J$ 
  - ex : – miser sur le 2 à la roulette
  - ne pas miser
- On appelle  $R_j^{(n)}$  le rapport du jeu  $j$  au temps  $n$ .
  - ex : – Si  $j =$  miser sur le 2, alors  $R_j^{(n)} = \begin{cases} 36 & \text{si le 2 sort} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
  - Si  $j =$  ne pas miser, alors  $R_j^{(n)} = 1$

On note  $R^{(n)} := (R_j^{(n)}; j \in J)$  les rapports des différents jeux au temps  $n$ .

- Notre joueur va miser au temps  $n$  sur chaque jeu. On note  $M_j^{(n)}$  sa mise (éventuellement nulle) sur le jeu  $j$ , pour le  $n^{\text{ième}}$  coup.
- On appelle  $X_0$  la fortune initiale du joueur et  $X_n$  sa fortune après le  $n^{\text{ième}}$  coup. Comme ne pas miser est considéré comme un jeu, le joueur répartit toute sa fortune  $X_{n-1}$  acquise

après le  $(n - 1)$ <sup>ième</sup> coup, en mises  $M_j^{(n)}$  pour le coup suivant, donc

$$X_{n-1} = \sum_{j \in J} M_j^{(n)}.$$

Après le  $n$ <sup>ième</sup> coup, sa fortune est

$$X_n = \sum_{j \in J} M_j^{(n)} R_j^{(n)}.$$

- L'information dont dispose le joueur après le  $n$ <sup>ième</sup> coup est donnée par les différentes valeurs prises par  $R^{(1)}, \dots, R^{(n)}$ . On note  $\sigma(R^{(1)}, \dots, R^{(n)})$  cette information et pour alléger les formules on posera  $\mathcal{F}_n = \sigma(R^{(1)}, \dots, R^{(n)})$ .

Pour analyser mathématiquement l'évolution statistique de la fortune du joueur, il nous faut faire quelques hypothèses (réalistes) sur le déroulement du jeu.

Hypothèses sur le jeu :

- Les rapports  $R^{(1)}, \dots, R^{(n)}, \dots$  aux différents temps de jeu sont indépendants.
- Les mises  $M_j^{(n)}$  sont  $\sigma(R^{(1)}, \dots, R^{(n-1)})$ -mesurables. Autrement dit, le joueur choisit ses mises pour le  $n$ <sup>ième</sup> coup uniquement en fonction de l'information  $\mathcal{F}_{n-1}$  dont il dispose après le  $(n - 1)$ <sup>ième</sup> coup. Il ne devine pas le futur !
- Le casino n'est pas une oeuvre philanthropique. Il ne perd donc pas d'argent en moyenne, c'est à dire :  $\mathbb{E}(R_j^{(n)}) \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in J.$

Questions :

1. Existe-t-il une stratégie de jeu pour gagner de l'argent en moyenne au casino? Plus précisément, existe-t-il une manière de choisir les mises  $M_j^{(n)}$  telle que  $\mathbb{E}(X_n) > X_0$ ?
2. Existe-t-il une manière de "s'arrêter de jouer" telle que si  $T$  est le temps (aléatoire) auquel on s'arrête, on a  $\mathbb{E}(X_T) > X_0$ ?

Réponse à la première question :

Regardons la valeur espérée de la fortune du joueur après le  $n$ <sup>ième</sup> coup, sachant tout ce

qui s'est passé précédemment :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j \in J} M_j^{(n)} R_j^{(n)} | \mathcal{F}_{n-1}\right) \\
 &\stackrel{\text{P4}}{=} \sum_{j \in J} \mathbb{E}\left(M_j^{(n)} R_j^{(n)} | \mathcal{F}_{n-1}\right) \\
 &\stackrel{\text{P5}}{=} \sum_{j \in J} M_j^{(n)} \mathbb{E}\left(R_j^{(n)} | \mathcal{F}_{n-1}\right) \quad \text{car } M_j^{(n)} \text{ est } \mathcal{F}_{n-1}\text{-mesurable} \\
 &\stackrel{\text{P3}}{=} \sum_{j \in J} M_j^{(n)} \mathbb{E}\left(R_j^{(n)}\right) \quad \text{car } R_j^{(n)} \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_{n-1} \\
 &\leq \sum_{j \in J} M_j^{(n)} = X_{n-1} \quad \text{car } \mathbb{E}\left(R_j^{(n)}\right) \leq 1.
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1}. \tag{2.1}$$

Un tel processus  $(X_n)_{n \geq 0}$  est appelé une sur-martingale. Si on prend l'espérance dans l'égalité (2.1), on obtient  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1})) \leq \mathbb{E}(X_{n-1})$ . Vu la Propriété 1 de l'espérance conditionnelle il s'en suit  $\mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_{n-1})$ . En itérant cette inégalité, il vient

$$\mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_{n-1}) \leq \dots \leq X_0.$$

La réponse à la première question est donc *non* (ce qui ne surprendra personne) !

Concernant la seconde question, il faut définir précisément la notion de "s'arrêter de jouer", ce qui est l'objet du prochain paragraphe.

## 2.2 Temps d'arrêt

### 2.2.1 Information $\mathcal{F}_n$

Dans l'exemple du joueur au casino, l'information dont dispose le joueur au temps  $n$  (plus exactement après le  $n^{\text{ième}}$  coup) correspond aux rapports de chaque jeu aux temps 1 à  $n$ , c'est à dire aux valeurs  $R^{(1)}, \dots, R^{(n)}$ .

Plus généralement, si l'information dont nous disposons vient de l'observation d'une quantité aléatoire  $X_1, \dots, X_n, \dots$  (ex : cotation journalière d'une action), alors l'information dont on dispose au temps  $n$  est donnée par les valeurs de  $X_1, \dots, X_n$ . Dans ce cas, on note  $\sigma(X_1, \dots, X_n)$  cette information. Pour alléger les notations, on pose souvent  $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$ . Lorsque le temps augmente, on collecte de plus en plus d'information, donc

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \dots$$

On appelle *filtration* la suite  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Nous allons donner une définition plus rigoureuse de l'information  $\mathcal{F}_n$ . Nous commençons par un petit rappel sur les fonctions indicatrices.

**Rappel :** on appelle *fonction indicatrice* de  $A$ , la variable aléatoire  $\mathbf{1}_A$  définie par :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A : \Omega &\rightarrow \{0, 1\} \\ \omega &\mapsto \mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Précisons les propriétés de l'information  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ . Un événement  $A$  appartient à l'information  $\mathcal{F}_n$ , si à partir des valeurs  $X_1, \dots, X_n$  on est capable de dire si l'événement  $A$  a lieu ou non. Autrement dit, de la lecture des valeurs  $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ , on est capable de dire si  $\omega \in A$  ou non. Dans un langage plus mathématique, un événement  $A$  appartient donc à l'information  $\mathcal{F}_n$  s'il existe une fonction (mesurable)  $h : \mathbb{R}^n \mapsto \{0, 1\}$  telle que

$$\mathbf{1}_A(\omega) = h(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

Comme nous l'avons vu au paragraphe 1.4, cela est équivalent à dire que  $\mathbf{1}_A$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable. Il en découle la définition suivante de l'information  $\mathcal{F}_n$ .

**Définition** - Information  $\mathcal{F}_n$  -

*L'information  $\mathcal{F}_n$  est constituée des événements  $A$  tels que la variable aléatoire  $\mathbf{1}_A$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable. En notation abrégée*

$$A \in \mathcal{F}_n \iff \mathbf{1}_A \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable.}$$

L'information  $\mathcal{F}_n$  possède les propriétés suivantes.

**Propriétés** - de l'information  $\mathcal{F}_n$  -

1. Si  $A \in \mathcal{F}_n$ , alors  $A^c \in \mathcal{F}_n$ , où  $A^c$  représente le complémentaire de  $A$ .
2. Si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}_n$ , alors  $\bigcup_i A_i \in \mathcal{F}_n$  et  $\bigcap_i A_i \in \mathcal{F}_n$ .

Remarque culturelle : En mathématiques, un ensemble non vide possédant les propriétés précédentes s'appelle une *tribu* (ou  $\sigma$ -algèbre).

### 2.2.2 Temps d'arrêt

Nous allons préciser et formaliser dans ce paragraphe la notion de "s'arrêter de jouer" pour le joueur de casino. Le joueur n'est pas supposé avoir des qualités de divination du futur, donc s'il décide de s'arrêter au temps  $n$ , il ne le fait qu'à partir de l'information  $\mathcal{F}_n$  dont il dispose à ce moment là : par exemple il peut décider de s'arrêter lorsque sa fortune dépasse sa mise initiale (ou le double de sa mise initiale), lorsque les noirs sont sortis 5 fois de suite à la roulette, etc. Mais il ne peut pas décider de s'arrêter lorsque sa fortune est maximale (ça serait l'idéal!), car cela lui demanderait de deviner le futur. Un temps où l'on décide de s'arrêter en ne tenant compte que de l'information dont on dispose jusque là sera appelé un *temps d'arrêt* (voir un paragraphe plus bas pour une définition plus précise).

Voici un autre exemple de temps d'arrêt : un ordre de vente pour votre banquier. Imaginez que vous possédez une action et vous demandez à votre banquier de la vendre à un certain temps  $T$  qui va dépendre de l'évolution du marché. Comme votre banquier n'est pas devin, le temps  $T$  où il va devoir vendre ne doit dépendre que de l'information qu'il a collecté jusque là. Par exemple, vous ne pouvez pas lui demander de vendre votre action au moment  $T_{\max}$  où son cours atteint son maximum : en effet au temps  $T_{\max}$  personne ne sait que le cours est à son maximum. Voici deux exemples d'ordre de vente possible : vendre au temps  $T$  où le cours de l'action a réalisé pour la première fois une progression de 15% sur les 100 derniers jours, ou bien vendre au temps  $T$  où le cours dépasse pour la première fois 100 Euros. Dans ces deux cas, la décision est bien prise en fonction de l'information dont on dispose au temps  $T$ , le temps  $T$  est donc un temps d'arrêt.

Comment se caractérise un temps d'arrêt  $T$ ? Considérons le cas de l'ordre de vente et appelons  $\mathcal{F}_n$  l'information dont dispose le banquier au temps  $n$ . Le temps  $T$  de l'ordre de vente est un temps aléatoire (il dépend de l'évolution de la bourse), tel que le banquier sait à partir de l'information  $\mathcal{F}_n$  si  $T = n$  ou non. Cette caractéristique définit les temps d'arrêt. On rappelle<sup>1</sup> la notation  $\{T = n\} = \{\omega \in \Omega : T(\omega) = n\}$ .

**Définition** - Temps d'arrêt -

*On appelle temps d'arrêt une variable aléatoire  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  telle que  $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$  quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ .*

Dans un langage moins formel, un temps d'arrêt est une variable aléatoire  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  telle que "à partir de l'information  $\mathcal{F}_n$  on sait si  $T(\omega) = n$  ou non".

Les deux ordres de vente "vendre au temps  $T$  où le cours de l'action a réalisé pour la première fois une progression de 15% sur les 100 derniers jours", ou bien "vendre au temps  $T$  où le cours dépasse pour la première fois 100 Euros" donnent deux exemples de temps d'arrêt  $T$ . Par contre le temps  $T_{\max}$  où le cours atteint son maximum n'est pas un temps d'arrêt.

<sup>1</sup>en particulier  $\mathbf{1}_{\{T=n\}}(\omega) = \begin{cases} = 1 & \text{si } T(\omega) = n \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

**Petite remarque :** si  $T$  est un temps d'arrêt alors  $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$  et  $\{T > n\} \in \mathcal{F}_n$ .

En effet,  $\{T \leq n\} = \bigcup_{i=1}^n \{T = i\}$ , avec  $\{T = i\} \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_n$ . On en déduit que  $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ . Comme  $\{T > n\} = \{T \leq n\}^c$ , on a aussi  $\{T > n\} \in \mathcal{F}_n$ . De même, vous pouvez vérifier que  $\{T < n\} \in \mathcal{F}_n$  et  $\{T \geq n\} \in \mathcal{F}_n$ .  $\square$

Le résultat suivant donne un exemple important de temps d'arrêt.

**Proposition 2.1** - Premier temps de passage -

*Considérons un processus stochastique  $(X_n)$ . Notons  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$  l'information dont on dispose au temps  $n$  et  $T(\omega) = \inf\{n \geq 1 \text{ tel que } X_n(\omega) \geq a\}$  le premier temps où  $X_n$  dépasse la niveau  $a$ . Le temps  $T$  est alors un temps d'arrêt. Le résultat est encore vrai en remplaçant  $\geq$  par  $=, \leq, <$  ou  $>$ .*

Par contre, le premier instant  $M(\omega) = \inf\{n \geq 1 \text{ tel que } X_n(\omega) = \max_{p \in \mathbb{N}} X_p(\omega)\}$  où  $X_n$  atteint son maximum n'est pas un temps d'arrêt. Par exemple, si  $X_n$  est le cours d'une action, pour connaître le premier instant où  $X_n$  atteint son maximum, il faut connaître l'évolution du cours après  $M$ .

**Preuve:** de la proposition. On a l'égalité :

$$\{T = n\} = \{X_1 < a\} \cap \dots \cap \{X_{n-1} < a\} \cap \{X_n \geq a\}.$$

Comme pour  $k = 1 \dots n - 1$  on a  $\{X_k < a\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$  et  $\{X_n \geq a\} \in \mathcal{F}_n$ , on conclut par la propriété 2 de l'information  $\mathcal{F}_n$  que  $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ .  $\square$

## 2.3 Martingales

### 2.3.1 Définition

Supposons que l'on observe un processus aléatoire  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On note  $\mathcal{F}_n$  l'information dont on dispose au temps  $n$ . Cette information contient l'information donnée par les valeurs  $X_0, X_1, \dots, X_n$ , donc  $\sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) \subset \mathcal{F}_n$ . Bien souvent l'information dont on dispose est réduite aux valeurs  $X_0, X_1, \dots, X_n$ , et dans ce cas  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$ .

**Définition** - Martingale -

- On appelle  $\mathcal{F}_n$ -martingale un processus  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tel que  $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'information  $\mathcal{F}_n$  considérée, on dit simplement que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une martingale.
- On appelle sous-martingale un processus  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tel que  $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq X_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- On appelle sur-martingale un processus  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tel que  $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq X_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .



De manière informelle, une martingale est donc un processus aléatoire sans tendance haussière, ni baissière. Plus précisément "la valeur moyenne d'une martingale attendue pour demain sachant toute l'information dont on dispose aujourd'hui est égale à sa valeur d'aujourd'hui".

**Exemples**

1. La fortune du joueur de casino est une sur-martingale car  $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \leq X_n$ .  
Remarquez que dans ce cas  $\sigma(X_1, \dots, X_n) \subsetneq \mathcal{F}_n$
2. Considérons la marche au hasard  $S_n = Y_1 + \dots + Y_n - nr$ , où les  $(Y_i)$  sont i.i.d. et  $r \in \mathbb{R}$ . On note  $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \dots, S_n)$ .

Le processus  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une martingale si et seulement si  $r = \mathbb{E}(Y_1) < +\infty$ .

En effet, remarquons déjà que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(Y_1 + \dots + Y_{n+1} - (n+1)r \mid \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}(S_n + Y_{n+1} - r \mid \mathcal{F}_n). \end{aligned}$$

Comme d'une part  $S_n$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable et d'autre part  $Y_{n+1}$  est indépendant de  $\mathcal{F}_n$  il vient (propriétés 2 et 3 de l'espérance conditionnelle)

$$\mathbb{E}(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = S_n + \mathbb{E}(Y_{n+1}) - r.$$

En particulier,  $(S_n)$  est une martingale ssi  $\mathbb{E}(Y_{n+1}) = r$ . Enfin comme les  $Y_i$  ont même loi,  $\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \mathbb{E}(Y_1)$ . □

3. Soit  $X$  une variable aléatoire telle que  $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$  et  $(Z_n)$  un processus aléatoire. La suite  $(X_n)$  définie par  $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$  avec  $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, \dots, Z_n)$  est une martingale.

En effet,  $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) \stackrel{P6}{=} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ . □

La propriété suivante est la propriété fondamentale des martingales. Elle traduit qu'une martingale n'a pas de tendance haussière ou baissière. Nous utiliserons intensivement ce résultat dans les chapitres suivants pour calculer des prix d'options.

**Propriété** - Propriété fondamentale des martingales -

*La moyenne d'une martingale est constante au cours du temps :*

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

**Preuve:** Cette propriété se prouve par récurrence à partir de l'égalité

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) \stackrel{P1}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) \stackrel{\text{martingale}}{=} \mathbb{E}(X_n).$$

□

Il est maintenant naturel de se demander si l'égalité (2.2) qui est vraie à un temps fixe  $n$  est encore vraie à un temps aléatoire  $T$ . En d'autres termes, pour un temps aléatoire quelconque  $T$  et une martingale  $(X_n)$ , a-t-on  $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$  ?

Cette égalité n'est certainement pas vraie pour n'importe quel temps  $T$ . Par exemple, si  $T$  est le temps où  $X_n$  est maximum, on a  $X_T \geq X_0$  et aussi  $\mathbb{P}(X_T > X_0) > 0$ , à moins que  $(X_n)$  soit la suite constante égale à  $X_0$ . Cela entraîne l'inégalité  $\mathbb{E}(X_T) > \mathbb{E}(X_0)$ .

Cependant, nous allons voir dans le paragraphe suivant que cette égalité reste vraie lorsque  $T$  est un temps d'arrêt (avec quelques restrictions).

### 2.3.2 Théorème d'arrêt

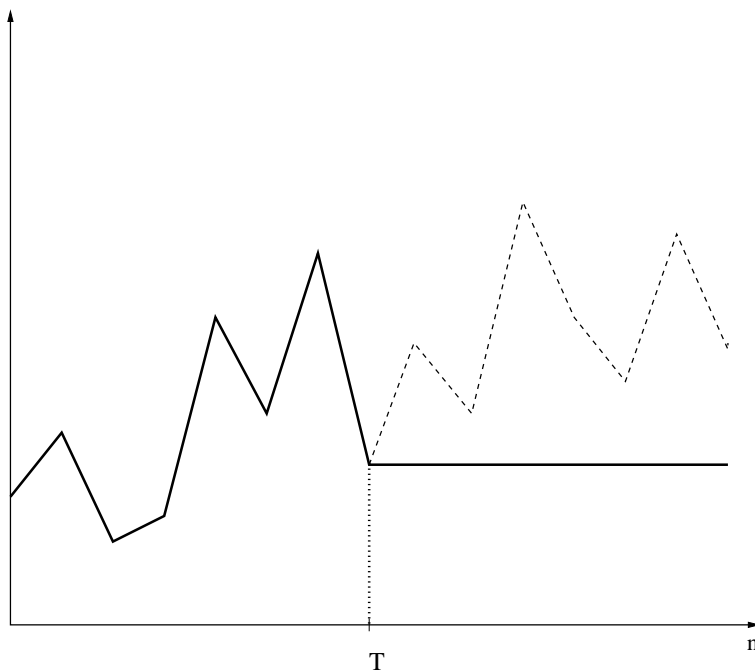


FIG. 2.1 – Une trajectoire de  $(X_{n \wedge T})_{n \geq 0}$  (en pointillé : la trajectoire de  $(X_n)_{n \geq 0}$ )

Dorénavant, nous noterons  $n \wedge T := \min(n, T)$  et  $X_{n \wedge T}$  la variable aléatoire

$$\begin{aligned} X_{n \wedge T} : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X_{n \wedge T(\omega)}(\omega). \end{aligned}$$

Le théorème suivant, dû au mathématicien J.L. Doob, est l'un des deux résultats fondamentaux de la théorie des martingales.

**Théorème 2.2** - Théorème d'arrêt -

Soit  $(X_n)$  une martingale (respectivement sur-martingale) et  $T$  un temps d'arrêt.

1. Le processus  $(X_{n \wedge T})_{n \in \mathbb{N}}$  est une martingale (resp. sur-martingale),
2. S'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $T(\omega) \leq N$ , pour tout  $\omega \in \Omega$  (on dit que  $T$  est borné)

$$\text{alors} \quad \mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0) \quad (\text{resp. } \leq),$$

3. Si  $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$  et s'il existe  $Y$  telle que  $\mathbb{E}(Y) < +\infty$  et  $|X_{n \wedge T}| \leq Y$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (condition de domination)

$$\text{alors} \quad \mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0) \quad (\text{resp. } \leq).$$

**Attention !** Nous incitons le lecteur à la plus grande prudence lorsqu'il applique le théorème ci-dessus. En effet, il est nécessaire de vérifier que les hypothèses du théorème sont bien satisfaites, sinon il y a un risque d'obtenir une égalité aberrante, du type  $0 = 1$ . Nous donnons ci-dessous un exemple de martingale  $(X_n)$  et de temps d'arrêt  $T$  (ne vérifiant pas les hypothèses du théorème ci-dessus) tels que  $\mathbb{E}(X_T) \neq \mathbb{E}(X_0)$ .

Considérons un joueur ayant 1 euro en poche et misant sur une pièce de monnaie :

- si pile sort, il double sa fortune,
- si face sort, il perd tout.

Notons  $p_n \in \{pile, face\}$  la face obtenue au  $n^{\text{ième}}$  lancer et  $X_n$  la fortune du joueur. On a

$$X_{n+1} = \begin{cases} 2X_n & \text{si } p_{n+1} = \text{pile} \\ 0 & \text{si } p_{n+1} = \text{face} \end{cases}$$

c'est à dire  $X_{n+1} = 2X_n \mathbf{1}_{\{p_{n+1}=\text{pile}\}}$ . Comme  $X_0 = 1$  on obtient par récurrence,  $X_n = 2^n \mathbf{1}_{\{p_1=\text{pile}, \dots, p_n=\text{pile}\}}$ . Montrons que  $(X_n)$  est une martingale :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(2X_n \mathbf{1}_{\{p_{n+1}=\text{pile}\}} \mid \mathcal{F}_n) \\ &= 2X_n \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{p_{n+1}=\text{pile}\}} \mid \mathcal{F}_n), \quad \text{car } 2X_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable} \\ &= 2X_n \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{p_{n+1}=\text{pile}\}}), \quad \text{car } \mathbf{1}_{\{p_{n+1}=\text{pile}\}} \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_n \\ &= X_n, \quad \text{car } \mathbb{P}(p_{n+1} = \text{pile}) = 1/2. \end{aligned}$$

Introduisons le temps de ruine  $T = \inf\{n \geq 0 \text{ tel que } X_n = 0\}$ . C'est un temps d'arrêt vérifiant  $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$ . Cependant, vu que  $X_{T(\omega)}(\omega) = 0$ , on a  $\mathbb{E}(X_T) = 0$  et donc

$$\mathbb{E}(X_T) = 0 \neq \mathbb{E}(X_0) = 1.$$

Remarquez que le théorème précédent ne peut pas s'appliquer ici car  $|X_{n \wedge T}|$  ne peut être dominé par un  $Y$  vérifiant  $\mathbb{E}(Y) < +\infty$ .

**Preuve:** Nous prouvons maintenant les résultats du théorème d'arrêt. On se restreint au cas où  $(X_n)$  est une martingale.

1. Par soucis de clarté notons  $M_n = X_{n \wedge T}$  et vérifions que  $(M_n)$  est une martingale. On a

$$M_n = X_{n \wedge T} = \begin{cases} X_n & \text{si } T > n - 1 \\ X_T & \text{si } T \leq n - 1 \end{cases}$$

ce que l'on peut réécrire  $M_n = X_n \mathbf{1}_{\{T > n-1\}} + X_T \mathbf{1}_{\{T \leq n-1\}}$ . Comme

$$X_T \mathbf{1}_{\{T \leq n-1\}} = X_1 \mathbf{1}_{\{T=1\}} + \dots + X_{n-1} \mathbf{1}_{\{T=n-1\}},$$

avec  $\{T = k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{n-1}$  pour  $k \leq n-1$ , la variable aléatoire  $X_T \mathbf{1}_{\{T \leq n-1\}}$  est  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable.

À l'aide des propriétés 5 et 2 de l'espérance conditionnelle, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(X_n \underbrace{\mathbf{1}_{\{T > n-1\}}}_{\in \mathcal{F}_{n-1}} | \mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(X_T \mathbf{1}_{\{T \leq n-1\}} | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \mathbf{1}_{\{T > n-1\}} \underbrace{\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1})}_{= X_{n-1} \text{ car } (X_n) \text{ martingale}} + X_T \mathbf{1}_{\{T \leq n-1\}} \\ &= X_{n-1} \mathbf{1}_{\{T > n-1\}} + X_T \mathbf{1}_{\{T \leq n-1\}} \\ &= X_{(n-1) \wedge T} = M_{n-1}. \end{aligned}$$

Nous venons de vérifier que  $(M_n)$  est une martingale.

2. Pour  $T$  borné, considérons  $N$  tel que  $T \leq N$ . Le processus  $(X_{n \wedge T})$  est une martingale, donc au temps  $N$  (propriété fondamentale des martingales)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(X_{N \wedge T}) & = & \mathbb{E}(X_{0 \wedge T}) . \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{E}(X_T) & & \mathbb{E}(X_0) \end{array}$$

Les deux égalités "||" proviennent des relations  $N \wedge T = T$  et  $0 \wedge T = 0$ .

3. Si  $T < +\infty$  avec probabilité 1 et  $X_{n \wedge T}$  vérifie la condition de domination. Le processus  $(X_{n \wedge T})$  est une martingale, donc  $\mathbb{E}(X_{n \wedge T}) = \mathbb{E}(X_0)$ . Faisons tendre  $n$  vers l'infini dans l'égalité précédente. On sait que  $X_{n \wedge T} \rightarrow X_T$  et comme les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées cela entraîne que  $\mathbb{E}(X_{n \wedge T}) \rightarrow \mathbb{E}(X_T)$ . Le passage à la limite dans l'égalité précédente donne donc  $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$ .  $\square$

**Remarque :** On peut montrer à l'aide de la première partie du théorème d'arrêt et du lemme de Fatou, que si  $(X_n)$  est une (sur-)martingale positive et  $T$  un temps d'arrêt quelconque alors  $\mathbb{E}(X_T) \leq \mathbb{E}(X_0)$ . En particulier, pour le joueur de casino, quel que soit son temps d'arrêt  $T$ ,

$$\mathbb{E}(X_T) \leq \mathbb{E}(X_0) = X_0 = \text{sa fortune initiale.}$$

**En pratique, à quoi sert le théorème d'arrêt ?**

Déjà, nous aurons besoin de ce résultat pour calculer le prix d'une option américaine dans le Chapitre 5.

Sinon, on utilise généralement l'égalité  $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$ , pour une martingale  $(X_n)$  et un temps d'arrêt  $T$  bien choisis (attention : il faut vérifier les hypothèses du théorème d'arrêt!). Cela permet de calculer facilement certaines quantités, qui sont souvent difficiles à calculer autrement.

- **Exemple.** Le problème de la ruine. Voici un petit exemple simple d'utilisation du théorème d'arrêt. Deux joueurs  $A$  et  $B$  parient sur une pièce de monnaie 1 euro à la fois et le jeu cesse lorsque l'un des deux est ruiné. Initialement  $A$  possède  $a$  euros et  $B$  en possède  $b$ .

La fortune de  $A$  est  $X_n = a + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$ , où  $\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ gagne au } i\text{ème coup} \\ -1 & \text{si } A \text{ perd au } i\text{ème coup} \end{cases}$

Les  $\varepsilon_i$  sont i.i.d, et  $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$ , donc  $(X_n)$  est une martingale (voir l'Exemple 2 du paragraphe 2.3.1). Le temps de ruine  $T = \inf\{n \geq 0 \text{ tel que } X_n = 0 \text{ ou } a + b\}$  est un premier temps de passage, donc c'est un temps d'arrêt. Admettons pour l'instant que  $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$ . Comme  $|X_n| \leq a + b$ , on peut appliquer la troisième partie du théorème d'arrêt, ce qui donne

$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0) = a.$$

Comme

$$a = \mathbb{E}(X_T) = 0 \times \mathbb{P}(A \text{ ruiné}) + (a + b) \times \mathbb{P}(A \text{ gagnant})$$

avec  $\mathbb{P}(A \text{ ruiné}) = 1 - \mathbb{P}(A \text{ gagnant})$ , on en déduit que

$$\mathbb{P}(A \text{ gagne la fortune de } B) = \frac{a}{a + b}.$$

Il reste à vérifier que  $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$ . Remarquons déjà que

$$\begin{aligned} T > n &\implies 0 < a + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n < a + b \\ &\implies -a < \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n < b \\ &\implies \frac{-a}{\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n}{\sqrt{n}} < \frac{b}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Comme  $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$  et  $\mathbb{E}(\varepsilon_i^2) = 1$ , le théorème central limite assure que la loi de  $(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)/\sqrt{n}$  converge vers la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. En particulier,

$$\mathbb{P}(T > n) \approx \int_{-a/\sqrt{n}}^{b/\sqrt{n}} e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On en déduit que  $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$ .

## 2.4 Exercices

### 2.4.1 Une autre formulation de la propriété de martingale

Soit  $(\mathcal{F}_n)$  une filtration et  $(X_n)$  un processus tel que  $X_n$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable pour tout  $n \geq 0$  (on dit alors que le processus  $X$  est adapté). Montrer que  $(X_n)$  est une martingale ssi

$$\mathbb{E}(\Delta X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0$$

où  $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$ .

### 2.4.2 Pour s'entraîner !

Soit  $X_1, X_2, \dots$  des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note  $m = \mathbb{E}(X_n) < +\infty$ , ainsi que  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$  et

$$Y_n := \sum_{i=1}^n iX_i - \frac{n(n+1)}{2} m.$$

Calculer  $\mathbb{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$ . Que peut-on dire du processus  $(Y_n)_{n \geq 1}$  ?

### 2.4.3 Deux formules utiles

Soit  $(M_n)$  une martingale et  $T$  un temps d'arrêt borné.

1. Pour  $N \geq n$ , montrer que  $\mathbb{E}(M_N \mid \mathcal{F}_n) = M_n$ .
2. Montrer que  $\mathbb{E}(M_T \mid \mathcal{F}_n) = M_{T \wedge n}$  pour tout  $n \geq 0$ .

### 2.4.4 Temps d'atteinte d'une barrière

Soit  $X_1, X_2, \dots$  des variables aléatoires indépendantes telles que  $\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$ . On pose  $S_0 = 0$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  pour  $n \geq 1$  et  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ .

1. On fixe  $\lambda > 0$ . Montrer que  $M_n := e^{\lambda S_n} / (\cosh \lambda)^n$  est une  $\mathcal{F}_n$ -martingale (rappel :  $\cosh \lambda = \frac{1}{2}(e^\lambda + e^{-\lambda})$ ).
2. Montrer que  $\cosh x \geq 1$  pour tout  $x \geq 0$ .
3. Soit  $\tau = \inf\{n > 0 : S_n \geq 10\}$ . Montrer que  $M_{n \wedge \tau}$  est une martingale et donner une constante  $K > 0$  telle que  $|M_{n \wedge \tau}| \leq K$ .
4. Etablir (en justifiant soigneusement) l'égalité  $\mathbb{E}((\cosh \lambda)^{-\tau}) = e^{-10\lambda}$ . On pourra admettre que  $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$ .

### 2.4.5 La pièce truquée

Richard propose à son petit frère Paul de jouer au jeu suivant : ils misent chacun 1 Euro à la fois, si pile sort Richard gagne les 2 Euros, si face sort c'est Paul qui empoche les 2 Euros. Ce que Richard n'a pas dit à son frère, c'est que la pièce est truquée. La probabilité  $p$  que pile sorte vérifie  $p > 1 - p > 0$ . Initialement les deux joueurs ont chacun 100 Euros. On note  $G_n$  le gain/perte de Richard au  $n$ -ième pari :  $\mathbb{P}(G_n = +1) = p$  et  $\mathbb{P}(G_n = -1) = 1 - p$ . On note  $X_n$  la fortune de Richard après le  $n$ -ième pari :  $X_n = 100 + G_1 + \dots + G_n$ . L'information des joueurs après le  $n$ -ième pari est  $\mathcal{F}_n := \sigma(G_1, \dots, G_n)$ .

1. On pose  $Z_n := \lambda^{X_n}$ , avec  $\lambda = (1 - p)/p$ . Que vaut  $\mathbb{E}(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ ? Conclusion ?
2. On appelle  $T$  le temps de ruine, c'est à dire  $T = \inf\{n \geq 1 : X_n = 0 \text{ ou } 200\}$ . Quelles sont les valeurs que peut prendre  $\lambda$ ? En déduire que  $|Z_{n \wedge T}| \leq 1$ .
3. Admettons que  $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$  (voir question 5). Calculez  $\mathbb{E}(Z_T)$  en fonction de  $\lambda$ .
4. En déduire la valeur de la probabilité que Richard soit ruiné au temps  $T$ .
5. Montrez que  $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$ .

### 2.4.6 Décomposition de Doob

L'objet de cet exercice est de montrer qu'une sous-martingale  $(X_n)$  se décompose de manière unique en une martingale  $(M_n)$  et un processus croissant prévisible  $(A_n)$ . Cette décomposition s'appelle décomposition de Doob.

Considérons donc une sous-martingale  $(X_n)_{n \geq 0}$ . On pose  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ ,  $A_0 = 0$ ,

$$A_n = \sum_{k=1}^n (\mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1}) \quad \text{et} \quad M_n = X_0 + \sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_{k-1})).$$

1. Montrer que  $(M_n)$  est une martingale.
2. Montrer que  $A_{n+1} \geq A_n$  quel que soit  $n \geq 0$ . la variable aléatoire  $A_n$  est-elle  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable?  $\mathcal{F}_n$ -mesurable ?
3. Montrer que si  $X_n = M'_n + A'_n$  où  $M'_n$  est une martingale et  $A'_n$  est  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable et vérifie  $A'_0 = 0$ ,  $A'_{n+1} \geq A'_n$  quel que soit  $n \geq 0$ , alors  $M_n = M'_n$  et  $A_n = A'_n$  (on pourra commencer par montrer que  $\Delta A'_n = \Delta A_n$ ).

### 2.4.7 \*Généalogie de Galton-Watson

Nous allons nous intéresser à un modèle simple de population. Au temps initial  $n = 0$ , on a un individu (l'ancêtre). On note  $Z_n$  le nombre de ses descendants à la  $n$ -ième génération. On suppose que chaque individu de la  $n$ -ième génération donne naissance à des enfants indépendamment des autres individus, puis meurt. On suppose également que le nombre d'enfants d'un individu suit une loi  $\mu$  "universelle" (dans le sens où c'est la même pour tout le monde) que l'on connaît.

Formalisons un peu plus le problème. On appelle  $X_k^{(n)}$  le nombre d'enfants de l'individu numéro  $k$  présent à la  $n$ -ième génération. Par hypothèse, les variables aléatoires

$$\left( X_k^{(n)}; k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \right)$$

sont donc indépendantes et suivent la loi  $\mu$ , c'est-à-dire  $\mathbb{P}\left(X_k^{(n)} = i\right) = \mu(i)$ . Remarquons aussi que le nombre  $Z_n$  d'individus présents à la génération  $n$  vérifie la formule de récurrence :

$$Z_{n+1} = X_1^{(n)} + \dots + X_{Z_n}^{(n)}.$$

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\mu$  (i.e. telle que  $\mathbb{P}(X = i) = \mu(i)$ ). On note  $m := \mathbb{E}(X)$  son espérance, et  $G$  sa fonction génératrice, définie par

$$G(s) := \mathbb{E}\left(s^X\right), \text{ pour } s \in [0, 1].$$

On supposera dans la suite que  $\mu(0) > 0$ .

1. Exprimer  $G(s)$  en fonction des  $\mu(k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Que vaut  $G(1)$  ?  $G(0)$  ?
2. Montrer que  $G$  est croissante et convexe. Que vaut  $G'(1)$  ? Dessiner les fonctions  $x \mapsto G(x)$  et  $x \mapsto x$  en séparant les cas  $m \leq 1$  et  $m > 1$  et en portant une attention particulière au comportement de  $G$  en 1.
3. On note  $\mathcal{F}_n := \sigma\left(X_k^{(1)}, \dots, X_k^{(n-1)}; k \in \mathbb{N}\right)$  l'information contenue dans la généalogie jusqu'au temps  $n$ , c'est à dire le nombre d'enfants de chaque individu jusqu'à la génération  $n - 1$ . Calculez  $\mathbb{E}(s^{Z_{n+1}} | \mathcal{F}_n)$  à l'aide de la question 3 de l'Exercice 1.5.6 du Chapitre 1. En déduire la formule

$$G_n(s) := \mathbb{E}\left(s^{Z_n}\right) = \underbrace{G \circ \dots \circ G}_n(s).$$

4. Exprimer en français à quoi correspond la quantité  $G_n(0)$ . On s'intéresse à la probabilité d'extinction de la population, i.e. à  $p := \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} : Z_n = 0)$ . Exprimer  $p$  en fonction des  $G_n(0)$ .
5. En reprenant les graphes dessinés au 2., montrer que  $p = 1$  si  $m \leq 1$  et  $p = G(p) < 1$ , si  $m > 1$ .
6. On pose  $M_n := Z_n/m^n$ . A l'aide de la question 2 de l'Exercice 1.5.6, montrer que  $M_n$  est une martingale. Que vaut  $\mathbb{E}(M_n)$  ?
7. On admet que la limite  $M_\infty(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(\omega)$  existe pour presque tout  $\omega$ . Dans le cas  $m \leq 1$ , que vaut  $M_\infty$  ? Et  $\mathbb{E}(M_\infty)$  ? Comparer  $\mathbb{E}(M_\infty)$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(M_n)$ .
8. Établir l'égalité :  $\mathbb{E}(\exp(-\lambda M_n)) = G_n(\exp(-\lambda/m^n))$ .
9. Pour  $\lambda > 0$ , justifier à l'aide du théorème de convergence dominée, le passage à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\exp(-\lambda M_n)) = \mathbb{E}(\exp(-\lambda M_\infty)) =: L(\lambda).$$



Déduire du 8. (et en se rappelant que  $G_n = G \circ G_{n-1}$ ) l'équation fonctionnelle vérifiée par  $L$  :

$$L(\lambda) = G(L(\lambda/m)).$$

Remarque : Cette équation détermine la fonction  $L$ , qui elle même détermine la loi de  $M_\infty$ .

