

Un exemple de fonction intégrable sur $[-1, 1]$ mais pas sur $[0, 1]$

Abstract — In courses on integration theory, Chasles property is usually considered as elementary and so “natural” that this is sometimes left to the reader. When the functions take their values in finite dimensional spaces, the property is always verified, but it is no more true in infinite dimensional spaces. We first give an easy-to-understand example of a function f from $[-1, 1]$ into the space of polynomial functions from $[0, 1]$ to \mathbb{R} which is integrable on $[-1, 1]$ but not on $[0, 1]$. We also provide a way of representing graphically such a function which explains what means the integral of a function with values in an infinite dimensional space. Then we show that Chasles' property is true if and only if the space in which the functions to integrate take their values is a complete space.

Dans les livres traitant de l'intégration de fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace de dimension infinie E , il est d'usage de supposer que l'espace d'arrivée de la fonction est complet. Cela permet d'assurer la convergence des sommes de Riemann, et d'avoir le théorème de Chasles qui affirme, pour une fonction $f : [-1, 1] \rightarrow E$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est intégrable sur $[-1, 1]$;
- (ii) il existe un réel $c \in]-1, 1[$ tel que f soit intégrable sur $[-1, c]$ et sur $[c, 1]$;
- (iii) pour tout réel $c \in]-1, 1[$, f est intégrable sur $[-1, c]$ et sur $[c, 1]$.

La démonstration du théorème de Chasles repose sur l'utilisation du critère de Cauchy pour la convergence des sommes de Riemann, selon un type de subdivision dépendant de la théorie de l'intégrale considérée : Riemann, Lebesgue (McShane), Denjoy, Henstock.

Dans cette note, on va tout d'abord donner un exemple explicite de fonction définie sur $[-1, 1]$, à valeurs dans un espace vectoriel normé E , intégrable sur $[-1, 1]$, mais non intégrable sur $[-1, 0]$, ni sur $[0, 1]$. On donnera également une illustration graphique de cette fonction. On montrera dans une deuxième partie que ceci est général : Le théorème de Chasles est valide si et seulement si l'espace d'arrivée est complet.

1. Construction explicite d'un contre-exemple au théorème de Chasles

■ Introduction

L'exemple que l'on va considérer ici est une fonction impaire de $[-1, 1]$ dans l'espace $E = \mathbb{R}[x, [0, 1]]$ des fonctions polynomiales de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} muni de la norme de la convergence uniforme. Comme cet espace vectoriel admet une base algébrique dénombrable, il résulte du théorème de Baire qu'il n'est complet pour aucune norme. On va établir le résultat pour les sommes de Riemann sur des subdivisions régulières. Le complété de E étant l'espace $F = C([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} muni de la norme de la convergence uniforme, la convergence sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$ des sommes de Riemann régulières de f vers deux fonctions g et h appartenant à $F \setminus E$ montrera l'intégrabilité au sens de Riemann de f en tant que fonction de $[-1, 1]$ dans F . Compte tenu des liens entre les différentes théories (1), cela montrera également l'intégrabilité de f aux sens de Lebesgue (via l'intégrale de McShane), de Denjoy et de Henstock. L'intégrabilité de f dans l'un de ces sens sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$ avec une intégrale appartenant à $F \setminus E$ montrera également qu'en tant que fonction de $[-1, 1]$ dans E , cette fonction n'est intégrable en aucun de ces sens sur $[-1, 0]$ ni sur $[0, 1]$. En revanche, l'intégrabilité de f sur $[0, 1]$ au sens de Riemann en tant que fonction à valeurs dans E montrera son intégrabilité sur $[0, 1]$ aux sens de Lebesgue, Denjoy et Henstock.

■ Comment représenter concrètement l'intégrale d'une fonction à valeurs dans un espace de dimension infinie

Afin d'illustrer graphiquement la fonction f , on va définir dans l'ordinateur une fonction de deux variables, Φ , de $[-1, 1] \times [0, 1]$ dans \mathbb{R} , $(x, t) \mapsto (f(x))(t)$. Cette fonction de deux variables pourra être représentée par une surface, ce qui permettra de représenter concrètement la fonction f définie sur $[-1, 1]$, à valeurs dans un espace de dimension infinie. Une section de la surface par le plan vertical d'équation $x = x_0$ montrera le graphe de $f(x_0)$.

