François Guénard
Université de Paris-Sud (Orsay)

Vade-mecum du poseur de sujets de mathématiques

Le 18 janvier 2005

Table des matières

Avant-propos

Cet aide-mémoire est destiné aux concepteurs et aux correcteurs de sujets d'examens de mathématiques.

J'ai essayé de rassembler l'ensemble des pièges à éviter, et de dresser des listes précises de points à vérifier. La première partie s'adresse plus particulièrement aux auteurs de sujets, et la seconde à ceux qui vérifient les sujets après leur élaboration. Ce sont souvent les mêmes qui assurent ces deux fonctions, mais elles correspondent à deux étapes de la constitution de sujets.

Il ne s'agit pas d'être normatif, mais seulement de fournir une aide à tous les auteurs de sujets, particulièrement aux auteurs de sujets de baccalauréat.

J'espère que ce travail leur sera utile, et pour l'améliorer, j'invite tous les collègues à me faire parvenir leurs remarques et suggestions. Je les en remercie par avance.

François Guénard
Université de Paris-Sud
Département de mathématiques
Bat. 425
91405 Orsay Cedex

1. Les pièges de la rédaction d'un sujet de mathématiques

1.1. Les notations

▸ Tous les symboles utilisés dans un sujet d'examen doivent être clairement définis. Un même symbole ne doit pas être utilisé pour désigner des objets différents. Afin d'éviter d'utiliser deux fois un même symbole dans deux contextes différents, on pourra utiliser la fiche de vérification des notations fournie en annexe. Son mode d'emploi est simple : il suffit de cocher sur cette fiche les symboles au fur et à mesure qu'ils apparaissent dans le texte, en notant éventuellement dans la case voisine leur sens. Un symbole déjà coché ne peut plus être utilisé lorsqu'on cherche comment noter un nouvel objet.

▸ On notera que dans la fiche, certaines lettres n'existent pas :

— la lettre “l”, qui risque d'être confondue avec le chiffre “1” ;

— les lettres e, i, π et $\sum$ dont la signification est réservée ;

— la lettre minuscule o, qui risque d'être confondue avec le chiffre 0, ou avec la lettre O ;

— la lettre majuscule B (Bêta) qui risque d'être confondue avec la lettre B ; dans un problème où intervient la fonction Bêta, faire attention de ne pas utiliser de “point B” ;

— les lettres ψ et Ψ sont regroupées car elles risquent trop d'être confondues ;

— les lettres v et ν (nu) risquent d'être confondues ;

— etc.

▸ Il n'y a aucune raison de mettre des parenthèses autour des lettres désignant des objets mathématiques. Ce défaut se rencontre surtout dans le secondaire où certains mettent des parenthèses pour désigner des ensembles géométriques, alors qu'ils n'en mettent pas autour des points. Ils écrivent par exemple "la droite (D)", au lieu de "la droite D". Cela complique inutilement. De même pour les équations : écrire "l'équation E_1" plutôt que "l'équation (E_1)". En revanche, lorsqu'une équation est désignée seulement par un chiffre, l'usage de parenthèses est indispensable. La numérotation des équations ne se justifie que lorsqu'il y a beaucoup d'équations à désigner (ne jamais appeler (1) une équation s'il n'y a pas d'équation (2)). Cette situation se produit essentiellement dans les livres, très rarement dans les sujets d'examens.

▸ Les notations utilisées dans les sujets doivent être conformes aux normes en vigueur. La France a adopté en août 1994 les normes européennes, qui sont elles-mêmes conformes aux normes ISO. La norme s'appelle "NF ISO 31-11". Voici un tableau regroupant les principales modifications, à l'exception des fonctions.

