MA261. Introduction au calcul scientifique
TP 4 : Discrétisation et résolution de la corde vibrante 1d

`Nous considérons l'évolution d'une corde vibrante de longueur 4, de l'instant initial zéro à l'instant final` $T = 2$.

Le problème instationnaire 1d à résoudre est (pour $c = 10$) : *trouver u tel que*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \in]0,4[\times]0,2[, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 2\sin(\frac{3\pi x}{2})\cos(\frac{\pi x}{2}) \text{ pour } x \in [0,4], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \text{ pour } x \in [0,4], \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(4,t) = 0 \text{ pour } t \in [0,2]. \tag{5}$$

Exercice 12 Discrétisation par différences finies.
On note h_x le *pas de discrétisation en espace*, et h_t le *pas de discrétisation en temps* :

$$h_x = \frac{4}{n_x+1}, \quad h_t = \frac{2}{n_t+1}.$$

On note de plus $(x_j, t_m)_{j,m}$ les *points de discrétisation* dans $[0,4] \times [0,2]$, et $(u_j^m)_{j,m}$ les *valeurs approchées* de $u(x_j, t_m)_{j,m}$.

1. Que valent (x_j, t_m) ? (Sans oublier de préciser les bornes de variations de j et m.)
2. Comment prendre en compte les conditions aux limites ?
   Et les conditions initiales (3) et (4) ?
3. Construire un schéma de discrétisation de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_m)$.
4. Construire un schéma de discrétisation de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_m)$.
5. En regroupant les informations précédentes, vérifier que l'on aboutit au *schéma numérique* ci-dessous :

$$u_0^m = u_{n_x+1}^m = 0, \text{ pour } 0 \le m \le n_t + 1 \text{ ;} \tag{6}$$

$$u_j^1 = u_j^0 = 2\sin(\frac{3j\pi h_x}{2})\cos(\frac{j\pi h_x}{2}), \text{ pour } 0 \le j \le n_x + 1 \text{ ;} \tag{7}$$

$$u_j^{m+1} = \frac{c^2 h_t^2}{h_x^2}(u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m) + 2u_j^m - u_j^{m-1}, \text{ pour } 1 \le j \le n_x, \ 1 \le m \le n_t. \tag{8}$$

Exercice 13 Stockage et calcul de $(u_j^m)_{0 \le j \le n_x+1, 0 \le m \le n_t+1}$.
On considère dans cette partie la mise en œuvre informatique (en `Matlab`) du schéma numérique (6-8).

1. A un instant t_m, pourquoi peut-on se contenter de calculer le vecteur $\vec{v}^m \in \mathbb{R}^{n_x}$ de composantes $(u_j^m)_{1\leq j\leq n_x}$?
2. Vérifier que pour $1 \leq m \leq n_t$, $\vec{v}^{m+1}$ est solution de

$$\vec{v}^{m+1} = (2\mathbb{I}_{n_x}+\alpha_0\mathbb{A}_1')\vec{v}^m-\vec{v}^{m-1}, \text{ avec } \mathbb{A}_1' = \frac{1}{(h_x)^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}.$$

   Déterminer α_0.
3. Ecrire une fonction `Matlab` qui retourne $(u_j^{m+1})_{1\leq j\leq n_x}$, avec comme arguments d'entrée n_x, n_t et m.
4. On fixe $h_x = 1/40$ ($n_x = 159$), et on laisse h_t varier :
   (a) Quelle est la valeur de $(u_{20}^{n_t+1})$ pour

$$h_t = \frac{2}{10000}, \frac{2}{4000}, \frac{2}{2000}, \frac{2}{800}, \frac{2}{799} \ ?$$

   (b) En visualisant la solution au temps final $T = 2$ pour ces différents pas de temps, qu'en conclure au sujet de la stabilité numérique de la méthode ?

Exercice 14 Stabilité numérique.
Pour résoudre la difficulté mise en évidence à la question 4 de l'exercice précédent, on propose un second schéma numérique, en remplaçant le terme $(u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m)$ dans (8) par la moyenne

$$\frac{1}{2}(u_{j+1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j-1}^{m+1}) + \frac{1}{2}(u_{j+1}^{m-1} - 2u_j^{m-1} + u_{j-1}^{m-1}).$$

1. Pourquoi parle-t-on de moyenne ?
2. Ecrire ce second schéma, en conservant la notation $(u_j^m)_{j,m}$ pour la solution approchée. Si on utilise à nouveau $\vec{v}^m \in \mathbb{R}^{n_x}$, vérifier que pour $1 \leq m \leq n_t$, $\vec{v}^{m+1}$ est cette fois solution du système linéaire

$$(\alpha_1\mathbb{A}_1' + \mathbb{I}_{n_x})\vec{v}^{m+1} = 2\vec{v}^m - (\alpha_1\mathbb{A}_1' + \mathbb{I}_{n_x})\vec{v}^{m-1}.$$

   Déterminer α_1. Qu'en déduire sur la nature de la matrice $\alpha_1\mathbb{A}_1' + \mathbb{I}_{n_x}$?
3. Ecrire une fonction `Matlab` qui retourne $(u_j^{m+1})_{1\leq j\leq n_x}$, avec comme arguments d'entrée n_x, n_t et m.
4. On fixe $h_x = 1/40$ ($n_x = 159$), et on laisse à nouveau h_t varier... En visualisant la solution au temps final $T = 2$ pour différents pas de temps, qu'en conclure au sujet de la stabilité numérique du second schéma ?
5. Comparer rapidement les avantages et inconvénients des deux schémas.