### 2.4.8 \*Première inégalité maximale (Doob)

Considérons une martingale positive  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et pour  $a > 0$  appelons  $\tau_a := \inf\{k \in \mathbb{N} : X_k \geq a\}$  le premier temps de passage de  $X_n$  au dessus de  $a$ .

1. Le temps  $\tau_a$  est-il un temps d'arrêt ?

2. Fixons un entier  $n$ . Justifier les égalités

$$\mathbb{E}(X_{\min(\tau_a, n)}) = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_n)$$

et en déduire l'égalité

$$\mathbb{E}(X_{\tau_a} \mathbf{1}_{\tau_a \leq n}) = \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\tau_a \leq n}).$$

3. A partir de la dernière égalité obtenir la majoration (dite inégalité maximale de Doob)

$$\mathbb{P}\left(\max_{k=1 \dots n} X_k \geq a\right) \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\max_{k=1 \dots n} X_k \geq a}). \quad (2.3)$$

4. Montrer que cette inégalité est encore vraie pour une sous-martingale positive.

### 2.4.9 \*Seconde inégalité maximale (Doob)

Soit  $p$  un réel plus grand que 1 et  $(M_n)$  une martingale. Notons  $S_n = \sup_{0 \leq k \leq n} |M_k|$ .

1. Montrer que  $(|M_n|)$  est une sous-martingale positive.

2. A l'aide de la formule de Fubini et de la première inégalité maximale (2.3), montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n^p) &= \int_0^\infty p x^{p-1} \mathbb{P}(S_n \geq x) dx \\ &\leq \int_0^\infty p x^{p-2} \mathbb{E}(|M_n| \mathbf{1}_{\{S_n \geq x\}}) dx = \mathbb{E}(|M_n| S_n^{p-1}) \times \frac{p}{p-1}. \end{aligned}$$

3. A l'aide de l'inégalité de Hölder en déduire la relation

$$\mathbb{E}(S_n^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|M_n|^p)$$

puis la seconde inégalité maximale

$$\mathbb{E}\left(\sup_{n \geq 0} |M_n|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(|M_n|^p). \quad (2.4)$$

### 2.4.10 \*Identité de Wald

Considérons une marche au hasard  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , avec les  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i.i.d. (indépendants et de même loi). Notons  $m := \mathbb{E}(X_n) < +\infty$  et pour  $a > 0$  posons  $T := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \geq a\}$ .

1. Que dire de  $T$  ?
2. On suppose que  $m > 0$ . Que dire du processus  $(S_n - nm)_{n \in \mathbb{N}}$  ? En déduire l'égalité

$$m \mathbb{E}(T \wedge n) = \mathbb{E}(S_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(S_T \mathbf{1}_{T \leq n}) + \mathbb{E}(S_n \mathbf{1}_{T > n}).$$

3. Montrer que  $\mathbb{E}(S_n \mathbf{1}_{T > n}) \leq a \mathbb{P}(T > n)$ , puis justifier à l'aide de la loi des grands nombres l'égalité (appelée identité de Wald)

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{m} \mathbb{E}(S_T) \quad (\text{se limiter au cas où } X_n \geq 0 \text{ pour tout } n).$$

4. On suppose maintenant que  $m = 0$ . Montrer que  $(S_n)$  est une martingale. A-t-on  $\mathbb{E}(S_T) = \mathbb{E}(S_0)$  ? Pourquoi ? Pour  $\epsilon > 0$  on pose  $T_\epsilon = \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k + \epsilon k \geq a\}$ . Justifier le fait que  $T \geq T_\epsilon$  et montrer (avec l'identité de Wald) que

$$\mathbb{E}(T) \geq \mathbb{E}(T_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}(S_{T_\epsilon} + \epsilon T_\epsilon) \geq \frac{a}{\epsilon}.$$

Que vaut  $\mathbb{E}(T)$  ?

### 2.4.11 \*Martingales de carré intégrable

Considérons une martingale  $(V_n)_{n \geq 0}$ , avec  $\mathcal{F}_n = \sigma(V_0, \dots, V_n)$  et  $\mathbb{E}(V_n^2) < +\infty$  pour tout  $n$ .

1. Pour  $k \geq 0$ , montrer que  $\mathbb{E}(V_{k+1} V_k) = \mathbb{E}(V_k^2)$ . En déduire

$$\mathbb{E}((V_{k+1} - V_k)^2) = \mathbb{E}(V_{k+1}^2) - \mathbb{E}(V_k^2).$$

2. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}((V_{k+1} - V_k)^2) < +\infty \iff \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(V_n^2) < +\infty.$$

# Chapitre 3

## Marché Bond-Stock

**Objectifs :** introduire le marché Bond-Stock (ou marché B-S) et les "probabilités risque-neutre". Relier cette dernière notion mathématique aux notions économiques "d'arbitrage" et de "complétude".

### 3.1 Le marché Bond-Stock (ou marché B-S)

#### 3.1.1 Évolution

On s'intéresse à un marché constitué de deux actifs :

- un actif sans risque  $B$  (d'évolution prévisible),
- un actif risqué  $S$  (d'évolution imprévisible).

L'actif sans risque  $B$  (Bond ou obligation) est typiquement un bon du trésor. L'actif risqué  $S$  (Stock) peut être n'importe quelle valeur négociée sur les marchés, par exemple une action cotée en bourse, le cours d'une matière première, le cours d'une option, etc. Notons  $\Delta B_n := B_n - B_{n-1}$  et  $\Delta S_n := S_n - S_{n-1}$  les variations de  $B$  et de  $S$  entre les temps  $n - 1$  et  $n$ . L'évolution des actifs  $B$  et  $S$  est décrite par

$$\boxed{\begin{cases} \Delta B_n &= r_n B_{n-1} \\ \Delta S_n &= \rho_n S_{n-1} \end{cases}} \quad (3.1)$$

avec  $r_n$  le taux d'intérêt de  $B$  et  $\rho_n$  le rendement de  $S$ . Le taux d'intérêt de  $r_n$  et le rendement  $\rho_n$  sont a priori stochastiques, autrement dit  $r_n$  et  $\rho_n$  sont des variables aléatoires. On note  $\mathcal{F}_n$  l'information dont on dispose au temps  $n$ . L'actif  $B$  est dit sans risque car son évolution est prévisible : au temps  $n - 1$  on connaît la valeur du taux d'intérêt  $r_n$  pour le temps  $n$ . La variable aléatoire  $r_n$  est donc  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable. Par contre, l'actif  $S$  est un actif risqué : au temps  $n - 1$  on ne connaît pas la valeur de  $\rho_n$ . La variable aléatoire  $\rho_n$  est donc  $\mathcal{F}_n$ -mesurable, mais pas  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable. Notre information au temps  $n$  est donc constituée de  $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n, B_0, \dots, B_{n+1})$ .

**Remarque :** Ici, le temps  $n$  est discret, et on peut voir  $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$  comme la dérivée en temps discret de  $X$ . On supposera aussi dans toute la suite que  $B$  et  $S$  ne peuvent prendre qu'un **nombre fini** de valeurs. Cela correspond en fait à la réalité : les cotations sont données avec un nombre fini de chiffres après la virgule et elles ne se font pas exactement en temps continu.

Il est commode de réécrire l'évolution des actifs sous la forme suivante. L'équation (3.1) donne  $B_n - B_{n-1} = r_n B_{n-1}$  d'où  $B_n = (1 + r_n) B_{n-1}$ . Par récurrence on obtient

$$B_n = (1 + r_n) \cdots (1 + r_1) B_0,$$

et de la même manière  $S_n = (1 + \rho_n) \cdots (1 + \rho_1) S_0$ .

**Définition** - Exponentielle Stochastique -

A un processus  $(X_n)_{n \geq 0}$  on associe l'exponentielle stochastique  $\varepsilon_n(X)$  définie par  $\varepsilon_0(X) = 1$  et

$$\varepsilon_n(X) = (1 + \Delta X_1) \cdots (1 + \Delta X_n), \quad n \geq 1.$$

La terminologie "exponentielle stochastique" vient de l'analogie avec le temps continu où cette quantité s'exprime au travers d'une exponentielle, voir la Section 7.4.1. On peut réexprimer les valeurs de  $B_n$  et  $S_n$  avec l'exponentielle stochastique. En posant

$$U_n = \sum_{k=1}^n r_k \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=1}^n \rho_k,$$

les valeurs de  $B_n$  et  $S_n$  sont données par

$$\begin{cases} B_n &= B_0 \varepsilon_n(U) \\ S_n &= S_0 \varepsilon_n(V). \end{cases}$$

Le lemme suivant répertorie les principales propriétés de l'exponentielle stochastique.

**Lemme 3.1** Propriétés de  $\varepsilon_n(\cdot)$

1. On a  $\varepsilon_n(X) \varepsilon_n(Y) = \varepsilon_n(X + Y + [X, Y])$ , où  $[X, Y]_n = \sum_{k=1}^n \Delta X_k \Delta Y_k$  est appelée variation quadratique de  $X$  et  $Y$ . Par convention  $[X, Y]_0 = 0$ .
2. On a  $1/\varepsilon_n(X) = \varepsilon_n(-X^*)$ , où  $X_0^* = 0$  et  $\Delta X_n^* = \frac{\Delta X_n}{1 + \Delta X_n}$ .
3.  $(\varepsilon_n(X))_{n \leq N}$  est une martingale ssi  $(X_n)_{n \leq N}$  est une martingale.

**Preuve:**

1. Par récurrence. La formule est vraie pour  $n = 0$ . Supposons qu'elle soit vraie au rang  $n - 1$ , et montrons qu'elle sera alors vraie au rang  $n$  :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n(X)\varepsilon_n(Y) &= \varepsilon_{n-1}(X)(1 + \Delta X_n)\varepsilon_{n-1}(Y)(1 + \Delta Y_n) \\
 &= \varepsilon_{n-1}(X)\varepsilon_{n-1}(Y)(1 + \Delta X_n + \Delta Y_n + \Delta X_n\Delta Y_n) \\
 &\stackrel{\text{récurrence}}{=} \varepsilon_{n-1}(X + Y + [X, Y])(1 + \Delta(X + Y + [X, Y]))_n \\
 &= \varepsilon_n(X + Y + [X, Y]).
 \end{aligned}$$

2. Définissons  $X^*$  par  $X_0^* = 0$  et  $\Delta X_n^* = \frac{\Delta X_n}{1 + \Delta X_n}$ . Vu la formule du 1. on a

$$\varepsilon_n(X)\varepsilon_n(-X^*) = \varepsilon_n(X - X^* - [X, X^*]).$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
 \Delta(X - X^* - [X, X^*])_n &= \Delta X_n - \frac{\Delta X_n}{1 + \Delta X_n} - \Delta X_n \left( \frac{\Delta X_n}{1 + \Delta X_n} \right) \\
 &= \frac{\Delta X_n + (\Delta X_n)^2 - \Delta X_n - (\Delta X_n)^2}{1 + \Delta X_n} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Comme pour tout processus  $Z$ , on a l'égalité  $Z_n = Z_0 + \sum_{k=1}^n \Delta Z_k$ , il s'en suit que  $(X - X^* - [X, X^*])_n = 0$  et finalement  $\varepsilon_n(X)\varepsilon_n(-X^*) = \varepsilon_n(0) = 1$ .

3. En utilisant que  $\varepsilon_{n-1}(X)$  est  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\varepsilon_n(X) \mid \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}((1 + \Delta X_n)\varepsilon_{n-1}(X) \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\
 &= \varepsilon_{n-1}(X)(1 + \mathbb{E}(\Delta X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})).
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\varepsilon_n(X) \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \varepsilon_{n-1}(X) &\quad \text{ssi} \quad \mathbb{E}(\Delta X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0 \\
 &\quad \text{ssi} \quad \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Conclusion :  $(\varepsilon_n(X))$  est une martingale ssi  $(X_n)$  est une martingale.  $\square$

### 3.1.2 Probabilités risque-neutre

Nous avons vu sur le modèle à "un pas / deux états" qu'il pouvait être judicieux de regarder l'évolution du marché non pas sous la *probabilité réelle*  $\mathbb{P}$ , mais sous une probabilité artificielle, appelée *probabilité risque-neutre*, qui annule en moyenne la tendance haussière ou baissière du cours réactualisé de  $S$ . Nous allons généraliser cette démarche.

**Définition** - Probabilité risque-neutre -

On dit que  $\mathbb{P}^*$  est une probabilité risque-neutre si

- $\mathbb{P}^*$  est équivalente à la probabilité réelle  $\mathbb{P}$ , c'est à dire  $\mathbb{P}^*(A) = 0$  ssi  $\mathbb{P}(A) = 0$ ,
- $(S_n/\varepsilon_n(U))_{n \leq N}$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ .

La première condition est une condition technique qui impose qu'un événement qui n'a pas lieu dans le monde réel ( $\mathbb{P}(A) = 0$ ), n'a pas lieu non-plus sous la probabilité risque-neutre ( $\mathbb{P}^*(A) = 0$ ); et vice-versa. La seconde condition est équivalente à " $(S_n/B_n)_{n \leq N}$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ ".

La valeur  $S_n/\varepsilon_n(U)$  est appelée *valeur réactualisée* de  $S_n$ . Elle correspond à la valeur relative de  $S_n$  par rapport à  $B_n$ . Autrement dit, elle donne le nombre d'obligation  $B$  que l'on peut acheter au temps  $n$  avec un actif  $S$ .

**Comment interpréter cette probabilité  $\mathbb{P}^*$  ?**

Sous la probabilité  $\mathbb{P}^*$  les évolutions possibles du marché sont les mêmes que dans le "monde réel" (sous  $\mathbb{P}$ ), mais elles ont lieu avec une probabilité différente. Par exemple, une évolution très probable sous  $\mathbb{P}$ , sera peut être peu probable sous  $\mathbb{P}^*$ . La probabilité  $\mathbb{P}^*$  n'est donc pas observée sur les marchés, mais c'est un *outil de calcul* très utile. Elle permet de se ramener à un marché "risque-neutre" où la valeur relative  $(S_n/B_n)$  du cours de  $S$  par rapport au cours de  $B$  n'a pas de tendance haussière ou baissière.

Nous allons relier dans les paragraphes suivants l'existence d'une probabilité risque-neutre aux notions économique d'arbitrage et de complétude du marché.

Dorénavant, nous noterons  $\mathbb{E}^*(X)$  pour l'espérance de  $X$  prise sous la probabilité  $\mathbb{P}^*$ ,  $\mathbb{E}^*(X | \mathcal{F}_n)$  pour l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{F}_n$  sous la probabilité  $\mathbb{P}^*$ , etc. Par exemple, si  $X : \Omega \rightarrow \{x_1, \dots, x_k\}$

$$\mathbb{E}^*(X) = \sum_{i=1}^k x_i \mathbb{P}^*(X = x_i).$$

La prochaine proposition exprime la condition sur  $U_n$  et  $V_n$  pour qu'une probabilité soit "risque-neutre".

**Proposition 3.2** - Caractérisation d'une probabilité risque-neutre -

Si  $\mathbb{P}^*$  est une probabilité équivalente à  $\mathbb{P}$  alors

$\mathbb{P}^*$  est une probabilité risque-neutre ssi  $(V_n - U_n)$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ .

**Preuve:** Pour montrer que  $\mathbb{P}^*$  est une probabilité risque-neutre il faut vérifier que  $(S_n/\varepsilon_n(U))$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$  si et seulement si  $(V_n - U_n)$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ . Exprimons

$S_n/\varepsilon_n(U)$  à l'aide de l'exponentielle stochastique :

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{\varepsilon_n(U)} &= \frac{S_0 \varepsilon_n(V)}{\varepsilon_n(U)} \\ &\stackrel{\text{Lemme 3.1.2}}{=} S_0 \varepsilon_n(V) \varepsilon_n(-U^*) \\ &\stackrel{\text{Lemme 3.1.1}}{=} S_0 \varepsilon_n(V - U^* - [V, U^*]) \end{aligned}$$

On déduit du Lemme 3.1.3 que le processus  $(S_n/\varepsilon_n(U))_{n \leq N}$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$  ssi  $(V - U^* - [V, U^*])_{n \leq N}$  en est une. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \Delta(V - U^* - [V, U^*])_n &= \Delta V_n - \frac{\Delta U_n}{1 + \Delta U_n} - \Delta V_n \frac{\Delta U_n}{1 + \Delta U_n} \\ &= \frac{\Delta V_n - \Delta U_n}{1 + \Delta U_n}. \end{aligned}$$

En conséquence,  $(V - U^* - [V, U^*])_{n \leq N}$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$  ssi

$$\mathbb{E}^*(\Delta(V - U^* - [V, U^*])_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}^*\left(\frac{\Delta V_n - \Delta U_n}{1 + \Delta U_n} \mid \mathcal{F}_n\right) = 0.$$

Or  $\Delta U_n = r_n$  est  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable donc

$$\mathbb{E}^*(\Delta(V - U^* - [V, U^*])_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \frac{1}{1 + \Delta U_n} \mathbb{E}^*(\Delta V_n - \Delta U_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$$

et  $(V - U^* - [V, U^*])_{n \leq N}$  est une martingale ssi  $\mathbb{E}^*(\Delta V_n - \Delta U_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0$

c'est à dire ssi  $V - U$  est une martingale. En recollant tous les morceaux, on obtient le résultat annoncé.  $\square$

### 3.1.3 Portefeuilles autofinancés

Confectionnons-nous un portefeuille  $\Pi = (\beta_n, \gamma_n)_{n \leq N}$  composé au temps  $n$  de  $\beta_n$  unités de  $B$  et  $\gamma_n$  unités de  $S$ . Sa valeur au temps  $n$  est

$$X_n^\Pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n.$$

La gestion du portefeuille  $\Pi$  s'effectue de la manière suivante. Au temps  $n$ , nous possédons une quantité  $\beta_n$  et  $\gamma_n$  d'actifs  $B$  et  $S$  dont les cours sont  $B_n$  et  $S_n$ . Nous composons notre portefeuille  $\Pi$  de nouvelles quantités  $\beta_{n+1}$  et  $\gamma_{n+1}$  d'actifs  $B$  et  $S$ . Ce choix s'effectue au temps  $n$ , donc  $\beta_{n+1}$  et  $\gamma_{n+1}$  sont  $\mathcal{F}_n$ -mesurables (ou de manière équivalente  $\beta_n$  et  $\gamma_n$  sont  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurables).

Au temps  $n$ , la valeur du portefeuille est donnée par  $X_n^\Pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$ . Après le réinvestissement, sa valeur est donnée par  $\beta_{n+1} B_n + \gamma_{n+1} S_n$ . Il est naturel de considérer les portefeuilles qui gardent une valeur constante lors du réinvestissement (on n'ajoute ni ne retire de l'argent au portefeuille), c'est à dire tels que

$$\beta_n B_n + \gamma_n S_n = \beta_{n+1} B_n + \gamma_{n+1} S_n.$$

Un tel portefeuille sera dit autofinancé. Dans la définition suivante, la condition d'autofinancement est exprimée au temps  $n - 1$  plutôt que  $n$ .

**Définition** - Portefeuille autofinancé -

Un portefeuille est dit autofinancé si

$$\beta_{n-1}B_{n-1} + \gamma_{n-1}S_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme

$$\Delta\beta_n B_{n-1} + \Delta\gamma_n S_{n-1} = 0.$$

**Attention !** La valeur d'un portefeuille autofinancé ne varie pas lors du *réinvestissement*, mais elle varie entre *deux instants* consécutifs. L'exercice 3.5.1 montre que la variation de  $X^\Pi$  entre le temps  $n - 1$  et le temps  $n$  est donnée par  $\Delta X_n^\Pi = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n$ .

Comment évolue statistiquement la valeur  $X_n^\Pi$  d'un portefeuille autofinancé sous une probabilité risque-neutre ? La réponse est donnée par le résultat suivant.

**Proposition 3.3** - Autofinancement et martingales -

Supposons qu'il existe une probabilité risque-neutre  $\mathbb{P}^*$ . Alors, la valeur réactualisée  $(\varepsilon_n(U)^{-1} X_n^\Pi)_{n \geq 0}$  d'un portefeuille autofinancé  $\Pi$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ .

**Preuve:** Comme  $B_n = B_0 \varepsilon_n(U)$ , la valeur réactualisée du portefeuille est donnée par

$$X_n^\Pi / \varepsilon_n(U) = \beta_n B_0 + \gamma_n S_n / \varepsilon_n(U).$$

En prenant l'espérance conditionnelle de cette égalité on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^* \left( \frac{X_n^\Pi}{\varepsilon_n(U)} \mid \mathcal{F}_{n-1} \right) &= \mathbb{E}^* (\beta_n B_0 \mid \mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}^* \left( \gamma_n \frac{S_n}{\varepsilon_n(U)} \mid \mathcal{F}_{n-1} \right) \\ &= \beta_n B_0 + \gamma_n \mathbb{E}^* \left( \frac{S_n}{\varepsilon_n(U)} \mid \mathcal{F}_{n-1} \right) \quad (\text{car } \beta_n \text{ et } \gamma_n \text{ sont } \mathcal{F}_{n-1}\text{-mesurable}) \\ &= \beta_n B_0 + \gamma_n \frac{S_{n-1}}{\varepsilon_{n-1}(U)} \quad (\text{car } (S_n / \varepsilon_n(U)) \text{ est une martingale sous } \mathbb{P}^*) \\ &= (\beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}) / \varepsilon_{n-1}(U) \quad (\text{car } B_{n-1} = B_0 \varepsilon_{n-1}(U)) \\ &= (\beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-1}) / \varepsilon_{n-1}(U) \quad (\text{par autofinancement}) \\ &= X_{n-1}^\Pi / \varepsilon_{n-1}(U), \end{aligned}$$

donc  $(X_n^\Pi / \varepsilon_n(U))$  est bien une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ . □



## 3.2 Arbitrage et martingales

Dorénavant on s'intéresse à l'évolution du marché jusqu'à une date  $N$  fixée.

En économie, la notion d'opportunité d'arbitrage correspond à la notion "d'opportunité de gagner de l'argent sans prendre de risque". Mathématiquement, cela se formalise de la manière suivante.

**Définition** - Opportunité d'arbitrage -

*On dit qu'il existe une opportunité d'arbitrage s'il existe un portefeuille autofinancé  $\Pi$  tel que*

$$X_0^\Pi = 0, \quad X_n^\Pi \geq 0 \quad \forall n \leq N, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_N^\Pi > 0) > 0.$$

Autrement dit, il existe une opportunité d'arbitrage s'il est possible, en gérant un portefeuille de façon autofinancée, de gagner de l'argent (avec probabilité positive), tout en ayant aucun risque d'en perdre. Cette hypothèse est naturelle dans un marché équilibré. Le théorème fondamental suivant relie la notion économique "d'absence d'opportunité d'arbitrage" à la notion mathématique "d'existence d'une probabilité risque-neutre."

**Théorème 3.4** - Arbitrage et probabilités risque-neutre -

*Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage*

$\iff$

*Il existe au moins une probabilité risque-neutre.*

**Preuve:**

( $\Leftarrow$ ) Soit  $\mathbb{P}^*$  une probabilité risque-neutre et  $\Pi$  un portefeuille autofinancé tel que  $X_0^\Pi = 0$ . D'après la Proposition 3.3,  $(X_n^\Pi/\varepsilon_n(U))_{n \leq N}$  est martingale sous  $\mathbb{P}^*$ . En particulier

$$\mathbb{E}^* \left( \frac{X_N^\Pi}{\varepsilon_N(U)} \right) = \mathbb{E}^* \left( \frac{X_0^\Pi}{\varepsilon_0(U)} \right) = 0.$$

En conséquence si  $X_N^\Pi/\varepsilon_N(U) \geq 0$ , alors nécessairement  $\mathbb{P}^*(X_N^\Pi > 0) = 0$ . Comme de plus  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{P}^*$  sont par hypothèse équivalentes, on en déduit que  $\mathbb{P}(X_N^\Pi > 0) = 0$ . Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage possible.

( $\Rightarrow$ ) La preuve de la réciproque est plus ardue. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [6] Théorème 2.6.

□

### 3.3 Complétude du marché

En économie un marché complet correspond à un marché idéal, sans contraintes ni frais de transactions, où tous les actifs sont accessibles à tout moment et en n'importe quelle quantité. Mathématiquement, cette notion est formalisée de la manière suivante.

**Définition** - Marché complet -

*Le marché B-S est dit complet si, pour toute variable aléatoire  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ , il existe un portefeuille autofinancé  $\Pi$  qui réplique  $f$  à l'échéance  $N$ , c'est à dire tel que*

$$X_N^\Pi(\omega) = f(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

L'hypothèse de complétude du marché est difficilement justifiable économiquement. Cependant, cette hypothèse permet de construire une théorie d'évaluation des produits dérivés très simple, qui sert de "guide" en pratique.

Nous allons voir que la notion de complétude est liée à l'unicité d'une probabilité risque-neutre.

**Théorème 3.5** Complétude et probabilité risque-neutre

*Considérons un marché B-S sans opportunité d'arbitrage. On a l'équivalence :*

*Le marché est complet  $\iff$  Il existe une unique probabilité risque-neutre  $\mathbb{P}^*$ .*

**Preuve:** ( $\Rightarrow$ ) Supposons que le marché soit complet et qu'il existe deux probabilités risque-neutre  $\mathbb{P}^*$  et  $\mathbb{P}'$ . Comme  $\mathbb{P}^* \neq \mathbb{P}'$ , il existe un événement  $A$  tel que

$$\mathbb{P}^*(A) \neq \mathbb{P}'(A). \quad (3.2)$$

Posons  $f(\omega) = \varepsilon_N(U)(\omega)\mathbf{1}_A(\omega)$ . Le marché étant complet il existe un portefeuille autofinancé  $\Pi$  tel que  $X_N^\Pi(\omega) = f(\omega)$  quel que soit  $\omega \in \Omega$ . D'après la Proposition 3.3, la valeur réactualisée du portefeuille  $\Pi$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$  et sous  $\mathbb{P}'$ . En conséquence,

$$\mathbb{E}^*(\varepsilon_N(U)^{-1}X_N^\Pi) = \mathbb{E}^*(\varepsilon_0(U)^{-1}X_0^\Pi) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}'(\varepsilon_N(U)^{-1}X_N^\Pi) = \mathbb{E}'(\varepsilon_0(U)^{-1}X_0^\Pi).$$

Or d'une part  $\varepsilon_0(U)^{-1} = 1$  et d'autre part  $\varepsilon_N(U)^{-1}X_N^\Pi = \varepsilon_N(U)^{-1}f = \mathbf{1}_A$ , donc

$$\mathbb{E}^*(\mathbf{1}_A) = X_0^\Pi = \mathbb{E}'(\mathbf{1}_A),$$

c'est à dire  $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}'(A)$  ce qui contredit (3.2). Il ne peut donc pas exister deux probabilités risque-neutre différentes. On sait par ailleurs qu'il en existe au moins une car on a supposé l'absence d'opportunité d'arbitrage.

( $\Leftarrow$ ) Comme précédemment, nous ne démontrerons pas la réciproque. Nous renvoyons le lecteur curieux à [6] Théorème 3.4. □

### 3.4 Le lemme de Girsanov

Dans le cadre du marché B-S, les notions économiques d'absence d'opportunité d'arbitrage et de complétude correspondent aux notions mathématiques d'existence et d'unicité d'une probabilité risqué-neutre  $\mathbb{P}^*$ . Nous allons voir dans ce paragraphe un moyen pour obtenir une telle probabilité  $\mathbb{P}^*$  à partir de  $\mathbb{P}$ .

On peut créer facilement une nouvelle probabilité  $\mathbb{P}'$  à partir de  $\mathbb{P}$ . Considérons une variable aléatoire  $Z > 0$  vérifiant  $\mathbb{E}(Z) = 1$  et définissons  $\mathbb{P}'$  en posant

$$\mathbb{P}'(\omega) = Z(\omega)\mathbb{P}(\omega), \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega. \quad (3.3)$$

On a alors pour tout événement  $A$

$$\mathbb{P}'(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}'(\omega) = \sum_{\omega \in A} Z(\omega)\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}(Z1_A).$$

On vérifie aisément que  $\mathbb{P}'$  est bien une probabilité<sup>1</sup>, et on peut montrer que toute probabilité  $\mathbb{P}'$  équivalente à  $\mathbb{P}$  est de la forme (3.3). On vérifie également que l'espérance sous  $\mathbb{P}'$  d'une variable aléatoire  $X$  est donnée (dès qu'elle existe) par

$$\mathbb{E}'(X) = \mathbb{E}(ZX).$$

Le lemme suivant permet d'obtenir, pour un processus qui n'est pas une martingale sous  $\mathbb{P}$ , une probabilité  $\mathbb{P}'$  de la forme (3.3) sous laquelle le processus sera une martingale.

**Lemme 3.6** - Formule de Girsanov (temps discret) -

*Soit  $(M_n)_{n \leq N}$  une  $\mathcal{F}_n$ -martingale sous la probabilité  $\mathbb{P}$  et  $Z$  une variable aléatoire vérifiant  $\mathbb{E}(Z) = 1$  et  $Z(\omega) > 0$ , pour tout  $\omega \in \Omega$ .*

*Définissons la probabilité  $\mathbb{P}'$  en posant*

$$\mathbb{P}'(\omega) = Z(\omega)\mathbb{P}(\omega), \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega.$$

*Alors le processus  $(M_n^*)_{n \leq N}$  défini par*

$$M_n^* = M_n - \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left( \frac{Z_k}{Z_{k-1}} \Delta M_k \middle| \mathcal{F}_{k-1} \right), \quad \text{avec } Z_n = \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_n),$$

*est une martingale sous la probabilité  $\mathbb{P}'$ .*

La preuve de ce résultat est donné dans l'Exercice 3.5.4. L'exemple suivant vous propose une application de cette formule.

<sup>1</sup>c'est à dire  $\mathbb{P}'(A) \in [0, 1]$ ,  $\mathbb{P}'(\Omega) = 1$  et  $\mathbb{P}'(\cup_i A_i) = \sum_i \mathbb{P}'(A_i)$  si  $A_i \cap A_j = \emptyset$  pour tout  $i \neq j$ .

- **Exemple.** Supposons que les taux d'intérêt  $r_n$  sont constants, c'est à dire  $r_n = r > 0$  pour tout  $n$ , et que les  $(\rho_n)_{n \leq N}$  sont i.i.d. (indépendantes et de même loi). Notons

$$m = \mathbb{E}(\rho_n), \quad \sigma^2 = \mathbb{E}((\rho_n - m)^2) > 0$$

et

$$Z_N = \mathcal{E}_N(G) \quad \text{avec} \quad G_n := \frac{r - m}{\sigma^2}(\rho_1 + \dots + \rho_n - mn).$$

Lorsque  $Z_N(\omega) > 0$  pour tout  $\omega \in \Omega$ , nous pouvons montrer à l'aide de la formule de Girsanov, que la probabilité  $\mathbb{P}^*$  définie par

$$\mathbb{P}^*(\omega) = Z_N(\omega)\mathbb{P}(\omega), \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega, \quad (3.4)$$

est une probabilité risque-neutre, voir l'Exercice 3.5.5.

## 3.5 Exercices

### 3.5.1 Variation d'un portefeuille autofinancé

Montrer que la variation  $X_n^\Pi - X_{n-1}^\Pi$  de la valeur d'un portefeuille autofinancé  $\Pi$  entre le temps  $n - 1$  et le temps  $n$  est donnée par

$$\Delta X_n^\Pi = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n.$$

### 3.5.2 Valeur réactualisée d'un portefeuille autofinancé

Soit  $\Pi = (\beta_n, \gamma_n)_{n \leq N}$  un portefeuille autofinancé.

1. Montrer à l'aide de la condition d'autofinancement que

$$\Delta \left( \frac{X_n^\Pi}{\varepsilon_n(U)} \right) = \gamma_n \left( \frac{S_n}{\varepsilon_n(U)} - \frac{S_{n-1}}{\varepsilon_{n-1}(U)} \right) = \gamma_n \Delta \left( \frac{S_n}{\varepsilon_n(U)} \right).$$

2. En déduire que la valeur réactualisée d'un portefeuille autofinancé est donnée par

$$\frac{X_n^\Pi}{\varepsilon_n(U)} = X_0^\Pi + \sum_{k=1}^n \gamma_k \Delta \left( \frac{S_k}{\varepsilon_k(U)} \right).$$

### 3.5.3 Valeur réactualisée d'un portefeuille autofinancé (bis)

Considérons un marché B-S. On suppose qu'il existe une probabilité risque-neutre  $\mathbb{P}^*$  et on note  $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n)$ .

1. Montrer que si  $V_n$  est une  $\mathcal{F}_n$ -martingale sous  $\mathbb{P}^*$  et si  $(\alpha_n)$  est prévisible (c'est à dire  $\alpha_n$  est  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable pour tout  $n$ ) alors le processus  $(M_n)$  défini par

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \Delta V_k$$

est une  $\mathcal{F}_n$ -martingale sous  $\mathbb{P}^*$ .

2. Retrouver à partir de l'exercice précédent, le résultat de la Proposition 3.3 : "si  $\pi$  est un portefeuille autofinancé, sa valeur réactualisée  $(X_n^\pi / \varepsilon_n(U))$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ ".

### 3.5.4 \*Changement de probabilité : le lemme de Girsanov

Plaçons nous dans le cadre du lemme de Girsanov. Rappelons que pour toute variable aléatoire  $X$  on a la formule

$$\mathbb{E}'(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}'(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) Z(\omega) \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}(ZX).$$

1. On pose  $Z_n = \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_n)$ . Montrer que  $(Z_n)_{n \leq N}$  est une martingale sous  $\mathbb{P}$ .
2. Montrer que pour tout  $p \leq N$  et toute variable aléatoire  $\mathcal{F}_p$ -mesurable  $W$ , on a :

$$\mathbb{E}'(W) = \mathbb{E}(ZW) = \mathbb{E}(Z_p W).$$

3. Montrer que pour toute variable aléatoire  $\mathcal{F}_n$ -mesurable  $X$ , on a

$$\mathbb{E}'(X | \mathcal{F}_{n-1}) = \frac{1}{Z_{n-1}} \mathbb{E}(X Z_n | \mathcal{F}_{n-1}).$$

4. On note  $\alpha_n = Z_n / Z_{n-1}$ . Montrer que le processus  $(M_n^*)_{n \leq N}$  défini par

$$M_n^* = M_n - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\alpha_k \Delta M_k | \mathcal{F}_{k-1}),$$

est une martingale sous la probabilité  $\mathbb{P}'$ .

### 3.5.5 Détermination d'une probabilité risque-neutre

On se place dans le cadre de l'exemple du paragraphe 3.4 : les taux d'intérêt  $r_n$  sont constants, i.e.  $r_n = r > 0$  pour tout  $n$  (donc  $U_n = rn$ ), et les  $(\rho_n)_{n \leq N}$  sont i.i.d. (indépendantes et de même loi). Notons

$$m = \mathbb{E}(\rho_n) \geq 0, \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \mathbb{E}((\rho_n - m)^2) > 0.$$

1. On note  $V_n = \rho_1 + \dots + \rho_n$  et  $M_n = V_n - mn$ . Montrer que  $(M_n)_{n \leq N}$  est une martingale sous  $\mathbb{P}$ .
2. Soit  $G_n := \frac{r-m}{\sigma^2} M_n$  et  $Z_N = \mathcal{E}_N(G)$ . Montrer que  $(G_n)_{n \leq N}$  et  $(\mathcal{E}_n(G))_{n \leq N}$  sont des martingales sous la probabilité  $\mathbb{P}$ .
3. En déduire (avec les notations de l'Exercice 3.5.4) que  $Z_n = \mathcal{E}_n(G)$  pour  $n \leq N$ . Que vaut  $\alpha_n$  ?
4. Montrer que si  $(\rho_n(\omega) - m)(r - m) + \sigma^2 > 0$  pour tout  $n \leq N$  et  $\omega \in \Omega$ , alors  $\mathbb{P}^*$  définie par (3.4) est une probabilité.
5. Montrer (à l'aide du lemme de Girsanov) que  $(V_n - U_n)_{n \leq N}$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ .
6. En déduire que  $\mathbb{P}^*$  est une probabilité risque-neutre.

