Université Paris Sud Année 2013-2014

S3/L2 M202c PMCP AlgèbreLinéaire II

Corrigé du Problème II

Rappelons d'abord l'énoncé du théorème de la division euclidienne dans les anneaux de polynômes qui nous servira à l'exercice A et à l'exercice B, question 5).

Théorème 2.1 *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Pour tout couple (A, B) de polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire pour tout couple d'éléments de $\mathbb{K}[X]$, avec B non nul, il existe un unique couple (Q, R) d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ tel que :*

$$A \ = \ BQ \ + \ R \qquad 2.1.1$$

et

$$\deg(R) \ < \ \deg(Q) \ . \qquad 2.1.2$$

Exercice A **Posons** $P_0 \ := \ X^2 - 1$.

1) Pour tout couple (P_1, P_2) d'éléments de $\mathbb{R}_4[X]$, et tout couple (a_1, a_2) de réels, il existe

$$Q_1, R_1, Q_2, R_2 \in \mathbb{R}_4[X],$$

tels que

$$P_1 \ = \ Q_1P_0 + R_1 \ , \ P_2 \ = \ Q_2P_0 + R_2 \ , \ \deg(R_1) \ < \ \deg(P_0) \ , \ \deg(R_2) \ < \ \deg(P_0) \ .$$

Il s'ensuit que : $R_1 \ = \ \rho(P_1)$ et $R_2 \ = \ \rho(P_2)$.

En outre

$$a_1P_1 + a_2P_2 \ = \ a_1(Q_1P_0 + R_1) \ = \ a_2(Q_2P_0 + R_2) \ = \ (a_1Q_1 + a_2Q_2)P_0 + a_1R_1 + a_2R_2$$

comme $\deg(a_1R_1 + a_2R_2) \ \leq \ \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) \ < \ 2$, en vertu de l'énoncé d'unicité dans le théorème de la division euclidienne (2.1), $a_1R_1 + a_2R_2$ est le reste dans la division euclidienne de $a_1P_1 + a_2P_2$ par P_0 si bien que

$$\rho(a_1P_1 + a_2P_2) \ = \ a_1r_1 + a_2R_2 \ = \ a_1\rho(P_1) \ + \ a_2\rho(P_2)$$

ce qui prouve la linéarité de ρ.

2) Pour tout $P \in \mathbb{R}_4[X]$, soient $Q, R \in \mathbb{R}_4[X]$ tels que $P \ = \ QP_0 + R$ et $\deg(R) \ < \ \deg(P_0)$ dont l'existence et l'unicité sont assurées par le théorème 2.1. Puisque $\deg(R) \ < \ \deg(P_0)$ R est encore le reste dans la division euclidienne de R par P_0 ce qui s'écrit encore

$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X], \ \rho(\rho(P)) \ = \ \rho(P) \ .$$

On a donc montré que $\rho^2 \ = \ \rho$ c'est-à-dire que ρ est un projecteur ce qui entraîne qu'il est diagonalisable.

3) On a remarqué à la question précédente que ρ est un projecteur, ce qui entraîne que ses valeurs propres sont 0 ou 1.

On remarque ensuite, ce qui est encore une conséquence du théorème 2.1 que :

$$\begin{array}{lll} \forall P \in \mathbb{R}_4[X], \quad \rho(P) = P & \Leftrightarrow & \deg(P) \; < \; \deg(P_0) \\ \rho(P) = 0 & \Leftrightarrow & P_0|P \; . \end{array}$$

On a donc, si l'on note E_λ l'espace propre pour ρ associé à la valeur propre λ,

$$E_0 \; = \; \{P \in \mathbb{R}_4[X] \; ; \; P_0|P\} \; , \; E_1 \; = \; \{P \in \mathbb{R}_4[X] \; ; \; \deg(P) \; < \; \deg(P_0) \; = \; 2\} \; .$$