Pour illustrer les sommes de Riemann de cette fonction, on réalisera une animation montrant l'évolution de ces sommes de Riemann. Pour chacune de ces sommes, on mettra en couleur les graphes des $f(x_i)$, où les x_i sont les étiquettes de la somme de Riemann. La somme de Riemann elle-même, une fonction de E , sera représentée sur une face visible de la "boîte" délimitant le graphique.

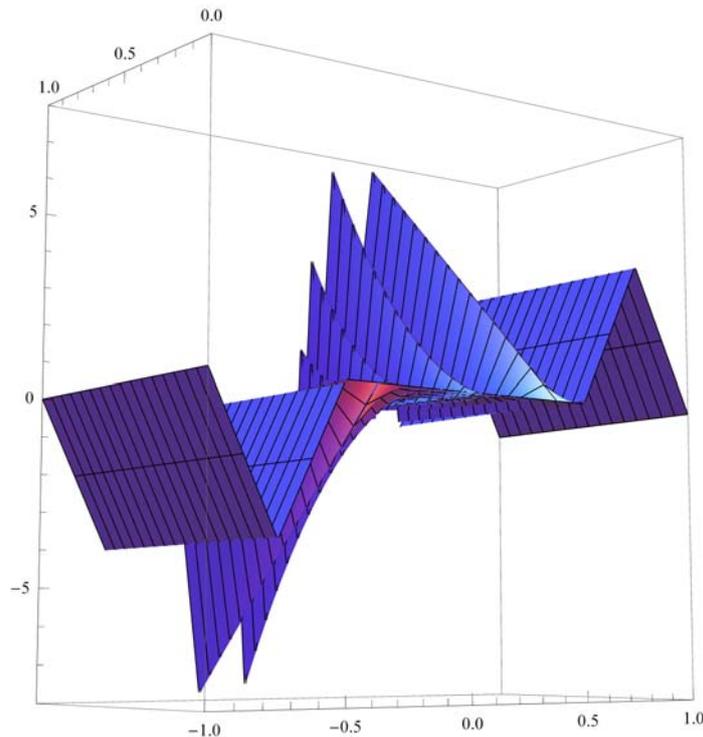
■ Définition de la fonction

On va commencer par construire f par morceaux sur $[0, 1]$, sur les intervalles de la forme $I_n = \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$, $n \geq 0$. L'idée est de reconstituer la fonction exponentielle à partir de son développement en série. L'intégrale sur I_n de f devra valoir $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^n}{n!}$. Pour cela, on va prendre f affine par morceaux sur I_n : Si e_n est la fonction de $[-1, 1]$ dans \mathbb{R} définie par $e_n : x \mapsto x^n$, et si θ est la fonction nulle de $[-1, 1]$ dans \mathbb{R} , f est la fonction impaire de $[-1, 1]$ dans E définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{2^{2n+4}}{n!} \left(x - \frac{1}{2^{n+1}}\right) e_n & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+2}}\right] \\ \frac{2^{2n+4}}{n!} \left(\frac{1}{2^n} - x\right) e_n & \text{si } x \in \left[\frac{3}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n}\right] \\ \theta & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

■ Représentation

Afin d'illustrer graphiquement la fonction f , on a représenté la fonction de deux variables, Φ , de $[-1, 1] \times [0, 1]$ dans \mathbb{R} , $(x, t) \mapsto (f(x))(t)$. La surface associée à cette fonction de deux variables permet de représenter concrètement la fonction f définie sur $[-1, 1]$, à valeurs dans un espace de dimension infinie. Une section de la surface par le plan vertical d'équation $x = x_0$ montre le graphe de $f(x_0)$. Voici cette représentation



■ Démonstration

La fonction f est continue et affine par morceaux sur $]0, 1]$ qui est un ouvert de $[0, 1]$. Elle est donc continue sur $]0, 1]$. En outre, comme $\frac{2^{2n+4}}{n!}$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, f tend vers la fonction nulle θ en 0. Comme $\theta \in E$, f est continue sur $[0, 1]$. Par parité, f est aussi continue sur $[-1, 1]$.