# Chapitre 4

## Couverture des options européennes

**Objectif :** déterminer dans le cadre du marché B-S le prix d'une option de type européenne.

### 4.1 Position du problème

Une option de type européenne est un contrat qui ne peut être exercé qu'à l'échéance  $N$  fixée à l'avance. Une telle option est donc caractérisée par son échéance  $N$  et sa fonction de paiement  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . La quantité  $f(\omega)$  correspond à ce que reçoit le détenteur de l'option à l'échéance  $N$  dans l'éventualité  $\omega$ .

**Exemples d'options européennes :**

- option d'achat européenne :  $f(\omega) = (S_N(\omega) - K)_+$
- option de vente européenne :  $f(\omega) = (K - S_N(\omega))_+$
- option Collar :  $f(\omega) = \min(S_N(\omega) - K_1, K_2)$
- option "look-back" :  $f(\omega) = S_N(\omega) - \min(S_0(\omega), \dots, S_N(\omega))$
- option asiatique  $f(\omega) = \frac{S_{N-p}(\omega) + \dots + S_N(\omega)}{p}$  pour un  $p < N$ .

Pour se couvrir le vendeur de l'option va investir sur le marché l'argent que l'acheteur lui a versé. Il va se constituer un portefeuille  $\Pi$  dont la valeur à la date  $N$  lui permettra de faire face à son engagement : son portefeuille  $\Pi$  doit donc vérifier  $X_N^\Pi(\omega) \geq f(\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega$ . On appelle portefeuille de couverture un tel portefeuille.

**Définition** - Portefeuille de couverture -

*Un portefeuille  $\Pi$  est un portefeuille de couverture, si sa valeur à l'échéance est supérieure ou égale à la fonction de paiement  $f$ , c'est à dire si*

$$X_N^\Pi(\omega) \geq f(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Le vendeur ne va pas injecter d'argent dans son portefeuille ni en retirer. Il va donc le gérer de manière autofinancée. De plus, la valeur initiale  $X_0^\Pi$  de son portefeuille va correspondre au montant (*la prime*) que l'acheteur lui a versé. En conséquence, le prix (équitable) d'une option correspond à la plus petite valeur initiale  $X_0^\Pi$  parmi toutes les valeurs initiales des portefeuilles de couverture autofinancés  $\Pi$ . Ecrit de manière synthétique cela donne :

**Définition** - Prix d'une option européenne -

*Le prix  $C$  d'une option européenne de fonction de paiement  $f$  et d'échéance  $N$  correspond à la quantité*

$$C := \inf \left\{ X_0^\Pi \text{ tel que } \begin{array}{l} - \Pi \text{ est autofinancé} \\ - X_N^\Pi(\omega) \geq f(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega \end{array} \right\}.$$

## 4.2 Prix d'une option dans un marché complet

Nous supposons dans ce paragraphe que le marché B-S est sans opportunité d'arbitrage et complet. Vu les résultats du chapitre précédent, il existe donc une unique probabilité risque-neutre  $\mathbb{P}^*$ . Le résultat suivant établit le prix d'une option européenne en fonction de  $\mathbb{P}^*$ .

**Théorème 4.1** Prix d'une option européenne.

1. *Le prix d'une option européenne de fonction de paiement  $f$  à l'échéance  $N$  est*

$$C = \mathbb{E}^* (\varepsilon_N(U)^{-1} f).$$

2. *Il existe un portefeuille de couverture autofinancé  $\Pi^*$  de valeur initiale  $C$ . La valeur au temps  $n$  de ce portefeuille est donnée par*

$$X_n^{\Pi^*} = \mathbb{E}^* (\varepsilon_N(U)^{-1} \varepsilon_n(U) f \mid \mathcal{F}_n)$$

où  $\mathcal{F}_n = \sigma(B_0, \dots, B_{n+1}, S_0, \dots, S_n)$ .

**Remarques :**

- Le résultat précédent ne donne pas la composition  $(\beta_n^*, \gamma_n^*)_{n \leq N}$  du portefeuille  $\Pi^*$ . Cependant, on peut généralement utiliser la formule donnant  $X_n^{\Pi^*}$  pour calculer  $\beta_n^*$  et  $\gamma_n^*$ .
- La difficulté consiste souvent à déterminer  $\mathbb{P}^*$  (voir les exercices du chapitre précédent). Si  $\mathbb{P}^*$  est connu, on peut alors obtenir  $C$ , au moins par des simulations numériques (avec des méthodes de Monte-Carlo).



**Preuve:** Considérons un portefeuille de couverture autofinancé  $\Pi$ . Sous  $\mathbb{P}^*$ , la valeur réactualisée du portefeuille  $(X_n^\Pi/\varepsilon_n(U))_{n \leq N}$  est une martingale (Proposition 3.3) donc

$$\mathbb{E}^*(\varepsilon_N(U)^{-1}X_N^\Pi) = X_0^\Pi.$$

Or  $X_N^\Pi(\omega) \geq f(\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega$  donc

$$X_0^\Pi \geq \mathbb{E}^*(\varepsilon_N(U)^{-1}f).$$

Cela étant vrai pour tout portefeuille de couverture autofinancé, on en déduit que

$$C := \inf \left\{ X_0^\Pi \text{ tel que } \begin{array}{l} - \Pi \text{ est autofinancé} \\ - X_N^\Pi(\omega) \geq f(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega \end{array} \right\} \geq \mathbb{E}^*(\varepsilon_N(U)^{-1}f). \quad (4.1)$$

Parallèlement, le marché étant complet il existe un portefeuille autofinancé  $\Pi^*$  tel que  $X_N^{\Pi^*}(\omega) = f(\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega$ . Comme  $\Pi^*$  est autofinancé,  $(X_n^{\Pi^*}/\varepsilon_n(U))_{n \leq N}$  est une martingale. En conséquence

$$X_0^{\Pi^*} = \mathbb{E}^*(\varepsilon_N(U)^{-1}X_N^{\Pi^*}) = \mathbb{E}^*(\varepsilon_N(U)^{-1}f)$$

et comme  $\Pi^*$  est un portefeuille de couverture autofinancé, on a  $X_0^{\Pi^*} \geq C$ , donc finalement

$$C \leq \mathbb{E}^*(\varepsilon_N(U)^{-1}f). \quad (4.2)$$

En combinant (4.1) et (4.2) on obtient

$$C = \mathbb{E}^*(\varepsilon_N(U)^{-1}f).$$

Nous avons prouvé le 1. Concernant le 2. on remarque que  $\Pi^*$  convient et comme  $(X_n^{\Pi^*}/\varepsilon_n(U))$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$

$$\frac{X_n^{\Pi^*}}{\varepsilon_n(U)} = \mathbb{E}^*(\varepsilon_N(U)^{-1}X_N^{\Pi^*} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^*(\varepsilon_N(U)^{-1}f \mid \mathcal{F}_n)$$

et on obtient la valeur du portefeuille  $\Pi^*$  en multipliant l'égalité par  $\varepsilon_n(U)$ , et en faisant rentrer  $\varepsilon_n(U)$  dans l'espérance conditionnelle (car  $\varepsilon_n(U)$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable).  $\square$

### 4.3 Et dans un marché incomplet ?

Que se passe-t-il si le marché est incomplet ? Dans ce cas, il n'y a plus un prix rationnel, mais une fourchette de prix acceptables (appelée *spread* par les anglo-saxons).

Considérons les deux quantités

$$\begin{aligned} \text{prix demandé (ask) : } C^+ &:= \inf \left\{ X_0^\Pi \text{ tel que } \begin{array}{l} - \Pi \text{ est autofinancé} \\ - X_N^\Pi(\omega) \geq f(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega \end{array} \right\} \\ \text{et prix offert (bid) : } C^- &:= \sup \left\{ X_0^\Pi \text{ tel que } \begin{array}{l} - \Pi \text{ est autofinancé} \\ - X_N^\Pi(\omega) \leq f(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Observons tout d'abord que si  $\mathbb{P}^*$  est une probabilité risque-neutre,

$$C^- \leq \mathbb{E}^* (\varepsilon_N(U)^{-1} f) \leq C^+. \quad (4.3)$$

En effet, si  $\Pi$  est un portefeuille autofinancé,  $(X_n^{\Pi^*} / \varepsilon_n(U))$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$  (Proposition 3.3) donc  $X_0^{\Pi} = \mathbb{E}^* (\varepsilon_N(U)^{-1} X_N^{\Pi})$ . En particulier :

- si  $X_N^{\Pi} \geq f$ , alors  $X_0^{\Pi} \geq \mathbb{E}^* (\varepsilon_N(U)^{-1} f)$  et donc  $C^+ \geq \mathbb{E}^* (\varepsilon_N(U)^{-1} f)$ ,
- si  $X_N^{\Pi} \leq f$ , alors  $X_0^{\Pi} \leq \mathbb{E}^* (\varepsilon_N(U)^{-1} f)$  et donc  $C^- \leq \mathbb{E}^* (\varepsilon_N(U)^{-1} f)$ .

Remarquons ensuite que si le marché est complet  $C^+ = C^- (= C)$ . En effet, nous avons vu qu'il existe  $\Pi^*$  autofinancé tel que  $X_0^{\Pi^*} = C^+ = \mathbb{E}^* (\varepsilon_N(U)^{-1} f)$  et  $X_N^{\Pi^*} = f$ . Le portefeuille  $\Pi^*$  vérifie aussi les conditions de  $C^-$  donc  $C^+ = X_0^{\Pi^*} \leq C^-$ . Finalement  $C^+ = C^-$  car on a toujours  $C^- \leq C^+$  (voir (4.3)).

Vu l'inégalité (4.3), dans un marché incomplet on a

$$C^- \leq \inf_{\substack{\mathbb{P}^* \text{ proba} \\ \text{risque-neutre}}} \mathbb{E}^* (\varepsilon_N(U)^{-1} f) \leq \sup_{\substack{\mathbb{P}^* \text{ proba} \\ \text{risque-neutre}}} \mathbb{E}^* (\varepsilon_N(U)^{-1} f) \leq C^+.$$

En particulier  $C^- < C^+$  en général : on dit qu'il y a un "spread" non nul.

Dans un marché incomplet il peut être intéressant de développer des portefeuilles de couverture non strictement autofinancés : par exemple des portefeuilles autofinancés en moyenne, etc. Il y a alors un risque de ne pas pouvoir couvrir l'option (donc de perdre de l'argent) et il s'agit de minimiser les risques. Nous renvoyons le lecteur intéressé à des ouvrages plus avancés, tels [6, 7].

## 4.4 Exercices

### 4.4.1 Un calcul de prix d'option

Plaçons-nous dans le cadre d'un marché B-S avec des taux d'intérêts  $r_n = 0$ . L'actif risqué  $S$  évolue au cours du temps selon la dynamique  $\Delta S_n = \rho_n S_{n-1}$ , où les  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  sont indépendants et de même loi. On suppose de plus que les  $\rho_n$  ne peuvent prendre que deux valeurs 1 et  $-1/2$  avec les probabilités  $\mathbb{P}(\rho_n = 1) = 1/3$  et  $\mathbb{P}(\rho_n = -1/2) = 2/3$ . Enfin, on note  $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n)$ .

1. Calculez  $\mathbb{E}(S_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ . En déduire que  $\mathbb{P}$  est une probabilité risque-neutre.
2. On admet que le marché est complet. Calculez le prix d'une option d'échéance  $N$  et de fonction de paiement  $f = \log(S_N)$ .

### 4.4.2 Un autre calcul de prix d'option

Plaçons nous dans le cadre d'un marché B-S avec des taux d'intérêts  $r_n$  constants et égaux à  $r = (e - 1)/2$ . Supposons que la valeur de l'actif risqué est donné au temps  $n$  par

$S_n = \exp(X_1 + \dots + X_n)$  avec les  $(X_i)_{i \geq 0}$  indépendants et de même loi de Bernoulli de paramètre  $1/2$ , i.e. les  $X_i$  ne peuvent prendre que deux valeurs 0 ou 1 et  $\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1) = 1/2$ . On pose  $S_0 = 1$ ,  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$  et on note  $\tilde{S}_n = (1+r)^{-n} S_n$  la valeur réactualisée de  $S$ .

1. Calculez  $\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1} | \mathcal{F}_n)$  (Attention, ici on ne sait pas si  $\mathbb{P}$  est une probabilité risque-neutre).
2. En déduire que  $\mathbb{P}$  est une probabilité risque-neutre.
3. On admet que le marché est complet. Calculez en fonction de  $N$  et  $e$  le prix d'une option d'échéance  $N$  et de fonction de paiement  $S_N^2$ .

### 4.4.3 Relation Call-Put

Plaçons nous dans le cadre d'un marché B-S sans opportunité d'arbitrage et complet. Notons  $\mathbb{P}^*$  l'unique probabilité risque-neutre. Nous supposons dans la suite que les taux d'intérêts  $r_n$  sont constants et égaux à  $r \geq 0$ .

Considérons une option d'achat européenne d'échéance  $N$  et de fonction de paiement  $(S_N - K)_+$ , où  $K$  est une constante positive. A toute date  $n \leq N$ , cette option a une valeur donnée par  $C_n = (1+r)^{n-N} \mathbb{E}^*((S_N - K)_+ | \mathcal{F}_n)$ . De même une option de vente européenne d'échéance  $N$  et de fonction de paiement  $(K - S_N)_+$  a une valeur  $P_n = (1+r)^{n-N} \mathbb{E}^*((K - S_N)_+ | \mathcal{F}_n)$  à tout temps  $n \leq N$ .

1. Que vaut la quantité  $(x - K)_+ - (K - x)_+$ ? (séparer les cas  $x \geq K$  et  $x < K$ )
2. Pour  $n \leq N$ , calculez  $C_n - P_n$  en fonction de  $K$ ,  $r$  et  $S_n$ .
3. Que vaut  $C_0 - P_0$ ?
4. Donnez une explication financière de ce résultat.

### 4.4.4 Modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein

Considérons un marché B-S où les taux d'intérêts sont constants, i.e.  $r_n = r \geq 0$  et où les  $(\rho_n)_{n \leq N}$  forment une suite de variables aléatoires i.i.d. (indépendantes et de même loi) ne pouvant prendre que deux valeurs  $a$  et  $b$ , avec  $-1 < a < r < b$ . Nous allons calculer le prix et la couverture d'une option de fonction de paiement  $f := g(S_N)$  à l'échéance  $N$ .

1. Montrer que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^* \text{ est une probabilité risque-neutre} &\iff \mathbb{E}^*(\rho_n) = r \\ &\iff p^* := \mathbb{P}^*(\rho_n = b) = \frac{r-a}{b-a} \end{aligned}$$

2. Calculer  $\mathbb{P}^*(S_N = S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k})$  en fonction de  $p^*$ . En déduire que le prix de l'option est donné par  $C = (1+r)^{-N} G_N^*(S_0)$  où

$$G_N^*(x) := \sum_{k=0}^N g(x(1+b)^k(1+a)^{N-k}) C_N^k p^{*k} (1-p^*)^{N-k}.$$

3. A l'aide de la formule de l'Exercice 1.5.7 montrer que la valeur au temps  $n$  du portefeuille de couverture optimal  $\pi^*$  est donnée par

$$X_n^{\pi^*} = (1+r)^{-(N-n)} G_{N-n}^*(S_n).$$

4. Supposons que l'on soit au temps  $n-1$ , on connaît  $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$  et on doit choisir  $\beta_n^*$  et  $\gamma_n^*$ . Montrer que l'on doit avoir :

$$\begin{cases} \beta_n^* B_0 (1+r)^n + \gamma_n^* S_{n-1} (1+a) = (1+r)^{-(N-n)} G_{N-n}^*(S_{n-1} (1+a)) \\ \beta_n^* B_0 (1+r)^n + \gamma_n^* S_{n-1} (1+b) = (1+r)^{-(N-n)} G_{N-n}^*(S_{n-1} (1+b)). \end{cases}$$

5. En déduire que

$$\gamma_n^* = (1+r)^{-(N-n)} \frac{G_{N-n}^*(S_{n-1} (1+b)) - G_{N-n}^*(S_{n-1} (1+a))}{(b-a) S_{n-1}}$$

$$\text{et } \beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\pi^*} - \gamma_n^* S_{n-1}}{B_0 (1+r)^{n-1}} = \frac{(1+r)^{-(N-n+1)} G_{N-n+1}^*(S_{n-1}) - \gamma_n^* S_{n-1}}{B_0 (1+r)^{n-1}}.$$

6. Supposons que l'option soit une option d'achat européenne, i.e.  $g(S_N) = (S_N - K)_+$ . Montrer que le prix de l'option est alors donné par la formule de Cox-Ross-Rubinstein :

$$C = S_0 \mathbb{B}(k_0, N, p') - (1+r)^{-N} K \mathbb{B}(k_0, N, p^*)$$

$$\text{où } p' = \frac{1+b}{1+r} p^*, \quad \mathbb{B}(k_0, N, p) = \sum_{k=k_0}^N C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$$

$$\text{et } k_0 := \min\{k \in \mathbb{N} : S_0 (1+a)^{N-k} (1+b)^k > K\} = 1 + \left\lceil \log \frac{K}{S_0 (1+a)^N} / \log \frac{1+b}{1+a} \right\rceil.$$

#### 4.4.5 \*Modèles de Black-Scholes et Merton (non corrigé)

Nous allons maintenant voir quel est le comportement du modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein lorsque le pas de temps tend vers 0 (limite continue). Supposons que  $N = T/\Delta$ ,  $r = \rho\Delta$ ,  $a = -\sigma\sqrt{\Delta}$  et  $b = \sigma\sqrt{\Delta}$  et étudions la limite  $\Delta \rightarrow 0$  avec  $T = N\Delta$  restant constant.

1. Montrer à l'aide du théorème de la limite centrale que

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(k_0, N, p^*) &\stackrel{\Delta \rightarrow 0}{\approx} \Phi\left(\frac{Np^* - k_0}{\sqrt{Np^*(1-p^*)}}\right) \\ \mathbb{B}(k_0, N, p') &\stackrel{\Delta \rightarrow 0}{\approx} \Phi\left(\frac{Np' - k_0}{\sqrt{Np'(1-p')}}\right) \end{aligned}$$

$$\text{où } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

2. Montrer successivement que

$$\begin{aligned}
 k_0 &\sim \frac{\log(K/S_0) + T\sigma/\sqrt{\Delta}}{2\sigma\sqrt{\Delta}} \\
 Np^* &\sim \frac{T(\rho - \sigma^2/2) + T\sigma/\sqrt{\Delta}}{2\sigma\sqrt{\Delta}} \\
 Np' &\sim \frac{T(\rho + \sigma^2/2) + T\sigma/\sqrt{\Delta}}{2\sigma\sqrt{\Delta}} \\
 \sqrt{Np^*(1-p^*)} &\sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{\Delta}} \\
 \sqrt{Np'(1-p')} &\sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{\Delta}} \\
 (1+r)^{-N} &\sim e^{-\rho T}.
 \end{aligned}$$

3. En déduire que

$$C \stackrel{\Delta \sim 0}{\sim} S_0 \Phi\left(\frac{T(\rho + \sigma^2/2) + \log(S_0/K)}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-\rho T} \Phi\left(\frac{T(\rho - \sigma^2/2) + \log(S_0/K)}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

On retrouve ici la formule de Black-Scholes.

Si on avait pris  $a = -\sigma\Delta$  et  $b$  constant, on aurait obtenu comme limite le modèle de Merton basé sur un processus de Poisson. Dans ce cas  $C \rightarrow S_0P_1 - Ke^{-\rho T}P_2$  où

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \sum_{i=k_0}^{\infty} \frac{[(1+b)(\rho+\sigma)T/b]^i}{i!} \exp[-(1+b)(\rho+\sigma)T/b] \\
 P_2 &= \sum_{i=k_0}^{\infty} \frac{[(\rho+\sigma)T/b]^i}{i!} \exp[-(\rho+\sigma)T/b]
 \end{aligned}$$

#### 4.4.6 Problème : Option Margrabe

##### Partie I

Considérons un marché constitué de deux actifs risqués : un actif 1 et un actif 2. On appelle  $S_n^{(1)}$  et  $S_n^{(2)}$  les valeurs au temps  $n$  d'une unité d'actif 1 et d'une unité d'actif 2. On supposera que la dynamique du marché est donnée par

$$\begin{aligned}
 \Delta S_n^{(1)} &= \rho_n^{(1)} S_{n-1}^{(1)} \\
 \Delta S_n^{(2)} &= \rho_n^{(2)} S_{n-1}^{(2)}
 \end{aligned}$$

au temps  $n \geq 1$ , avec  $\rho_n^{(1)}, \rho_n^{(2)} > -1$  et la notation  $\Delta X_n := X_n - X_{n-1}$ . On note  $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1^{(1)}, \dots, S_n^{(1)}, S_1^{(2)}, \dots, S_n^{(2)})$  l'information dont on dispose au temps  $n$ .

1. Montrer que  $S_n^{(1)} = \mathcal{E}_n^{(1)} S_0^{(1)}$  et  $S_n^{(2)} = \mathcal{E}_n^{(2)} S_0^{(2)}$  avec  $\mathcal{E}_0^{(1)} = 1$ ,  $\mathcal{E}_0^{(2)} = 1$ ,  $\mathcal{E}_n^{(1)} = (1 + \rho_1^{(1)}) \dots (1 + \rho_n^{(1)})$  et  $\mathcal{E}_n^{(2)} = (1 + \rho_1^{(2)}) \dots (1 + \rho_n^{(2)})$  pour  $n \geq 1$ .
2. Considérons un portefeuille  $\pi$  constitué au temps  $n$  d'une quantité  $\gamma_n^{(1)}$  d'actif 1 et  $\gamma_n^{(2)}$  d'actif 2; donc de valeur  $X_n^\pi = \gamma_n^{(1)} S_n^{(1)} + \gamma_n^{(2)} S_n^{(2)}$ . On suppose que  $\gamma_n^{(1)}$  et  $\gamma_n^{(2)}$  sont  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurables. Exprimer (comme dans le cours) la condition d'autofinancement pour le portefeuille  $\pi$ .
3. On supposera dorénavant qu'il existe une probabilité  $\mathbb{P}^*$  sous laquelle le processus  $\left( S_n^{(2)} / \mathcal{E}_n^{(1)} \right)_{n \leq N}$  est une martingale. Montrer que si  $\pi$  est un portefeuille autofinancé  $\left( X_n^\pi / \mathcal{E}_n^{(1)} \right)_{n \leq N}$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ .
4. En déduire que si  $\pi$  est un portefeuille autofinancé avec  $X_0^\pi = 0$ , alors on ne peut pas avoir simultanément  $X_N^\pi \geq 0$  et  $\mathbb{P}^*(X_N^\pi > 0) > 0$  (absence d'opportunité d'arbitrage).

## Partie II

L'option Margrabe donne le droit à son détenteur d'échanger à l'échéance  $N$  une unité d'actif 1 contre une unité d'actif 2.

1. Quelle est la fonction de paiement de l'option Margrabe (justifier rapidement) ?
2. Un portefeuille  $\pi$  est dit portefeuille de couverture si sa valeur  $X_N^\pi$  à l'échéance est toujours supérieure ou égale à la fonction de paiement. Montrer que si  $\pi$  est un portefeuille de couverture autofinancé alors

$$X_0^\pi \geq \mathbb{E}^* \left( \frac{1}{\mathcal{E}_N^{(1)}} \left( S_N^{(2)} - S_N^{(1)} \right)_+ \right) \quad \text{où } (x)_+ = x \text{ si } x \geq 0 \text{ et } = 0 \text{ sinon.}$$

3. On supposera dorénavant que le marché est complet, c'est-à-dire que pour toute variable aléatoire  $f$ , il existe  $\pi$  autofinancé tel que  $X_N^\pi = f$ . Montrer qu'il existe un portefeuille de couverture autofinancé  $\pi^*$  tel que

$$X_0^{\pi^*} = \mathbb{E}^* \left( \frac{1}{\mathcal{E}_N^{(1)}} \left( S_N^{(2)} - S_N^{(1)} \right)_+ \right).$$

4. Quel est le prix  $C$  de l'option (justifier) ?
5. Etablir (en justifiant bien) l'égalité pour tout  $n \leq N$

$$X_n^{\pi^*} = \mathbb{E}^* \left( \frac{\mathcal{E}_n^{(1)}}{\mathcal{E}_N^{(1)}} \left( S_N^{(2)} - S_N^{(1)} \right)_+ \middle| \mathcal{F}_n \right).$$

6. Dans un marché complet, peut-il exister plusieurs probabilités  $\mathbb{P}^*$  sous lesquelles le processus  $\left( S_n^{(2)} / \mathcal{E}_n^{(1)} \right)_{n \leq N}$  est une martingale ?

# Chapitre 5

## Couverture des options américaines

**Objectif :** déterminer dans le cadre du marché B-S le prix d'une option de type américaine et le temps d'exercice optimal.

### 5.1 Problématique

Dans ce chapitre, nous allons nous placer dans le cadre d'un marché B-S complet et sans opportunité d'arbitrage. D'après les résultats du chapitre 3, cela implique qu'il existe une unique probabilité risque-neutre  $\mathbb{P}^*$ .

Une option de type américaine est un contrat qui peut être exercé (une seule fois) à n'importe quel instant avant l'échéance  $N$ . Il est caractérisé par son échéance  $N$  et ses fonctions de paiement  $f_n$  aux temps  $n \leq N$ . La fonction  $f_n$  correspond à ce que le détenteur de l'option reçoit s'il exerce son droit au temps  $n$ .

**Exemple :**

- option américaine d'achat :  $f_n(\omega) = (S_n(\omega) - K)_+$
- option américaine de vente :  $f_n(\omega) = (K - S_n(\omega))_+$
- option russe :  $f_n(\omega) = \sup_{k \leq n} S_k(\omega) - S_n(\omega)$

Le détenteur de l'option a le droit d'exercer son option à n'importe quel temps  $n$  avant l'échéance  $N$ . Il reçoit alors la valeur  $f_n$  de la part du vendeur. Pour se couvrir, le vendeur doit donc se constituer un portefeuille  $\Pi$  tel que

$$X_n^\Pi(\omega) \geq f_n(\omega) \quad \forall n \leq N, \forall \omega \in \Omega. \quad (5.1)$$

**Définition** - Portefeuille de couverture -

*On appelle portefeuille de couverture un portefeuille  $\Pi$  vérifiant la condition*

$$X_n^\Pi(\omega) \geq f_n(\omega) \quad \forall n \leq N, \forall \omega \in \Omega.$$

Comme dans le cas des options européennes, le prix équitable d'une option de type américaine va correspondre à la valeur initiale minimale que doit avoir un portefeuille de couverture pour pouvoir être autofinancé. Plus précisément :

**Définition** - Prix d'une option américaine -

*Le prix d'une option de type américaine correspond à la quantité*

$$C := \inf \left\{ X_0^\Pi \text{ tel que } \begin{array}{l} - \Pi \text{ est autofinancé} \\ - X_n^\Pi(\omega) \geq f_n(\omega), \quad \forall n \leq N, \quad \forall \omega \in \Omega \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

Le but de ce chapitre est de

- calculer  $C$ ,
- voir comment gérer son portefeuille pour couvrir l'option,
- déterminer le moment optimal pour l'acheteur pour exercer son option.

Appelons  $\tau^{\text{exc}}$  le temps auquel l'acheteur décide d'exercer son option. Le temps  $\tau^{\text{exc}}$  dépend de l'évolution du marché, c'est donc une variable aléatoire. De plus, le détenteur de l'option prend sa décision d'exercice uniquement à partir de l'information dont il dispose à cette date là (il n'est pas devin) : le temps  $\tau^{\text{exc}}$  est donc un temps d'arrêt.

## 5.2 Prix d'une option américaine

Supposons que  $\Pi$  est un portefeuille de couverture autofinancé. Nous savons (Proposition 3.3) que  $(X_n^\Pi/\varepsilon_n(U))$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$  et d'après la discussion précédente  $\tau^{\text{exc}}$  est un temps d'arrêt. Si nous appliquons le théorème d'arrêt (ce que nous pouvons faire car  $\tau^{\text{exc}}$  est borné par  $N$  :  $\tau^{\text{exc}}(\omega) \leq N, \forall \omega \in \Omega$ ), nous obtenons

$$\mathbb{E}^* (\varepsilon_{\tau^{\text{exc}}}(U)^{-1} X_{\tau^{\text{exc}}}^\Pi) = \mathbb{E}^* (\varepsilon_0(U)^{-1} X_0^\Pi) = X_0^\Pi.$$

Comme  $X_n^\Pi \geq f_n$  quel que soit  $n \leq N$ , on a  $X_{\tau^{\text{exc}}}^\Pi \geq f_{\tau^{\text{exc}}}$  et

$$X_0^\Pi \geq \mathbb{E}^* (\varepsilon_{\tau^{\text{exc}}}(U)^{-1} f_{\tau^{\text{exc}}}).$$

Cela doit être vrai quel que soit le temps d'exercice  $\tau^{\text{exc}}$ , donc on doit avoir

$$X_0^\Pi \geq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_N} \mathbb{E}^* (\varepsilon_\tau(U)^{-1} f_\tau)$$

où  $\mathcal{T}_N$  est l'ensemble des temps d'arrêt  $\tau$  tels que  $\tau(\omega) \leq N$  pour tout  $\omega \in \Omega$ . En conséquence le prix  $C$  de l'option défini par (5.2) satisfait l'inégalité

$$C \geq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_N} \mathbb{E}^* (\varepsilon_\tau(U)^{-1} f_\tau). \quad (5.3)$$

En fait, nous allons voir qu'il y a égalité.



**Théorème 5.1** - Prix d'une option américaine -

Le prix d'une option américaine d'échéance  $N$  et de fonction de paiement  $f_n$  est donnée par

$$C = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_N} \mathbb{E}^* (\varepsilon_\tau(U)^{-1} f_\tau)$$

où  $\mathbb{E}^*$  représente l'espérance prise sous l'unique probabilité risque-neutre  $\mathbb{P}^*$  et  $\mathcal{T}_N$  est l'ensemble des temps d'arrêt  $\tau$  tels que  $\tau(\omega) \leq N$  pour tout  $\omega \in \Omega$ .

La formule (5.3) nous donne déjà l'inégalité  $C \geq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_N} \mathbb{E}^* (\varepsilon_\tau(U)^{-1} f_\tau)$ .

Il reste maintenant à exhiber un portefeuille de couverture autofinancé  $\Pi^*$  de valeur initiale

$$X_0^{\Pi^*} = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_N} \mathbb{E}^* (\varepsilon_\tau(U)^{-1} f_\tau)$$

pour obtenir l'autre inégalité. Ce travail est repoussé au paragraphe 5.5. Nous allons d'abord essayer de mieux comprendre le calcul de  $C$ .

### 5.3 Le principe de programmation dynamique

Le principe de programmation dynamique va nous permettre de calculer le supremum

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_N} \mathbb{E}^* (\varepsilon_\tau(U)^{-1} f_\tau).$$

Nous noterons dorénavant  $X_n := \varepsilon_n(U)^{-1} f_n$ . et nous introduisons la suite  $(Y_n)_{n \leq N}$  définie par la récurrence suivante :

$$\begin{cases} Y_N & = X_N \\ Y_{N-1} & = \max(X_{N-1}, \mathbb{E}^*(Y_N | \mathcal{F}_{N-1})) \\ & \vdots \\ Y_n & = \max(X_n, \mathbb{E}^*(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n)) \\ & \vdots \\ Y_0 & = \max(X_0, \mathbb{E}^*(Y_1 | \mathcal{F}_0)). \end{cases}$$

Le problème maximisation est résolu grâce au résultat suivant.

**Théorème 5.2** - Principe de programmation dynamique -

Définissons le temps  $T$  par

$$T(\omega) := \inf\{k \geq 0, \text{ tel que } X_k(\omega) = Y_k(\omega)\}.$$

Alors  $T$  est un temps d'arrêt borné par  $N$  vérifiant

$$Y_0 = \mathbb{E}^*(X_T) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_N} \mathbb{E}^*(X_\tau). \quad (5.4)$$

En particulier, le prix  $C$  de l'option est donné par  $Y_0$  et le temps d'exercice optimal par  $T$ .

Plus généralement, si  $T_n(\omega) := \inf\{k \in [n, N], \text{ tel que } X_k(\omega) = Y_k(\omega)\}$ , alors

$$\mathbb{E}^*(X_{T_n} | \mathcal{F}_n) = Y_n = \sup_{\substack{\tau \in \mathcal{T}_N \\ n \leq \tau \leq N}} \mathbb{E}^*(X_\tau | \mathcal{F}_n). \quad (5.5)$$

La preuve de ce résultat est le sujet de l'exercice 5.6.4 à la fin du chapitre.

**Remarque :** La définition de  $Y_n$  fait intervenir la quantité  $\mathbb{E}^*(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ . Lorsque la probabilité risque-neutre est de la forme  $\mathbb{P}^*(\omega) = Z(\omega)\mathbb{P}(\omega)$ , cette quantité est donnée par

$$\mathbb{E}^*(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \frac{1}{Z_n} \mathbb{E}(Y_{n+1}Z_{n+1} | \mathcal{F}_n)$$

où  $Z_n = \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_n)$ , voir l'Exercice 3.5.4 du Chapitre 3.

## 5.4 Décomposition de Doob

Nous allons voir un résultat de la théorie des martingales, qui est une des clefs de la preuve du Théorème 5.1 et du principe de programmation dynamique. Nous commençons par introduire les processus croissant-prévisibles.

**Définition** - Processus croissant-prévisible -

Un processus  $(A_n)_{n \leq N}$  est dit croissant-prévisible si

1.  $A_n$  est  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable, quel que soit  $n \leq N$ , (on dit que  $(A_n)$  est prévisible)
2.  $\Delta A_n(\omega) = A_n(\omega) - A_{n-1}(\omega) \geq 0$ , quel que soit  $n \leq N$ ,  $\omega \in \Omega$ , c'est à dire  $(A_n)$  est croissant.

La décomposition de Doob décompose une sur-martingale en une martingale et un processus croissant-prévisible.

**Théorème 5.3** - Décomposition de Doob -

Si  $(Y_n)_{n \leq N}$  est une sur-martingale (i.e.  $Y_n \geq \mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ ), il existe une unique martingale  $(M_n)_{n \leq N}$  et un unique processus croissant-prévisible  $(A_n)_{n \leq N}$  tels que

$$Y_n = M_n - A_n \quad \text{et} \quad Y_0 = M_0.$$

**Preuve:**

– Existence de  $M_n$  et  $A_n$  : prendre

$$\begin{aligned} M_n &= Y_0 - \sum_{k=1}^n [\mathbb{E}(Y_k | \mathcal{F}_{k-1}) - Y_k] \\ A_n &= \sum_{k=1}^n [Y_{k-1} - \mathbb{E}(Y_k | \mathcal{F}_{k-1})] \end{aligned}$$

et vérifier qu'ils conviennent.

– unicité : Si  $Y_n = M_n - A_n = M'_n - A'_n$ , alors

$$\Delta A'_n = \Delta A_n + \Delta M'_n - \Delta M_n. \quad (5.6)$$

Comme  $A_n$  et  $A'_n$  sont  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurables

$$\mathbb{E}(\Delta A_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \Delta A_n \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\Delta A'_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \Delta A'_n,$$

de même comme  $M_n$  et  $M'_n$  sont des martingales

$$\mathbb{E}(\Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\Delta M'_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0.$$

Donc si on prend  $\mathbb{E}(\cdot | \mathcal{F}_{n-1})$  de l'égalité (5.6), il vient  $\Delta A'_n = \Delta A_n$ , quel que soit  $n \leq N$ . Comme  $A_0 = A'_0 = 0$ , on a  $A_n = \sum_{k=1}^n \Delta A_k$  et  $A'_n = \sum_{k=1}^n \Delta A'_k$ , et vu que  $\Delta A_k = \Delta A'_k$ , on a finalement  $A_n = A'_n$ . En conséquence, on a aussi  $M_n = M'_n$ . □

## 5.5 Preuve du Théorème 5.1

Par commodité on va poser

$$\Lambda := \sup_{\tau \in \mathcal{T}_N} \mathbb{E}^* (\varepsilon_\tau(U)^{-1} f_\tau).$$

On a déjà vu que  $C \geq \Lambda$ . Pour prouver le Théorème 5.1, il reste à construire un portefeuille de couverture autofinancé  $\Pi^*$  de valeur initiale  $\Lambda$ .

Considérons la suite  $(Y_n)$  du principe de programmation dynamique. Vu que

$$Y_n := \max(X_n, \mathbb{E}^*(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n)),$$

on a  $Y_n \geq \mathbb{E}^*(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ , donc  $(Y_n)_{n \leq N}$  est une sur-martingale. Notons  $Y_n = M_n - A_n$  sa décomposition de Doob.