Signification	Notation NF ISO	Ancienne notation
Transposée de la matrice A	A^{T}	${}^{t}A$
Coefficient binomial	$\binom{n}{p}$	C_n^p
Nombre complexe conjugué de z	z^*	$\bar{z}$

Les fonctions usuelles font l'objet d'une norme cohérente : les fonctions trigonométriques se notent toutes avec trois lettres. Les fonctions hyperboliques directes se notent avec quatre lettres, formées par les trois lettres de la fonction trigonométrique correspondante, et un "h" final. Les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et hyperboliques se notent toutes avec six lettres, sans majuscules ni espace. Les trois premières lettres sont "arc" pour les fonctions trigonométriques, "ar" pour les fonctions hyperboliques. Les trois ou quatre dernières lettres sont celles de la fonction directe associée.

Fonction	Notation
Logarithme népérien	ln
Tangente	tan
Cotangente	cot
Arc tangente	arctan
Arc sinus	arcsin
Cosinus hyperbolique	cosh
Sinus hyperbolique	sinh
Argument sinus hyperbolique	arsinh

Rappelons que les fonctions usuelles se composent en caractères droits, et non en italiques.

▸ Eviter les notations folkloriques, surtout si elles sont ambiguës. Par exemple, pourquoi noter $[\rho;\theta]$ le nombre complexe $\rho e^{i\theta}$? Cette notation n'est pas compatible avec celle des intervalles, et elle n'apporte rien par rapport à $\rho e^{i\theta}$.

1.2. Les nouvelles notations

Les mathématiques progressent, et les notations évoluent.

▸ **L'intégrale.** Les spécialistes distinguent maintenant les théories comportant une notion de différentielle, de celles qui n'en comportent pas. Par exemple, les théories de Riemann et de Riemann-Cauchy (les intégrales "généralisées" usuelles) ne font pas appel aux différentielles, tandis que la théorie de Riemann-Stieltjes repose sur cette notion. Dans une théorie ne faisant pas appel aux différentielles, on n'utilise pas la notation *dx*, qui devient réservée aux théorie où cette notation a été définie proprement. En pratique, la théorie de l'intégrale qui est enseignée dans le secondaire est une théorie de Newton (calcul des intégrales par primitivation), ce qui se justifie pleinement depuis quelques années grâce à la théorie de Henstock (dans la théorie de Henstock, les dérivées sont toutes intégrables, ce qui n'est le cas ni dans la théorie de Riemann, ni dans celle de Riemann-Cauchy, ni dans celle de Lebesgue). Pour être conforme à l'usage contemporain, on peut donc remplacer la notation $\int_a^b f(x)dx$ par la notation plus simple $\int_a^b f$. Lorsqu'on veut préciser la forme de la fonction sous l'intégrande, il suffit d'utiliser la notation standard des fonctions. Par exemple, $\int_a^b \left(x \mapsto xe^x\right)$.

Cette notation présente certains avantages pour exprimer les théorèmes de changement de variable ou d'intégration par parties. Elle oblige en effet à bien écrire les fonctions, en précisant alors les intervalles de définitions, ce que les étudiants ne font généralement pas lorsqu'il dérivent formellement en utilisant les notations des différentielles. Pour s'en convaincre, demander aux étudiants de déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos x}$. Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$, toujours positive. Elle est donc primitivable sur $\mathbb{R}$, et ses primitives sont définies et croissantes sur $\mathbb{R}$...

‣ **Les primitives.** La notation $\int f$ pousse les étudiants à confondre les opérations de primitivation et d'intégration. On peut désigner une primitive de f par $\mathcal{f}$, ou mieux, par $f^{(-1)}$, ce qui permet d'étendre la notation aux primitives itérées, notées $f^{(-n)}$. Pour cette notation, il faut se souvenir que $f^{(-1)}$, n'est définie qu'à une constante près. Cette notation permet d'écrire simplement la formule d'intégration par parties à l'ordre n.

‣ **Les dérivées partielles.** Pour des raisons liées à l'informatique, on note maintenant $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ les premières et secondes dérivées partielles d'une fonction f. Autrefois, on les notait généralement $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Plus généralement, la dérivées partielle de f dans la direction du vecteur x au point a se note $\partial_x f(a)$.