Comme f est affine par morceaux, son intégrale sur chaque intervalle où elle est affine se calcule pratiquement comme l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles. Voici pourquoi.

Lemme — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel non réduit à $\{0\}$, e un vecteur non nul de E , et f la fonc-

tion affine de $[0, 1]$ dans E , $x \mapsto x e$. Alors f est intégrable sur $[0, 1]$ aux sens de Riemann, Henstock, Lebesgue et Denjoy, et $\int_{[0,1]} f = \frac{1}{2} e$.

Démonstration du lemme — Compte tenu des inclusions entre théories de l'intégrale, il suffit d'établir que f est intégrable au sens de Riemann, donc pour des subdivisions régulières. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma(f, n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{n+1}{2n} e$. D'après les propriétés de la norme, on a $\|\sigma(f, n)\| = \frac{n+1}{2n} \|e\|$. Comme la droite vectorielle $\mathbb{R} e$ est complète, $\sigma(f, n)$ converge dans E vers $\frac{1}{2} e$. ■

Le lemme s'étend évidemment aux fonctions affines quelconques. En l'appliquant à chacun des intervalles $\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+2}}\right]$, on trouve que

$$\begin{aligned} \int_{\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]} f &= \int_{\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+2}}\right]} \frac{2^{2n+4}}{n!} \left(x - \frac{1}{2^{n+1}}\right) e_n + \int_{\left[\frac{3}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n}\right]} \frac{2^{2n+4}}{n!} \left(\frac{1}{2^n} - x\right) e_n \\ &= \frac{2^{2n+4}}{n!} \left(\int_{\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+2}}\right]} \left(x - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \int_{\left[\frac{3}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n}\right]} \left(\frac{1}{2^n} - x\right) \right) e_n \\ &= \frac{2^{2n+4}}{n!} \left(\frac{1}{2^{2n+5}} + \frac{1}{2^{2n+5}} \right) e_n = \frac{1}{n!} e_n \end{aligned}$$

Ainsi, sur tout segment $J \subset]0, 1]$, f est intégrable dans E puisque son intégrale est une fonction polynôme. En outre, $\int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^1 f = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} e_k$. La restriction à $[0, 1]$ de la fonction exponentielle appartient à F , mais pas à E . Par suite, comme $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} e_k$ converge uniformément vers la restriction à $[0, 1]$ de la fonction exponentielle, la fonction f est intégrable sur $[0, 1]$ en tant que fonction de $[0, 1]$ dans F , mais pas en tant que fonction de $[0, 1]$ dans E . La fonction f étant impaire, son intégrale dans F est la fonction nulle, θ . Comme $\theta \in E$, la fonction f est donc, en tant que fonction de $[-1, 1]$ dans E intégrable sur $[-1, 1]$, mais n'est intégrable ni sur $[-1, 1]$ ni sur $[0, 1]$.

On notera au passage que f est un exemple de fonction continue sur un segment non intégrable sur ce segment : l'implication " f continue sur un segment " \Rightarrow " f est intégrable sur ce segment " est vraie lorsque l'espace d'arrivée est complet, fausse sinon.

2. Cas général

Soit E un espace vectoriel normé réel non complet, F son complété pour la norme considérée. Nous allons construire une fonction continue f de $[-1, 1]$ dans E intégrable sur $[-1, 1]$, mais non intégrable, ni sur $[-1, 0]$, ni sur $[0, 1]$.

