

Examen du 10/03/2020

MAP-STA2 : Séries chronologiques

Yvonn Amara-Ouali - yvonn.amara-ouali@universite-paris-saclay.fr, Ajmal Loodally - ajmaloodally@hotmail.com; Y. Goude - yannig.goude@edf.fr

Exercice 1

Soit Z_t un processus stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocovariance γ . Soit m_t une tendance et s_t une composante saisonnière de période p .

Calculer, pour tout entier t , l'espérance et la variance de X_t et sa covariance γ_X dans les cas suivants. Préciser à chaque fois le type de modèle dont il est question.

1. $X_t = m_t + s_t + Z_t$
2. $X_t = m_t s_t + Z_t$
3. $X_T = m_t s_t (1 + z_T)$

Exercice 2

Soit X le processus défini par:

$$X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t$$

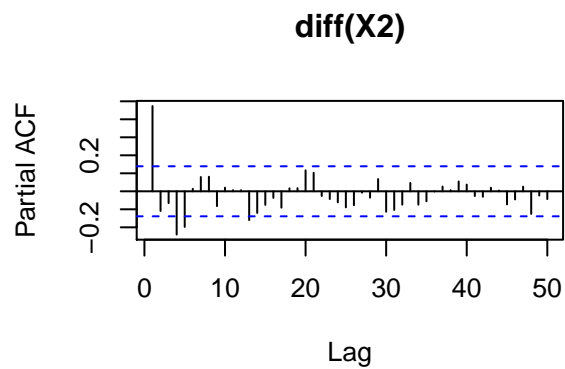
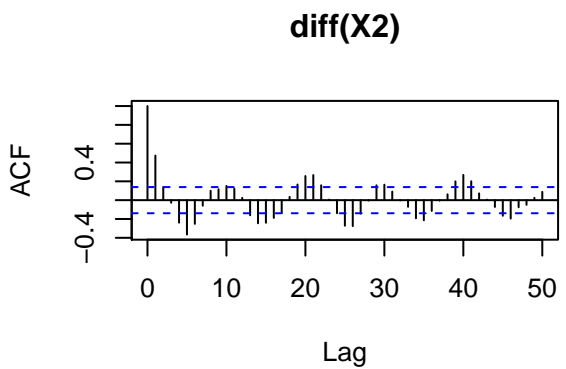
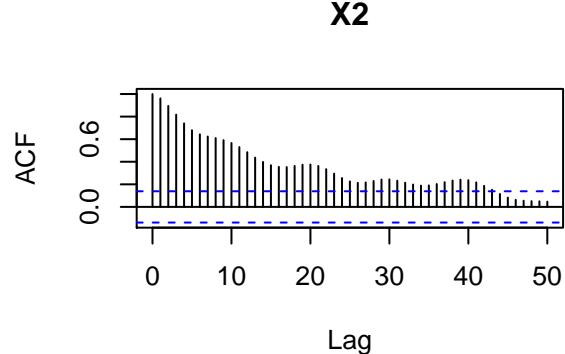
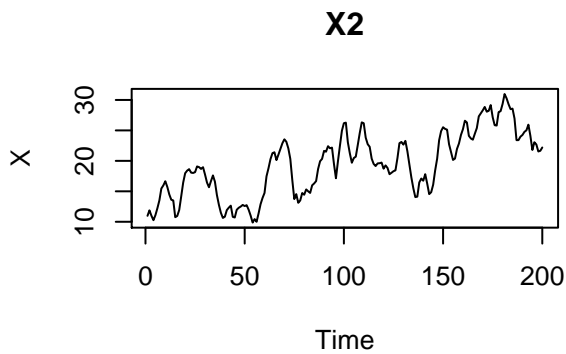
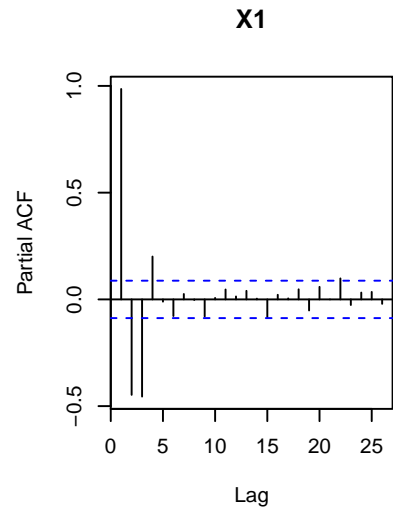
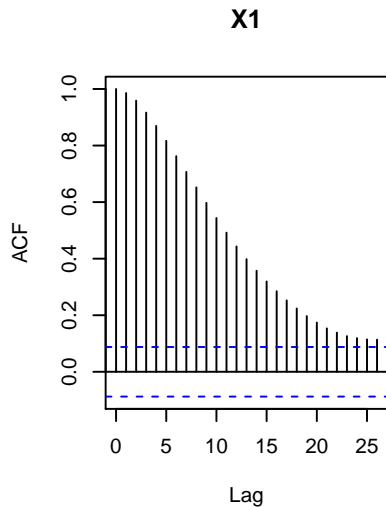
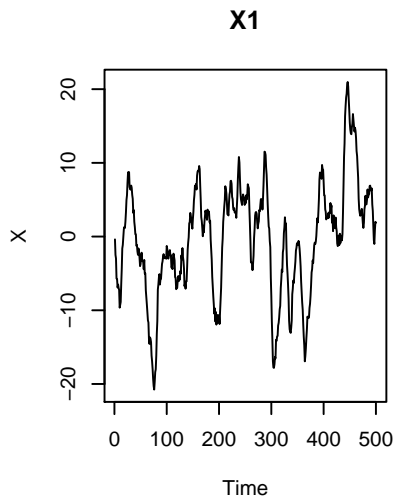
avec $|\phi| < 1$ et ε est un processus aléatoire stationnaire blanc de moyenne nulle et d'écart-type σ . Montrer que la seule solution stationnaire de cette équation est causale. Quel est le nom du processus ainsi défini?