‣ **Les séparateurs décimaux**. En français, le séparateur décimal traditionnel est la virgule. Cette notation peut entrer en conflit avec la notation des couples et des intervalles, où la virgule est aussi le séparateur usuel : $(1, 2, 3)$ désigne-t-il l'élément de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées "1", "2" et "3", l'élément de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées "1, 2" et "3", ou bien encore le couple formé de "1" et de "2, 3" ? Une solution est d'adopter l'usage anglo-saxon où le point sert de séparateur décimal, ce qui présente l'avantage d'être compatible avec ce que les étudiants voient sur leur calculatrice. Une autre solution est d'utiliser le point-virgule comme séparateur dans les couples et n-uplets, mais cela n'est pas conforme à l'usage mathématique courant. Dans un énoncé, quelle que soit la stratégie choisie, l'annoncer clairement, et ne pas en changer.

1.3. La typographie

Bien que les auteurs de sujets n'aient pas véritablement à s'occuper de la typographie (tant qu'on ne leur demande pas de fournir un texte prêt à imprimer), voici quelques points à connaître.

‣ En règle générale, les symboles mathématiques sont tapés en italiques, à l'exception des lettres grecques, des chiffres, et des fonctions standard (cos, sin, exp, ln, etc.).

‣ Les moyens typographiques dont disposent les centres d'examens ne leur permettent souvent pas d'utiliser les lettres cursives ou gothiques. Considérer que ces lettres seront tout simplement tapées en italiques (les cocher dans la fiche de contrôle des notations).

‣ Distinguer sur le sujet la lettre O (qui comme symbole mathématique sera tapée en italiques), et le chiffre 0.

‣ Une vérification usuelle lorsqu'on relit un texte concerne les parenthèses et les crochets : vérifier si une parenthèse ouverte se referme bien, et inversement si une parenthèse fermante a bien été ouverte. De même pour les crochets et certaines accolades.

1.4. La cohérence

Tout symbole utilisé dans un texte doit avoir été défini clairement. Toute assertion doit également avoir un statut clair : définition, hypothèses, rappel d'une propriété, résultat que l'on demande d'établir.

‣ Pour introduire un nouvel objet, utiliser le “Soit...”, ou le “On pose...” (obligatoirement suivi d'une égalité).

- Si l'on veut rappeler une propriété que l'on ne demande pas de redémontrer, l'introduire par "On pourra utiliser sans la redémontrer la proposition suivante :..."

- A éviter, un début de paragraphe commençant par "E est un ensemble fini...." Le statut de cette assertion n'est pas clair : est-ce que cela définit E ? Est-ce une affirmation que l'on pourra utiliser librement dans la suite ? En outre, on ne doit jamais commencer une phrase par un symbole mathématique.

- Assurer l'homogénéité des formules : par exemple, ne pas écrire "$y'(t) = a(y - b)$", mais "$y'(t) = a(y(t) - b)$".

- Assurer la cohérence du cadre d'étude : par exemple, si l'on a fait étudier une courbe dans $\mathbb{R}^2$, et que l'on veut ensuite faire calculer le volume du solide engendré par la rotation de cette courbe autour d'un axe du plan, penser à redéfinir le cadre de l'action ; pour faire tourner la courbe autour de l'axe, il faut situer le tout dans $\mathbb{R}^3$.

1.5. Penser aux correcteurs

- Les questions posées doivent être claires et précises.

  — A éviter absolument : "Conséquences ?" ou "Interprétation graphique.". Les questions doivent être rédigées en français, et demander quelque chose de précis exempt d'ambiguïté. Sur une masse importante de copies, il y a toujours des candidats qui trouvent des conséquences auxquelles on n'avait pas pensé. Cela complique la tâche des correcteurs : ils doivent s'assurer que les conséquences ou l'interprétation graphique est correcte, et la notation est délicate.