Puisque E n'est pas complet, il existe une suite de Cauchy (x_n) d'éléments de E qui converge vers un élément y de $F \setminus E$. Quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|y - x_n\| \leq \frac{1}{2^{2n+3}}$. On a alors, pour tout entier $n \geq 2$, $\|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{1}{2^{2n}}$. Cela étant, on va construire une fonction f impaire, continue, affine par morceaux, et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\frac{1}{2^n}}^1 f = x_n$. Soit f la fonction impaire de $[-1, 1]$ dans E définie par

$$f(x) = \begin{cases} 16(1-x)x_1 & \text{si } x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \\ 16\left(x - \frac{1}{2}\right)x_1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ 2^{2n+2} \left(\frac{4}{2^{n+1}} - x\right)(x_n - x_{n-1}) & \text{si } x \in \left[\frac{3}{2^{n+1}}, \frac{4}{2^{n+1}}\right] \\ 2^{2n+2} \left(x - \frac{1}{2^n}\right)(x_n - x_{n-1}) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^{n+1}}\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est continue sur l'ouvert $]0, 1]$ de $[0, 1]$ parce qu'elle est affine par morceaux et continue sur tout segment inclus dans cet intervalle. La condition $\|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{1}{2^{2n}}$ assure la continuité de f en 0. Ainsi, f est-

elle continue sur $[0, 1]$. Grâce au lemme de la section précédente, on montre que f est intégrable sur tout segment $J \subset]0, 1]$. En outre, $\int_{\frac{1}{2^n}}^1 f = x_n$. Ainsi, dans F , f est intégrable sur $[0, 1]$, et $\int_{(F)[0,1]} f = y$. Mais par définition, $y \notin E$, et f , en tant que fonction de $[-1, 1]$ dans E n'est pas intégrable sur $[0, 1]$. Par parité, elle n'est pas non plus intégrable sur $[-1, 0]$. On a donc établi que

Le théorème de Chasles pour les intégrales est vrai si et seulement si l'espace d'arrivée est complet.

■ Références

(¹) G. A. Gordon : The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock. Graduate Studies in Math. Vol 4, Amer Math Soc. 1994.

François Guénard
 Laboratoire de Mathématiques d'Orsay
 UMR 8628 du CNRS
 Université Paris-Sud
 91405 Orsay Cedex, France
 francois.guenard@math.u-psud.fr

Annexe — Fonctions *Mathematica* pour la réalisation d'une animation montrant la fonction ainsi que les sommes de Riemann successives

■ Comment représenter concrètement l'intégrale d'une fonction à valeurs dans un espace de dimension infinie

Afin d'illustrer graphiquement la fonction f , on utilise dans l'ordinateur une fonction de deux variables, Φ , de $[-1, 1] \times [0, 1]$ dans \mathbb{R} , $(x, t) \mapsto (f(x))(t)$. La surface associée à Φ permet de représenter concrètement la fonction f définie sur $[-1, 1]$, à valeurs dans un espace de dimension infinie. Une section de la surface par le plan vertical d'équation $x = x_0$ montre le graphe de $f(x_0)$. Pour illustrer les sommes de Riemann de cette fonction, on utilise une animation montrant l'évolution de ces sommes de Riemann. Pour chacune de ces sommes, on met en couleur les graphes des $f(x_i)$, où les x_i sont les étiquettes de la somme de Riemann. La somme de Riemann elle-même, une fonction de E , est représentée sur une face visible de la "boîte" délimitant le graphique, ici dans le plan d'équation $x = 0$. Le tracé sur cette même face de "l'intégrale" de la fonction (dans le complété) permet de mieux suivre l'évolution des sommes de Riemann au fur et à mesure de l'augmentation du nombre de pas de la subdivision. Techniquement, un réglage de l'opacité de la surface permet de bien visualiser les étiquettes.

■ Définition de la fonction

■ Fonctions intermédiaires

Si $x \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right]$, on a $n = \lceil \lceil \text{lb}(x) \rceil \rceil = -\lfloor \text{lb}(x) \rfloor$. On va donc définir deux fonctions intermédiaires

$$\nu : x \mapsto \lceil \text{lb}(x) \rceil, \text{ et } \alpha : n \mapsto \frac{2^{2n+4}}{n!}$$