Posons  $f = \varepsilon_N(U)M_N$ . Le marché étant complet, il existe un portefeuille  $\Pi^* = (\beta_n, \gamma_n)_{n \leq N}$  autofinancé tel que  $X_N^{\Pi^*} = f$ . Or  $(M_n)$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$  et  $(\varepsilon_n(U)^{-1}X_n^{\Pi^*})$  aussi (Proposition 3.3) donc

$$\mathbb{E}^*(M_N | \mathcal{F}_n) = M_n \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^*\left(\varepsilon_N(U)^{-1}X_N^{\Pi^*} | \mathcal{F}_n\right) = \varepsilon_n(U)^{-1}X_n^{\Pi^*}.$$

Vu que  $X_N^{\Pi^*} = f = \varepsilon_N(U)M_N$ , il découle des deux égalités précédentes que  $M_n = \varepsilon_n(U)^{-1}X_n^{\Pi^*}$  quel que soit  $n \leq N$ . En particulier

$$X_n^{\Pi^*} = \varepsilon_n(U)M_n \geq \varepsilon_n(U)Y_n \quad \text{car} \quad M_n = Y_n + A_n \quad \text{avec} \quad A_n \geq 0.$$

D'après le principe de programmation dynamique (5.5)

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(U)Y_n &= \varepsilon_n(U) \sup_{\substack{\tau \in \mathcal{T}_N \\ n \leq \tau \leq N}} \mathbb{E}^*(\varepsilon_\tau(U)^{-1}f_\tau | \mathcal{F}_n) \\ &\stackrel{P5}{=} \sup_{\substack{\tau \in \mathcal{T}_N \\ n \leq \tau \leq N}} \mathbb{E}^*(\varepsilon_\tau(U)^{-1}\varepsilon_n(U)f_\tau | \mathcal{F}_n) \geq f_n. \end{aligned}$$

La dernière inégalité provient de l'égalité  $f_n = \mathbb{E}^*(\varepsilon_\tau(U)^{-1}\varepsilon_n(U)f_\tau | \mathcal{F}_n)$  pour le temps d'arrêt donné par  $\tau(\omega) = n$ , quel que soit  $\omega \in \Omega$ . En recollant les morceaux, on conclut que  $X_n^{\Pi^*} \geq f_n$  pour tout  $n \leq N$ , donc le portefeuille  $\Pi^*$  couvre bien l'option. C'est donc un portefeuille de couverture autofinancé de valeur initiale

$$X_0^{\Pi^*} = M_0 = Y_0 = \Lambda$$

où la dernière égalité vient de (5.4).

## 5.6 Exercices

### 5.6.1 Evaluation d'un prix d'option sans programmation dynamique

Supposons que  $\varepsilon_n(U)^{-1}f_n = g(Y_n)M_n$  avec  $(Y_n)$  un processus quelconque,  $(M_n)$  une martingale positive sous  $\mathbb{P}^*$  telle que  $M_0 = 1$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  admettant un maximum en  $y^*$ , i.e.  $g(y) \leq g(y^*) \forall y \in \mathbb{R}$ .

1. vérifier que  $\varepsilon_n(U)^{-1}f_n \leq g(y^*)M_n$ . En déduire que pour tout temps d'arrêt  $\tau \leq N$

$$\mathbb{E}^*(\varepsilon_\tau(U)^{-1}f_\tau) \leq g(y^*)\mathbb{E}^*(M_\tau) = g(y^*).$$

2. En déduire que  $C \leq g(y^*)$ .
3. Supposons qu'avec probabilité 1, le processus  $(Y_n)$  prend la valeur  $y^*$  avant l'échéance  $N$ . Posons alors  $\tau^* := \inf\{n \leq N : Y_n = y^*\}$ . Montrer qu'alors  $\mathbb{E}^*(\varepsilon_{\tau^*}(U)^{-1}f_{\tau^*}) = g(y^*)$  et  $C = g(y^*)$ . Quel est le temps d'exercice optimal ?

### 5.6.2 Calcul du prix d'un call américain

Rappel :  $X \geq Y \implies \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \geq \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$ .

Plaçons nous dans le cadre d'un marché B-S sans opportunité d'arbitrage et complet, et notons  $\mathbb{P}^*$  l'unique probabilité risque-neutre. Dans toute la suite les taux d'intérêts  $r_n$  sont constants et égaux à  $r \geq 0$ .

Considérons un call américain, c'est à dire une option américaine d'échéance  $N$  et de fonctions de paiement  $f_n = (S_n - K)_+$  pour  $n \leq N$ . Nous supposons  $K \geq 0$  et nous noterons  $\tilde{f}_n := (1+r)^{-n}(S_n - K)_+$ , ainsi que  $C_{\text{am}}$  pour le prix de cette option, i.e.

$$C_{\text{am}} := \inf \{ X_0^\Pi \text{ où } \Pi \text{ est autofinancé et vérifie } X_n^\Pi \geq f_n, \forall n \leq N \}.$$

1. Le marché étant complet, il existe un portefeuille autofinancé  $\Pi'$  de valeur terminale  $X_N^{\Pi'} = f_N$ . Notant  $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n)$ , montrez que

$$(1+r)^{-n} X_n^{\Pi'} = \mathbb{E}^*(\tilde{f}_N | \mathcal{F}_n), \quad \forall n \leq N.$$

2. En déduire les deux inégalités  $(1+r)^{-n} X_n^{\Pi'} \geq 0$  et  $(1+r)^{-n} X_n^{\Pi'} \geq \frac{S_n - K}{(1+r)^n}$ , pour tout  $n \leq N$ .
3. En déduire que  $X_n^{\Pi'} \geq f_n$  pour tout  $n \leq N$ , puis  $C_{\text{am}} \leq \mathbb{E}^*(\tilde{f}_N)$ .
4. On note  $C_{\text{eur}}$  le prix d'une option d'achat européenne d'échéance  $N$  et de fonction de paiement  $(S_N - K)_+$ . Déduire de ce qui précède que  $C_{\text{am}} \leq C_{\text{eur}}$ .
5. A-t-on  $C_{\text{am}} = C_{\text{eur}}$ ? (prouvez votre réponse)

### 5.6.3 Option russe

Considérons une option de type américaine d'échéance  $N$  et de fonction de paiement donnée par

$$f_n = \max_{k=0 \dots n} S_k - S_n.$$

Le marché est supposé complet et sans opportunité d'arbitrage et on note  $\mathbb{P}^*$  l'unique probabilité risque-neutre.

On pose  $Z_n = S_n / \varepsilon_n(U)$  et on définit  $\mathbb{P}'$  par

$$\mathbb{P}'(\omega) := Z_N(\omega) \mathbb{P}^*(\omega) \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega.$$

On rappelle que l'on a alors  $\mathbb{E}'(Y) = \mathbb{E}^*(Z_N Y)$  pour toute variable aléatoire  $Y$ .

1. Montrer que si  $Y$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable alors  $\mathbb{E}'(Y) = \mathbb{E}^*(Z_n Y)$ .
2. Montrer que le prix de l'option est donné par

$$C = \sup_{\tau \in T_N} \mathbb{E}^*(Z_\tau (X_\tau - 1)) = \sup_{\tau \in T_N} \mathbb{E}'(X_\tau) - 1$$

où  $T_N$  représente l'ensemble des temps d'arrêt borné par  $N$  et

$$X_n = \max_{k=0 \dots n} \frac{S_k}{S_n}.$$

### 5.6.4 \*Preuve du Principe de Programmation Dynamique

L'objet de cet exercice est de prouver le Théorème 5.2

1. Montrer que  $T$  et  $T_n$  sont deux temps d'arrêt bornés par  $N$ .
2. Montrer que (5.4) découle de (5.5) avec  $n = 0$ .
3. Montrer que  $(Y_n)_{n \leq N}$  est une surmartingale sous  $\mathbb{P}^*$ .
4. Notons  $Y_n = M_n - A_n$  la décomposition de Doob de  $(Y_n)$ . Vérifier que  $A_{T_n} = A_n$ .
5. Montrer que si  $\tau$  est un temps d'arrêt tel que  $n \leq \tau \leq N$  alors  $\mathbb{E}^*(M_\tau | \mathcal{F}_n) = M_n$ .
6. Dédurre des deux questions précédentes que

$$\mathbb{E}^*(X_{T_n} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^*(M_{T_n} - A_n | \mathcal{F}_n) = Y_n, \text{ pour } n \leq N.$$

7. Montrer que pour tout temps d'arrêt  $\tau$  tel que  $n \leq \tau \leq N$

$$\mathbb{E}^*(X_\tau | \mathcal{F}_n) \leq \mathbb{E}^*(Y_\tau | \mathcal{F}_n) = M_n - \mathbb{E}^*(A_\tau | \mathcal{F}_n) \leq Y_n.$$

8. Conclure.

# Chapitre 6

## Mouvement brownien

**Objectif :** Introduire brièvement les processus stochastique en temps continu, avec une attention particulièrement pour le mouvement brownien.

### 6.1 Processus en temps continu

Un processus en temps continu est un ensemble  $(X_t)_{t \in I}$  de variables aléatoires indexées par un sous-intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , souvent  $I = [0, \infty[$ . Généralement, on considère des processus dont les trajectoires  $t \mapsto X_t(\omega)$  sont assez régulières.

**Définition** - Processus continu / continu à gauche<sup>1</sup>

*Un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est dit "continu" (respectivement "continu à gauche") lorsque pour tout  $\omega \in \Omega$  les trajectoires  $t \mapsto X_t(\omega)$  sont continues (resp. continues à gauche).*

Comme en temps discret, on notera  $\mathcal{F}_t$  l'information disponible au temps  $t$  et on appelle "filtration" l'ensemble  $\mathcal{F}_0 \subset \dots \subset \mathcal{F}_t \subset \dots$

Souvent  $\mathcal{F}_t$  correspond à l'information donnée par un processus  $X$  jusqu'au temps  $t$ , c'est-à-dire  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ .

**Définition** - Processus adaptés -

*Un processus  $Y$  est dit  $\mathcal{F}_t$ -adapté, si pour tout  $t \geq 0$  la variable aléatoire  $Y_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.*

- **Exemple :** considérons un processus continu  $X$ . Notons  $Y_t = \sup_{s \leq t} X_s$  et  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ . Alors, le processus  $Y$  est  $\mathcal{F}_t$ -adapté.

<sup>1</sup>une fonction  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est dite continue à gauche si  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(t - \varepsilon) = f(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ . En particulier, toute fonction continue est continue à gauche.

## 6.2 Mouvement brownien

Le mouvement brownien est un des processus de base pour la modélisation en temps continu. Nous en verrons ici la définition ainsi que les propriétés fondamentales. Comme aucune preuve ne sera donnée, nous suggérons au lecteur intéressé de consulter [5] pour plus de détails.

### 6.2.1 Loi Gaussienne

Une variable aléatoire réelle *gaussienne* (ou *normale*) de moyenne  $m$  et de variance  $t$  est une variable aléatoire réelle dont la loi admet pour densité par rapport à la mesure Lebesgue

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2t}\right).$$

Dorénavant, nous noterons  $\mathcal{N}(m, t)$  la loi d'une variable aléatoire gaussienne de moyenne  $m$  et de variance  $t$ . Rappelons quelques propriétés des variables aléatoires gaussiennes.

**Propriétés** - Lois gaussiennes -

1. Si  $X$  est une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(m, t)$  alors

$$\mathbb{E}(\exp(zX)) = \exp(tz^2/2 + mz), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

2. Si  $X$  suit une loi  $\mathcal{N}(m, t)$ , alors  $a + bX$  suit une loi  $\mathcal{N}(a + bm, b^2t)$ .

3. Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois  $\mathcal{N}(a, t)$  et  $\mathcal{N}(b, s)$ , alors  $X + Y$  suit la loi  $\mathcal{N}(a + b, t + s)$ .

### 6.2.2 Définition du mouvement brownien

**Définition** - Le mouvement brownien -

Un mouvement brownien (ou un processus de Wiener)  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  est un processus à valeurs réelles tel que

1.  $W$  est continu,
2.  $W_0 = 0$  et pour tout  $t$  positif, la variable aléatoire  $W_t$  suit une loi  $\mathcal{N}(0, t)$ ,
3. Quel que soit  $s, t > 0$ , l'accroissement  $W_{t+s} - W_t$  est indépendant de  $\mathcal{F}_t$  et suit une loi  $\mathcal{N}(0, s)$ .

Nous admettrons l'existence d'un tel processus.



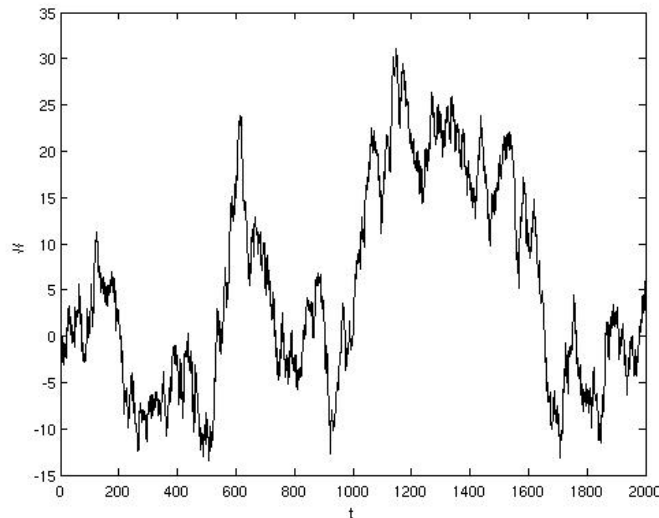


FIG. 6.1 – Une trajectoire d’un mouvement brownien

**Attention!** Un processus continu  $X$  tel que pour tout  $t > 0$ , la variable  $X_t$  suit une loi  $\mathcal{N}(0, t)$  n’est pas nécessairement un mouvement brownien. Prenez par exemple  $X_t = \sqrt{t} N$ , avec  $N$  distribué selon une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  satisfait les deux premières conditions du mouvement brownien, mais ne satisfait pas la troisième (voir l’exercice 6.4.1).

À quoi ressemble le mouvement brownien ? Le résultat suivant établit qu’en quelque sorte, le mouvement brownien est une ”marche aléatoire en temps continu” :

**Théorème 6.1** - Le principe de Donsker -

Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que  $\mathbb{E}(X_i) = 0$  et  $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$ . Posons  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Alors la convergence suivante a lieu

$$\left( \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \right)_{t \geq 0} \xrightarrow{(d)} (W_t)_{t \geq 0}$$

où  $W$  est un mouvement brownien,  $[x]$  représente la partie entière de  $x$  et ” $\xrightarrow{(d)}$ ” signifie ”convergence en distribution” (consultez l’annexe A pour un rappel des différents types de convergence)

### 6.2.3 Propriétés du mouvement brownien

Voici quelques propriétés de base du mouvement brownien. Encore une fois, nous invitons ceux qui désirent en voir la preuve à consulter [5]. Ils y trouveront aussi d’autres propriétés

plus fines du mouvement brownien.

**Propriétés** - Mouvement brownien -

*Soit  $W$  un mouvement brownien. Alors,*

- **Symétrie** : *Le processus  $(-W_t)_{t \geq 0}$  est aussi un mouvement brownien.*
- **Invariance d'échelle** : *Pour tout  $c > 0$ , le processus  $(c^{-1/2}W_{ct})_{t \geq 0}$  est aussi un mouvement brownien.*
- **Rugosité** : *Les trajectoires  $t \mapsto W_t(\omega)$  sont nulle part dérivables.*
- **Propriété de Markov** : *Pour tout  $u > 0$ , le processus  $(W_{u+t} - W_u)_{t \geq 0}$  est aussi un mouvement brownien, indépendant de  $\mathcal{F}_u$ .*

Certaines propriétés du mouvement brownien sont assez inhabituelles. Par exemple, fixons  $a > 0$  et notons  $T_a$  le premier temps où le mouvement brownien  $W$  atteint la valeur  $a$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , le mouvement brownien  $W$  atteindra encore une *infinité* de fois la valeur  $a$  durant le court intervalle de temps  $[T_a, T_a + \varepsilon]$ !

## 6.3 Martingales en temps continu

De même que pour le cas discret, les martingales jouent un rôle majeur dans la théorie de la couverture des options en temps continu.

**Définition** - Martingales en temps continu -

*Un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est une martingale si pour tout  $s, t \geq 0$*

$$\mathbb{E}(X_{t+s} | \mathcal{F}_t) = X_t.$$

Lorsqu'une martingale est continue, les propriétés que nous avons vu en temps discret (la propriété fondamentale, le théorème d'arrêt, l'inégalité maximale, la décomposition de Doob, etc.) demeurent vraies après le remplacement de " $n \in \mathbb{N}$ " par " $t \in [0, \infty[$ ".

## 6.4 Exercices

### 6.4.1 Propriétés de base

1. Soit  $N$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . On pose  $X_t = \sqrt{t}N$  pour tout  $t \geq 0$ . Montrer que le processus  $X$  possède les deux premières propriétés du mouvement brownien, mais pas la troisième.

2. Montrer que le mouvement brownien  $W$  est une martingale.
3. Notons  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$  et  $L_t = W_t^2 - t$ . Prouver que  $L$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale .
4. Pour  $\sigma > 0$ , posons  $\mathcal{E}_t = \exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2)$ . Est-ce que  $(\mathcal{E}_t)$  est une martingale?
5. Soit  $M$  est une martingale telle que  $\mathbb{E}(M_t^2) < +\infty$ . Montrer que pour tout  $s \leq t$  :

$$\mathbb{E}((M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s).$$

### 6.4.2 Variation quadratique

Soit  $W$  un mouvement brownien. On associe à une subdivision  $\tau = (t_1, \dots, t_n)$ , de  $[0, t]$  (avec  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ ), les quantités  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$  et  $\Delta W_k = W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ .

1. Pour  $s \leq t$ , montrer que  $\mathbb{E}(W_t W_s) = \mathbb{E}((W_t - W_s)W_s) + \mathbb{E}(W_s^2) = s$ .
2. Montrer que  $\mathbb{E}((\Delta W_k)^2) = \Delta t_k$  et que  $\mathbb{E}((\Delta W_k)^4) = 3(\Delta t_k)^2$ .
3. Notons  $|\tau| = \max_{k=1..n} \Delta t_k$  et  $\langle W \rangle_t^\tau(\omega) := \sum_{k=1}^n (\Delta W_k(\omega))^2$ . Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\langle W \rangle_t^\tau] &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j) ((\Delta W_k)^2 - \Delta t_k)] \\ &= 2 \sum_{k=1}^n (\Delta t_k)^2 \\ &\leq 2|\tau| \times t \xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

4. Dédurre de l'inégalité

$$\langle W \rangle_t^\tau \leq \max_{k=1..n} |\Delta W_k| \times \sum_{k=1}^n |\Delta W_k|$$

et de l'uniforme continuité du mouvement brownien sur  $[0, t]$  que

$$\sum_{k=1}^n |\Delta W_k| \xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} +\infty.$$

On dit que le mouvement brownien est à "variation non bornée".

# Chapitre 7

## Calcul d'Itô

**Objectif :** Introduire brièvement le calcul d'Itô et en donner ses règles spécifiques.

### 7.1 Problématique

Pour commencer, nous allons expliquer de manière informelle la nécessité d'introduire le calcul d'Itô. Supposons que nous voulons modéliser un "signal bruité en temps continu"  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ . Par analogie avec le temps discret, nous voulons que l'évolution lors d'un court intervalle de temps  $\delta t$  soit donnée par

$$">\delta X_t(\omega) = m(t, \omega)\delta t + \sigma(t, \omega)\epsilon_t(\omega)" \quad (7.1)$$

où  $\epsilon_t$  représente le "bruit" qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\epsilon_t$  est indépendant de  $\epsilon_s$  pour  $s \neq t$ , et suit la même loi,
- $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$ .

En posant " $W_t = \sum_{s \leq t} \epsilon_s$ " il est naturel, eut égard au principe de Donsker, de supposer que  $W_t$  est un mouvement brownien. L'équation (7.1) devient alors

$$\delta X_t(\omega) = m(t, \omega)\delta t + \sigma(t, \omega)\delta W_t(\omega).$$

Malheureusement, le mouvement brownien n'est pas dérivable et on ne peut pas donner un sens à cette égalité en terme de dérivés. Essayons plutôt de l'exprimer en terme d'intégrales :

$$X_t(\omega) = X_0 + \int_0^t m(s, \omega) ds + \int_0^t \sigma(s, \omega) dW_s(\omega). \quad (7.2)$$

La première intégrale s'inscrit dans la théorie classique de l'intégration, et est bien définie. Mais quel est le sens de la deuxième intégrale ?

Si  $W$  était à variation bornée, nous pourrions la définir telle une intégrale de Stieljes. Cependant, nous avons vu lors de l'Exercice 6.4.2 qu'un mouvement brownien n'est pas à variation bornée. C'est ici qu'intervient la théorie de l'intégration d'Itô. Celle-ci permet de donner un sens mathématique précis à (7.2).

## 7.2 Intégrale d'Itô

Soit  $W$  un mouvement brownien et  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ .

**Définition (et théorème)** - Intégrale d'Itô -

- Soit  $H$  un processus  $\mathcal{F}_t$ -adapté, continu à gauche et vérifiant  $\int_0^t H_s^2 ds < \infty$  pour tout  $t > 0$ . Alors, il existe un processus continu  $\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{t \geq 0}$  tel que

$$\sum_{i=1}^n H_{(i-1)t/n} (W_{it/n} - W_{(i-1)t/n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t H_s dW_s \quad \text{pour tout } t > 0, \quad (7.3)$$

où la convergence a lieu "en probabilité" (consulter l'annexe pour un rappel sur ce mode de convergence).

- Pour tout  $t \geq 0$ , ce processus vérifie l'égalité

$$\mathbb{E} \left( \left( \int_0^t H_s dW_s \right)^2 \right) = \int_0^t \mathbb{E} (H_s^2) ds,$$

cette dernière quantité pouvant être infinie.

- Dans le cas où  $\int_0^t \mathbb{E} (H_s^2) ds < +\infty$  pour tout  $t > 0$ , le processus  $\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{t \geq 0}$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale.

Nous ne prouverons pas l'existence du processus  $\int_0^t H_s dW_s$ . Nous encourageons le lecteur désireux d'en connaître la construction, à consulter l'annexe B. Avant de donner des propriétés de l'intégrale d'Itô, attardons-nous un instant sur sa définition.

- **Question :** Obtiendrait-on la même intégrale si on remplaçait

$$\sum_{i=1}^n H_{(i-1)t/n} (W_{it/n} - W_{(i-1)t/n}) \quad \text{par} \quad \sum_{i=1}^n H_{it/n} (W_{it/n} - W_{(i-1)t/n}) ?$$

La réponse est *non* en général. En effet, prenons  $H = W$ . Selon l'exercice 6.4.2

$$\sum_{i=1}^n W_{it/n} (W_{it/n} - W_{(i-1)t/n}) - \sum_{i=1}^n W_{(i-1)t/n} (W_{it/n} - W_{(i-1)t/n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t$$

et par conséquent  $\sum_{i=1}^n W_{it/n} (W_{it/n} - W_{(i-1)t/n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t + \int_0^t W_s dW_s$  en probabilité!

### 7.3 Processus d'Itô

Lorsque  $K$  est un processus dont les trajectoires  $t \mapsto K_t(\omega)$  sont continues à gauche, on peut définir le processus  $\left(\int_0^t K_s ds\right)_{t \geq 0}$  par

$$\left(\int_0^t K_s ds\right)(\omega) := \int_0^t K_s(\omega) ds, \quad \forall \omega, t,$$

où le membre de droite est une intégrale de Riemann (ou Lebesgue) classique.

**Définition** - Processus d'Itô -

*On appelle "processus d'Itô" un processus  $X$  de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dW_s + \int_0^t K_s ds,$$

*où  $K$  et  $H$  sont  $\mathcal{F}_t$ -adaptés et continus à gauche, et où  $H$  vérifie  $\int_0^t H_s^2 ds < \infty$ , pour tout  $t > 0$ .*

*Pour alléger les notations, on écrit habituellement  $dX_t = H_t dW_t + K_t dt$ .*

Le lemme fondamental suivant établit qu'une fonction régulière d'un processus d'Itô est encore un processus d'Itô. C'est la formule centrale du calcul d'Itô.

**Théorème 7.1** - Formule d'Itô -

*Soit  $X$  un processus d'Itô et  $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  (c'est à dire admettant une dérivée seconde continue). Alors*

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial t}(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) ds.$$

**Remarques :**

1. Le terme  $\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) dX_s$  est une notation abrégée de

$$\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) H_s dW_s + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) K_s ds.$$

2. Le dernier terme de droite est inhabituel. Cette étrange règle de calcul vient de la variation quadratique du mouvement brownien. Voyons cela de plus près.

**Preuve:** Nous ne verrons que les grandes lignes de la preuve de la formule d'Itô, car notre objectif se limite à expliquer l'apparition de la dernière intégrale.

Posons  $t_i = it/n$ , et pour tout processus  $Y$ , notons  $\Delta Y_{t_i} = Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}$ . Le développement de Taylor assure que

$$\begin{aligned} g(t, X_t) &= g(0, X_0) + \sum_i \Delta g(t_i, X_{t_i}) \\ &= g(0, X_0) + \sum_i \frac{\partial g}{\partial t}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \Delta t_i + \frac{\partial g}{\partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \Delta X_{t_i} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) (\Delta X_{t_i})^2 + \text{residu}, \end{aligned}$$

où le résidu tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Notons que  $(\Delta X_{t_i})^2 = H_{t_{i-1}}^2 (\Delta W_{t_i})^2 + \text{"residu"}$ , et que selon l'Exercice 6.4.2  $(\Delta W_{t_i})^2 \approx \Delta t_i$ . En conséquence, la convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale de Riemann donne

$$\frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) (\Delta X_{t_i})^2 \approx \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) ds.$$

En ayant recours une seconde fois à la convergence des sommes Riemann vers l'intégrale de Riemann pour le premier terme du développement de Taylor et à la formule d'approximation (7.3) pour le deuxième terme, on obtient le résultat annoncé

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial t}(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) ds.$$

□

**Remarque :** La condition  $g \in \mathcal{C}^2$  est nécessaire. En effet, prenons  $g(t, x) = |x|$ , qui n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$  en 0. Vérifions que la formule d'Itô s'avère fautive pour cette fonction. Si la formule d'Itô était valable pour  $g$ , on obtiendrait  $|W_t| = \int_0^t \text{sgn}(W_s) dW_s$ . Cependant l'inégalité de Jensen entraîne que

$$\mathbb{E}(|W_{t+s}| \mid \mathcal{F}_t) \geq |W_t|$$

donc  $(|W_t|)_{t \geq 0}$  est une sous-martingale, tandis que l'intégrale d'Itô  $\int_0^t \text{sgn}(W_s) dW_s$  est une martingale car  $\int_0^t \mathbb{E}(\text{sgn}(W_s)^2) ds = t < \infty$ . Cela implique que

$$|W_t| \neq \int_0^t \text{sgn}(W_s) dW_s,$$

la formule d'Itô ne peut donc pas être valable pour  $g$ .

**Exemples :**

1. On a  $W_t^2 = 2 \int_0^t W_s dW_s + t$  et  $W_t^3 = 3 \int_0^t W_s^2 dW_s + 3 \int_0^t W_s ds$ , voir l'Exercice 7.5.1.

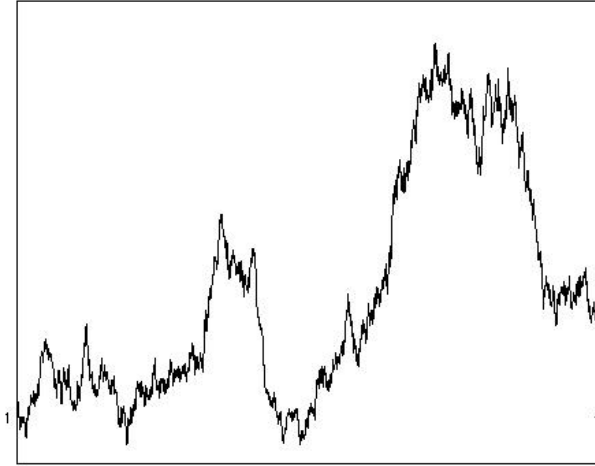


FIG. 7.1 – Une trajectoire d'un mouvement brownien géométrique

2. **Mouvement brownien géométrique** - notre objectif est de trouver un processus  $X$  tel que

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t,$$

avec  $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ . Cherchons le processus  $X$  sous la forme  $X_t = g(t, W_t)$ . L'équation précédente donne

$$dX_t = \mu g(t, W_t) dt + \sigma g(t, W_t) dW_t.$$

En outre, la formule d'Itô affirme que

$$dX_t = \frac{\partial g}{\partial x}(t, W_t) dW_t + \left( \frac{\partial g}{\partial t}(t, W_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, W_t) \right) dt.$$

En conséquence, il nous suffit de résoudre

$$\begin{aligned} \sigma g &= \frac{\partial g}{\partial x}, \\ \text{et } \mu g &= \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

De la première équation, on obtient  $g(t, x) = h(t)e^{\sigma x}$ , et de la seconde on obtient  $h'(t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) h(t)$ , donc  $h(t) = h(0) \exp((\mu - \sigma^2/2)t)$ . Au final, on trouve

$$X_t = X_0 \exp \left( \sigma W_t + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right),$$

lequel est appelé *mouvement brownien géométrique*.



## 7.4 Formule de Girsanov

### 7.4.1 Exponentielle stochastique

**Définition** - Exponentielle stochastique -

On associe à un processus d'Itô  $dX_t = H_t dW_t + K_t dt$ , son exponentielle stochastique

$$\varepsilon_t(X) := \exp\left(X_t - \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 ds\right).$$

**Remarque.** Dans l'exercice 7.5.2 nous vérifierons les deux propriétés suivantes de l'exponentielle stochastique

1.  $\varepsilon_t(X)$  est solution de l'équation différentielle stochastique

$$\frac{dY_t}{Y_t} = dX_t. \quad (7.4)$$

2.  $\varepsilon(X)$  est une martingale dès que

$$K_t = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^t \mathbb{E} \left( (H_s \varepsilon_s(X))^2 \right) ds < +\infty, \quad \text{pour tout } t > 0.$$

**Attention!** La solution de (7.4) est  $Y_t = \varepsilon_t(X)$  et non pas  $Y_t = \exp(X_t)$  comme vous l'auriez peut-être anticipé. Cela est dû aux règles particulières du calcul d'Itô.

### 7.4.2 Formule de Girsanov

Dans ce paragraphe, nous présentons une formule de Girsanov en temps continu. Aucun résultat ne sera prouvé, ainsi nous incitons encore une fois les curieux à lire [5] pour les détails mathématiques.

Nous avons observé que sous certaines conditions techniques,  $\varepsilon(X)$  est une martingale. Dans ce cas,  $\mathbb{E}(\varepsilon_t(X)) = \mathbb{E}(\varepsilon_0(X)) = 1$ . Une condition suffisante et pratique pour que cette égalité soit maintenue est le respect du critère suivant.

**Critère de Novikov.**

Soit  $X$  est un processus d'Itô,  $dX_t = H_t dW_t$ , avec  $H$  vérifiant

$$\mathbb{E} \left( \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T H_s^2 ds \right) \right) < +\infty$$

pour un certain  $T$  positif. Alors  $\mathbb{E}(\varepsilon_T(X)) = 1$ .

Sous ces hypothèses, on peut définir (à l'instar du cas discret) une mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$  en posant

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(\varepsilon_T(X) \mathbf{1}_A) \tag{7.5}$$

pour tout événement  $A$ .

**Théorème 7.2** - Formule de Girsanov -

*Considérons  $X$  satisfaisant les hypothèses du critère de Novikov et la probabilité  $\mathbb{Q}$  définie par (7.5). On a alors les résultats suivants.*

1. *Le processus  $(\tilde{W}_t)_{t \leq T} := \left(W_t - \int_0^t H_s ds\right)_{t \leq T}$ , est un mouvement brownien sous  $\mathbb{Q}$ .*
2. *Conséquemment, pour toute fonction (intégrable)  $g : \mathbb{R}^{[0,T]} \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$\mathbb{E} \left( g \left( \tilde{W}_t; t \leq T \right) \right) = \mathbb{E} \left( g(W_t; t \leq T) \exp \left( - \int_0^T H_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T H_s^2 ds \right) \right),$$

*où  $\mathbb{E}$  représente l'espérance sous la probabilité originale  $\mathbb{P}$ .*

Comme dans le cas discret, la formule de Girsanov nous sera utile pour obtenir une probabilité risqué-neutre, ce que nous verrons au chapitre suivant.

**Remarques**

1. Qu'est-ce donc qu'une fonction  $g : \mathbb{R}^{[0,T]} \rightarrow \mathbb{R}$ ? C'est une application qui à une trajectoire  $(x_t, t \leq T)$  associe un nombre réel  $g(x_t, t \leq T)$ . Par exemple :
  - $g(x_t, t \leq T) = \exp(x_{3.4})$ ,
  - $g(x_t, t \leq T) = (x_{1.3} - x_{0.9})/0.4$ ,
  - $g(x_t, t \leq T) = \int_0^T x_s^2 ds$ ,
  - $g(x_t, t \leq T) = \sup_{t \in [0,T]} x_t$ ,
  - $g(x_t, t \leq T) = \inf \{t \in [0, T] : x_t = 5\}$ ,
  - etc.
2. Nous verrons dans l'Exercice 7.5.4 comment passer de l'assertion **1.** du lemme de Girsanov à l'assertion **2.**, lorsque  $H$  est déterministe.

## 7.5 Exercices

### 7.5.1 Avec la formule d'Itô

1. Vérifier que  $W_t^p = p \int_0^t W_s^{p-1} dW_s + \frac{p(p-1)}{2} \int_0^t W_s^{p-2} ds$ , pour tout  $p$  entier plus grand que 2 et  $W$  mouvement brownien.
2. Considérons le processus d'Itô  $dX_t = H_t dW_t + K_t dt$ . A-t-on  $d \log(X_t) = dX_t/X_t$  ?

### 7.5.2 De l'exponentielle stochastique

Soit  $dX_t = H_t dW_t + K_t dt$  un processus d'Itô.

1. Vérifier à l'aide de la formule d'Itô que  $Y_t = \varepsilon_t(X)$  est solution de l'équation différentielle stochastique

$$\frac{dY_t}{Y_t} = dX_t.$$

2. Dédurre de cette équation que  $\varepsilon(X)$  est une martingale dès que

$$K_t = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^t \mathbb{E}((H_s \varepsilon_s(X))^2) ds < \infty, \quad \text{pour tout } t > 0.$$

### 7.5.3 Avec Girsanov

Soit  $dX_t = H_t dW_t$  vérifiant la condition de Novikov. On pose

$$dY_t = -K_t H_t dt + K_t dW_t,$$

où  $K$  est un processus adapté continu à gauche.

1. Montrer que  $dY_t = K_t d\tilde{W}_t$  où  $\tilde{W}_t := W_t - \int_0^t H_s ds$ .
2. Supposons de plus que  $\int_0^T \mathbb{E}(K_s^2) ds < \infty$ . Dédurre de la formule de Girsanov que  $(Y_t)_{t \leq T}$  est une martingale sous la probabilité  $\mathbb{Q}$  définie par (7.5).

### 7.5.4 \*De la formule de Girsanov

Plaçons-nous dans le cadre de la formule de Girsanov. On supposera ici que  $H_s = h(s)$  où  $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ . En particulier,  $H$  n'est pas aléatoire. A toute fonction (intégrable)  $g : \mathbb{R}^{[0,T]} \rightarrow \mathbb{R}$  on associe la fonction  $\tilde{g} : \mathbb{R}^{[0,T]} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par

$$\tilde{g}(x_t, t \leq T) = g(x_t, t \leq T) \exp \left( - \int_0^t h(s) dx_s - \frac{1}{2} \int_0^t h(s)^2 ds \right).$$

1. Vérifier que  $\mathbb{E}(g(\tilde{W}_t, t \leq T)) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{g}(\tilde{W}_t, t \leq T))$ , où  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$  représente l'espérance prise sous la probabilité  $\mathbb{Q}$ .
2. A l'aide de la question précédente, montrer que la partie **1.** du lemme de Girsanov implique la partie **2.** lorsque  $H$  est de la forme  $H_s = h(s)$ .

### 7.5.5 \*Fonctions d'échelle

On considère une diffusion  $dX_t = \sigma(X_t) dW_t + b(X_t) dt$ , avec  $b$  et  $\sigma$  continus. Supposons que  $b$  est positif et borné. Supposons aussi qu'il existe  $\epsilon$  et  $M$  tels que  $0 < \epsilon \leq \sigma(x) \leq M < \infty$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Posons enfin  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ .

1. Trouver une fonction  $s$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $(s(X_t))_{t \geq 0}$  est une martingale. Cette fonction est appelée "fonction d'échelle".
2. Pour tout  $a < X_0 < b$ , on pose  $T_a = \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}$  et  $T_b = \inf\{t \geq 0 : X_t = b\}$ . En admettant que l'égalité  $\mathbb{E}(s(X_{T_a \wedge T_b})) = s(X_0)$  est vraie, montrer que

$$\mathbb{P}(T_b < T_a) = \frac{s(X_0) - s(a)}{s(b) - s(a)}.$$

3. Supposons que  $\lim_{x \rightarrow \infty} s(x) < \infty$ . Montrer que dans ce cas  $\lim_{b \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_b < T_a) > 0$ . En déduire qu'avec une probabilité positive, la diffusion  $X$  n'atteindra jamais  $a$ .