Il est ensuite clair que $(1, X)$ (resp. (P_0, XP_0, X^2P_0)) est une famille libre de E_1 (resp. E_0) Comme par ailleurs

$$\dim E_0 \; + \; \dim E_1 \; \leq \; \dim \mathbb{R}_4[X] \; = \; 5$$

la famille $(1, X)$ (resp. (P_0, Xp_0, X^2P_0)) est une base de E_1 (resp. E_0.) Il s'ensuit que

$$(1, X, P_0, XP_0, X^2P_0)$$

est une base de $\mathbb{R}_4[X]$ dans laquelle la matrice de ρ est

$$M_\rho \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; .$$

Exercice B 1) La matrice

$$A \; := \; \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \; = \; A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ x_n \end{pmatrix} \; .$$

On posera $B \; := \; 5A$.

2) On a

$$B - \mathrm{Id}_3 \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice de rang 1. Ceci signifie que 1 est valeurs propre de B que l'espace propre associé est de dimension 3 et que la multiplicité de 1 dans le polynômes caractéristique de B est donc au moins 3.

3) Nous venons détablir que 1 est de multiplicité au moins 3 dans le polynôme caractéristique de B. Il existe donc une autre valeurs propre (pouvant éventuellement être égale à 1) et la trace de B vaut $3 + \lambda$. Comme par ailleurs la trace de B vaut 8, on en déduit $\lambda \; = \; 5$. La matrice b a donc les valeurs propres 1 de multiplicité 3 et 5 de multiplicité 1.

4) On a successivement établi que la dimension de l'espace propre associé à 1 pour B, était de dimension 3 (à la question 2)) puis que la multiplicité de 1 est 3 (à la question 3).) La valeur propre 5 étant de multiplicité 1, B est diagonalisable. Son polynôme caractéristique χ_B est $(X-1)^3(X-5)$. Puisque B est diagonalisable, son polynôme minimal μ_B est scindé à racines simples et vaut donc $\mu_B = (X-1)(X-5)$ qui est donc un polynômes annulateur de B de degré ≤ 2.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut effectuer la division euclidienne de X^n par μ_B dans $\mathbb{R}[X]$ (voir le théorème 2.1.) Il existe donc un unique couple de polynômes (R_n, Q_n) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X^n \ = \ Q_n\mu_B \ + \ R_n \ , \ \deg(R_n) \ < \ \deg(\mu_B) \ = \ 2$$

ce qui s'écrit encore :

$$\begin{array}{rcr} \forall n \in \mathbb{N}, & & \\ \exists (Q_n, a_n, b_n) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, & & X^n \ = \ Q_n\mu_B + a_nX + b_n \\ \Rightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} 1^n & = & Q_n(1)\mu_B(1) + a_n + b_n \\ 5^n & = & Q_n(5)\mu_B(5) + 5a_n + b_n \end{array}\right\} & \\ \Rightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} a_n + b_n & = & 1 \\ 5a_n + b_n & = & 5^n \end{array}\right\} & \\ \Rightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} a_n & = & \frac{1}{4}(5^n - 1) \\ b_n & = & \frac{1}{4}(5 - 5^n) \end{array}\right\} & \end{array}$$

Il s'ensuit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B^n \ = \ Q_n(B)\mu_B(B) + a_nB + b_n\mathrm{Id}_4 \ = \ a_nB \ + \ b_n\mathrm{Id}_4\ . \tag{5).1}$$

Remarque 5).2 Le résultat précédent se généralise dès l'instant où l'on dispose d'un polynôme annulateur P pour une matrice B. Si P est scindé à racines simples et de degré d, le reste de la division euclidienne de X^n par P est un polynôme de degré au plus $d-1$. Le déterminer revient donc à déterminer ses $d-1$ coefficients. On s'aperçoit alors que ces derniers sont solutions d'un système dont la matrice est la matrice de Vandermonde (cf. TD II, exercice H) formée sur les racines de P. Ces dernières étant par hypothèse deux à deux distinctes la matrice de Vandermonde est inversibles.