  — Voici un exemple de rédaction ambiguë : "Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α et une seule telle que $-1 < \alpha < 0$." Faut-il comprendre : "Prouver que, dans l'intervalle $]-1\,;0[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution." ou "Prouver que, dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α. Montrer que $-1 < \alpha < 0$." ?

‣ Ne pas mettre la réponse dans la question. C'est particulièrement important lorsqu'on veut demander de démontrer une formule compliquée, dont la démonstration demande un certain nombre de lignes. Si l'on pose la question sous la forme "Montrer l'égalité [formule]", tous les candidats vont sinon y arriver, du moins prétendre qu'ils y sont arrivés ; pour les correcteurs, la tâche sera infernale : il leur faudra reprendre en détail chaque ligne du calcul pour voir s'il n'y a pas un "trou" en plein milieu. Si au contraire, on prend l'un des coefficients qui intervient dans la formule, et que l'on demande de "déterminer le coefficient λ tel que l'on ait [formule où une partie a été remplacé par λ]", le correcteur voit tout de suite si le candidat a correctement effectué le calcul.

Exemple : au lieu de demander directement de démontrer l'égalité $\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}=\binom{p+q}{n}$, demander d'exprimer en fonction de n, q et p l'entier s qui permet d'écrire $\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}=\binom{s}{n}$.

‣ Poser des questions ne pouvant conduire qu'à une seule réponse correcte.

— A éviter absolument : "Regrouper les données (x_i, y_i) dans un tableau". Il y a beaucoup de façons de regrouper des données dans un tableau ; dans ce genre de questions, on peut par exemple être plus directif en donnant un modèle : "Reproduire et compléter le tableau suivant".

— Ne jamais demander le calcul de certaines primitives, en particulier de certaines fractions rationnelles de fonctions trigonométriques. Des changements de variables différents conduisent à des expressions variées du résultat. La tâche des correcteurs est infernale !

1.6. Les problèmes "appliqués"

‣ Dans l'étude d'un problème concret, la situation doit être décrite avec précision. On ne peut en particulier pas se contenter d'une figure pour définir les hypothèses du problème. On peut illustrer une situation par une figure, mais le texte doit être suffisant par lui-même, pour qu'un étudiant puisse répondre aux questions. Certains justifient parfois l'absence d'un texte décrivant en français une situation pratique par l'incapacité des élèves à comprendre un texte de plus de trois lignes ! Penser une telle chose de nos étudiants est insultant à leur égard. Et si jamais il y avait vraiment des élèves de terminale qui ne puissent comprendre un texte de quelques lignes, il n'y aurait pas de raison qu'on leur délivre le bac.

▸ Dans les études graphiques, si l'on donne la représentation graphique d'une fonction sur $[0\,;6]$, on ne peut demander "Que peut-on dire de la fonction sur $[0\,;+\infty[$?", ou "Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?"

▸ Lorsqu'on veut motiver un problème par une situation ou un processus industriel, veiller à ce que la situation, ou le processus décrits soient raisonnables. En présentant comme motivées par des considérations pratiques des situations trop éloignées de la réalité, on contribue à accréditer l'idée d'un enseignement déconnecté de la réalité, et pire, inculquant des idées fausses aux élèves !

▸ Lorsqu'on présente "un jeu", particulièrement dans les exercices de probabilités, se demander si un jour il est venu à l'idée d'un être normal de "jouer" ainsi. Les "jeux" trop invraisemblables donnent une mauvaise image des mathématiques et des mathématiciens.

1.7. La grammaire

Les règles de grammaire utilisées en mathématiques sont un petit peu particulières. Si le métalangage utilisé est le français, il est adapté à l'usage mathématique. Voici quelques règles :

▸ On ne doit jamais commencer une phrase par un symbole mathématique. Cela permet d'éviter des confusions avec la fin de la phrase précédente, qui doit se terminer par un point ; le point lui-même pourrait être confondu avec un symbole de produit.