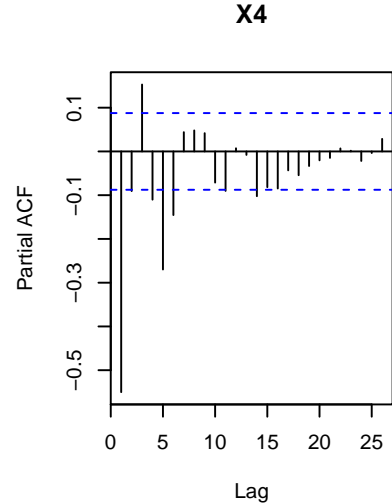
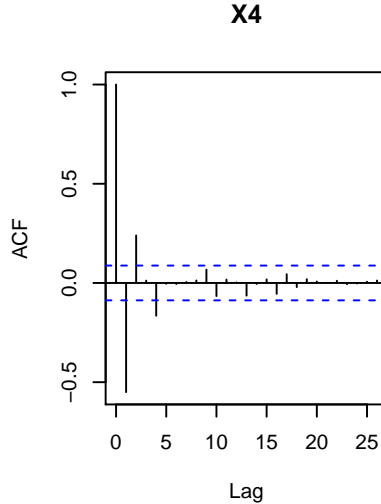
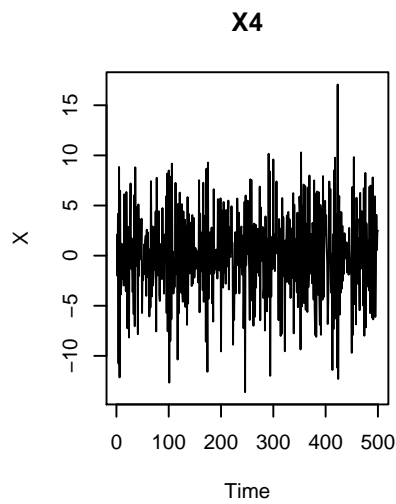
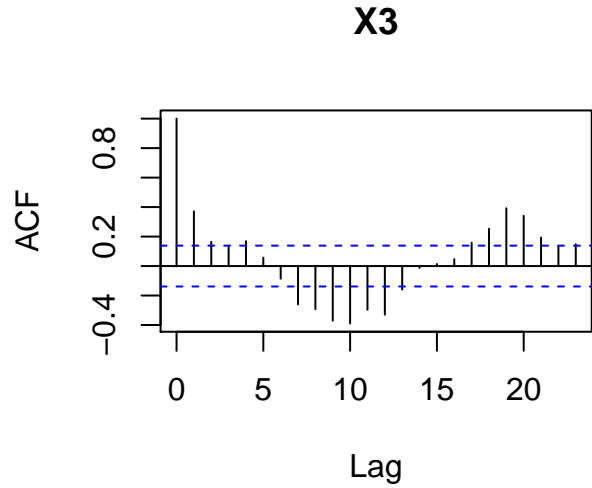
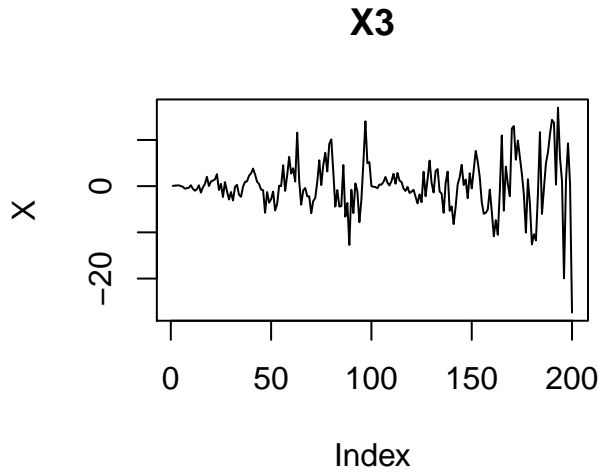
Exercice 3