6) a) On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{5^n} \ = \ \frac{1}{4} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{5^n} \ = \ -\frac{1}{4}\ .$$

b) L'identité question 5), 5).1 se récrit

$$\frac{1}{5^n}B^n \ = \ \frac{a_n}{5^n}B + \frac{b_n}{5^n}\mathrm{Id}_4 \ \Leftrightarrow \ A^n \ = \ \frac{a_n}{5^n}B + \frac{b_n}{5^n}\mathrm{Id}_4\ .$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty} A^n \ = \ \frac{1}{4}(B - \mathrm{Id}_4) \ = \ \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

7) On a

$$\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\\x_n\end{pmatrix} = (\lim_{n\to+\infty} A^n)\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\\x_0\end{pmatrix} = \frac{u_0+v_0+w_0+x_0}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Exercice C 1) a) **(i) ⇒ ii))**

Pour toute valeur propre λ de A, l'espace propre associé est une droite $E_\lambda := \mathrm{Vect}\{v_\lambda\}$ puisque λ est une valeur propre simple. En outre

$$\forall B \in C(A),\ \forall x \in E_\lambda,\ ABx = BAx = B\lambda x = \lambda Bx \Rightarrow Bx \in E_\lambda .$$

Pour tout $B \in C(A)$, les espace propre de A sont stables pour B. En particulier $Bv_\lambda \in E_\lambda$ c'est-à-dire qu'il existe $a_\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $Bv_\lambda = a_\lambda v_\lambda$ autrement dit, v_λ est un vecteur propre pour B. Toute base de vecteur propre pour A est donc une base de vecteurs propre pour B.

b) **(ii) ⇒ iii))**

Soit donc une base $(v_1,\dots,v_n)$ de vecteurs propres pour A et B associée à des valeurs propres

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \text{ (resp. } (\mu_1,\dots,\mu_n))$$

de A (resp. B.) S'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = B$ alors :

$$\begin{array}{lrcl} \forall 1\le i\le n & Bv_i & = & P(A)v_i \\ \Leftrightarrow & \mu_i v_i & = & P(\lambda_i)v_i \\ \Leftrightarrow & \mu_i & = & P(\lambda_i)\ . \end{array}$$

Cherchons P de degré au plus $n-1$. Les équations ci-dessus s'écrivent alors :

$$\forall 1\le i\le n\ ,\ \mu_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_j\lambda_i^j$$

qu'on peut encore écrire matriciellement

$$\begin{pmatrix}\mu_1\\ \dots\\ \mu_n\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} & & 0\\ \dots & & \\ a_{n-1} & & \end{pmatrix}$$

et où l'on constate que L est la matrice de Vandermonde (cf. TD II, exercice H) qui de ce fait est inversible puisque les λ_i sont deux à deux distincts.

Il existe donc un unique polynômes P de degré $\le n-1$ tels que

$$\forall 1\le i\le n\ ,\ \mu_i = P(\lambda_i)\ .$$

Enfin

$$\begin{aligned} \forall X = \textstyle\sum_{i=1}^n x_i v_i \in E,\ \ P(A)(x) &= P(A)[\sum_{i=1}^n x_i v_i] \\ &= \sum_{i=1}^n x_i P(A)v_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i P(\lambda_i)v_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \mu_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^n B(x_i v_i) \\ &= Bx \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$B = P(A)\ .$$

c) **(iii) $\Rightarrow$ iv))**
Est immédiat.

d) **(iv) $\Rightarrow$ i))**
Est immédiat également.

2) La matrice A étant diagonalisable de valeur propre a de multiplicité 1 et b de multiplicité 2, si on note E_a, et E_b les espaces propres associés, on a

$$E \;=\; E_a \,\oplus\, E_b\;,\;\dim E_a \;=\; 1\;,\;\dim E_b \;=\; 2\;.$$

Pour $B \in C(A)$ on a déjà montré que les espaces propres de A sont stables par B. Cette condition est nécessaire.