▸ Plus généralement, il faut éviter que deux formules se suivent sans être séparées par au moins un mot de français. Par exemple, au lieu de "Montrer que, pour tout $x \in E$, $f(x) > 0$" écrire "Montrer que, pour tout $x \in E$, on a l'inégalité $f(x) > 0$".

▸ Les mathématiciens sont en désaccord sur l'accord du "Soit" placé en début de phrase. En mathématiques, depuis Bourbaki, il est d'usage de l'accorder, mais le Pr Kahane recommande, lui, de le laisser invariable. Il en est de même de "étant donné". Bourbaki l'accorde dans tous les cas, alors que l'usage commun est le suivant : "Etant donné" placé en début de phrase est invariable, mais il s'accorde en genre et en nombre lorsqu'il est placé après, comme dans "Les ensembles E et F étant donnés, ..."

▸ L'Académie des sciences a établi une liste de symboles mathématiques pouvant servir de verbe dans une phrase mathématique. En voici un extrait : $\in$, $=$, $\subset$, $\leq$, $\geq$, $<$, $>$.

Exemples : "Si $x \in E$, alors...", "... tel que $x \leq 2$."

Un moyen simple pour savoir si l'usage du symbole mathématique est légitime consiste à vérifier si la phrase ainsi écrite peut se lire facilement. Relisons les deux exemples ci-dessus : "Si x appartient à E, alors...", "... tel que x soit inférieur à 2". Ces deux propositions ont un sens. On ne peut en revanche pas écrire "Si $A \cup B$, alors...", car à la lecture on obtiendrait "Si A union B, alors...", ce qui n'a pas de sens ! Autre exemple : on pourra écrire "Montrer que $F \subset E$" (lire "montrer que F est inclus dans E"), ou "Montrer l'inclusion $F \subset E$".

A noter pour ceux que cela choque : il ne s'agit pas d'un dévoiement des règles de logique. Quand on rédige un texte de mathématiques, on s'adresse à des hommes, pas à des machines. Le français est utilisé seulement comme support pour arriver à un discours clair et aussi convaincant que possible, mais ce que l'on écrit est un texte scientifique, où les mots prennent un sens particulier, où le vocabulaire a été enrichi, et où l'on mêle les mots usuels à des objets particuliers, comme les formules. D'ailleurs l'enrichissement du français est constamment pratiqué pour des groupes de mots désignant des objets : on écrit sans hésiter $[0, 1]$, et non la formule française correspondante "l'intervalle réel d'extrémités zéro et un". L'enrichissement du français par des formules exprimant des relations est tout aussi légitime. Les formules de ce discours adressé à des hommes ne doivent en aucun cas être confondues avec celles de la logique formelle.

1.8. La ponctuation

▸ La faute de ponctuation la plus fréquente dans les sujets d'examen est l'utilisation abusive du deux-points, “:”. Le deux-points ne peuvent servir qu'à introduire une énumération, ou une explication de ce qui précède. **On ne doit généralement pas faire précéder les formules mathématiques d'un deux-points.** On écrira par exemple “Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.”, mais pas “Résoudre l'équation différentielle : $y' + y = 0$.”

▸ Le passage à la ligne avant une formule dans une phrase n'est légitime que lorsque cette formule est trop importante pour tenir sur la ligne, lorsque sa hauteur est telle que la ligne se trouverait trop séparée du reste du texte, ou lorsqu'on veut la mettre en évidence, par exemple pour la numéroter.

▸ La virgule sert à séparer au sein d'une phrase des membres de phrase de même nature. Elle est parfois utilisée abusivement, à la place du point final, pour relier ce qui devrait constituer deux phrases différentes.

▸ Lorsqu'une phrase se termine par un symbole mathématique, la ponctuation finale est souvent omise. C'est particulièrement visible lorsqu'il s'agit d'une phrase interrogative, l'absence du point d'interrogation passant rarement inaperçue.