### 7.5.6 Formule de Cameron-Martin

On pose  $X_t = \mu t + W_t$ , où  $W_t$  est un mouvement brownien sous  $\mathbb{P}$ . Fixons  $T > 0$  et définissons

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E} \left( \exp \left( -\mu W_T - \mu^2 \frac{T}{2} \right) \mathbf{1}_A \right).$$

1. Montrer que  $(X_t, t \leq T)$  est un mouvement brownien sous  $\mathbb{Q}$ .
2. Montrer que pour toute fonction mesurable  $g : \mathbb{R}^{[0, T]} \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$\mathbb{E}(g(X_t, t \leq T)) = e^{-\mu^2 T/2} \mathbb{E}(e^{\mu W_T} g(W_t, t \leq T)).$$

3. Remplacer  $\mu t$  par  $\mu_t = \int_0^t m_s ds$ . Trouver  $\mathbb{Q}$  tel que  $(X_t, t \leq T)$  est un mouvement brownien sous  $\mathbb{Q}$ .

# Chapitre 8

## Modèle de Black et Scholes

**Objectif :** Introduire le modèle de Black et Scholes, et calculer le prix des options européennes dans ce cadre.

### 8.1 Modèle de Black et Scholes

#### 8.1.1 Évolution du marché

Le modèle de Black et Scholes est un modèle de marché "Bond-Stock" en temps continu. Le marché est donc constitué de deux actifs :

- un actif sans risque  $B$  (Bond ou obligation),
- un actif risqué  $S$  (Stock).

Les deux actifs  $B$  et  $S$  sont supposés évoluer selon la dynamique

$$\begin{cases} dB_t &= rB_t dt \\ dS_t &= S_t(\mu dt + \sigma dW_t). \end{cases}$$

avec  $W$  un mouvement Brownien. Le paramètre  $r$  correspond au *taux d'intérêt* de l'obligation  $B$ , tandis que  $\mu$  et  $\sigma$  correspondent à la *tendance* et à la *volatilité* de l'actif  $S$ .

Nous pouvons donner une formule explicite pour les valeurs de  $B_t$  and  $S_t$ . L'évolution de  $B$  suit une équation différentielle ordinaire, résolue par

$$B_t = B_0 e^{rt}.$$

L'évolution de  $S$  suit l'équation différentielle stochastique d'un mouvement brownien géométrique, voir l'Exemple 2 du Chapitre 7.3. Par conséquent, la valeur de l'actif  $S$  au temps  $t$  est

$$S_t = S_0 \exp \left( \sigma W_t + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right).$$

Enfin, l'information disponible au temps  $t$  est  $\mathcal{F}_t = \sigma(S_u, u \leq t)$ . Notons qu'on a aussi  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_u, u \leq t)$ , vu la formule précédente.

### 8.1.2 Portefeuille

Pour calculer le prix d'une option européenne dans le modèle Black-Scholes nous allons procéder comme au Chapitre 4. Nous allons commencer par introduire la notion de portefeuille autofinancé en temps continu. Un portefeuille  $\Pi = (\beta_t, \gamma_t)_{t \geq 0}$  composé d'une quantité  $\beta_t$  de  $B$  et d'une quantité  $\gamma_t$  de  $S$  au temps  $t$  a pour valeur

$$X_t^\Pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t.$$

Nous supposons dorénavant que  $\beta_t$  et  $\gamma_t$  sont continus à gauche et  $\mathcal{F}_t$ -adaptés.

Dans le cas discret, un portefeuille était dit "autofinancé" lorsque sa variation entre deux instants consécutifs était donnée par

$$\Delta X_n^\Pi = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n.$$

En temps continu, cette condition devient :

**Définition** - Portefeuille autofinancé -

Un portefeuille  $\Pi$  est autofinancé si  $X_t^\Pi$  est solution de

$$dX_t^\Pi = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t.$$

On appelle *valeur réactualisée* d'un portefeuille  $\Pi$ , la valeur  $\tilde{X}_t^\Pi := e^{-rt} X_t^\Pi$ . Elle correspond à la valeur relative du portefeuille  $\Pi$  par rapport à l'obligation  $B$ . Le lemme suivant caractérise les portefeuilles autofinancés (comparez avec le Lemme 3.5.2).

**Lemme 8.1** - Caractérisation des portefeuilles autofinancés -

Un portefeuille  $\Pi$  est autofinancé si et seulement si sa valeur réactualisée  $\tilde{X}_t^\Pi$  vérifie  $d\tilde{X}_t^\Pi = \gamma_t d\tilde{S}_t$ , avec  $\tilde{S}_t := e^{-rt} S_t$ .

**Preuve:** La formule d'Itô assure que  $d\tilde{X}_t^\Pi = -re^{-rt} X_t^\Pi dt + e^{-rt} dX_t^\Pi$ . Un portefeuille  $\Pi$  est donc autofinancé si et seulement si

$$\begin{aligned} d\tilde{X}_t^\Pi &= -r(\beta_t e^{-rt} B_t + \gamma_t e^{-rt} S_t) dt + e^{-rt} (\beta_t dB_t + \gamma_t dS_t) \\ &= \beta_t e^{-rt} \underbrace{(-rB_t dt + dB_t)}_{=0} + \gamma_t \underbrace{(-re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t)}_{=d\tilde{S}_t}. \end{aligned}$$

Le lemme suit. □

### 8.1.3 Probabilité risque-neutre

A l'instar du cas discret, une *probabilité risque-neutre*  $\mathbb{P}^*$  est une probabilité équivalente à  $\mathbb{P}$  (c'est à dire  $\mathbb{P}^*(A) = 0$  ssi  $\mathbb{P}(A) = 0$ ) telle que la valeur réactualisée  $(\tilde{S}_t)_{t \leq T}$  de l'actif  $S$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ .

**Lemme 8.2** - Probabilité risque-neutre -

La probabilité  $\mathbb{P}^*$  définie par

$$\mathbb{P}^*(A) := \mathbb{E}(Z_T \mathbf{1}_A), \quad \text{avec} \quad Z_T := \exp\left(-\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) W_T - \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 \frac{T}{2}\right)$$

est une probabilité risque-neutre pour le modèle de Black et Scholes.

**Preuve:** Examinons l'évolution de  $\tilde{S}_t$  :

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right) = S_0 \exp\left(\sigma W_t^* - \frac{\sigma^2}{2} t\right), \quad (8.1)$$

où nous avons posé

$$W_t^* = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t.$$

Selon la formule de Girsanov-Cameron-Martin (voir l'Exercice 7.5.6), le processus  $(W_t^*)_{t \leq T}$  est un mouvement brownien sous la probabilité  $\mathbb{P}^*$ . Comme la valeur réactualisée de l'actif  $(\tilde{S}_t)_{t \leq T}$  est l'exponentielle stochastique associée à  $\sigma W^*$ , le processus  $(\tilde{S}_t)_{t \leq T}$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ . (voir l'Exercice 6.4.1 question 4).

Conclusion : la probabilité  $\mathbb{P}^*$  est une probabilité risque neutre.  $\square$

**Remarque** : Comparez la probabilité  $\mathbb{P}^*$  avec la probabilité risque-neutre vue à l'Exercice 3.5.5

## 8.2 Couverture des options européennes dans le modèle Black-Scholes

L'objet de ce dernier paragraphe est de calculer le prix d'une option de type européenne dans le modèle de Black et Scholes. Dans le cas particulier, où l'option est une option d'achat européenne, le prix est donnée par la célèbre formule de Black et Scholes, voir le Corollaire 8.5.

Dorénavant nous considérons une option européenne d'échéance  $T$  et de fonction de paiement  $f(\omega) = g(S_T(\omega))$ . Pour simplifier, on suppose que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  avec ses dérivées première et seconde bornées. On demande en outre à  $g$  de vérifier  $\mathbb{E}(g(S_T)^2) < +\infty$ .

**Définition** - Portefeuille de couverture -

Un portefeuille  $\Pi$  est appelé portefeuille de couverture si  $X_T^\Pi \geq g(S_T)$  et

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}^* \left( \left( \tilde{X}_t^\Pi \right)^2 \right) < +\infty. \quad (8.2)$$

Le première condition est la même que dans le cas discret. La seconde est une condition technique qui assure que la valeur réactualisée d'un portefeuille de couverture autofinancé est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ .

**Lemme 8.3** - Valeur réactualisée d'un portefeuille de couverture autofinancé -

La valeur réactualisée  $(\tilde{X}_t^\Pi)_{t \leq T}$  d'un portefeuille de couverture autofinancé  $\Pi$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ .

**Preuve:** L'équation (8.1) donne  $d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t dW_t^*$  (formule d'Itô). En combinant cette égalité avec la condition d'autofinancement du Lemme 8.1, on obtient

$$\tilde{X}_t^\Pi = \tilde{X}_0^\Pi + \int_0^t \gamma_u d\tilde{S}_u = \tilde{X}_0^\Pi + \sigma \int_0^t \gamma_u \tilde{S}_u dW_u^*.$$

Remarquons que  $W^*$  est un mouvement Brownien sous  $\mathbb{P}^*$  et que

$$\sigma^2 \int_0^t \mathbb{E}^* ((\gamma_u \tilde{S}_u)^2) du = \mathbb{E}^* \left( \left( \tilde{X}_t^\Pi - \tilde{X}_0^\Pi \right)^2 \right) < +\infty, \quad \text{pour tout } t \leq T.$$

On en déduit que l'intégrale stochastique  $\left( \int_0^t \gamma_u \tilde{S}_u dW_u^* \right)_{t \leq T}$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$  et donc  $(\tilde{X}_t^\Pi)_{t \leq T}$  aussi.  $\square$

De nouveau, le prix  $C$  d'une option correspondra à la valeur initiale minimale  $X_0^\Pi$  que peut avoir un portefeuille de couverture autofinancé, soit

$$C := \inf \left\{ X_0^\Pi : \text{tel que} \begin{array}{l} - \Pi \text{ est autofinancé} \\ - \Pi \text{ est de couverture} \end{array} \right\}.$$

Comme dans le cas discret, nous allons résoudre ce problème de minimisation à l'aide des probabilités risque-neutre.



**Théorème 8.4** - Prix d'une option européenne -

1. *Le prix d'une option européenne de maturité  $T$  et de fonction de paiement  $g(S_T)$  est*

$$C = \mathbb{E}^* (e^{-rT} g(S_T)) = G(0, S_0) \quad (8.3)$$

*où la fonction  $G$  est définie par*

$$G(t, x) := e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} g \left( x e^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma y} \right) \exp \left( \frac{-y^2}{2(T-t)} \right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi(T-t)}}. \quad (8.4)$$

2. *Le portefeuille  $\Pi^*$  défini par*

$$\gamma_t^* = \frac{\partial G}{\partial x}(t, S_t) \quad \text{et} \quad \beta_t^* = \frac{G(t, S_t) - \gamma_t^* S_t}{B_t} \quad (8.5)$$

*est un portefeuille de couverture autofinancé de valeur initiale  $C$ . Sa valeur au temps  $t$  est*

$$X_t^{\Pi^*} = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^* (g(S_T) \mid \mathcal{F}_t) = G(t, S_t).$$

**Preuve:** Nous allons commencer par prouver que  $C \geq G(0, S_0)$  (étape 1). Ensuite nous allons montrer que  $\Pi^*$  est un portefeuille de couverture autofinancé de valeur initiale  $G(0, S_0)$  ce qui entraînera l'inégalité inverse  $C \leq G(0, S_0)$  (étapes 2, 3 et 4) nous permettant de conclure (étape 5).

1. Minoration :  $C \geq G(0, S_0)$ . Considérons un portefeuille de couverture autofinancé  $\Pi$ . D'après le Lemme 8.3 sa valeur réactualisée  $\tilde{X}^{\Pi}$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ , donc

$$\tilde{X}_0^{\Pi} = \mathbb{E}^* \left( \tilde{X}_T^{\Pi} \right).$$

Par ailleurs, comme le portefeuille  $\Pi$  est un portefeuille de couverture  $X_T^{\Pi} \geq g(S_T)$ , donc

$$\tilde{X}_0^{\Pi} = \mathbb{E}^* \left( \tilde{X}_T^{\Pi} \right) \geq \mathbb{E}^* \left( e^{-rT} g(S_T) \right).$$

Cette dernière égalité est vraie pour tout portefeuille de couverture autofinancé  $\Pi$ , on en déduit donc que  $C \geq \mathbb{E}^* \left( e^{-rT} g(S_T) \right)$ . Enfin, l'équation (8.1)

$$S_T = S_0 \exp \left( \sigma W_T^* + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right)$$

avec  $W^*$  un mouvement brownien sous  $\mathbb{P}^*$ . Comme  $W_T^*$  suit une loi  $\mathcal{N}(0, T)$  sous  $\mathbb{P}^*$ , on en déduit que  $\mathbb{E}^* \left( e^{-rT} g(S_T) \right) = G(0, S_0)$ . et finalement

$$C \geq G(0, S_0).$$

2.  $\Pi^*$  a pour valeur initiale  $G(0, S_0)$ . La formule (8.5) donne  $X_t^{\Pi^*} = \beta_t^* B_t + \gamma_t^* S_t = G(t, S_t)$  pour tout  $0 \leq t \leq T$ . Il suffit de prendre l'égalité en  $t = 0$ .

3.  $\Pi^*$  est un portefeuille autofinancé. La valeur réactualisée de  $\Pi^*$  est

$$\tilde{X}_t^{\Pi^*} = e^{-rt}G(t, S_t) = \tilde{G}(t, \tilde{S}_t),$$

avec  $\tilde{G}(t, x) := e^{-rt}G(t, xe^{rt})$ . La valeur réactualisée  $\tilde{S}$  est un processus d'Itô de la forme  $d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t dW_t^*$  et  $\tilde{G}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  : on peut écrire la formule d'Itô pour  $\tilde{G}(t, \tilde{S}_t)$

$$\tilde{G}(t, \tilde{S}_t) = \tilde{G}(0, \tilde{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(u, \tilde{S}_u) d\tilde{S}_u + \underbrace{\int_0^t \left( \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(u, \tilde{S}_u) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2}(u, \tilde{S}_u) \right) du}_{=0}.$$

Le dernier terme vaut 0 car  $\tilde{G}$  vérifie l'équation

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{voir l'Exercice 8.3.2}). \quad (8.6)$$

Comme de plus

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(t, \tilde{S}_t) = \frac{\partial G}{\partial x}(t, S_t) = \gamma_t^*$$

on en déduit que

$$\tilde{X}_t^{\Pi^*} = \tilde{G}(t, \tilde{S}_t) = \tilde{X}_0^{\Pi^*} + \int_0^t \gamma_u^* d\tilde{S}_u,$$

ce qui signifie d'après le Lemme 8.1 que  $\Pi^*$  est autofinancé.

4.  $\Pi^*$  est un portefeuille de couverture. Remarquons déjà que

$$X_T^{\Pi^*} = \lim_{t \rightarrow T} G(t, S_t) = g(S_T)$$

donc  $\Pi^*$  couvre l'option. De plus, nous vérifierons dans l'Exercice 8.3.3 que

$$G(t, S_t) = \mathbb{E}^* \left( e^{-r(T-t)} g(S_T) \mid \mathcal{F}_t \right)$$

et comme  $X_t^{\Pi^*} = G(t, S_t)$  on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^* \left( \left( \tilde{X}_t^{\Pi^*} \right)^2 \right) &= \mathbb{E}^* \left( \mathbb{E}^* \left( e^{-r(T-t)} g(S_T) \mid \mathcal{F}_t \right)^2 \right) \\ &\leq \mathbb{E}^* \left( \mathbb{E}^* \left( \left( e^{-r(T-t)} g(S_T) \right)^2 \mid \mathcal{F}_t \right) \right) \quad (\text{inégalité de Jensen}) \\ &\stackrel{P1}{\leq} e^{-2r(T-t)} \mathbb{E}^* \left( g(S_T)^2 \right) < +\infty. \end{aligned}$$

Cette borne assure que la condition (8.2) est satisfaite. Le portefeuille  $\Pi^*$  est donc un portefeuille de couverture.

5. Conclusion. Comme  $\Pi^*$  est un portefeuille de couverture autofinancé de valeur initiale  $G(0, S_0)$  on a l'inégalité  $C \leq G(0, S_0)$ . Or, on a montré en début de preuve l'inégalité inverse, donc  $C = G(0, S_0)$ .

□

Dans le cas important où l'option est une option d'achat européenne, la formule (8.3) donnant le prix de l'option est la célèbre formule de Black et Scholes.

**Corollaire 8.5** - Formule de Black et Scholes -

Le prix d'une option d'achat européenne de maturité  $T$  et de prix d'exercice  $K$  est

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \tag{8.7}$$

avec

$$N(x) = \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$$

et

$$d_1 = \frac{\log(S_0/K) + T(r + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

La preuve de ce corollaire est l'objet de l'exercice 8.3.1

**Remarques.**

1. Comparez la valeur (8.5) de  $\gamma_t^*$  avec la valeur  $\gamma_n^*$  obtenue pour le modèle de Cox-Ross-Rubinstein dans l'Exercice 4.4.4.
2. Nous encourageons le lecteur à reprendre l'analyse effectuée dans ce chapitre en supposant cette fois que

$$\begin{cases} dB_t &= r_t B_t dt \\ dS_t &= S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t), \end{cases}$$

où  $r$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  sont des fonctions continues  $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  connues. En adaptant chaque étape de l'analyse, vous retrouverez les formules du Théorème 8.4 où simplement  $\int_t^T r_s ds$  aura remplacé  $r(T-t)$  et  $\int_t^T \sigma_s^2 ds$  aura remplacé  $\sigma^2(T-t)$ .

## 8.3 Exercices

### 8.3.1 La formule de Black et Scholes

Nous allons démontrer la formule de Black et Scholes.

1. Montrer que pour une option d'achat européenne de maturité  $T$  et de prix d'exercice  $K$ , la fonction  $G$  du Théorème 8.4 s'écrit  $G(t, x) = xN(d_1(x, \tau)) - K e^{-r\tau} N(d_2(x, \tau))$ , avec  $\tau = T - t$ ,

$$N(x) = \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$$

et

$$d_1(x, \tau) = \frac{\log(x/K) + \tau(r + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad d_2(x, \tau) = d_1(x, \tau) - \sigma\sqrt{\tau}.$$

2. En déduire que le prix (8.3) de l'option peut se mettre sous la forme (8.7).
3. Montrer que la composition du portefeuille de couverture est donnée (avec les notations de la première question) par

$$\gamma_t^* = N(d_1(S_t, \tau))$$

et

$$\beta_t^* = -Ke^{-rT}N(d_2(S_t, \tau))/B_0.$$

### 8.3.2 L'équation aux dérivées partielles de Black et Scholes

1. Vérifier que  $\tilde{G}(t, x) = e^{-rt}G(t, xe^{rt})$  avec  $G$  défini dans le Théorème 8.4 est solution de l'équation (8.6).
2. Dédurre de l'Equation (8.6), que la fonction  $G$  est solution de

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + rx \frac{\partial G}{\partial x} = rG \quad \text{sur } [0, T] \times \mathbb{R}^+$$

avec  $G(T, x) = g(x)$  pour tout  $x > 0$ .

### 8.3.3 La valeur au temps $t$ du portefeuille $\Pi^*$

L'objet de cet exercice est de prouver que la valeur  $X_t^{\Pi^*}$  du portefeuille  $\Pi^*$  au temps  $t$  est donnée par  $\mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)}g(S_T) \mid \mathcal{F}_t)$ .

1. Montrer que

$$\mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)}g(S_T) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}g\left(S_t e^{\sigma(W_T^* - W_t^*) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}\right) \mid \mathcal{F}_t\right).$$

2. A l'aide de l'Exercice 1.5.7, prouver l'égalité

$$\mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)}g(S_T) \mid \mathcal{F}_t) = G(t, S_t),$$

puis conclure.

# Annexe A

## Rappels de probabilités

### A.1 Événements

Dans tout le livre, on note  $\Omega$  *l'univers des possibles* (c'est à dire l'ensemble de toutes les éventualités possibles).

Un *événement*  $A$  est un sous-ensemble (mesurable) de  $\Omega$ . On note  $\mathbb{P}(A)$  la *probabilité* de l'événement  $A$ . On a les propriétés :

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ ,
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ,
- si  $A_i \cap A_j = \emptyset$  pour tout  $i \neq j$  alors  $\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_k) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_k)$ .  
(La propriété est vraie pour tout  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ )

#### Indépendance

Des événements  $A_1, \dots, A_k$  sont *indépendants* si  $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) = \mathbb{P}(A_1) \times \dots \times \mathbb{P}(A_k)$ .

### A.2 Variables aléatoires

On appelle variable aléatoire à valeurs dans  $\mathcal{X}$  toute fonction  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$  (mesurable). Pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , on note  $\{X = x\}$  l'événement  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ . On distingue différents types de variables aléatoires.

#### Variables discrètes

Si  $\mathcal{X}$  est un sous-ensemble fini de  $\mathbb{R}$ , on dit que  $X$  est une variable aléatoire discrète. On a alors la formule

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) \mathbb{P}(X = x), \quad \text{pour toute fonction } g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Remarque.** Pour tout événement  $A$  la variable aléatoire  $\mathbf{1}_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  prend pour valeur 1 si  $\omega \in A$  et pour valeur 0 si  $\omega \notin A$ . On a donc la formule

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = 0 \times \mathbb{P}(A^c) + 1 \times \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A).$$

## Variables à densité

Une variable aléatoire  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  a une densité  $f_X$  si

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x) dx, \quad \text{pour tout } A \subset \mathbb{R} \text{ (mesurable).}$$

On a alors la formule

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx \quad \text{pour tout } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ (intégrable).}$$

**Remarque :** Si  $X$  a une densité alors  $\mathbb{P}(X = x) = \int_x^x f_X(t) dt = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Dans ce cas, la notion  $\mathbb{P}(X = x)$  est remplacée par la densité  $f_X(x)$  qui représente la probabilité que  $X$  soit dans "un petit voisinage" de  $x$ .

En effet, supposons que  $f_X$  est continue en  $x$  et notons  $V_\varepsilon(x) = ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$  un "petit voisinage de  $x$ " :

$$\mathbb{P}(X \in V_\varepsilon(x)) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f_X(t) dt \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} 2\varepsilon f_X(x) = f_X(x) \times \text{longueur}(V_\varepsilon(x)).$$

## Indépendance

Des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_k$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  sont indépendantes si

$$\mathbb{E}(g_1(X_1) \cdots g_k(X_k)) = \mathbb{E}(g_1(X_1)) \times \cdots \times \mathbb{E}(g_k(X_k))$$

pour toutes fonctions  $g_1, \dots, g_k$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (mesurables bornées).

Dans ce cas, pour tout  $A_1, \dots, A_k \subset \mathbb{R}$  (mesurables), les événements  $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_k \in A_k\}$  sont indépendants.

## Indépendance de variables discrètes

Deux variables aléatoires discrètes  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$  et  $Y : \Omega \rightarrow \mathcal{Y}$  sont indépendantes si et seulement si

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{X} \text{ et } y \in \mathcal{Y}.$$

Notation :  $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$  est une notation simplifiée de  $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$ .

### Indépendance et densité jointe

Deux variables aléatoires  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , possèdent une densité jointe  $f_{(X,Y)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , si pour tout domaine (mesurable)  $\mathcal{D} \subset \text{plan}$ ,

$$\mathbb{P}((X, Y) \in \mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} f_{(X,Y)}(x, y) dx dy.$$

Pour toute fonction  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (intégrable), on a alors

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} g(x, y) f_{(X,Y)}(x, y) dx dy.$$

On retrouve les densités marginales de  $X$  et  $Y$  par les formules

$$f_X(x) = \int_{y \in \mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dy \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \int_{x \in \mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dx.$$

Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ayant une densité jointe sont indépendantes si et seulement si

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \text{pour (presque) tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

### Notations diverses

1. Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont dites *indiscernables* s'il existe  $\Omega_1 \subset \Omega$  tel que
  - $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ ,
  - $X(\omega) = Y(\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega_1$ .
2. Des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots$  sont dites i.i.d. si elles sont indépendantes et de même loi.

## A.3 Convergence de variables aléatoires

Dans ce qui suit,  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une suite de variables aléatoires à valeurs réelles.

### Convergence ps (presque sûr)

Il est dit que  $(X_n)$  converge presque sûrement vers  $X$ , lorsqu'il existe un ensemble  $\Omega_1$  tel que  $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$  et  $X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X(\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega_1$ .

### Convergence $L^2$

Il est dit que  $X_n$  converge vers  $X$  dans  $L^2$ , si  $\mathbb{E}(|X_n - X|^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**Convergence en probabilité**

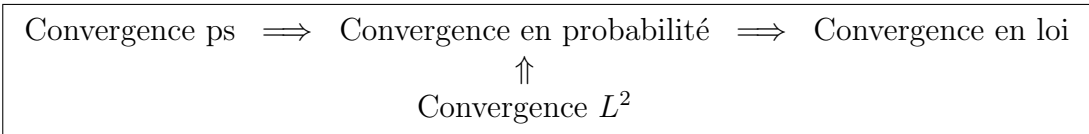
Il est dit que  $X_n$  converge en probabilité vers  $X$ , si pour tout  $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Convergence en loi**

Il est dit que  $X_n$  converge en loi vers  $X$ , si pour toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et bornée on a

$$\mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(X)).$$

**Relations****Deux théorèmes de passage à la limite****Convergence dominée**

Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de variables aléatoires réelles telles que :

- $X_n$  converge p.s. vers  $X$ ,
- $|X_n| \leq Y$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , avec  $\mathbb{E}(Y) < +\infty$ ,

alors  $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X)$ .

**Convergence monotone**

Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de variables aléatoires réelles telles que :

- $X_n$  converge p.s. vers  $X$ ,
- $X_{n+1}(\omega) \geq X_n(\omega)$  (ou  $X_{n+1}(\omega) \leq X_n(\omega)$ ), pour tout  $\omega \in \Omega$  et  $n \in \mathbb{N}$

alors  $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X)$ .



# Annexe B

## Construction de l'intégrale d'Itô

Nous esquissons ici les grandes lignes de la construction de l'intégrale d'Itô. Pour des preuves complètes, nous vous conseillons la référence [5].

### Martingales continues de carré intégrable

Dorénavant,  $W$  est un mouvement brownien et  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ . Fixons  $T \in [0, \infty]$  et notons  $\mathcal{M}_T$  l'espace des  $\mathcal{F}_t$ -martingales  $(M_t)_{t \leq T}$  vérifiant  $\mathbb{E}(M_T^2) < +\infty$  et qui sont continues et issues de 0 ( $M_0 = 0$ ) avec probabilité 1. On identifiera deux processus indiscernables.

#### Proposition B.1

$\mathcal{M}_T$  muni du produit scalaire  $(M|N)_{\mathcal{M}} = \mathbb{E}(N_T M_T)$  est un espace de Hilbert.

**Preuve:** Montrer que  $(M|N)_{\mathcal{M}}$  est un produit scalaire est direct. La preuve de la complétude repose sur l'inégalité maximale de Doob et le lemme de Borel-Cantelli, voir [5].  $\square$

Nous allons aussi introduire l'espace linéaire engendré par les processus  $(H_t)_{t \geq 0}$  continus à gauche,  $\mathcal{F}_t$ -adaptés et vérifiant

$$\int_0^T \mathbb{E}(H_s^2) ds < +\infty.$$

On note  $L_T^2$  l'adhérence de cet espace muni du produit scalaire  $(H|K)_L = \int_0^T \mathbb{E}(H_s K_s) ds$ .

### Intégration des processus élémentaires

Les processus élémentaires sont des processus constants par morceaux de la forme

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^n h_i(\omega) \mathbf{1}_{]t_{i-1}, t_i]}(t)$$

où les  $h_i$  sont des variables aléatoires bornées  $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mesurables et  $0 = t_0 < \dots < t_n = T$ . Remarquez que  $H$  est borné, continu à gauche et adapté. Dans la suite  $\mathcal{E}_T$  désignera l'espace des processus élémentaires muni du produit scalaire  $(\cdot|\cdot)_L$ .

Pour  $t \leq T$ , on définit l'intégrale stochastique du processus élémentaire  $H$  par

$$\left( \int_0^t H_s dW_s \right) (\omega) := \sum_{i=1}^n h_i(\omega) (W_{t \wedge t_i}(\omega) - W_{t \wedge t_{i-1}}(\omega)),$$

où  $s \wedge t := \min(s, t)$ .

### Proposition B.2

L'application  $(H_t)_{t \leq T} \mapsto \left( \int_0^t H_s dW_s \right)_{t \leq T}$  est une isométrie de  $\mathcal{E}_T$  vers  $\mathcal{M}_T$ .

**Preuve:** Remarquons déjà que le processus  $(\sum_{i=1}^n h_i (W_{t \wedge t_i} - W_{t \wedge t_{i-1}}))_{t \leq T}$  est continu et issu de 0. Vérifions maintenant que c'est une martingale. Comme le mouvement brownien  $W$  est une martingale, pour  $0 \leq t_k \wedge t \leq s < t_{k+1} \wedge t$  on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n h_i (W_{t \wedge t_i} - W_{t \wedge t_{i-1}}) \mid \mathcal{F}_s \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \mathbb{E} (h_i (W_{t \wedge t_i} - W_{t \wedge t_{i-1}}) \mid \mathcal{F}_s) + \mathbb{E} (h_{k+1} (W_{t \wedge t_{k+1}} - W_{t \wedge t_k}) \mid \mathcal{F}_s) \\ & \quad + \sum_{i=k+2}^n \mathbb{E} (h_i (W_{t \wedge t_i} - W_{t \wedge t_{i-1}}) \mid \mathcal{F}_s) \\ &= \sum_{i=1}^k h_i (W_{t \wedge t_i} - W_{t \wedge t_{i-1}}) + h_{k+1} (\mathbb{E} (W_{t \wedge t_{k+1}} \mid \mathcal{F}_s) - W_{t \wedge t_k}) \\ & \quad + \sum_{i=k+2}^n \mathbb{E} \left( \underbrace{\mathbb{E} (h_i (W_{t \wedge t_i} - W_{t \wedge t_{i-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1} \wedge t})}_{=h_i \mathbb{E}(W_{t \wedge t_i} - W_{t \wedge t_{i-1}}) = 0} \mid \mathcal{F}_s \right) \\ &= \sum_{i=1}^k h_i (W_{t \wedge t_i} - W_{t \wedge t_{i-1}}) + h_{k+1} (W_s - W_{t \wedge t_k}) + 0 \\ &= \sum_{i=1}^n h_i (W_{s \wedge t_i} - W_{s \wedge t_{i-1}}), \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $\mathbb{E} \left( \int_0^t H_u dW_u \mid \mathcal{F}_s \right) = \int_0^s H_u dW_u$  pour tout  $s \leq t$ , donc  $\left( \int_0^t H_u dW_u \right)_{t \leq T}$  est une martingale. Il reste à montrer que l'application  $H \mapsto \int_0^\cdot H_s dW_s$  est une isométrie.

Calculons la norme de  $\int_0^\cdot H_s dW_s$  :

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\cdot H_s dW_s \right\|_{\mathcal{M}}^2 &= \mathbb{E} \left( \left( \int_0^T H_s dW_s \right)^2 \right) \\ &= \sum_i \sum_j \mathbb{E} (h_i h_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})). \end{aligned}$$

Pour  $i < j$ , la variable  $h_i h_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$  est  $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ -mesurable. En conséquence, vu la propriété 3 du mouvement brownien  $h_i h_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$  est indépendant de  $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$ . Il s'en suit que

$$\mathbb{E} (h_i h_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})) = \mathbb{E} (h_i h_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})) \underbrace{\mathbb{E} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})}_{=0} = 0.$$

Lorsque  $i = j$  : vu que  $h_i^2$  est  $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mesurable, il est indépendant de  $(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2$ , d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (h_i^2 (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2) &= \mathbb{E} (h_i^2) \mathbb{E} ((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2) \\ &= \mathbb{E} (h_i^2) \times (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

En rassemblant les morceaux, on obtient

$$\left\| \int_0^\cdot H_s dW_s \right\|_{\mathcal{M}}^2 = \sum_i \mathbb{E} (h_i^2) \times (t_i - t_{i-1}) = \int_0^T \mathbb{E} (H_s^2) ds = \|H\|_L^2.$$

Nous venons de vérifier que  $H \mapsto \int_0^\cdot H_s dW_s$  est bien une isométrie.  $\square$

## Extension à $L_T^2$

Grâce à la propriété d'isométrie, nous pouvons étendre l'intégrale définie précédemment à l'adhérence de  $\mathcal{E}_T$  dans  $L_T^2$ , qui se trouve être  $L_T^2$  lui-même.

### Proposition B.3

*Il existe une unique extension isométrique de l'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_T &\rightarrow \mathcal{M}_T \\ H &\mapsto \int_0^\cdot H_s dW_s \end{aligned}$$

*de  $L_T^2$  dans  $\mathcal{M}_T$ .*

L'extension de cette intégrale aux processus  $H$  vérifiant seulement  $\int_0^T H_s^2 ds < \infty$ , requiert des arguments sensiblement plus techniques. Nous renvoyons le lecteur curieux à l'ouvrage de Karatzas et Shreve [5] pour cette extension et la preuve de la densité de  $\mathcal{E}_T$  dans  $L_T^2$ .

**Corollaire B.4**

Pour tout processus  $H \in L_T^2$  continu à gauche et borné, on a

$$\sum_{i=1}^n H_{(i-1)t/n} (W_{it/n} - W_{(i-1)t/n}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t H_s dW_s, \quad \text{pour tout } t \leq T.$$

**Preuve:** Posons  $H_s^{(n)} = \sum_{i=1}^n H_{(i-1)t/n} \mathbf{1}_{(i-1)t/n, it/n]}(s)$ . Comme  $H^{(n)}$  est un processus élémentaire

$$\int_0^t H_s^{(n)} dW_s = \sum_{i=1}^n H_{(i-1)t/n} (W_{it/n} - W_{(i-1)t/n}).$$

D'autre part  $H^{(n)}$  converge vers  $H$  dans  $L_t^2$ . En raison de la propriété d'isométrie  $\int_0^t H_s^{(n)} dW_s$  converge vers  $\int_0^t H_s dW_s$  dans  $\mathcal{M}_t$  et donc en probabilité.  $\square$

---

**Remarque :** l'intégrale d'Itô  $\int_0^\cdot H_s dW_s$  construite ci-dessus appartient à l'espace  $\mathcal{M}_T$  et est donc continue seulement avec probabilité 1. Cependant, on peut la modifier sur un ensemble de probabilité nulle, sans en changer sa loi, donc on peut choisir une version de  $\int_0^\cdot H_s dW_s$  qui est continue partout.

Deuxième partie  
Les Corrigés

# Chapitre 9

## Exercices du Chapitre 1

### Exercice 1.5.1

Notons  $B$  l'événement "le cadeau est derrière la porte de gauche". La probabilité de gagner est

$$\mathbb{P}(\text{gagne}) = \mathbb{P}(\text{gagne} \mid B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\text{gagne} \mid B^c)\mathbb{P}(B^c),$$

avec  $\mathbb{P}(B) = 1/3$  et  $\mathbb{P}(B^c) = 2/3$ .

- En conservant sa porte : dans ce cas  $\mathbb{P}(\text{gagne} \mid B) = 1$  et  $\mathbb{P}(\text{gagne} \mid B^c) = 0$  donc  $\mathbb{P}(\text{gagne}) = 1/3$ .
- En changeant de porte : déjà  $\mathbb{P}(\text{gagne} \mid B) = 0$ . Dans le cas où le cadeau n'est pas derrière la porte de gauche. Parmi les deux portes restantes, l'une est ouverte et il n'y a rien derrière, l'autre est fermée. Comme le cadeau n'est pas derrière la porte de gauche ni derrière la porte ouverte, il est derrière la porte fermée. Donc  $\mathbb{P}(\text{gagne} \mid B^c) = 1$  et finalement  $\mathbb{P}(\text{gagne}) = 2/3$ .
- En tirant à pile ou face : il y a deux portes fermées et le cadeau est derrière l'une d'entre elles. Comme le tirage à pile ou face est indépendant de  $B$ , on a  $\mathbb{P}(\text{gagne} \mid B) = \mathbb{P}(\text{gagne} \mid B^c) = 1/2$ . Au final,  $\mathbb{P}(\text{gagne}) = 1/2$ .

La meilleure stratégie est donc de changer de porte!