1. Soit un processus X_t défini par $X_t = \varepsilon_t + 1.5\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}$ ou ε_t est un bruit blanc faible de moyenne nulle et de variance σ^2 . Quel est le nom de ce processus? Calculer sa fonction d'autocovariance.
2. Calculer la densité spectrale d'un processus AR(1) et celle d'un processus MA(1)
3. Soit X_t un processus MA(∞). Exprimer sa densité spectrale. Montrer que connaître la fonction d'auto-covariance de ce processus est équivalent à connaître sa densité spectrale.
4. Soient X_t et Y_t des processus stationnaires centrés indépendants de densités spectrales respectives f_X et f_Y . Calculer la densité spectrale du processus $Z_t = X_t + Y_t$ en fonction de f_X et f_Y .

Exercice 4

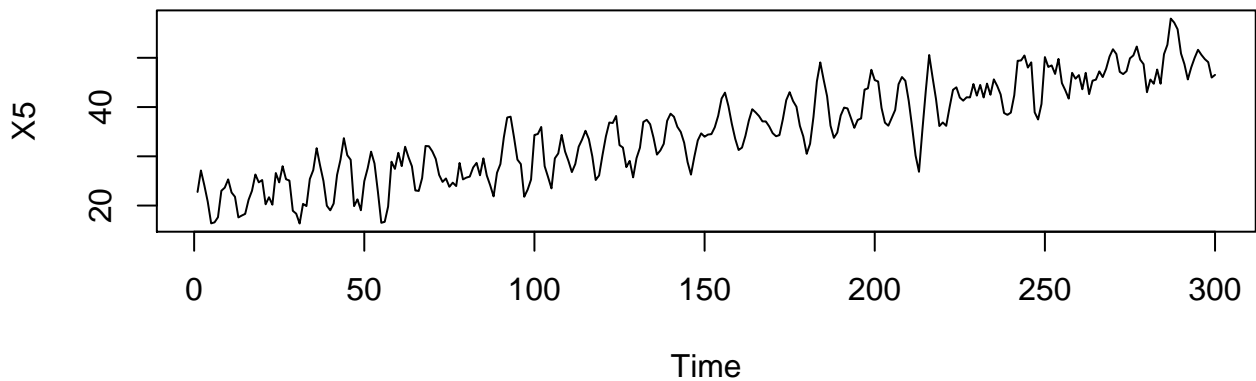
Un statisticien étudie un jeu de données composé de 4 séries temporelles pour lesquelles il a représenté/calculé les statistiques suivantes:





1. Proposer une démarche de modélisation pour chacune de ces séries, justifier.

Notre statisticien s'intéresse ensuite à une autre série X_t^5 représentée ci-dessous.



Il propose et cherche ensuite à valider un modèle. Il obtient les sorties suivantes:

```
##
## Call:
## arima(x = X5, order = c(4, 1, 5), include.mean = T, method = c("ML"))
##
## Coefficients:
```

```

##          ar1      ar2      ar3      ar4      ma1      ma2      ma3      ma4
##      0.7730  0.0375 -0.6437  0.0846 -0.6368 -0.0851 -0.3488  0.5998
## s.e.  0.2432  0.1432   0.1075  0.1694   0.2359   0.1121   0.1006  0.1147
##          ma5
##      -0.3280
## s.e.   0.1131
##
## sigma^2 estimated as 3.876:  log likelihood = -629.03,  aic = 1278.05
## pvalue student-test:
## ar1 ar2 ar3 ar4 ma1 ma2 ma3 ma4 ma5
## 0.00 0.79 0.00 0.62 0.01 0.45 0.00 0.00 0.00

```

2. Préciser et commenter le modèle choisi par notre statisticien.
3. A quoi correspond “sigma^2”? Que signifie l’option “method = c(“ML”)”? A quoi correspondent les p-values affichées?
4. Il décide de tester un modèle ARIMA(5,1,6) et obtient pour ce modèle une log-vraisemblance de -627.4 , cela vous paraît-il logique? Quel est l’AIC de ce modèle?
5. Au vu de ces résultats que doit faire notre statisticien?
6. Il souhaite ensuite valider son modèle, quels autres outils de diagnostic lui proposez vous?
7. Proposer un code R implémentant les démarches proposées pour les question 5. et 6.