$$\nu := \lceil \log_2(\#1) \rceil \ \&$$

$$\alpha := \frac{2^{2\#1+4}}{\#1!} \ \&$$

$$\mu := \text{Composition}[\text{Abs}, \nu]$$

$$\beta := \text{Composition}[\alpha, \text{Abs}, \nu]$$

■ Définition de Φ en Mathematica

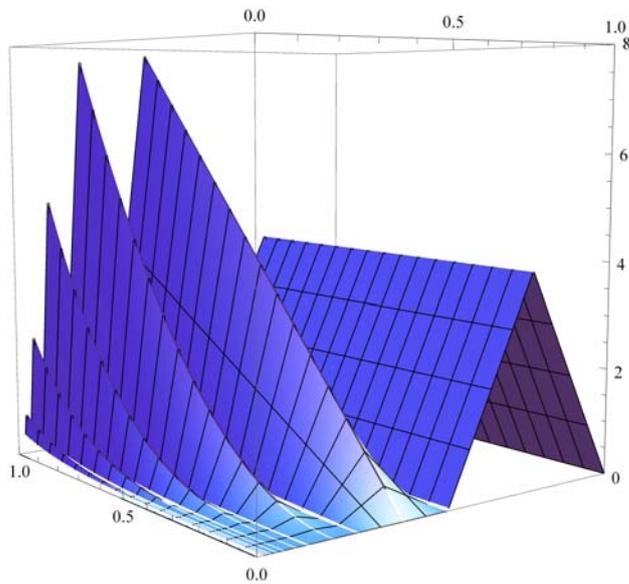
On note Φ la représentation *Mathematica* de la fonction sur $[0, 1]$. Elle peut s'écrire comme une simple fonction de deux variables.

$$\Phi := \text{Piecewise}\left[\left[\begin{array}{l} \beta(\#1) \left(\#1 - \frac{1}{2^{\mu(\#1)+1}}\right) \#2^{\mu(\#1)} \quad \frac{1}{2^{\mu(\#1)+1}} \leq \#1 \wedge \#1 \leq \frac{3}{2^{\mu(\#1)+2}} \\ \beta(\#1) \left(\frac{1}{2^{\mu(\#1)}} - \#1\right) \#2^{\mu(\#1)} \quad \frac{3}{2^{\mu(\#1)+2}} \leq \#1 \wedge \#1 \leq \frac{1}{2^{\mu(\#1)}} \end{array}\right]\right] \&$$

$$f := \text{Piecewise}[\{-\Phi[-\#1, \#2], \#1 \leq 0\}, \{\Phi[\#1, \#2], \#1 > 0\}] \&$$

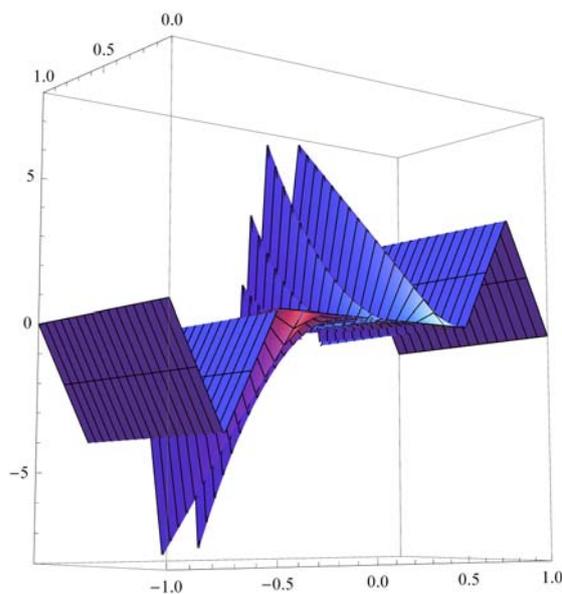
■ Représentation de Φ

$$\text{Plot3D}[\Phi(x, t), \{x, 0, 1\}, \{t, 0, 1\}, \text{PlotRange} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \text{BoxRatios} \rightarrow \{1, 1, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 300]$$



■ Représentation de f

$$\text{Plot3D}[f(x, t), \{x, -1, 1\}, \{t, 0, 1\}, \text{PlotRange} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}, \text{BoxRatios} \rightarrow \{2, 1, 2\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 200]$$



■ Définitions des sommes de Riemann

On va prendre des sommes de Riemann régulières.

$$\sigma := \frac{\sum_{k=1}^{\#1} \Phi\left(\frac{k}{\#1}, \#2\right)}{\#1} \&$$