Réciproquement $A_{|E_a}$ et $A_{|E_b}$ sont des homothéties vectoriels (des matrices scalaires) et commutent donc avec n'importe quel endomorphisme de E_a (resp. E_b.) La condition que E_a et E_b soient stables par B est donc suffisante.

B sera donc semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & s & t \\ 0 & u & v \end{pmatrix}\;,\;r,s,t,u,v \in \mathbb{C}\;.$$

Exercice D i) **(a) $\Leftrightarrow$ b))**
Introduisons l'application

$$\phi\;:\;\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\;\rightarrow\;\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\;,\;X\;\mapsto\;AX-BX\;.$$

Il est immédiat de vérifier que ϕ est linéaire. Or l'assertion a) signifie exactement que ϕ est surjective alors que l'assertion b) signifie exactement que ϕ est injective. L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ étant un $\mathbb{C}$-espaces vectoriel de dimension finie ($\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \;=\; n^2$) ces deux assertions sont équivalentes en vertu du théorème du rang.

ii) **(c) $\Rightarrow$ b))**
Pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AX \;=\; XB$ entraîne par récurrence sur l'entier n,

$$\forall n \in \mathbb{N},\;AX^n \;=\; X^nB$$

ce qui entraîne encore :

$$\begin{aligned} 0 &= \chi_A(A)X \\ &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i A^i X \\ &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X B^i \\ &= X\chi_A(B) \end{aligned}$$

qui entraîne $X \;=\; 0$ dès que $\chi_A(B)$ est inversible.

iii) **(b) $\Rightarrow$ d))**

On va ici donner un argument par contraposée. Supposons donc que λ soit une valeur propre commune de A et B. Alors λ est aussi une valeur propre pour la transposée ${}^t B$ de B. Il existe alors un vecteur V (resp. W) propre (et donc en particulier non nul) associé à λ pour A (resp. ${}^t B$.) Posons alors $X \ := \ V {}^t W$. La matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est alors non nulle et :

$$\begin{aligned} AX - XB &= AV {}^t W - V {}^t WB \\ &= \lambda V {}^t W - {}^t (BW {}^t V) \\ &= \lambda X - {}^t (\lambda W {}^t V) \\ &= \lambda X - \lambda X \\ &= 0 \,. \end{aligned}$$

iv) **(d) $\Rightarrow -$ c))**

On peut proposer ici deux arguments.

$*$) **(Première méthode)**

On procède ici encore par contraposée. Si $\chi_A(B)$ n'est pas inversible il possède en particulier un noyau non réduit à 0. Soit donc $V \neq 0$ tel que $\chi_A(B)V \ = \ 0$. Considérons le sous-espace

$$F \ := \ \{n \in \mathbb{N} \, ; \ B^n V\} \,.$$

Alors F est stable par B, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \chi_A(B)B^n V \ = \ B^n \chi_A(B)V \ = \ 0 \,.$$

Il s'ensuit que $\chi_A(B)$ est identiquement nulle sur F ce qui entraîne encore que χ_A est un polynôme annulateur de $B_{|F}$. Il en résulte que $\mu_{B_{|F}} | \chi_A$ mais par ailleurs $\mu_{B_{|F}} | \mu_B$ si bien qu'une racine au moins de μ_B est racine de χ_A.

†) **(Seconde méthode)**

Puisque χ_A et χ_B sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$ et qu'il sont donc nécessairement scindés, dire qu'il n'ont pas de racine commune revient à dire qu'ils sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe donc des polynômes P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $P\chi_A + Q\chi_B \ = \ 1$. Ceci entraîne

$$P(A)\chi_A(A) \ + \ Q(A)\chi_B(A) \ = \ \mathrm{Id}$$

ce qui entraîne finalement, en vertu du théorème de Cayley-Hamilton que

$$Q(A)\chi_B(A) \ = \ \mathrm{Id} \,.$$