### Exercice 1.5.2

On a  $S_n = (1 + \rho_n)S_{n-1}$  avec  $S_{n-1}$  qui est  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable et  $\rho_n$  indépendant de  $\mathcal{F}_{n-1}$ . On calcule  $\mathbb{E}(S_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$  à l'aide des propriétés de l'espérance conditionnelle

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) &\stackrel{\text{P5}}{=} S_{n-1} \mathbb{E}((1 + \rho_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\ &\stackrel{\text{P4}}{=} S_{n-1} (1 + \mathbb{E}(\rho_n \mid \mathcal{F}_{n-1})) \\ &\stackrel{\text{P3}}{=} S_{n-1}(1 + \bar{\rho}). \end{aligned}$$

**Exercice 1.5.3**

Nous avons ici une densité jointe donc  $\mathbb{E}(Y | X) = h(X)$  avec

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} y f_X(y | x) dy = \int_{\mathbb{R}} y \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_X(x)} dy = \frac{\int_{\mathbb{R}} y f(x, y) dy}{\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy}.$$

Calculons chacune des deux intégrales. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} y f(x, y) dy &= n(n-1) \int_x^1 y(y-x)^{n-2} dy \\ &= n(n-1) \left[ \frac{y(y-x)^{n-1}}{n-1} \right]_x^1 - n(n-1) \int_x^1 \frac{(y-x)^{n-1}}{n-1} \\ &= n(1-x)^{n-1} - (1-x)^n = (1-x)^{n-1}(n-1+x). \end{aligned}$$

On a aussi

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = n(n-1) \int_x^1 (y-x)^{n-2} dy = n(1-x)^{n-1},$$

donc au final  $h(x) = (n-1+x)/n$  et

$$\mathbb{E}(Y | X) = \frac{n-1+X}{n}.$$

**Exercice 1.5.4**

Appelons  $X_1, \dots, X_{N^2}$  les  $N^2$  valeurs obtenues. On a donc  $S = N + X_1 + \dots + X_{N^2}$ . On peut réécrire cette égalité sous la forme

$$S = N + \sum_{k=1}^6 \mathbf{1}_{\{N=k\}} (X_1 + \dots + X_{k^2}).$$

En effet, si par exemple  $N(\omega) = 5$  le seul terme non nul de la somme est celui pour lequel  $k = 5$ . On trouve donc  $S(\omega) = 5 + X_1(\omega) + \dots + X_{5^2}(\omega)$ , ce qui donne bien l'égalité  $S(\omega) = N(\omega) + X_1(\omega) + \dots + X_{N^2(\omega)}(\omega)$ .

Les termes  $\mathbf{1}_{\{N=k\}}$  sont  $\sigma(N)$ -mesurables alors que les  $X_1, \dots, X_{k^2}$  sont indépendants de  $N$ . En utilisant la propriété 4, puis la propriété 5, puis la propriété 3 on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S | N) &= \mathbb{E}(N | N) + \sum_{k=1}^6 \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{N=k\}} (X_1 + \dots + X_{k^2}) | N) \\ &= N + \sum_{k=1}^6 \mathbf{1}_{\{N=k\}} \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_{k^2} | N) \\ &= N + \sum_{k=1}^6 \mathbf{1}_{\{N=k\}} \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_{k^2}). \end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance  $\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_{k^2}) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_{k^2}) = (7/2) \times k^2$ , d'où au final

$$\mathbb{E}(S | N) = N + \sum_{k=1}^6 \mathbf{1}_{\{N=k\}} (7/2) \times k^2 = N + (7/2) \times N^2.$$

### Exercice 1.5.5

1. On sépare dans  $S_{n+1}$  la partie  $\mathcal{F}_n$ -mesurable de la partie indépendante de  $\mathcal{F}_n$ , c'est à dire  $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$  (remarquez que  $S_n$  est  $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ -mesurable car  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ). Ensuite on applique successivement les propriétés 4, 2 et 3 de l'espérance conditionnelle pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(S_n | \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \\ &= S_n + \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \quad (\text{car } S_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable}) \\ &= S_n + \mathbb{E}(X_{n+1}) \quad (\text{car } X_{n+1} \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_n) \\ &= S_n + m \quad (\text{car les } X_i \text{ ont même loi}). \end{aligned}$$

2. Comme précédemment on sépare dans  $z^{S_{n+1}}$  la partie  $\mathcal{F}_n$ -mesurable de la partie indépendante de  $\mathcal{F}_n$ , c'est à dire  $z^{S_{n+1}} = z^{S_n} z^{X_{n+1}}$ . Ensuite on applique successivement les propriétés 5 et 3 de l'espérance conditionnelle pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(z^{S_{n+1}} | \mathcal{F}_n) &= z^{S_n} \mathbb{E}(z^{X_{n+1}} | \mathcal{F}_n) \quad (\text{car } z^{S_n} \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable}) \\ &= z^{S_n} \mathbb{E}(z^{X_{n+1}}) \quad (\text{car } z^{X_{n+1}} \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_n) \\ &= z^{S_n} G(z) \quad (\text{car les } X_i \text{ ont même loi}). \end{aligned}$$

On peut montrer directement que  $\mathbb{E}(z^{S_n}) = G(z)^n$  en utilisant l'indépendance des  $X_i$ . Une alternative est d'utiliser la formule précédente : Posons  $G_n(z) = \mathbb{E}(z^{S_n})$ . D'après la propriété 1 de l'espérance conditionnelle et la formule obtenue précédemment on a

$$\begin{aligned} G_{n+1}(z) &= \mathbb{E}(z^{S_{n+1}}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(z^{S_{n+1}} | \mathcal{F}_n)) \\ &= \mathbb{E}(z^{S_n} G(z)) \\ &= G_n(z) G(z). \end{aligned}$$

Comme  $G_1(z) = G(z)$ , une petite récurrence donne  $G_n(z) = G(z)^n$ .

### Exercice 1.5.6

1. Cette formule permet de décomposer la somme en séparant les termes  $\mathcal{F}_n$ -mesurables de ceux qui sont indépendants de  $\mathcal{F}_n$ . Soit  $j$  tel que  $N(\omega) = j$ . On a  $\mathbf{1}_{\{N(\omega)=k\}} = 0$  pour tout  $k \neq j$  et  $\mathbf{1}_{\{N(\omega)=j\}} = 1$ , d'où

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N(\omega)=k\}} \sum_{i=1}^k X_i(\omega) = \sum_{i=1}^j X_i(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega),$$



avec la convention que  $\sum_{i=1}^0 X_i = 0$ . On a bien l'égalité annoncée.

2. Remarquons tout d'abord que les  $\mathbf{1}_{\{N=k\}}$  sont  $\mathcal{F}_n$ -mesurables, et que les sommes  $\sum_{i=1}^k X_i$  sont indépendantes de  $\mathcal{F}_n$ . En appliquant successivement les propriétés 4, 5 et 3 de l'espérance conditionnelle, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^N X_i \mid \mathcal{F}_n \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^k \mathbf{1}_{\{N=k\}} X_i \mid \mathcal{F}_n \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N=k\}} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^k X_i \mid \mathcal{F}_n \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N=k\}} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^k X_i \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N=k\}} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} (X_i). \end{aligned}$$

Pour conclure, remarquons (comme à la première question) que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N=k\}} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} (X_i) = \sum_{i=1}^N \mathbb{E} (X_i).$$

3. La première formule permet de nouveau de décomposer le produit en séparant les termes  $\mathcal{F}_n$ -mesurables de ceux qui sont indépendants de  $\mathcal{F}_n$ . Soit  $j$  tel que  $N(\omega) = j$ . On a  $\mathbf{1}_{\{N(\omega)=k\}} = 0$  pour tout  $k \neq j$  et  $\mathbf{1}_{\{N(\omega)=j\}} = 1$ , d'où

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N(\omega)=k\}} \prod_{i=1}^k g(X_i(\omega)) = \prod_{i=1}^j g(X_i(\omega)) = \prod_{i=1}^{N(\omega)} g(X_i(\omega))$$

avec la convention que  $\prod_{i=1}^0 g(X_i) = 1$ . En utilisant que les  $\mathbf{1}_{\{N=k\}}$  sont  $\mathcal{F}_n$ -mesurables, puis que le produit  $\prod_{i=1}^k g(X_i)$  est indépendant de  $\mathcal{F}_n$  on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^N g(X_i) \mid \mathcal{F}_n \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N=k\}} \mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^k g(X_i) \mid \mathcal{F}_n \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N=k\}} \mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^k g(X_i) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N=k\}} \prod_{i=1}^k \mathbb{E} (g(X_i)) \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de l'indépendance des  $X_i$ . Il suffit maintenant de remarquer que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N=k\}} \prod_{i=1}^k \mathbb{E} (g(X_i)) = \prod_{i=1}^N \mathbb{E} (g(X_i))$$

pour conclure.

### Exercice 1.5.7

On a

$$h(x) = \mathbb{E}(H(U_{n+1}, x)) = \int_{\Omega} H(U_{n+1}(\omega), x) d\mathbb{P}(\omega).$$

Vérifions que  $h(X_n)$  satisfait les deux conditions de la définition de l'espérance conditionnelle :

- Déjà  $h(X_n)$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable en tant que fonction de  $X_n$ .
- Ensuite il faut vérifier que  $\mathbb{E}(h(X_n)Y) = \mathbb{E}(H(U_{n+1}, X_n)Y)$  pour tout  $Y$  qui est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable. Pour un tel  $Y$  nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(X_n)Y) &= \int_{\Omega} h(X_n(\omega'))Y(\omega') d\mathbb{P}(\omega') \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} H(U_{n+1}(\omega), X_n(\omega')) d\mathbb{P}(\omega)Y(\omega') d\mathbb{P}(\omega'). \end{aligned}$$

Comme  $U_{n+1}$  est indépendant de  $\mathcal{F}_n$  on a  $d\mathbb{P}(\omega) d\mathbb{P}(\omega') = d\mathbb{P}(\omega, \omega')$  donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(X_n)Y) &= \int_{\Omega \times \Omega} H(U_{n+1}(\omega), X_n(\omega'))Y(\omega') d\mathbb{P}(\omega, \omega') \\ &= \mathbb{E}(H(U_{n+1}, X_n)Y). \end{aligned}$$

En conclusion  $h(X_n)$  vérifie les deux conditions de la caractérisation de l'espérance conditionnelle, on en déduit que

$$\mathbb{E}(H(U_{n+1}, X_n) | \mathcal{F}_n) = h(X_n).$$

### Exercice 1.5.8

1. On a  $\mathbb{E}(X | Z) = h(Z)$  avec  $h(z) = \sum_{i=1}^p x_i \mathbb{P}(X = x_i | Z = z)$  pour tout  $z \in \mathcal{Z}$ . L'inégalité de convexité avec  $\lambda_i = \mathbb{P}(X = x_i | Z = z)$  donne pour tout  $z \in \mathcal{Z}$  :

$$\phi(h(z)) \leq \sum_{i=1}^p \phi(x_i) \underbrace{\mathbb{P}(X = x_i | Z = z)}_{=\mathbb{P}(\phi(X)=\phi(x_i)|Z=z)} = \mathbb{E}(\phi(X) | Z = z) = h_{\phi}(z).$$

Comme  $\mathbb{E}(\phi(X) | Z) = h_{\phi}(Z)$ , on en déduit l'inégalité  $\phi(\mathbb{E}(X | Z)) \leq \mathbb{E}(\phi(X) | Z)$ .

2. la fonction  $\phi : x \mapsto x^p$  est convexe sur  $\mathbb{R}^+$ . Comme  $|X|$  est une variable aléatoire positive, l'inégalité de Jensen donne

$$\mathbb{E}(|X|^p | \mathcal{F}_n) = \phi(\mathbb{E}(|X| | \mathcal{F}_n)) \leq \mathbb{E}(\phi(|X|) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(|X|^p | \mathcal{F}_n).$$

**Exercice 1.5.9****Partie I -**

1. On a  $F(W+Y) = F(W) - 2\mathbb{E}[(X-W)Y] + \mathbb{E}(Y^2)$ . Le dernier terme étant quadratique en  $Y$ , on en déduit que

$$DF(W).Y = -2\mathbb{E}[(X-W)Y].$$

2. Comme  $F$  est minimale en  $W_*$ , on a  $DF(W_*) = 0$ . En explicitant cette condition, on obtient que pour tout  $Y$  dans  $\mathcal{H}$  on a  $\mathbb{E}[(X - W_*)Y] = 0$ , c'est à dire  $\mathbb{E}(YW_*) = \mathbb{E}(XY)$ . Conclusion :  $W_*$  vérifie la condition  $b)$ .
3. La variable aléatoire  $W_*$  vérifie les deux conditions  $a)$  et  $b)$  de la caractérisation de l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ , donc  $W_* = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ .

---

**Interprétation :** On peut interpréter ce résultat de la manière suivante : "la meilleure approximation  $\mathcal{F}_n$ -mesurable de  $X$  pour la distance  $\|X - W\|^2 = \mathbb{E}[(X - W)^2]$  est l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ ".

---

**Partie II -**

1. Déjà  $W_* + \epsilon Y \in \mathcal{H}$ . En effet, la somme de deux variables  $\mathcal{F}_n$ -mesurables est encore  $\mathcal{F}_n$ -mesurable. On a donc  $F(W_*) \leq F(W_* + \epsilon Y)$ . En développant les carrés on obtient

$$\mathbb{E}((X - W_*)^2) \leq \mathbb{E}((X - W_*)^2) - 2\epsilon \mathbb{E}(Y(X - W_*)) + \epsilon^2 \mathbb{E}(Y^2).$$

L'inégalité demandée, en découle.

2. Si  $\epsilon > 0$ , en divisant par  $\epsilon$  on obtient

$$0 \leq -2\mathbb{E}(Y(X - W_*)) + \epsilon \mathbb{E}(Y^2).$$

En faisant tendre  $\epsilon$  vers 0 on en déduit que  $\mathbb{E}(Y(X - W_*)) \leq 0$ .

Lorsque  $\epsilon$  est négatif, on obtient

$$0 \geq -2\mathbb{E}(Y(X - W_*)) + \epsilon \mathbb{E}(Y^2)$$

puis  $\mathbb{E}(Y(X - W_*)) \geq 0$ . En combinant ces deux inégalités on obtient  $\mathbb{E}(Y(X - W_*)) = 0$ , donc  $\mathbb{E}(YW_*) = \mathbb{E}(YX)$ .

Conclusion : La variable aléatoire  $W_*$  vérifie les deux conditions  $a)$  et  $b)$  de la caractérisation de l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ , donc  $W_* = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ . "La meilleure approximation  $\mathcal{F}_n$ -mesurable de  $X$  pour la distance  $\|X - W\|^2 = \mathbb{E}[(X - W)^2]$  est l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ ".

**Exercice 1.5.10**

1. Nous allons vérifier que  $h(Z)$  satisfait les conditions a') et b').

La condition a') est manifestement vérifiée par  $h(Z)$ !

Vérifions la condition b') : a-t-on  $\mathbb{E}(h(Z)f(Z)) \stackrel{?}{=} \mathbb{E}(Xf(Z))$  pour toute fonction  $f$ ?

Faisons le calcul

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(f(Z)h(Z)) &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} f(z)h(z)\mathbb{P}(Z = z) \\
 &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} f(z) \sum_{x \in \mathcal{X}} x \underbrace{\mathbb{P}(X = x \mid Z = z) \mathbb{P}(Z = z)}_{=\mathbb{P}(X=x, Z=z)} \\
 &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \sum_{x \in \mathcal{X}} f(z)x \mathbb{P}(X = x, Z = z) \\
 &= \mathbb{E}(f(Z)X).
 \end{aligned}$$

2. Comme précédemment la condition a') est manifestement vérifiée par  $h(Z)$ . Vérifions la condition b') :  $\mathbb{E}(h(Z)f(Z)) \stackrel{?}{=} \mathbb{E}(Xf(Z))$  pour toute fonction  $f$ ?

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(f(Z)h(Z)) &= \int_{z \in \mathbb{R}} f(z)h(z)f_Z(z) dz \\
 &= \int_{z \in \mathbb{R}} f(z) \left( \int_{x \in \mathbb{R}} x f_X(x \mid Z = z) dx \right) f_Z(z) dz \\
 &= \int_{z \in \mathbb{R}} f(z) \left( \int_{x \in \mathbb{R}} x f_{(X,Z)}(x, z) / f_Z(z) dx \right) f_Z(z) dz \\
 &= \int_{z \in \mathbb{R}} \int_{x \in \mathbb{R}} f(z)x f_{(X,Z)}(x, z) dx dz \\
 &= \mathbb{E}(f(Z)X).
 \end{aligned}$$

# Chapitre 10

## Exercices du Chapitre 2

### Exercice 2.4.1

Le processus  $(X_n)$  est une martingale ssi  $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ . Comme  $X_{n-1}$  est  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable, on a aussi  $X_{n-1} = \mathbb{E}(X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1})$  d'après la propriété 2 de l'espérance conditionnelle. On en déduit que  $(X_n)$  est une martingale ssi  $\mathbb{E}(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$ .

### Exercice 2.4.2

On sépare dans  $Y_{n+1}$  les termes  $\mathcal{F}_n$ -mesurables de ceux indépendants de  $\mathcal{F}_n$  :  $Y_{n+1} = \sum_{i=1}^n iX_i + (n+1)X_{n+1} - m(n+1)(n+2)/2$ . En utilisant les propriétés 4 puis 2 et 3 de l'espérance conditionnelle, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(iX_i | \mathcal{F}_n) + (n+1)\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) - m(n+1)(n+2)/2 \\ &= \sum_{i=1}^n iX_i + (n+1)m - m(n+1)(n+2)/2 \\ &= Y_{n-1}.\end{aligned}$$

La processus  $(Y_n)_{n \geq 0}$  est donc une martingale.

### Exercice 2.4.3

1. Soit  $p \geq 1$ . Vu la propriété 6 de l'espérance conditionnelle on a

$$\mathbb{E}(M_{n+p} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_{n+p} | \mathcal{F}_{n+p-1}) | \mathcal{F}_n).$$

Comme  $(M_n)$  est une martingale  $\mathbb{E}(M_{n+p} | \mathcal{F}_{n+p-1}) = M_{n+p-1}$  donc

$$\mathbb{E}(M_{n+p} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(M_{n+p-1} | \mathcal{F}_n)$$

pour tout  $p \geq 1$ . Une petite récurrence donne alors

$$\mathbb{E}(M_N | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(M_{N-1} | \mathcal{F}_n) = \cdots = \mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n.$$

2. D'après le théorème d'arrêt,  $(M_{n \wedge T})_{n \geq 0}$  est une martingale. En particulier, pour tout  $N \geq n$  on a d'après la question précédente

$$\mathbb{E}(M_{T \wedge N} \mid \mathcal{F}_n) = M_{T \wedge n}.$$

De plus, le temps d'arrêt  $T$  étant borné, il existe  $N$  tel que  $T(\omega) \leq N$  pour tout  $\omega \in \Omega$ . On a alors

$$\mathbb{E}(M_T \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(M_{T \wedge N} \mid \mathcal{F}_n) = M_{T \wedge n}.$$

### Exercice 2.4.4

1. Séparons dans  $M_{n+1}$  les termes  $\mathcal{F}_n$ -mesurables et les termes indépendants de  $\mathcal{F}_n$  :

$$M_{n+1} = \frac{\exp(\lambda S_n)}{(\cosh \lambda)^{n+1}} \exp(\lambda X_{n+1}).$$

En utilisant la propriété 5 puis 3 de l'espérance conditionnelle on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= \frac{\exp(\lambda S_n)}{(\cosh \lambda)^{n+1}} \mathbb{E}(\exp(\lambda X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) \\ &= \frac{\exp(\lambda S_n)}{(\cosh \lambda)^{n+1}} \mathbb{E}(\exp(\lambda X_{n+1})) \\ &= \frac{\exp(\lambda S_n)}{(\cosh \lambda)^{n+1}} (e^\lambda \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) + e^{-\lambda} \mathbb{P}(X_{n+1} = -1)) \\ &= \frac{\exp(\lambda S_n)}{(\cosh \lambda)^{n+1}} \cosh \lambda = M_n. \end{aligned}$$

2. En dérivant on obtient  $\cosh'(\lambda) = (e^\lambda - e^{-\lambda})/2 \geq 0$  si  $\lambda \geq 0$ , donc  $\cosh(\lambda) \geq \cosh(0) = 1$ .
3. Le temps  $\tau$  est un temps d'arrêt donc d'après la première partie du théorème d'arrêt  $(M_{n \wedge \tau})_{n \geq 0}$  est une martingale.

De plus, comme  $n \wedge \tau \leq \tau$ , on a  $S_{n \wedge \tau}$  plus petit que 10, par définition du temps  $\tau$ . Comme  $\cosh(\lambda) \geq 1$  on obtient

$$|M_{n \wedge \tau}| = \left| \frac{\exp(\lambda S_{n \wedge \tau})}{(\cosh \lambda)^{n \wedge \tau}} \right| \leq \exp(\lambda S_{n \wedge \tau}) \leq \exp(10\lambda).$$

On peut donc appliquer la troisième partie du théorème d'arrêt pour obtenir

$$\mathbb{E}(e^{\lambda S_\tau} (\cosh \lambda)^{-\tau}) = \mathbb{E}(M_\tau) = \mathbb{E}(M_0) = 1.$$

Comme  $S_\tau = 10$ , on obtient finalement

$$\mathbb{E}((\cosh \lambda)^{-\tau}) = e^{-10\lambda}.$$

**Exercice 2.4.5**

1. Séparons les termes  $\mathcal{F}_n$ -mesurables de ceux indépendants de  $\mathcal{F}_n$  :  $\lambda^{X_{n+1}} = \lambda^{X_n} \lambda^{G_{n+1}}$ .  
A l'aide des propriétés 5 et 3 de l'espérance conditionnelle on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\lambda^{X_{n+1}} | \mathcal{F}_n) &= \lambda^{X_n} \mathbb{E}(\lambda^{G_{n+1}} | \mathcal{F}_n) \\ &= \lambda^{X_n} \mathbb{E}(\lambda^{G_{n+1}}).\end{aligned}$$

Calculons cette dernière espérance

$$\mathbb{E}(\lambda^{G_{n+1}}) = \frac{1}{\lambda} \mathbb{P}(G_{n+1} = -1) + \lambda \mathbb{P}(G_{n+1} = 1) = \frac{p}{1-p} \times (1-p) + \frac{1-p}{p} \times p = 1.$$

Conclusion :  $\mathbb{E}(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) = Z_n$  donc  $(Z_n)$  est une martingale.

2. Comme  $0 < 1-p < p < 1$  on a  $0 < \lambda < 1$ . Comme de plus  $X_{n \wedge T}$  est compris entre 0 et 200 (car  $n \wedge T \leq T$ ), on en déduit que

$$0 \leq \lambda^{200} \leq Z_{n \wedge T} = \lambda^{X_{n \wedge T}} \leq \lambda^0 = 1.$$

3. Vu que  $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$  et  $|Z_{n \wedge T}| \leq 1$ , on peut appliquer le théorème d'arrêt (partie 3), ce qui donne

$$\mathbb{E}(Z_T) = \mathbb{E}(Z_0) = Z_0 = \lambda^{100}.$$

4. La variable aléatoire  $X_T$  vaut 0 ou 200. On en déduit que

$$\lambda^{100} = \mathbb{E}(Z_T) = \lambda^0 \mathbb{P}(X_T = 0) + \lambda^{200} \mathbb{P}(X_T = 200).$$

Comme  $\mathbb{P}(X_T = 200) = 1 - \mathbb{P}(X_T = 0)$ , on en tire la formule

$$\mathbb{P}(\text{Richard ruiné au temps } T) = \mathbb{P}(X_T = 0) = \frac{\lambda^{100} - \lambda^{200}}{1 - \lambda^{200}}.$$

5. La loi des grands nombres donne

$$\frac{G_1 + \dots + G_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}(G_1) = 2p - 1, \quad p.s.$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ , donc  $G_1 + \dots + G_n \rightarrow \infty$  p.s., ce qui implique que  $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$ .

**Exercice 2.4.6**

1. Remarquons déjà que  $M_n$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable car pour  $k \leq n$  les variables aléatoires  $X_k$  et  $\mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_{k-1})$  le sont. En appliquant successivement les propriétés 4 et 2 de l'espérance conditionnelle on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_n) \\ &= M_n + \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \\ &= M_n.\end{aligned}$$

Le processus  $(M_n)$  est donc une martingale.

2. Pour  $k \leq n$ ,  $\mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_{k-1})$  et  $X_{k-1}$  sont  $\mathcal{F}_{k-1}$ -mesurables donc  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurables. En conséquence,  $A_n$  est  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable. La variable aléatoire  $A_n$  est aussi  $\mathcal{F}_n$ -mesurable, vu que toute variable aléatoire  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable. De plus

$$A_{n+1} - A_n = \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) - X_n$$

est positif car  $(X_n)$  est une sous-martingale.

3. Si  $X_n = M_n + A_n = M'_n + A'_n$ , alors

$$\Delta A'_n = \Delta A_n + \Delta M_n - \Delta M'_n. \quad (10.1)$$

Comme  $A_n$  et  $A'_n$  sont  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurables

$$\mathbb{E}(\Delta A_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \Delta A_n \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\Delta A'_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \Delta A'_n,$$

de même comme  $M_n$  et  $M'_n$  sont des martingales

$$\mathbb{E}(\Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\Delta M'_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0.$$

Donc si on prend l'espérance conditionnelle de l'égalité (10.1) sachant  $\mathcal{F}_{n-1}$ , il vient  $\Delta A'_n = \Delta A_n$ , quel que soit  $n \leq N$ . Par ailleurs, comme  $A_0 = A'_0 = 0$ , on a  $A_n = \sum_{k=1}^n \Delta A_k$  et  $A'_n = \sum_{k=1}^n \Delta A'_k$ . L'égalité  $\Delta A_k = \Delta A'_k$  pour tout  $k \leq n$  donne finalement  $A_n = A'_n$ . En conséquence, on a aussi  $M_n = M'_n$  vu (10.1).

### Exercice 2.4.7

1. Le calcul de l'espérance donne

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mu(k), \quad G(0) = \mu(0) \quad \text{et} \quad G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k) = 1.$$

2. En dérivant  $G$  on obtient

$$G'(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\mu(k+1)s^k \geq 0$$

donc  $G$  est croissante. En dérivant une seconde fois il vient

$$G''(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)\mu(k+2)s^k \geq 0$$

donc  $G$  est convexe. Enfin  $G'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mu(k) = m$ .



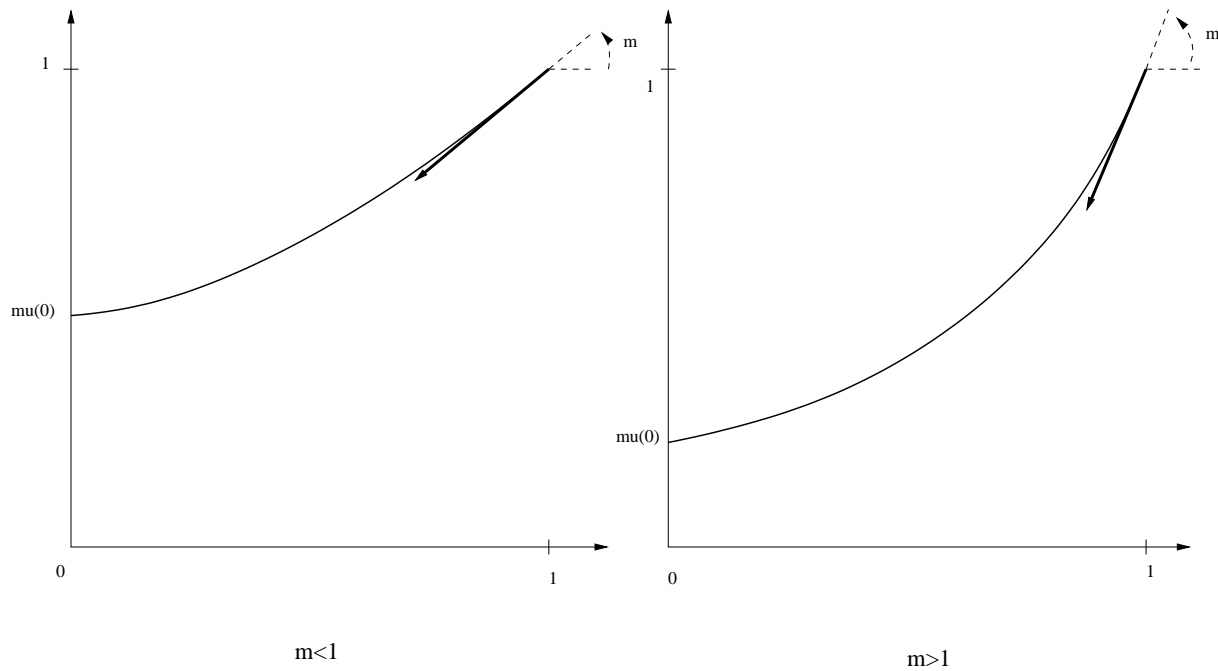


FIG. 10.1 – Graphe de la fonction  $G$  pour  $m < 1$  et  $m > 1$

3. La formule de récurrence donne

$$\mathbb{E} \left( s^{Z_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n \right) = \mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^{Z_n} s^{X_i^{(n)}} \mid \mathcal{F}_n \right). \quad (10.2)$$

On calcule cette espérance conditionnelle à l'aide de la question 3 de l'Exercice 1.5.6. Ici la fonction  $g$  est  $g(x) = s^x$  et  $N = Z_n$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( s^{Z_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n \right) &= \prod_{i=1}^{Z_n} \mathbb{E} \left( s^{X_i^{(n)}} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{Z_n} G(s) \quad \left( \text{car } \mathbb{E} \left( s^{X_i^{(n)}} \right) = G(s) \right) \\ &= G(s)^{Z_n}. \end{aligned}$$

En prenant l'espérance de cette égalité on obtient

$$\begin{aligned} G_{n+1}(s) &= \mathbb{E} \left( s^{Z_{n+1}} \right) \stackrel{P1}{=} \mathbb{E} \left( \mathbb{E} \left( s^{Z_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left( G(s)^{Z_n} \right) \\ &= G_n(G(s)). \end{aligned}$$

Une petite récurrence donne alors

$$G_n(s) = \underbrace{G \circ \dots \circ G}_{n \text{ fois}}(s)$$

car  $G_1 = G$ .

4. On a  $G_n(0) = \mathbb{P}(Z_n = 0) =$  la probabilité que la population s'éteigne avant le temps  $n$ . En passant à la limite on en déduit que  $p = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(0)$ .

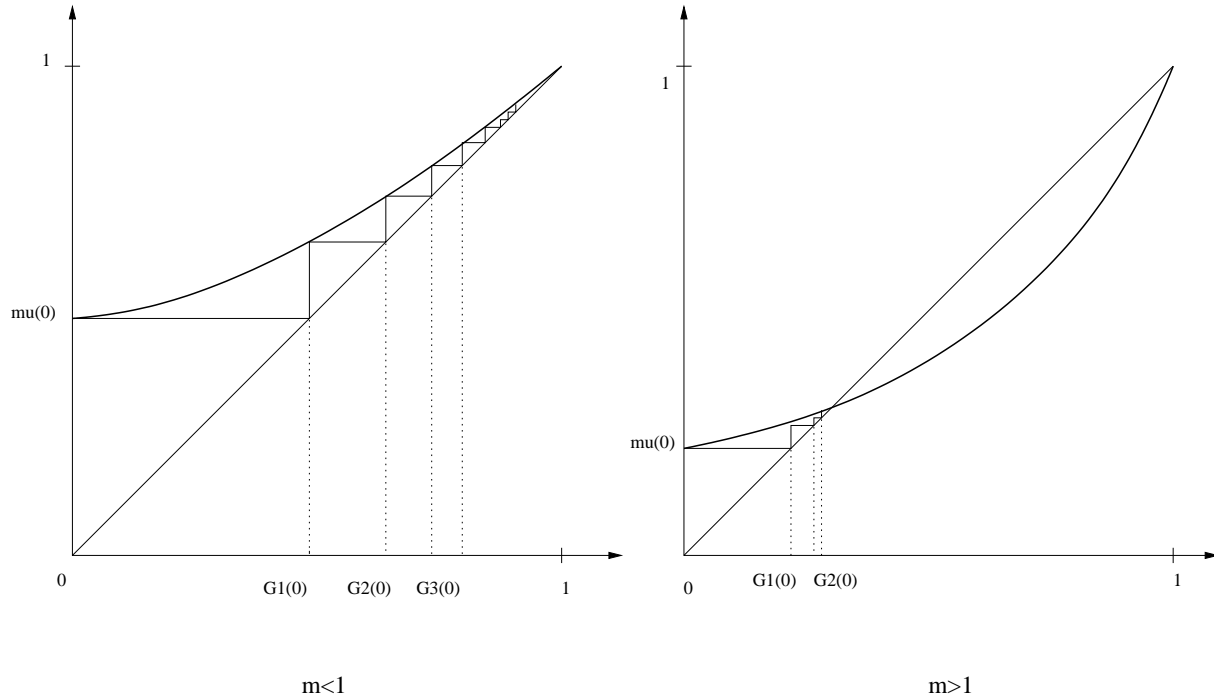


FIG. 10.2 – Convergence de  $G_n(0)$

5. – Lorsque  $m \leq 1$ ,  $G_n(0)$  tend vers 1, donc  $p = 1$ .  
 – Lorsque  $m > 1$ ,  $G_n(0)$  tend vers l'unique point fixe  $p^* \in ]0, 1[$  de  $G$ , i.e.  $p^* = G(p^*)$ .
6. Calculons l'espérance conditionnelle de  $M_{n+1}$  sachant  $\mathcal{F}_n$  à l'aide de la question 2 de l'Exercice 1.5.6 avec  $N = Z_n$

$$\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = m^{-(n+1)} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{(n+1)} \mid \mathcal{F}_n \right) = m^{-(n+1)} \sum_{i=1}^{Z_n} \mathbb{E} \left( X_i^{(n+1)} \right).$$

Comme pour tout  $i$  on a  $\mathbb{E} \left( X_i^{(n+1)} \right) = m$ , on en déduit que

$$\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = m^{-(n+1)} Z_n \times m = M_n.$$

Le processus  $(M_n)$  est donc une martingale. De plus  $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_0) = 1$ .

7. Comme  $p = 1$  lorsque  $m \leq 1$ , on a  $Z_n(\omega) = 0$  (et donc  $M_n(\omega) = 0$ ) pour  $n$  assez grand. En conséquence,  $M_\infty = 0$  et  $\mathbb{E}(M_\infty) = 0$ . Par contre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(M_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Comment expliquer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(M_n) \neq 0$ ? On a bien  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(\omega) = 0$ . Plus précisément on a  $\mathbb{P}(\{\omega : M_n(\omega) \neq 0\}) \rightarrow 0$ , mais en même temps lorsque  $M_n(\omega) \neq 0$  on a  $M_n(\omega) \geq m^{-n}$  très grand, donc  $\mathbb{E}(M_n)$  ne tend pas vers 0.

8. Comme  $G_n(e^{-a}) = \mathbb{E}(\exp(-aZ_n))$  on obtient avec  $a = \lambda/m^n$

$$\mathbb{E}(\exp(-\lambda M_n)) = \mathbb{E}(\exp(-\lambda m^{-n} Z_n)) = G_n(\exp(-\lambda m^{-n})).$$

9. Rappelons que  $G_n = G \circ G_{n-1}$ , donc

$$\mathbb{E}(\exp(-\lambda M_n)) = G(G_{n-1}(\exp(-\lambda/m^n))) = G(\mathbb{E}(\exp(-\lambda M_{n-1}/m))),$$

la dernière égalité découlant de la question précédente. En passant à la limite on obtient

$$L(\lambda) = G(L(\lambda/m)).$$

Le passage à la limite se justifie par le théorème de convergence dominée et la continuité de  $G$ .

### Exercice 2.4.8

1. C'est la Proposition 2.1.

2. Comme  $(X_n)$  est une martingale on a  $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$ . De même  $(X_{n \wedge \tau_a})$  est une martingale d'après le théorème d'arrêt donc  $\mathbb{E}(X_{n \wedge \tau_a}) = \mathbb{E}(X_0)$ . On en déduit que  $\mathbb{E}(X_{n \wedge \tau_a}) = \mathbb{E}(X_n)$ . En décomposant cette égalité suivant que  $\tau_a \leq n$  ou  $\tau_a > n$  on obtient

$$\mathbb{E}(X_{\tau_a} \mathbf{1}_{\{\tau_a \leq n\}}) + \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{\tau_a > n\}}) = \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{\tau_a \leq n\}}) + \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{\tau_a > n\}}).$$

La relation demandée en découle.

3. Par définition de  $\tau_a$ , on a  $X_{\tau_a} \geq a$  donc

$$a\mathbb{P}(\tau_a \leq n) \leq \mathbb{E}(X_{\tau_a} \mathbf{1}_{\{\tau_a \leq n\}}) = \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{\tau_a \leq n\}}).$$

Pour conclure remarquons que

$$\{\tau_a \leq n\} = \left\{ \max_{k=1, \dots, n} X_k \geq a \right\}.$$

En effet le temps  $\tau_a$  est plus petit que  $n$  ssi le processus  $(X_k)$  passe au-dessus du niveau  $a$  avant le temps  $n$ . Ce qui revient à dire que  $\max_{k=1, \dots, n} X_k$  est plus grand que  $a$ .

4. Lorsque  $(X_n)$  est une sous-martingale on doit procéder différemment. Remarquons déjà que  $X_k \leq \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_k)$  pour tout  $k \leq n$ . A l'aide de cette inégalité, puis des propriétés 5 et 1 de l'espérance conditionnelle on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{\tau_a} \mathbf{1}_{\{\tau_a \leq n\}}) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(X_k \mathbf{1}_{\{\tau_a = k\}}) \\ &\leq \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_k) \mathbf{1}_{\{\tau_a = k\}}) \\ &\leq \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{\tau_a = k\}} | \mathcal{F}_k)) \\ &\leq \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{\tau_a = k\}}) = \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{\tau_a \leq n\}}). \end{aligned}$$

Pour conclure, on procède comme dans la question précédente.