■ Définition des graphiques de l'animation

Les graphiques g2, g3, g4 et g5 sont les constituants du graphique final. g4 représente la surface associée à Φ . Les graphiques g2, g3 et g5 sont des fonctions de n , le nombre d'étiquettes de la subdivision. g2(n) montre les n étiquettes ; g3(n) montre à la fois l'intégrale dans le complété (en vert) et la somme de Riemann à l'ordre n (en jaune). g5(n) montre seulement la somme de Riemann à l'ordre n (en jaune), ce qui laisse le choix entre g3 et g5. Enfin, gr(n) assemble et montre g2(n), g3(n), g4 et g5(n).

$$g2 := \text{ParametricPlot3D}\left[\text{Table}\left[\left\{\frac{k}{\#1}, t, \Phi\left(\frac{k}{\#1}, t\right)\right\}, \{k, 1, \#1\}\right], \{t, 0, 1\},\right.$$

$$\left. \text{BoxRatios} \rightarrow \{1, 1, 1\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Directive}[\text{Red}, \text{Thick}], \text{PlotRange} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\right] \&$$

$$g3 := \text{Module}\left[\{tt\}, \text{ParametricPlot3D}\left[\begin{pmatrix} 0 & tt & e^{tt} \\ 0 & tt & \sigma(\#1, tt) \end{pmatrix}, \{tt, 0, 1\}, \text{BoxRatios} \rightarrow \{1, 1, 1\},\right.\right.$$

$$\left. \left. \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Directive}[\text{Green}, \text{Thick}], \text{Directive}[\text{Yellow}, \text{Thick}]\}, \text{PlotRange} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\right]\right] \&$$

$$g4 := \text{Plot3D}\left[\Phi(x, t), \{x, 0, 1\}, \{t, 0, 1\}, \text{PlotRange} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix},\right.$$

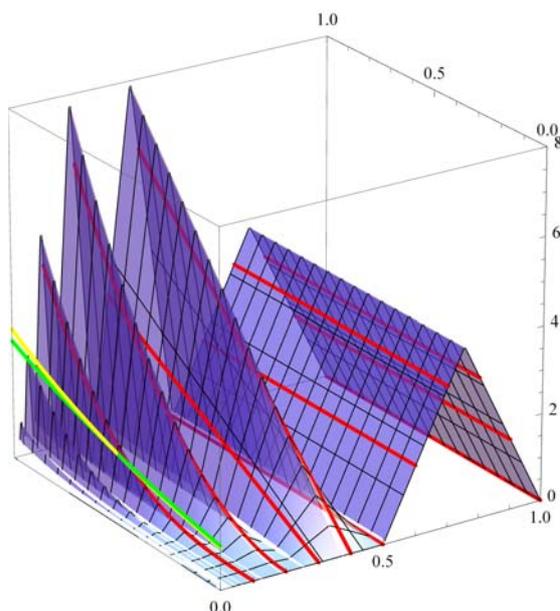
$$\left. \text{BoxRatios} \rightarrow \{1, 1, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 100, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Opacity}[0.6]\right]$$

$$g5 := \text{Module}\left[\{uu\}, \text{ParametricPlot3D}\left[\{0, uu, \sigma(\#1, uu)\}, \{uu, 0, 1\},\right.\right.$$

$$\left. \left. \text{BoxRatios} \rightarrow \{1, 1, 1\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Directive}[\text{Yellow}, \text{Thick}]\}, \text{PlotRange} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\right]\right] \&$$

$$gr := \text{Show}[g2(\#1), g3(\#1), g4, g5(\#1), \text{ViewPoint} \rightarrow \{-8, -12, 6\}] \&$$

$$gr[10]$$



■ Animation

L'instruction suivante crée l'animation (les 20 premières sommes de Riemann) que l'on peut faire avancer à sa guise, grâce au curseur (pour une animation automatique, cliquer sur le bouton \oplus de la cellule de réponse). L'option "SaveDefinitions -> True" permet de faire tourner l'animation sur la version portable du document en disposant simplement du "visualisateur" gratuit de *Mathematica* (fichier portant l'extension CDF).

Manipulate[gr(j), {j, 1, 20, 1}, SaveDefinitions -> True]