### Exercice 2.4.9

1. la fonction  $x \mapsto |x|$  est convexe donc l'inégalité de Jensen donne

$$\mathbb{E}(|M_{n+1}| | \mathcal{F}_n) \geq |\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n)| = |M_n|.$$

2. La formule de Fubini et l'inégalité maximale (2.3) donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n^p) &= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty px^{p-1} \mathbf{1}_{\{x \leq S_n\}} dx\right) \\ &= \int_0^\infty px^{p-1} \mathbb{P}(S_n \geq x) dx \\ &\leq \int_0^\infty px^{p-2} \mathbb{E}(|M_n| \mathbf{1}_{\{S_n \geq x\}}) dx. \end{aligned}$$

Calculons cette dernière intégrale à l'aide de la formule de Fubini

$$\begin{aligned} \int_0^\infty px^{p-2} \mathbb{E}(|M_n| \mathbf{1}_{\{S_n \geq x\}}) dx &= \mathbb{E}\left(|M_n| \int_0^\infty px^{p-2} \mathbf{1}_{\{S_n \geq x\}} dx\right) \\ &= \mathbb{E}(|M_n| S_n^{p-1}) \times \frac{p}{p-1}. \end{aligned}$$

3. L'inégalité de Hölder donne

$$\mathbb{E}(|M_n| S_n^{p-1}) \leq \mathbb{E}(|M_n|^p)^{1/p} \mathbb{E}(S_n^{q(p-1)})^{1/q}$$

avec  $1/q = 1 - 1/p = (p-1)/p$ . En combinant cette inégalité avec l'inégalité de la question précédente on en déduit que

$$\mathbb{E}(S_n^p) \leq \mathbb{E}(|M_n|^p)^{1/p} \mathbb{E}(S_n^p)^{1-1/p} \times \frac{p}{p-1}$$

et la première inégalité demandée en découle. On en déduit que

$$\mathbb{E}(S_n^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(|M_n|^p).$$

Pour conclure, remarquons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(S_n^p) = \mathbb{E}\left(\sup_{n \geq 0} |M_n|^p\right)$$

par convergence monotone. L'inégalité (2.4) est remarquable, car c'est elle permet de contrôler l'espérance d'un sup par le sup des espérances.

### Exercice 2.4.10

1. Le temps  $T$  est un temps d'arrêt vu la Proposition 2.1
2. D'après l'exemple 2 Section 2.3.1,  $(S_n - mn)$  est une martingale. De même, le théorème d'arrêt nous assure que  $(S_{n \wedge T} - m(n \wedge T))_{n \in \mathbb{N}}$  est une martingale donc

$$\mathbb{E}(S_{n \wedge T} - m(n \wedge T)) = \mathbb{E}(S_0 - 0) = 0.$$

L'égalité demandé en découle.

3. Comme  $T$  est le premier temps de passage au dessus du niveau  $a$ , on a  $S_n \mathbf{1}_{\{T > n\}} \leq a \mathbf{1}_{\{T > n\}}$ . On en déduit que

$$0 \leq \mathbb{E}(S_n \mathbf{1}_{\{T > n\}}) \leq a \mathbb{P}(T > n).$$

De plus, comme  $S_n/n \rightarrow m$  p.s. lorsque  $n \rightarrow \infty$  (Loi de Grands Nombres), on a  $S_n \rightarrow +\infty$  p.s. et donc  $\mathbb{P}(T > n) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Il en découle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(S_n \mathbf{1}_{\{T > n\}}) = 0$  et par convergence monotone dans la formule du 2. on obtient

$$m\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(S_T).$$

4. D'après l'exemple 2 Section 2.3.1,  $(S_n)$  est une martingale. Ici on a  $\mathbb{E}(S_0) = \mathbb{E}(0) = 0$  et  $\mathbb{E}(S_T) \geq \mathbb{E}(a) = a$ , donc  $\mathbb{E}(S_T) \neq \mathbb{E}(S_0)$ . Pourquoi? car ici on est pas dans le cadre d'application du théorème d'arrêt (pas de condition de domination).

Remarquons que  $\tilde{S}_n := S_n + \epsilon n \geq S_n$ , donc  $T \geq T_\epsilon$ . De plus, l'identité de wald appliquée à  $\tilde{S}_n$  donne  $\mathbb{E}(\tilde{S}_{T_\epsilon}) = \epsilon \mathbb{E}(T_\epsilon)$ . On en déduit que

$$\mathbb{E}(T) \geq \mathbb{E}(T_\epsilon) = \frac{\mathbb{E}(\tilde{S}_{T_\epsilon})}{\epsilon} \geq a/\epsilon$$

car  $\tilde{S}_{T_\epsilon} \geq a$ . L'inégalité  $\mathbb{E}(T) \geq a/\epsilon$  étant vraie pour  $\epsilon$ , en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0 on obtient que  $\mathbb{E}(T) = +\infty$ .

**Exercice 2.4.11**

1. En utilisant successivement la propriété 5 de l'espérance conditionnelle et la propriété de martingale on obtient

$$\mathbb{E}(V_{k+1}V_k \mid \mathcal{F}_k) = V_k \mathbb{E}(V_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = V_k^2.$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}(V_{k+1}V_k) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(V_{k+1}V_k \mid \mathcal{F}_k)) = \mathbb{E}(V_k^2),$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((V_{k+1} - V_k)^2) &= \mathbb{E}(V_{k+1}^2) - 2\mathbb{E}(V_{k+1}V_k) + \mathbb{E}(V_k^2) \\ &= \mathbb{E}(V_{k+1}^2) - \mathbb{E}(V_k^2). \end{aligned}$$

2. En sommant l'égalité précédente on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_n^2) - \mathbb{E}(V_0^2) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(V_{k+1}^2) - \mathbb{E}(V_k^2) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}((V_{k+1} - V_k)^2). \end{aligned}$$

Conclusion :

- La suite  $n \mapsto \mathbb{E}(V_n^2)$  est croissante. (on peut aussi le voir avec l'inégalité de Jensen)
- $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}((V_{k+1} - V_k)^2) < +\infty \iff \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(V_n^2) < +\infty.$

# Chapitre 11

## Exercices du Chapitre 3

### Exercice 3.5.1

La condition d'autofinancement assure que  $X_{n-1}^{\Pi} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}$ . On en déduit que

$$\begin{aligned}\Delta X_n^{\Pi} &= X_n^{\Pi} - X_{n-1}^{\Pi} \\ &= \beta_n B_n + \gamma_n S_n - \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} \\ &= \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n.\end{aligned}$$

### Exercice 3.5.2

1. Rappelons que pour un portefeuille  $\Pi$  autofinancé on a

$$\begin{cases} X_n^{\Pi} &= \beta_n B_n + \gamma_n S_n \\ X_{n-1}^{\Pi} &= \beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} \end{cases} \quad (\text{autofinancement})$$

donc

$$\begin{aligned}\Delta \left( \frac{X_n^{\Pi}}{\varepsilon_n(U)} \right) &= \frac{X_n^{\Pi}}{\varepsilon_n(U)} - \frac{X_{n-1}^{\Pi}}{\varepsilon_{n-1}(U)} \\ &= \beta_n B_0 + \gamma_n \frac{S_n}{\varepsilon_n(U)} - \beta_n B_0 - \gamma_n \frac{S_{n-1}}{\varepsilon_{n-1}(U)} \\ &= \gamma_n \left( \frac{S_n}{\varepsilon_n(U)} - \frac{S_{n-1}}{\varepsilon_{n-1}(U)} \right) = \gamma_n \Delta \left( \frac{S_n}{\varepsilon_n(U)} \right).\end{aligned}$$

2. En combinant  $X_n^{\Pi}/\varepsilon_n(U) = X_0^{\Pi} + \sum_{k=1}^n \Delta(X_k^{\Pi}/\varepsilon_k(U))$  et la formule démontrée à la question précédente, on obtient le résultat demandé.

**Exercice 3.5.3**

1. Appliquons successivement les propriétés 4, 2 et 5 de l'espérance conditionnelle

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}^*(M_n | \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}^*(\alpha_{n+1}\Delta V_{n+1} | \mathcal{F}_n) \\ &= M_n + \mathbb{E}^*(\alpha_{n+1}\Delta V_{n+1} | \mathcal{F}_n) \quad (\text{car } M_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable}) \\ &= M_n + \alpha_{n+1}\mathbb{E}^*(\Delta V_{n+1} | \mathcal{F}_n) \quad (\text{car } \alpha_{n+1} \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable}).\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme  $(V_n)$  est une martingale,  $\mathbb{E}^*(\Delta V_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 0$  (voir l'Exercice 2.4.1) donc finalement  $\mathbb{E}^*(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n$  et  $(M_n)$  est aussi une martingale.

2. Dans la formule de la question 3.5.2.2 le processus  $(\gamma_n)$  est prévisible et  $(S_n/\varepsilon_n(U))$  est une martingale (car  $\mathbb{P}^*$  probabilité risque-neutre), donc  $(X_n^\Pi/\varepsilon_n(U))$  est une martingale.

**Exercice 3.5.4**

1. Vu la propriété 6 de l'espérance conditionnelle on a

$$\mathbb{E}(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_n) = Z_n.$$

2. Déjà on a  $\mathbb{E}'(W) = \mathbb{E}(ZW)$ . Comme  $W$  est  $\mathcal{F}_p$ -mesurable, en appliquant successivement les propriétés 1 et 5 de l'espérance conditionnelle on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}'(W) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(ZW | \mathcal{F}_p)) \\ &= \mathbb{E}(W\mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_p)) = \mathbb{E}(WZ_p).\end{aligned}$$

3. La formule que nous allons établir permet d'exprimer l'espérance conditionnelle sous  $\mathbb{P}'$  à partir de celle sous  $\mathbb{P}$ . Posons  $V = \mathbb{E}(XZ_n | \mathcal{F}_{n-1})/Z_{n-1}$ . Pour montrer que  $V = \mathbb{E}'(X | \mathcal{F}_{n-1})$ , il faut vérifier que  $V$  satisfait les deux conditions de la caractérisation de  $\mathbb{E}'(X | \mathcal{F}_{n-1})$ , c'est à dire

- a)  $V$  est  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable,  
b)  $\mathbb{E}'(YV) = \mathbb{E}'(YX)$ , pour tout  $Y$  qui est  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable.

On a  $Z_{n-1}$  qui est  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable et  $\mathbb{E}(XZ_n | \mathcal{F}_{n-1})$  aussi (propriété 1 de la définition de l'espérance conditionnelle). En conséquence  $V$  est  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable.

Nous allons maintenant montrer que  $\mathbb{E}'(YV) = \mathbb{E}'(YX)$  pour toute variable  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable  $Y$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}'(YV) &= \mathbb{E}(Z_{n-1}YV) \quad (\text{question 2 avec } p = n - 1 \text{ et } W = YV) \\ &= \mathbb{E}(Y\mathbb{E}(XZ_n | \mathcal{F}_{n-1})) \quad (\text{définition de } V) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(YXZ_n | \mathcal{F}_{n-1})) \quad (Y \text{ est } \mathcal{F}_{n-1}\text{-mesurable}) \\ &= \mathbb{E}(YXZ_n) \\ &= \mathbb{E}'(YX) \quad (\text{question 2 avec } p = n \text{ et } W = YX).\end{aligned}$$

$V$  satisfait donc aussi la condition b), donc  $V = \mathbb{E}'(X | \mathcal{F}_{n-1})$ .



4. Déjà on a

$$\mathbb{E}'(M_n^* | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}'(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\alpha_k \Delta M_k | \mathcal{F}_{k-1})$$

car la somme est  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable. De plus en remplaçant  $\alpha_n$  par  $Z_n/Z_{n-1}$  et en utilisant la question 3 avec  $X = \Delta M_n$ , on a

$$\mathbb{E}(\alpha_n \Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(Z_n \Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}) / Z_{n-1} = \mathbb{E}'(\Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}).$$

Au final,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}'(M_n^* | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}'(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) - \mathbb{E}'(\Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}) - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(\alpha_k \Delta M_k | \mathcal{F}_{k-1}) \\ &= M_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(\alpha_k \Delta M_k | \mathcal{F}_{k-1}) \\ &= M_{n-1}^*. \end{aligned}$$

Pour l'avant dernière égalité on a utilisé  $\mathbb{E}'(\Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}'(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) - M_{n-1}$ , car  $M_{n-1}$  est  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable.

### Exercice 3.5.5

1. Voir l'Exemple 2 Section 2.3.1.
2. Comme  $(M_n)$  est une martingale sous  $\mathbb{P}$ , on a

$$\mathbb{E}(G_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \frac{r-m}{\sigma^2} \mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \frac{r-m}{\sigma^2} M_n = G_n.$$

Donc  $(G_n)$  est une martingale sous  $\mathbb{P}$ . D'après le Lemme 3.1.3,  $(\varepsilon_n(G))$  est aussi une martingale sous  $\mathbb{P}$ .

3. On a  $Z_n = \mathbb{E}(Z_N | \mathcal{F}_n)$  par définition de  $Z_n$ . De plus comme  $(\varepsilon_n(G))$  est une martingale sous  $\mathbb{P}$ , on a aussi  $\varepsilon_n(G) = \mathbb{E}(\varepsilon_N(G) | \mathcal{F}_n)$ , voir la formule de l'exercice 2.4.3. Comme  $Z_N = \varepsilon_N(G)$  on en déduit que  $Z_n = \varepsilon_n(G)$ . Pour calculer  $\alpha_n$  on utilise la formule donnant  $\varepsilon_n(G)$  :

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \varepsilon_n(G) / \varepsilon_{n-1}(G) \\ &= 1 + \Delta G_n \\ &= 1 + \frac{r-m}{\sigma^2} (\rho_n - m). \end{aligned}$$

4. La condition donnée assure que  $Z_N$  est positif :

$$Z_N = (1 + \Delta G_1) \cdots (1 + \Delta G_n) = \prod_{n=1}^N \left( 1 + \frac{r-m}{\sigma^2} (\rho_n - m) \right) > 0.$$

Comme de plus  $\varepsilon(G)$  est une martingale sous  $\mathbb{P}$  on a

$$\mathbb{E}(Z_N) = \mathbb{E}(\varepsilon_N(G)) = \mathbb{E}(\varepsilon_0(G)) = 1.$$

En définissant  $\mathbb{P}'$  par (3.4) on obtient donc une probabilité.

5. En utilisant la formule pour  $\alpha_k$  calculée précédemment on obtient

$$\begin{aligned} M_n^* &= M_n - \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ \left( 1 + \frac{r-m}{\sigma^2} (\rho_k - m) \right) \Delta M_k \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \\ &= M_n - \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [\Delta M_k \mid \mathcal{F}_{k-1}] + \frac{r-m}{\sigma^2} \mathbb{E} [(\rho_k - m)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}]. \end{aligned}$$

La première espérance conditionnelle vaut 0 car  $(M_n)$  est une martingale sous  $\mathbb{P}$ . Pour la seconde on remarque que  $\rho_k$  est indépendant de  $\mathcal{F}_{k-1}$  donc

$$\mathbb{E} [(\rho_k - m)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] = \mathbb{E} [(\rho_k - m)^2] = \sigma^2.$$

On obtient finalement  $M_n^* = M_n - (r-m)n = V_n - rn = V_n - U_n$ . Le lemme de Girsanov assure que  $(M_n^*)_{n \leq N}$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$  donc  $(V_n - U_n)_{n \leq N}$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ .

6. En combinant la question précédente avec la Proposition 3.2 on obtient que  $\mathbb{P}^*$  est une probabilité risque-neutre.

# Chapitre 12

## Exercices du Chapitre 4

### Exercice 4.4.1

1. Comme  $S_n$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable et  $\rho_{n+1}$  est indépendant de  $\mathcal{F}_n$  on peut appliquer les propriétés 5 et 3 de l'espérance conditionnelle, ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(S_n(1 + \rho_{n+1})|\mathcal{F}_n) \\ &= S_n(1 + \mathbb{E}(\rho_{n+1})) \\ &= S_n(1 + 1 \times 1/3 - 1/2 \times 2/3) = S_n.\end{aligned}$$

$(S_n)$  est donc une martingale. Comme  $r_n = 0$ , on a  $\tilde{S}_n = S_n$ . En conséquence  $(\tilde{S}_n)$  est une martingale sous  $\mathbb{P}$ , donc  $\mathbb{P}$  est une probabilité risque-neutre.

2. Comme  $\mathbb{P}^* = \mathbb{P}$ ,  $\varepsilon_N(U) = 1$  et  $f = \log(S_N)$ , le théorème 4.1 nous assure que

$$\begin{aligned}C &= \mathbb{E}(\log(S_N)) \\ &= \mathbb{E}(\log(S_0(1 + \rho_1) \cdots (1 + \rho_N))) \\ &= \log S_0 + \sum_{k=1}^N \mathbb{E}(\log(1 + \rho_k)).\end{aligned}$$

Comme  $\mathbb{E}(\log(1 + \rho_k)) = (1/3) \times \log 2 + (2/3) \times \log(1/2) = -(\log 2)/3$ , on obtient finalement  $C = \log S_0 - (N \log 2)/3$ .

### Exercice 4.4.2

1. Comme  $\tilde{S}_n$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable et  $X_{n+1}$  est indépendant de  $\mathcal{F}_n$  on peut appliquer successivement les propriétés 5 et 3 de l'espérance conditionnelle, ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= (1 + r)^{-n-1} \mathbb{E}(e^{X_1 + \cdots + X_{n+1}} | \mathcal{F}_n) \\ &= (1 + r)^{-1} \tilde{S}_n \mathbb{E}(e^{X_{n+1}} | \mathcal{F}_n) \\ &= (1 + r)^{-1} \tilde{S}_n \mathbb{E}(e^{X_{n+1}}).\end{aligned}$$

Or  $\mathbb{E}(e^{X_{n+1}}) = (1 + e)/2 = (1 + r)$  donc  $\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \tilde{S}_n$ .

2. Vu la question précédente  $(\tilde{S}_n)$  est une martingale sous  $\mathbb{P}$ , donc  $\mathbb{P}$  est une probabilité risque-neutre.
3. Le théorème 4.1 donne

$$\begin{aligned} C &= \mathbb{E}((1+r)^{-N} S_N^2) = \mathbb{E}((1+r)^{-N} e^{2X_1} \dots e^{2X_N}) \\ &= (1+r)^{-N} \mathbb{E}(e^{2X_1}) \dots \mathbb{E}(e^{2X_N}), \end{aligned}$$

où on a utilisé l'indépendance des  $X_n$  pour la dernière égalité. Comme  $\mathbb{E}(e^{2X_n}) = (1+e^2)/2$  et  $1+r = (1+e)/2$  on obtient

$$C = \left( \frac{1+e^2}{1+e} \right)^N.$$

### Exercice 4.4.3

1. Lorsque  $x \geq K$  on a  $(x-K)_+ - (K-x)_+ = x-K$  et lorsque  $x \leq K$  on a  $(x-K)_+ - (K-x)_+ = -(K-x)$ . Dans les deux cas on a donc

$$(x-K)_+ - (K-x)_+ = x-K.$$

2. Avec la première question et la linéarité de l'espérance conditionnelle on obtient

$$\begin{aligned} C_n - P_n &= (1+r)^{-(N-n)} [\mathbb{E}^*((S_N - K)_+ | \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}^*((K - S_N)_+ | \mathcal{F}_n)] \\ &= (1+r)^{-(N-n)} \mathbb{E}^*(S_N - K | \mathcal{F}_n) \\ &= (1+r)^n \mathbb{E}^*((1+r)^{-N} S_N | \mathcal{F}_n) - (1+r)^{-(N-n)} K. \end{aligned}$$

Maintenant, comme  $((1+r)^{-n} S_n)_{n \leq N}$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$  on obtient

$$\mathbb{E}^*((1+r)^{-N} S_N | \mathcal{F}_n) = (1+r)^{-n} S_n$$

et finalement  $C_n - P_n = S_n - (1+r)^{-(N-n)} K$ .

3. La formule précédente avec  $n = 0$  donne  $C_0 - P_0 = S_0 - K/(1+r)^N$ .
4. L'achat au temps  $n = 0$  d'un put plus une unité de  $S$  plus  $-K/(1+r)^N$  permet de couvrir un call donc  $P_0 + S_0 - K/(1+r)^N \geq C_0$ .

De même, l'achat d'un call moins une unité de  $S$  plus  $K/(1+r)^N$  permet de couvrir un put d'où  $C_0 - S_0 + K/(1+r)^N \geq P_0$ . En combinant les deux inégalités on retrouve la formule de la question précédente.

### Exercice 4.4.4

1. La probabilité  $\mathbb{P}^*$  est risque-neutre si et seulement si  $(S_n/\varepsilon_n(U))_{n \leq N}$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ . D'après la proposition 3.2, cela a lieu si et seulement si  $(\rho_1 + \dots + \rho_n - nr)_{n \leq N}$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ . Nous avons déjà vu (Chap. 2 Section 2.3.1

Exemple 2) que la marche aléatoire  $(\rho_1 + \dots + \rho_n - nr)_{n \leq N}$  est une martingale si et seulement si  $\mathbb{E}^*(\rho_n) = r$ . Calculons cette espérance :

$$\mathbb{E}^*(\rho_n) = a \mathbb{P}^*(\rho_n = a) + b \mathbb{P}^*(\rho_n = b) = a(1 - p^*) + bp^*.$$

Nous en déduisons que la condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathbb{P}^*$  soit une probabilité risque-neutre est que

$$p^* = \frac{r - a}{b - a}.$$

2. La variable aléatoire  $S_N$  prend ses valeurs dans  $\{S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k}, k = 0, \dots, N\}$ . De plus, pour tout  $k \in \{0, \dots, N\}$

$$\mathbb{P}^*(S_N = S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k}) = C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k}$$

donc le théorème 4.1 donne

$$\begin{aligned} C &= (1+r)^{-N} \mathbb{E}^*(g(S_N)) \\ &= (1+r)^{-N} \sum_{k=0}^N g(S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k}) C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \\ &= (1+r)^{-N} G_N^*(S_0). \end{aligned}$$

3. Nous avons  $g(S_N) = H(U_{n+1}, S_n)$  avec  $H(u, s) = g(su)$  et  $U_{n+1} = (1 + \rho_{n+1}) \dots (1 + \rho_n)$  indépendant de  $\mathcal{F}_n = \sigma(B_0, \dots, B_{n+1}, S_0, \dots, S_n)$ . D'après l'exercice 1.5.7 on a

$$\mathbb{E}^*(g(S_N) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^*(H(U_{n+1}, S_n) | \mathcal{F}_n) = h(S_n)$$

avec  $h(s) = \mathbb{E}^*(H(U_{n+1}, s)) = \mathbb{E}^*(g(sU_{n+1}))$ . Or

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*(g(sU_{n+1})) &= \sum_{k=0}^{N-n} g(s(1+b)^k(1+a)^{N-n-k}) C_{N-n}^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-n-k} \\ &= G_{N-n}^*(s). \end{aligned}$$

Donc au final  $X_n^{\pi^*} = (1+r)^{-(N-n)} \mathbb{E}^*(g(S_N) | \mathcal{F}_n) = (1+r)^{-(N-n)} G_{N-n}^*(S_n)$ .

4. D'après la question précédente on a

$$\begin{aligned} X_n^{\pi^*} &= \beta_n^* B_n + \gamma_n^* S_n = (1+r)^{-(N-n)} G_{N-n}^*(S_n) \\ &= \beta_n^* B_0 (1+r)^n + \gamma_n^* S_{n-1} (1+\rho_n) = (1+r)^{-(N-n)} G_{N-n}^*(S_{n-1} (1+\rho_n)). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est vraie lorsque  $\rho_n = a$  et  $\rho_n = b$ , ce qui donne le système d'équations demandé.

5. En résolvant le système de la question précédente on obtient la valeur  $\gamma_n^*$  indiquée. Concernant la relation

$$\beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\pi^*} - \gamma_n^* S_{n-1}}{B_0(1+r)^{n-1}}$$

elle vient de la condition d'autofinancement pour  $\pi^*$ .

6. Notons tout d'abord que  $S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k} \leq K$  si  $k < k_0$ . La question 2 avec  $g(S_N) = (S_N - K)_+$  donne

$$\begin{aligned} C &= (1+r)^{-N} G_N^*(S_0) \\ &= (1+r)^{-N} \sum_{k=0}^N (S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k} - K)_+ C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \\ &= (1+r)^{-N} \sum_{k=k_0}^N (S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k} - K) C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \\ &= S_0 \sum_{k=k_0}^N C_N^k \frac{(1+b)^k(1+a)^{N-k}(p^*)^k(1-p^*)^{N-k}}{(1+r)^N} - \frac{K}{(1+r)^N} \sum_{k=k_0}^N C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k}. \end{aligned}$$

La seconde somme est égale à  $\mathbb{B}(k_0, N, p^*)$ . Concernant la première somme, remarquons que

$$\begin{aligned} \frac{(1+b)^k(1+a)^{N-k}(p^*)^k(1-p^*)^{N-k}}{(1+r)^N} &= \left[ \frac{1+b}{1+r} p^* \right]^k \left[ \frac{1+a}{1+r} (1-p^*) \right]^{N-k} \\ &= (p')^k \left[ \frac{1+a}{1+r} (1-p^*) \right]^{N-k}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{1+a}{1+r} (1-p^*) &= \frac{1+a}{1+r} \left( 1 - \frac{r-a}{b-a} \right) \\ &= \frac{(1+a)(b-r)}{(1+r)(b-a)} \\ &= \frac{(b-a)(1+r) - (1+b)(r-a)}{(1+r)(b-a)} \\ &= 1 - \frac{1+b}{1+r} p^* = 1 - p'. \end{aligned}$$

En recollant les morceaux on obtient finalement

$$C = S_0 \mathbb{B}(k_0, N, p') - (1+r)^{-N} K \mathbb{B}(k_0, N, p^*).$$

**Remarque :** Pour obtenir la formule de Black-Scholes à partir de là il faut appliquer le théorème central limite (question 1 de l'exercice suivant) puis ne pas se décourager face aux calculs... (questions 2 et 3 de l'exercice 4.4.5).

**Exercice 4.4.6****Partie I**

1. Procédons par récurrence : on a

$$S_n^{(1)} = (1 + \rho_n^{(1)})S_{n-1}^{(1)} = (1 + \rho_n^{(1)})(1 + \rho_{n-1}^{(1)})S_{n-2}^{(1)} = \cdots = (1 + \rho_n^{(1)}) \cdots (1 + \rho_1^{(1)})S_0^{(1)}$$

d'où  $S_n^{(1)} = \mathcal{E}_n^{(1)} S_0^{(1)}$ . On procède de même pour  $S_n^{(2)}$ .

2. La valeur au temps  $n$  du portefeuille  $\pi$  est  $X_n^\pi = \gamma_n^{(1)} S_n^{(1)} + \gamma_n^{(2)} S_n^{(2)}$ . Lors du réinvestissement (choix de  $\gamma_{n+1}^{(1)}$  et  $\gamma_{n+1}^{(2)}$ ) la valeur du portefeuille ne change pas donc

$$X_n^\pi = \gamma_{n+1}^{(1)} S_n^{(1)} + \gamma_{n+1}^{(2)} S_n^{(2)}.$$

3. En utilisant que  $\gamma_{n+1}^{(1)}$  et  $\gamma_{n+1}^{(2)}$  sont  $\mathcal{F}_n$ -mesurables on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^* \left( X_{n+1}^\pi / \mathcal{E}_{n+1}^{(1)} \mid \mathcal{F}_n \right) &= \mathbb{E}^* \left( \gamma_{n+1}^{(1)} S_0^{(1)} + \gamma_{n+1}^{(2)} S_{n+1}^{(2)} / \mathcal{E}_{n+1}^{(1)} \mid \mathcal{F}_n \right) \\ &= \gamma_{n+1}^{(1)} S_0^{(1)} + \gamma_{n+1}^{(2)} \mathbb{E}^* \left( S_{n+1}^{(2)} / \mathcal{E}_{n+1}^{(1)} \mid \mathcal{F}_n \right). \end{aligned}$$

En utilisant successivement que  $(S_n^{(2)} / \mathcal{E}_n^{(1)})$  est une martingale puis la condition d'autofinancement on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^* \left( X_{n+1}^\pi / \mathcal{E}_{n+1}^{(1)} \mid \mathcal{F}_n \right) &= \gamma_{n+1}^{(1)} S_0^{(1)} + \gamma_{n+1}^{(2)} S_n^{(2)} / \mathcal{E}_n^{(1)} \\ &= (\gamma_{n+1}^{(1)} S_n^{(1)} + \gamma_{n+1}^{(2)} S_n^{(2)}) / \mathcal{E}_n^{(1)} \\ &= X_n^\pi / \mathcal{E}_n^{(1)}. \end{aligned}$$

4. Si  $\pi$  est autofinancé,  $(X_n^\pi / \mathcal{E}_n^{(1)})$  est une martingale et on a

$$\mathbb{E}^* (X_N^\pi / \mathcal{E}_N^{(1)}) = \mathbb{E}^* (X_0^\pi) = 0.$$

Par ailleurs, si  $X_N^\pi \geq 0$ , et  $\mathbb{P}^*(X_N^\pi > 0) > 0$  on a aussi

$$\mathbb{E}^* (X_N^\pi / \mathcal{E}_N^{(1)}) = \mathbb{E}^* \left( (X_N^\pi / \mathcal{E}_N^{(1)}) \mathbf{1}_{X_N^\pi > 0} \right) > 0,$$

ce qui contredit l'égalité précédente.

**Partie II**

1. Si à l'échéance, la valeur  $S_N^{(1)}$  de l'actif 1 est supérieure à la valeur  $S_N^{(2)}$  de l'actif 2, l'option n'a pas d'intérêt, le détenteur n'exerce pas son droit. Parcontre si  $S_N^{(2)} > S_N^{(1)}$ , il exercera son droit et recevra  $(S_N^{(2)} - S_N^{(1)})$ . La fonction de paiement est donc

$$f = (S_N^{(2)} - S_N^{(1)})_+.$$

2. Soit  $\pi$  un portefeuille de couverture autofinancé. En utilisant que  $(X_n^\pi/\mathcal{E}_n^{(1)})$  est une martingale, puis que  $X_N^\pi \geq f$ , il vient

$$\begin{aligned} X_0^\pi &= \mathbb{E}^*(X_N^\pi/\mathcal{E}_N^{(1)}) \\ &\geq \mathbb{E}^*(f/\mathcal{E}_N^{(1)}). \end{aligned}$$

3. Soit  $\pi^*$  un portefeuille autofinancé répliquant  $f$  à l'échéance, c'est à dire tel que  $X_N^{\pi^*} = f$ . Remarquons déjà qu'un tel portefeuille est un portefeuille de couverture. De plus, le portefeuille étant autofinancé,  $(X_n^{\pi^*}/\mathcal{E}_n^{(1)})$  est une martingale donc

$$X_0^{\pi^*} = \mathbb{E}^*(X_0^{\pi^*}) = \mathbb{E}^*(X_N^{\pi^*}/\mathcal{E}_N^{(1)}) = \mathbb{E}^*(f/\mathcal{E}_N^{(1)}).$$

4. On a vu à la question 2 qu'un portefeuille de couverture autofinancé a une valeur initiale supérieure ou égale à  $\mathbb{E}^*(f/\mathcal{E}_N^{(1)})$ . Le portefeuille de couverture autofinancé  $\pi^*$  réalisant l'égalité, on en déduit que  $C = \mathbb{E}^*(f/\mathcal{E}_N^{(1)})$ .
5.  $(X_n^{\pi^*}/\mathcal{E}_n^{(1)})$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$  donc

$$X_n^{\pi^*}/\mathcal{E}_n^{(1)} = \mathbb{E}^*(X_N^{\pi^*}/\mathcal{E}_N^{(1)} \mid \mathcal{F}_n).$$

Comme  $\mathcal{E}_n^{(1)}$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable, on peut le rentrer à l'intérieur de l'espérance conditionnelle pour obtenir le résultat demandé.

6. Raisonnons par l'absurde. Supposons que  $\mathbb{P}^*$  et  $\mathbb{Q}^*$  soient deux probabilités distinctes qui conviennent. Les deux probabilités étant distinctes il existe  $A$  tel que  $\mathbb{P}^*(A) \neq \mathbb{Q}^*(A)$ .

Soit  $f = \mathcal{E}_N^{(1)} \mathbf{1}_A$ . Il existe  $\pi$  autofinancé tel que  $X_N^\pi = f$ . En utilisant que  $(X_n^\pi/\mathcal{E}_n^{(1)})$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$  et  $\mathbb{Q}^*$  (car  $\pi$  autofinancé) on en déduit que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(X_N^\pi/\mathcal{E}_N^{(1)}) = X_0^\pi = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}(X_N^\pi/\mathcal{E}_N^{(1)}).$$

En remplaçant  $X_N^\pi$  par  $f$ , on obtient  $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{Q}^*(A)$ . Absurde!



# Chapitre 13

## Exercices du Chapitre 5

### Exercice 5.6.1

1. Comme  $g$  est maximum en  $y^*$  on a  $g(Y_n(\omega)) \leq g(y^*)$  pour tout  $n \leq N$  et  $\omega \in \Omega$ . En particulier,  $g(Y_\tau) \leq g(y^*)$  pour tout temps d'arrêt  $\tau$  et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*(\varepsilon_\tau(U)^{-1}f_\tau) &= \mathbb{E}^*(g(Y_\tau)M_\tau) \\ &\leq g(y^*)\mathbb{E}^*(M_\tau).\end{aligned}$$

De plus comme  $M$  est une martingale et  $\tau$  temps d'arrêt borné par  $N$  on a  $\mathbb{E}^*(M_\tau) = \mathbb{E}^*(M_0) = 1$  (théorème d'arrêt).

2. D'après le théorème 5.1 et la question précédente

$$C = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_N} \mathbb{E}^*(\varepsilon_\tau(U)^{-1}f_\tau) \leq g(y^*)$$

3. On a

$$\mathbb{E}^*(\varepsilon_{\tau^*}(U)^{-1}f_{\tau^*}) = g(y^*)\mathbb{E}^*(M_{\tau^*}) = g(y^*)$$

avec  $\tau^*$  temps d'arrêt borné par  $N$ . Vu le théorème 5.1, on a donc  $g(y^*) \leq C$  et vu la question précédente  $C = g(y^*)$ . Le temps  $\tau^*$  correspond au temps d'exercice optimal.

### Exercice 5.6.2

1.  $\Pi'$  est autofinancé donc  $(X_n^{\Pi'}/(1+r)^n)$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$  et

$$\frac{X_n^{\Pi'}}{(1+r)^n} = \mathbb{E}^*\left(\frac{X_N^{\Pi'}}{(1+r)^N} \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}^*(\tilde{f}_N \mid \mathcal{F}_n), \quad \text{pour tout } n \leq N.$$

2. Comme  $\tilde{f}_N \geq 0$ , le rappel et la question précédente donnent  $X_n^{\Pi'}/(1+r)^n \geq 0$ . On a aussi  $\tilde{f}_N \geq (S_N - K)/(1+r)^N$ , donc en combinant le rappel et la question précédente il vient

$$\frac{X_n^{\Pi'}}{(1+r)^n} \geq \mathbb{E}^*\left(\frac{S_N - K}{(1+r)^N} \mid \mathcal{F}_n\right).$$

Or  $(S_n/(1+r)^n)$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$  donc

$$\mathbb{E}^* \left( \frac{S_N - K}{(1+r)^N} \mid \mathcal{F}_n \right) = \frac{S_n}{(1+r)^n} - \frac{K}{(1+r)^N} \geq \frac{S_n - K}{(1+r)^n}$$

où la dernière égalité a lieu car  $K$  et  $r$  sont positifs. Le résultat demandé en découle.

3. Vu ce qui précède  $X_n^{\Pi'}$  est supérieur à 0 et à  $(S_n - K)$ , donc

$$X_n^{\Pi'} \geq \max(0, S_n - K) = (S_n - K)_+ = f_n.$$

Cela signifie que  $\Pi'$  est un portefeuille de couverture et comme il est aussi autofinancé, on déduit de la définition de  $C_{\text{am}}$  que  $C_{\text{am}} \leq X_0^{\Pi'}$ . Enfin, vu la question 1, on a aussi  $X_0^{\Pi'} = \mathbb{E}^* \left( \tilde{f}_N \mid \mathcal{F}_0 \right) = \mathbb{E}^* \left( \tilde{f}_N \right)$  donc  $C_{\text{am}} \leq \mathbb{E}^* \left( \tilde{f}_N \right)$ .

4. Vu le théorème 4.1, on a  $C_{\text{eur}} = \mathbb{E}^* \left( \tilde{f}_N \right)$ , donc d'après la question précédente  $C_{\text{eur}} \geq C_{\text{am}}$ .

5. Remarquons que

$$\begin{aligned} C_{\text{am}} &= \inf \left\{ X_0^{\Pi} \text{ où } \Pi \text{ est autofinancé et vérifie } X_n^{\Pi} \geq f_n, \forall n \leq N \right\} \\ &\geq \inf \left\{ X_0^{\Pi} \text{ où } \Pi \text{ est autofinancé et vérifie } X_N^{\Pi} \geq f_N \right\} = C_{\text{eur}}. \end{aligned}$$

Comme la question précédente donne l'inégalité inverse, on conclut que  $C_{\text{am}} = C_{\text{eur}} = \mathbb{E}^* \left( \tilde{f}_N \right)$ .

### Exercice 5.6.3

1. En utilisant successivement les propriétés 1 et 5 de l'espérance conditionnelle on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}'(Y) &= \mathbb{E}^* (Z_N Y) \\ &= \mathbb{E}^* (\mathbb{E}^* (Z_N Y \mid \mathcal{F}_n)) \\ &= \mathbb{E}^* (Y \mathbb{E}^* (Z_N \mid \mathcal{F}_n)). \end{aligned}$$

$\mathbb{P}^*$  est une probabilité risque-neutre donc  $(Z_n)$  est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$  et  $\mathbb{E}^* (Z_N \mid \mathcal{F}_n) = Z_n$ .

2. Le théorème 5.1 donne

$$C = \sup_{\tau \in T_N} \mathbb{E}^* \left( \frac{\max_{0 \leq k \leq \tau} S_k - S_\tau}{\varepsilon_\tau(U)} \right) = \sup_{\tau \in T_N} \mathbb{E}^* (Z_\tau (X_\tau - 1)).$$

En décomposant sur les différentes valeurs que peut prendre  $\tau$  et en utilisant la question 1 pour la seconde égalité (remarquez que  $\mathbf{1}_{\tau=n}(X_n - 1)$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable)

on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*(Z_\tau(X_\tau - 1)) &= \sum_{n=0}^N \mathbb{E}^*(\mathbf{1}_{\tau=n} Z_n(X_n - 1)) \\ &= \sum_{n=0}^N \mathbb{E}'(\mathbf{1}_{\tau=n}(X_n - 1)) \\ &= \mathbb{E}'(X_\tau - 1). \end{aligned}$$

La formule en découle.

### Exercice 5.6.4

- Déjà  $X_n$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable et  $Y_n = \max(X_n, \mathbb{E}^*(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n))$  aussi (car  $X_n$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable, ainsi que l'espérance conditionnelle, voir la définition de celle-ci). Comme on peut écrire  $\{T = n\} = \{X_0 \neq Y_0\} \cap \dots \cap \{X_{n-1} \neq Y_{n-1}\} \cap \{X_n = Y_n\}$ , on a  $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$  pour tout  $n$ , donc  $T$  est un temps d'arrêt. Idem pour  $T_n$ . Comme  $X_N = Y_N$ , les deux temps  $T$  et  $T_N$  sont bornés par  $N$ .
- La formule (5.5) pour  $n = 0$  donne

$$Y_0 = \mathbb{E}^*(X_{T_0} | \mathcal{F}_0) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_N} \mathbb{E}^*(X_\tau | \mathcal{F}_0).$$

Pour conclure remarquez que  $\mathbb{E}^*(\cdot | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}^*(\cdot)$  et  $T_0 = T$ .

- Par définition  $Y_n = \max(X_n, \mathbb{E}^*(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n)) \geq \mathbb{E}^*(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ .
- Vu la définition de  $T_n$ , si  $n \leq k < T_n(\omega)$ , on a  $Y_k(\omega) \neq X_k(\omega)$ . Comme par ailleurs  $Y_k(\omega) = \max(X_k(\omega), \mathbb{E}^*(Y_{k+1} | \mathcal{F}_k)(\omega))$ , on en déduit que  $Y_k(\omega) = \mathbb{E}^*(Y_{k+1} | \mathcal{F}_k)(\omega)$  pour  $n \leq k < T_n(\omega)$ . En utilisant la formule définissant  $A_n$  on obtient

$$\begin{aligned} A_{T_n} &= \sum_{k=1}^{T_n} [Y_{k-1} - \mathbb{E}(Y_k | \mathcal{F}_{k-1})] \\ &= \sum_{k=1}^n [Y_{k-1} - \mathbb{E}(Y_k | \mathcal{F}_{k-1})] = A_n. \end{aligned}$$

- La question 2 de l'Exercice 2.4.3 nous donne  $\mathbb{E}^*(M_\tau | \mathcal{F}_n) = M_{\tau \wedge n}$ . Comme  $\tau \geq n$ , on en déduit que  $\mathbb{E}^*(M_\tau | \mathcal{F}_n) = M_n$ .
- Vu la définition de  $T_n$ , on a  $X_{T_n} = Y_{T_n}$ . Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*(X_{T_n} | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}^*(Y_{T_n} | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}^*(M_{T_n} - A_{T_n} | \mathcal{F}_n) \quad (\text{décomposition de Doob}) \\ &= \mathbb{E}^*(M_{T_n} | \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}^*(A_n | \mathcal{F}_n) \quad (\text{car } A_{T_n} = A_n) \\ &= M_n - A_n \quad (\text{question précédente et } A_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable}) \\ &= Y_n. \end{aligned}$$

7. On a  $X_k \leq Y_k$  pour tout  $k \leq N$  (car  $Y_k = \max(X_k, \mathbb{E}^*(Y_{k+1} | \mathcal{F}_k))$ ), donc  $X_\tau \leq Y_\tau$  et

$$\mathbb{E}^*(X_\tau | \mathcal{F}_n) \leq \mathbb{E}^*(Y_\tau | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^*(M_\tau | \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}^*(A_\tau | \mathcal{F}_n).$$

Vu l'exercice 2.4.3 on a  $\mathbb{E}^*(M_\tau | \mathcal{F}_n) = M_{n \wedge \tau}$ . Par ailleurs comme  $\tau \geq n$ , on a  $M_{n \wedge \tau} = M_n$  et aussi  $A_\tau \geq A_n$  car  $(A_n)$  est un processus croissant. Conclusion :

$$\mathbb{E}^*(X_\tau | \mathcal{F}_n) \leq M_n - \mathbb{E}^*(A_n | \mathcal{F}_n) = M_n - A_n = Y_n.$$

8. Pour conclure, combinez les deux questions précédentes en remarquant que  $T_n$  est un temps d'arrêt prenant ses valeurs dans  $[n, N]$ .

# Chapitre 14

## Exercices du Chapitre 6

### Exercice 6.4.1

1. Clairement  $X_0 = 0$  et la loi de  $X_t$  est la loi  $\mathcal{N}(0, t)$  car  $\sqrt{t}\mathcal{N}(0, 1) = \mathcal{N}(0, t)$ . Par contre,

$$X_{t+s} - X_t = \left(\sqrt{t+s} - \sqrt{t}\right) N = \left(\frac{\sqrt{t+s}}{\sqrt{t}} - 1\right) X_t$$

donc  $X_{t+s} - X_t$  n'est pas indépendant de  $X_t$ !

2. On a la décomposition  $W_{t+s} = (W_{t+s} - W_t) + W_t$  avec le premier terme indépendant de  $\mathcal{F}_t$  (propriété 3 du mouvement brownien) et le second terme  $\mathcal{F}_t$ -mesurable. En appliquant successivement les propriétés 4, 3 et 2 de l'espérance conditionnelle on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_{t+s} \mid \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(W_{t+s} - W_t \mid \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(W_t \mid \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(W_{t+s} - W_t) + \mathbb{E}(W_t \mid \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(W_{t+s} - W_t) + W_t.\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de se rappeler que  $W_{t+s} - W_t$  suit une loi  $\mathcal{N}(0, s)$  (propriété 3 du mouvement brownien) donc  $\mathbb{E}(W_{t+s} - W_t) = 0$ .

3. On décompose  $W_{t+s}^2$  en

$$W_{t+s}^2 = (W_{t+s} - W_t + W_t)^2 = (W_{t+s} - W_t)^2 + 2(W_{t+s} - W_t)W_t + W_t^2$$

avec  $W_{t+s} - W_t$  indépendant de  $\mathcal{F}_t$  et  $W_t$  qui est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable. Avec les propriétés 4, 3, 5 et 2 de l'espérance conditionnelle on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_{t+s} \mid \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(W_{t+s}^2 - (t+s) \mid \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}((W_{t+s} - W_t)^2 \mid \mathcal{F}_t) + 2\mathbb{E}((W_{t+s} - W_t)W_t \mid \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(W_t^2 \mid \mathcal{F}_t) - (t+s) \\ &= \mathbb{E}((W_{t+s} - W_t)^2) + 2W_t \mathbb{E}((W_{t+s} - W_t) \mid \mathcal{F}_t) + W_t^2 - (t+s) \\ &= \mathbb{E}((W_{t+s} - W_t)^2) + 2W_t \mathbb{E}((W_{t+s} - W_t)) + W_t^2 - (t+s).\end{aligned}$$

Comme  $W_{t+s} - W_t$  suit une loi  $\mathcal{N}(0, s)$  (propriété 3 du mouvement brownien), on a  $\mathbb{E}(W_{t+s} - W_t) = 0$  et  $\mathbb{E}((W_{t+s} - W_t)^2) = s^2$ , donc au final  $\mathbb{E}(L_{t+s} | \mathcal{F}_t) = L_t$ . Le processus  $L$  est donc une martingale.

4. On a  $\mathcal{E}_{t+s} = \exp(\sigma W_t) \exp(\sigma(W_{t+s} - W_t)) e^{-\sigma^2(t+s)/2}$  avec  $\exp(\sigma W_t)$  qui est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable et  $\exp(\sigma(W_{t+s} - W_t))$  qui est indépendant de  $\mathcal{F}_t$ . En utilisant successivement les propriétés 5 puis 3 de l'espérance conditionnelle on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathcal{E}_{t+s} | \mathcal{F}_t) &= \exp(\sigma W_t) e^{-\sigma^2(t+s)/2} \mathbb{E}(\exp(\sigma(W_{t+s} - W_t)) | \mathcal{F}_t) \\ &= \exp(\sigma W_t) e^{-\sigma^2(t+s)/2} \mathbb{E}(\exp(\sigma(W_{t+s} - W_t))). \end{aligned}$$

De plus comme  $W_{t+s} - W_t$  suit une loi  $\mathcal{N}(0, s)$  (propriété 3 du mouvement brownien), on a  $\mathbb{E}(\exp(\sigma(W_{t+s} - W_t))) = e^{\sigma^2 s/2}$ . Conclusion  $\mathbb{E}(\mathcal{E}_{t+s} | \mathcal{F}_t) = \mathcal{E}_t$  et  $(\mathcal{E}_t)$  est une martingale.

5. En appliquant les propriétés 4, 5, puis l'égalité  $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$  (martingale), puis la propriété 2 de l'espérance conditionnelle, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(M_t^2 | \mathcal{F}_s) - 2\mathbb{E}(M_s M_t | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(M_s^2 | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(M_t^2 | \mathcal{F}_s) - 2M_s \mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(M_s^2 | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(M_t^2 | \mathcal{F}_s) - 2M_s^2 + \mathbb{E}(M_s^2 | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(M_t^2 | \mathcal{F}_s) - 2\mathbb{E}(M_s^2 | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(M_s^2 | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s). \end{aligned}$$

### Exercice 6.4.2

1. Déjà  $W_t W_s = (W_t - W_s)W_s + W_s^2$ . Calculons l'espérance du premier terme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((W_t - W_s)W_s) &= \mathbb{E}(W_s)\mathbb{E}(W_t - W_s) \quad (\text{car } W_t - W_s \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_s) \\ &= 0 \quad (\text{car } W_s \text{ suit une loi } \mathcal{N}(0, s)). \end{aligned}$$

On en déduit que  $\mathbb{E}(W_t W_s) = \mathbb{E}(W_s^2) = s$ .

2. La variable aléatoire  $\Delta W_k = W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$  suit une loi  $\mathcal{N}(0, \Delta t_k)$  donc

$$\mathbb{E}((\Delta W_k)^2) = \Delta t_k \quad \text{et} \quad \mathbb{E}((\Delta W_k)^4) = 3(\Delta t_k)^2.$$

3. Commençons par remarquer que

$$(\langle W \rangle_t^\tau - t)^2 = \left( \sum_{k=1}^n (\Delta W_k)^2 - \Delta t_k \right)^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n ((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j) ((\Delta W_k)^2 - \Delta t_k).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(\langle W \rangle_t^\tau - t)^2] &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j) ((\Delta W_k)^2 - \Delta t_k)] \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbb{E} [((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j)^2] \\ &\quad + \sum_{j \neq k} \mathbb{E} [((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j) ((\Delta W_k)^2 - \Delta t_k)]. \end{aligned}$$

En développant le carré et avec la question précédente on obtient

$$\mathbb{E} [((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j)^2] = 2\Delta t_j^2.$$

Si  $j \neq k$  on a  $\Delta W_j$  indépendant de  $\Delta W_k$ . En effet, si par exemple  $j < k$ , la propriété 3 du mouvement brownien stipule que  $\Delta W_k$  est indépendant de  $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ . Or  $\Delta W_j$  est  $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ -mesurable donc  $\Delta W_k$  est indépendant de  $\Delta W_j$ . On en déduit que

$$\mathbb{E} [((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j) ((\Delta W_k)^2 - \Delta t_k)] = \mathbb{E} ((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j) \mathbb{E} ((\Delta W_k)^2 - \Delta t_k) = 0$$

pour  $j \neq k$ . Au final, il reste

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(\langle W \rangle_t^\tau - t)^2] &= 2 \sum_{j=1}^n (\Delta t_j)^2 \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^n |\tau| \Delta t_j \\ &\leq 2|\tau| \times t \xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

4. Déjà on a

$$\langle W \rangle_t^\tau = \sum_{k=1}^n |\Delta W_k|^2 \leq \max_{k=1 \dots n} |\Delta W_k| \times \sum_{k=1}^n |\Delta W_k|.$$

Le mouvement brownien étant uniformément continu, pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que pour toute subdivision  $\tau$  vérifiant  $|\tau| < \delta$  on a  $\max_{k=1 \dots n} |\Delta W_k| < \epsilon$ . Autrement dit

$$\max_{k=1, \dots, n} |\Delta W_k| \xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} 0$$

Comme de plus  $\langle W \rangle_t^\tau$  tend vers  $t$  lorsque  $|\tau|$  tend vers 0, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^n |\Delta W_k| \xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} +\infty.$$

# Chapitre 15

## Exercices du Chapitre 7

### Exercice 7.5.1

1. On applique la formule d'Itô avec  $X_t = W_t$  et  $g(t, x) = x^p$ . Pour  $p \geq 2$  la fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $g'(x) = px^{p-1}$ ,  $g''(x) = p(p-1)x^{p-2}$ . On obtient alors la formule annoncée.
2. On applique la formule d'Itô avec  $g(t, x) = \log(x)$ . Comme  $g'(x) = 1/x$  et  $g''(x) = -1/x^2$ , on obtient

$$d \log(X_t) = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{H_t^2}{2X_t^2} dt$$

et donc  $d \log(X_t) \neq dX_t/X_t$ . Soulignons en particulier que la solution de

$$\frac{dX_t}{X_t} = dY_t$$

n'est pas  $X_t = \exp(Y_t)$  (autrement dit  $Y_t = \log(X_t)$ ). La solution est  $X_t = \varepsilon_t(Y)$ , voir l'exercice 7.5.2.

### Exercice 7.5.2

1. Posons  $Z_t = X_t - \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 ds$ . On a  $\varepsilon_t(X) = \exp(Z_t)$ . Appliquons la formule d'Itô avec  $g(t, x) = \exp(x)$

$$d \exp(Z_t) = \exp(Z_t) dZ_t + \frac{1}{2} H_t^2 \exp(Z_t) dt = \exp(Z_t) dX_t.$$

On en déduit donc que  $d\varepsilon_t(X) = \varepsilon_t(X) dX_t$ .

2. Comme  $K_t = 0$  et  $d\varepsilon_t(X) = \varepsilon_t(X) dX_t = \varepsilon_t(X) H_t dW_t$ , l'exponentielle stochastique  $\varepsilon_t(X)$  s'exprime par une intégrale d'Itô

$$\varepsilon_t(X) = 1 + \int_0^t \varepsilon_s(X) H_s dW_s.$$

La condition  $\int_0^t \mathbb{E}((\varepsilon_s(X) H_s)^2) ds < +\infty$  assure que cette intégrale d'Itô est une martingale (voir la définition de l'intégrale d'Itô).



### Exercice 7.5.3

1. On a  $d\tilde{W}_t = dW_t - H_t dt$ , donc

$$dY_t = K_t(dW_t - H_t dt) = K_t d\tilde{W}_t.$$

2. Comme  $H$  satisfait le critère de Novikov, le lemme de Girsanov assure que  $(\tilde{W}_t)_{t \leq T}$  est un mouvement brownien sous  $\mathbb{Q}$ . De plus  $Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s d\tilde{W}_s$ , avec  $\int_0^T \mathbb{E}(K_s^2) ds < \infty$ , on en déduit que  $(Y_t)_{t \leq T}$  est une martingale sous  $\mathbb{Q}$ .

### Exercice 7.5.4

1. Exprimons  $\mathbb{E}(g(\tilde{W}_t), t \leq T)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(\tilde{W}_t), t \leq T) &= \mathbb{E} \left( \tilde{g}(\tilde{W}_t), t \leq T \exp \left( \int_0^T h(s) d\tilde{W}_s + \frac{1}{2} \int_0^T h(s)^2 ds \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \tilde{g}(\tilde{W}_t), t \leq T \exp \left( \int_0^T h(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T h(s)^2 ds \right) \right) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{g}(\tilde{W}_t), t \leq T). \end{aligned}$$

2. D'après la partie 1. du lemme de Girsanov,  $(\tilde{W}_t)_{t \leq T}$  est un mouvement brownien sous  $\mathbb{Q}$ , donc vu l'égalité obtenue à la question précédente

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(\tilde{W}_t), t \leq T) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{g}(\tilde{W}_t), t \leq T) \\ &= \mathbb{E}(\tilde{g}(W_t), t \leq T) \\ &= \mathbb{E} \left( g(W_t), t \leq T \exp \left( - \int_0^T h(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T h(s)^2 ds \right) \right). \end{aligned}$$

### Exercice 7.5.5

1. Pour toute fonction  $s$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , la formule d'Itô donne

$$\begin{aligned} s(X_t) &= s(X_0) + \int_0^t s'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t s''(X_s) \sigma(X_s)^2 ds \\ &= s(X_0) + \int_0^t s'(X_s) \sigma(X_s) dW_s + \int_0^t \left[ s'(X_s) b(X_s) + s''(X_s) \frac{\sigma(X_s)^2}{2} \right] ds. \end{aligned}$$

La fonction

$$s(x) = \int_0^x \exp \left( -2 \int_0^s \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du \right) ds$$

est de classe  $\mathcal{C}^2$  car  $b$  et  $\sigma$  sont continus. De plus

$$s''(x) = -2 \frac{b(x)}{\sigma^2(x)} s'(x)$$

donc le dernier terme dans la formule d'Itô s'annule et

$$s(X_t) = s(X_0) + \int_0^t \sigma(X_s) \exp\left(-2 \int_0^{X_s} \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du\right) dW_s.$$

Le processus  $(s(X_t))_{t \geq 0}$  s'écrit donc comme une intégrale d'Itô avec

$$\int_0^t \mathbb{E} \left( \left[ \sigma(X_s) \exp\left(-2 \int_0^{X_s} \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du\right) \right]^2 \right) ds \leq M^2 t < +\infty$$

(car  $\sigma$  est borné par  $M$  et  $b$  positif), donc  $(s(X_t))_{t \geq 0}$  est une martingale.

2. Admettons l'égalité  $\mathbb{E}(s(X_{T_a \wedge T_b})) = s(X_0)$  (elle est obtenue par le Théorème d'arrêt pour le temps d'arrêt  $T_a \wedge T_b$  et la martingale  $(s(X_t))_{t \geq 0}$ ). Comme  $X_{T_a} = a$  et  $X_{T_b} = b$  on obtient

$$\begin{aligned} s(X_0) &= \mathbb{E}(s(X_{T_a \wedge T_b})) \\ &= \mathbb{E}(s(X_{T_a}) \mathbf{1}_{\{T_a < T_b\}}) + \mathbb{E}(s(X_{T_b}) \mathbf{1}_{\{T_b < T_a\}}) \\ &= s(a) \mathbb{P}(T_a < T_b) + s(b) \mathbb{P}(T_b < T_a) \\ &= s(a)(1 - \mathbb{P}(T_b < T_a)) + s(b) \mathbb{P}(T_b < T_a) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(T_b < T_a) = \frac{s(X_0) - s(a)}{s(b) - s(a)}.$$

3. Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} s(x) < +\infty$  alors

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_b < T_a) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{s(X_0) - s(a)}{s(b) - s(a)} > 0.$$

Comme de plus  $T_b \rightarrow \infty$  lorsque  $b \rightarrow \infty$ , on en déduit que

$$\mathbb{P}(T_a = +\infty) = \lim_{b \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_b < T_a) > 0.$$

Avec probabilité strictement positive, la diffusion n'atteint jamais le niveau  $a$ .

### Exercice 7.5.6

1. Appliquons la formule de Girsanov avec  $H_s = -\mu$ . L'hypothèse de Novikov est satisfaite car

$$\mathbb{E} \left( \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \mu^2 ds \right) \right) = \exp(\mu^2 T / 2) < \infty.$$

D'après le lemme de Girsanov, le processus  $X$  est donc un mouvement brownien sous la probabilité

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(A) &= \mathbb{E} \left( \exp \left( \int_0^T -\mu dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \mu^2 ds \right) \mathbf{1}_A \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \exp(-\mu W_T - \mu^2 T / 2) \mathbf{1}_A \right). \end{aligned}$$

2. C'est la formule de Girsanov !
3. Ici  $H_s = -m_s$  et  $\mathbb{Q}$  est donné par

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E} \left( \exp \left( \int_0^T -m_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T m_s^2 ds \right) \mathbf{1}_A \right).$$

# Chapitre 16

## Exercices du Chapitre 8

### Exercice 8.3.1

Le lecteur attentif remarquera que la fonction de paiement  $g(x) = (x - K)_+$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$ . Les hypothèses du Théorème 8.4 ne sont donc pas satisfaites. Cependant les résultats du Théorème 8.4 restent valables pour  $g(x) = (x - K)_+$ , comme expliqué dans la remarque qui se situe à la fin du corrigé de l'exercice.

1. Pour une option européenne d'échéance  $T$  et de prix d'exercice  $K$  la fonction de paiement  $g$  est  $g(x) = (x - K)_+$ . Posons  $\tau = T - t$ . Avec le changement de variable  $z = y/\sqrt{\tau}$ , on obtient

$$\begin{aligned} G(t, x) &= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( x e^{(r-\sigma^2/2)\tau + \sigma y} - K \right)_+ e^{-y^2/2\tau} \frac{dy}{\sqrt{2\pi\tau}} \\ &= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( x e^{(r-\sigma^2/2)\tau + \sigma\sqrt{\tau}z} - K \right)_+ e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} x e^{(r-\sigma^2/2)\tau + \sigma\sqrt{\tau}z} \geq K &\iff (r - \sigma^2/2)\tau + \sigma\sqrt{\tau}z \geq \log(K/x) \\ &\iff z \geq -d_2(x, \tau) = -\frac{\log(x/K) + (r - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}. \end{aligned}$$

La fonction  $G$  s'écrit donc

$$\begin{aligned} G(t, x) &= x \int_{-d_2(x, \tau)}^{+\infty} e^{-\sigma^2\tau/2 + \sigma\sqrt{\tau}z - z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} - K e^{-r\tau} \int_{-d_2(x, \tau)}^{+\infty} e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \\ &= x \int_{-d_1(x, \tau)}^{+\infty} e^{-u^2/2} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} - K e^{-r\tau} \int_{-d_2(x, \tau)}^{+\infty} e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}, \end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue à l'aide du changement de variable  $u = z - \sigma\sqrt{\tau}$ . Comme  $\int_{-d}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz = \int_{-d}^d e^{-z'^2/2} dz'$  (faire le changement de variable  $z' = -z$ ), on obtient finalement

$$G(t, x) = xN(d_1(x, \tau)) - K e^{-r\tau} N(d_2(x, \tau)).$$

2. Le prix  $C$  est égal à  $G(S_0, 0)$  donc

$$C = S_0 N(d_1(S_0, T)) - K e^{-rT} N(d_2(S_0, T)).$$

3. Calculons la dérivée partielle de  $G$  par rapport à la variable  $x$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(t, x) = N(d_1(x, \tau)) + x \frac{\partial d_1}{\partial x}(x, \tau) N'(d_1(x, \tau)) - K e^{-r\tau} \frac{\partial d_2}{\partial x}(x, \tau) N'(d_2(x, \tau)).$$

Comme  $N'(d) = e^{-d^2/2}/\sqrt{2\pi}$  et

$$\frac{\partial d_1}{\partial x}(x, \tau) = \frac{\partial d_2}{\partial x}(x, \tau) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}},$$

on obtient

$$\frac{\partial G}{\partial x}(t, x) = N(d_1(x, \tau)) + \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \left( x e^{-d_1(x, \tau)^2/2} - K e^{-r\tau} e^{-d_2(x, \tau)^2/2} \right).$$

Comme de plus

$$\begin{aligned} d_2(x, \tau)^2 &= (d_1(x, \tau) - \sigma\sqrt{\tau})^2 \\ &= d_1(x, \tau)^2 + \sigma^2\tau - 2\sigma\sqrt{\tau} \left( \frac{\log(x/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) \\ &= d_1(x, \tau)^2 - 2\log \frac{x}{K e^{-r\tau}}, \end{aligned}$$

la dérivée partielle de  $G$  par rapport à la variable  $x$  vaut

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(t, x) &= N(d_1(x, \tau)) + \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \underbrace{\left( x e^{-d_1(x, \tau)^2/2} - K e^{-r\tau} e^{\log(x/K e^{-r\tau})} e^{-d_1(x, \tau)^2/2} \right)}_{=0} \\ &= N(d_1(x, \tau)). \end{aligned}$$

La composition du portefeuille  $\Pi^*$  est

$$\gamma_t^* = \frac{\partial G}{\partial x}(t, S_t) = N(d_1(S_t, \tau))$$

et

$$\begin{aligned} \beta_t^* &= \frac{X_t^{\Pi^*} - \gamma_t^* S_t}{B_t} \\ &= \frac{G(t, S_t) - N(d_1(S_t, \tau)) S_t}{B_0 e^{rt}} \\ &= \frac{S_t N(d_1(S_t, \tau)) - K e^{-r\tau} N(d_2(S_t, \tau)) - S_t N(d_1(S_t, \tau))}{B_0 e^{rt}} \\ &= \frac{-K e^{-rT} N(d_2(S_t, \tau))}{B_0}. \end{aligned}$$

Remarquez que la valeur de  $\beta_t^*$  est négative. Cela correspond à un emprunt.

Pour couvrir l'option, le vendeur achète au temps 0 une quantité  $\gamma_0^*$  de stock  $S$  à l'aide de la quantité  $C$  versée par l'acheteur et en empruntant  $-\beta_0^* B_0$  unités monétaires. Il gère ensuite son portefeuille suivant  $\gamma_t^*$  et  $\beta_t^*$ .

**Remarque :** nous avons appliqué les résultats du Théorème 8.4 alors que  $g(x) = (x - K)_+$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$ . Pourquoi les résultats sont-ils encore valables dans ce cas ?

Il est facile de construire deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  notées  $g_\epsilon^-$  et  $g_\epsilon^+$  ayant des dérivées bornées sur  $\mathbb{R}$ , telles que  $g_\epsilon^- \leq g \leq g_\epsilon^+$  et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (g_\epsilon^+(x) - g_\epsilon^-(x)) dx = 0.$$

Comme l'option de fonction de paiement  $g_\epsilon^+$  donne droit à un paiement supérieur à l'option de fonction de paiement  $g$ , son prix  $C_\epsilon^+$  est supérieur à  $C$ . De même, le prix  $C_\epsilon^-$  de l'option de fonction de paiement  $g_\epsilon^-$  est inférieur à  $C$ . De plus, on peut calculer les prix  $C_\epsilon^+$  et  $C_\epsilon^-$  à l'aide du Théorème 8.4. On trouve  $G_\epsilon^+(0, S_0)$  et  $G_\epsilon^-(0, S_0)$ , où  $G_\epsilon^+$  (respectivement  $G_\epsilon^-$ ) correspond à la Formule (8.4) avec  $g$  remplacé par  $g_\epsilon^+$  (respectivement  $g_\epsilon^-$ ). En faisant tendre  $\epsilon$  vers 0, on trouve

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_\epsilon^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_\epsilon^- = G(0, S_0).$$

Comme  $C_\epsilon^- \leq C \leq C_\epsilon^+$ , on en déduit que  $C = G(0, S_0)$ .

### Exercice 8.3.2

1. Calculons  $\tilde{G}$  ainsi que ses dérivées partielles. Remarquez que  $\tilde{G}$  est dérivable deux fois en  $x$  et une fois en  $t$ , car on a supposé que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  avec des dérivées bornées. Après un changement de variables  $z = y/\sqrt{T-t}$  on obtient

$$\tilde{G}(t, x) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} g \left( x e^{rT - \sigma^2(T-t)/2 + \sigma z \sqrt{T-t}} \right) e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}.$$

Dérivons par rapport à  $t$ . Pour garder des formules de taille raisonnable, on pose

$$\phi(t, x) = x e^{rT - \sigma^2(T-t)/2 + \sigma z \sqrt{T-t}}.$$

Comme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = \phi(t, x) \left( \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma z}{2\sqrt{T-t}} \right),$$

on obtient

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(t, x) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} g'(\phi(t, x)) \phi(t, x) \left( \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma z}{2\sqrt{T-t}} \right) e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}.$$

De même,

$$x \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) = \phi(t, x),$$

donc

$$x^2 \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2}(t, x) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} g''(\phi(t, x)) \phi(t, x)^2 e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}.$$

Nous allons intégrer par parties cette dernière expression. On a

$$\frac{\partial}{\partial z} g'(\phi(t, x)) = \sigma \sqrt{T-t} \phi(t, x) g''(\phi(t, x))$$

donc en intégrant par parties

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2}(t, x) &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} (g'(\phi(t, x))) \phi(t, x) e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \\ &= -e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} g'(\phi(t, x)) \phi(t, x) e^{-z^2/2} \left( \sigma \sqrt{T-t} - z \right) \frac{dz}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \\ &= -\frac{2e^{-rT}}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} g'(\phi(t, x)) \phi(t, x) \left( \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma z}{2\sqrt{T-t}} \right) e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \\ &= -\frac{2}{\sigma^2} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(t, x). \end{aligned}$$

On trouve donc l'équation (8.6).

2. Pour éviter toute confusion, on note  $\partial_1 G$  et  $\partial_2 G$  les dérivées de  $G$  par rapport à la première et à la seconde variable. Exprimons les dérivées de  $\tilde{G}$

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(t, x) = e^{-rt} \left( -rG(t, xe^{rt}) + \partial_1 G(t, xe^{rt}) + r(xe^{rt}) \partial_2 G(t, xe^{rt}) \right)$$

et

$$\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2} = e^{-rt} \left( e^{2rt} \partial_2^2 G(t, xe^{rt}) \right).$$

L'équation (8.6) s'écrit donc

$$e^{-rt} \left( -rG(t, xe^{rt}) + \partial_1 G(t, xe^{rt}) + r(xe^{rt}) \partial_2 G(t, xe^{rt}) + \frac{(\sigma xe^{rt})^2}{2} \partial_2^2 G(t, xe^{rt}) \right) = 0.$$

Avec le changement de variable  $y = xe^{rt}$ , cela donne

$$-rG(t, y) + \frac{\partial G}{\partial t}(t, y) + ry \frac{\partial G}{\partial y}(t, y) + \frac{(\sigma y)^2}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(t, y) = 0.$$

La condition  $G(T, x) = g(x)$  vient de  $\lim_{t \rightarrow T} G(t, x) = g(x)$ .

**Exercice 8.3.3**

1. L'équation (8.1) donne  $S_t = S_0 \exp(\sigma W_t^* + (r - \sigma^2/2)t)$  pour tout  $t \leq T$ . On en déduit que

$$S_T = S_t e^{\sigma(W_T^* - W_t^*) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}.$$

2. Remarquons que  $e^{-r(T-t)}g(S_T) = H(U, S_t)$  avec

$$H(u, x) = e^{-r(T-t)}g\left(x e^{\sigma u + (r - \sigma^2/2)(T-t)}\right)$$

et  $U = W_T^* - W_t^*$ . Comme  $S_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable et  $U$  est indépendant de  $\mathcal{F}_t$  (propriété 3 du mouvement brownien) on peut utiliser la formule de l'Exercice 1.5.7 :

$$\mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)}g(S_T) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^*(H(U, S_t) \mid \mathcal{F}_t) = h(S_t),$$

avec  $h(x) = \mathbb{E}^*(H(U, x))$ . Calculons la fonction  $h$ . La variable aléatoire  $U$  suit une loi  $\mathcal{N}(0, T - t)$ , donc

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{\mathbb{R}} H(y, x) \exp\left(\frac{-y^2}{2(T-t)}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(x e^{(r - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma y}\right) \exp\left(\frac{-y^2}{2(T-t)}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \\ &= G(t, x). \end{aligned}$$

En conclusion  $X_t^{\Pi^*} = G(t, S_t) = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)}g(S_T) \mid \mathcal{F}_t)$ .



# Bibliographie

- [1] Baxter M., Rennie A. *Financial calculus : an introduction to derivative pricing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [2] Chabardes P., Delcaux F. *Produits dérivés*. Gualino Editeur, Paris, 1998.
- [3] Demange G., Rochet J-C. *Méthodes mathématiques de la finance*. 3e édition Economica, Paris, 2005.
- [4] Hull J. *Options, futures and other derivatives*. 6e édition, Prentice Hall, 2005.
- [5] Karatzas I., Shreve S.E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, New-York, 1988.
- [6] Lamberton D., Lapeyre B. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Seconde édition. Ellipses, Edition Marketing, Paris, 1997.
- [7] Mel'nikov A.V. *Financial Markets : stochastic analysis and the pricing of derivative securities*. Translations of Mathematical Monographs, AMS edition, Providence, 1999.
- [8] Øksendal, B. *Stochastic differential equations. An introduction with applications*. 6e édition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [9] Pliska S. *Introduction to mathematical finance*. Blackwell Publishers, Oxford UK.
- [10] Revuz D., Yor, M. *Continuous martingales and Brownian motion*. 3e édition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **293** Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [11] Shiryaev A.N. *Essentials of stochastic finance : facts, models, theory*. Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability, World Scientific, Singapore, 1999.
- [12] Williams D. *Probability with martingales*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

# Index

- $\Delta X_n$ , 50
- $\varepsilon_n(X)$ , 51
- actif sous-jacent, 9
- action, 8
- arbitrage, 56
- ask, 64
- bid, 64
- critère de Novikov, 88
- décomposition de Doob, 46, 74
- espérance conditionnelle
  - cadre discret, 20
  - caractérisation, 24
  - cas à densité, 23
  - propriétés, 25
- exponentielle stochastique
  - définition, 51, 88
  - propriétés, 51
- filtration, 37
- fonction de paiement, 10
- fonctions d'échelle, 90
- formule d'Itô, 85
- formule de Black et Scholes, 98
- Galton-Watson, 46
- identité de Wald, 49
- inégalité
  - de Jensen, 28
  - maximale, 48
- indiscernable, 102
- intégrale d'Itô, 84
- joueur au casino, 34
- lemme de Girsanov, 58, 60, 89
- loi gaussienne (ou normale), 79
- marché
  - Bond-Stock, 50
  - complet, 57
  - incomplet, 64
- martingale, 39, 81
- mesurable, 23
- modèle
  - de Black-Scholes, 67, 92
  - de Cox-Ross-Rubinstein, 66
  - de Merton, 67
- mouvement brownien
  - définition, 79
  - propriétés, 80
- obligation, 8
- option
  - asiatique, 62
  - Collar, 62
  - d'achat américaine, 11, 76
  - d'achat européenne, 9, 66, 98
  - de vente américaine, 11
  - de vente européenne, 10, 66
  - look-back, 62
  - Margrabe, 68
  - russe, 70, 76
- portefeuille
  - autofinancé, 55, 93
  - de couverture, 62, 95
- principe de Donsker, 80
- principe de programmation dynamique, 73, 77
- prix d'exercice, 9

- prix d'une option
  - américaine
    - calcul, 72
    - définition, 70
  - européenne
    - calcul, 63, 96
    - définition, 63, 95
- probabilité risque-neutre, 53, 94
- problème de la ruine, 44
- processus
  - élémentaires, 104
  - adapté, 78
  - continu, 78
    - à gauche, 78
  - croissant-prévisible, 73
  - d'Itô, 85
  - de Wiener, 79
- relation call-put, 66
- sous-martingale, 39
- spread, 65
- sur-martingale, 39
- temps
  - d'arrêt, 38
  - d'exercice, 71
- théorème d'arrêt, 42
- titre, 8
- valeur réactualisée, 53, 55, 59, 93
- variation quadratique, 82