1.9. Le style

● Le style utilisé dans un sujet d'examen traduit souvent les conceptions épistémologiques de l'auteur du sujet. Une nouvelle tendance est apparue ces dernières années, et elle semble devenir très répandue dans l'enseignement secondaire. Elle consiste à renoncer à l'utilisation du subjonctif, et à rédiger les sujets à l'indicatif. Par exemple, au lieu de "Soit E un ensemble...", on écrit "E est un ensemble..." Ce passage du subjonctif à l'indicatif marque une évolution de la manière dont les mathématiques sont perçues : en français, le subjonctif est le mode de l'hypothèse, tandis que l'indicatif indique ce qui est. Ainsi, en rédigeant un énoncé à l'indicatif, on indique que l'exercice a pour but de vérifier des propriétés d'objets qui existent, que l'on observe, que l'on décrit. Au contraire, en rédigeant un énoncé au subjonctif, on marque que l'on exprime des hypothèses, et que le but de l'exercice est d'établir une implication logique entre ces hypothèses et une conclusion que l'on demande d'établir. C'est la vision commune traditionnelle du mathématicien : pour lui, ce qui fait la substance des mathématiques, c'est l'implication, la démonstration. Quand on démontre $P \Rightarrow Q$, ce qui est important, c'est la flèche ; on ne s'intéresse pas à la vérité ontologique de P, ni à celle de Q. En rédigeant à l'indicatif, on affirme la vérité de P. La flèche devient secondaire. Ce changement philosophique s'accompagne d'ailleurs dans le secondaire de la suppression des démonstrations auxquelles on substitue des règles techniques, des "recettes". Peut-être est-ce légitime pour des cours de techniques mathématiques, d'outils mathématiques pour d'autres domaines. On peut regretter que ces cours s'appellent encore "mathématiques". Ceux qui prétendent faire des mathématiques, avec des démonstrations reliant des hypothèses et des conclusions, ne peuvent en aucun cas rédiger à l'indicatif.

● Les sujets d'examens doivent être rédigés dans un style neutre, et l'on ne doit pas s'adresser directement aux candidats. On écrit donc "Montrer que..." et non "Montrez que ...", "On pourra utiliser.." plutôt que "Utilisez...". Bien entendu, le tutoiement est exclu ("Place trois points non alignés sur la figure..."). Si pour des raisons philosophiques ou pédagogiques on désire néanmoins rédiger en s'adressant aux candidats, il convient d'être homogène, en conservant cette façon de rédiger. On évitera donc

"Montrez que... En déduire...", et l'on écrira "Montrez que... Déduisez-en que..."

● Curieusement, deux tendances opposées se rencontrent dans les sujets d'examens :

> — d'une part une tendance à ne pas mettre assez d'informations en se contentant de faire référence à des figures, au lieu d'écrire *in extenso* toutes les hypothèses,
>
> — d'autre part une peur maladive de manquer de précision qui conduit à cultiver avec délectation répétitions et pléonasmes.

▸ Le premier défaut est traité dans le paragraphe sur les problèmes appliqués.

▸ Le second défaut consiste à répéter indéfiniment la définition d'un symbole mathématique. Prenons un exemple. Une fois que l'on a défini Γ comme la courbe représentative de la fonction f..., il est inutile de répéter "la courbe Γ". On peut tout simplement parler de Γ. On écrira ainsi "Tracer Γ.", plutôt que "Tracer la courbe Γ.", ou pire que "Tracer la courbe représentative Γ de la fonction f...".

● Certains détails de rédaction trahissent les conceptions philosophiques des auteurs de sujets. On a vu plus haut la rédaction à l'indicatif. Il y a d'autre exemples. En voici un. Certains ne croient pas à l'existence réelle de l'infini. Il demandent donc de "calculer la limite de f ***à*** l'infini". Au contraire, ceux qui considèrent que ce point existe demandent de "calculer la limite de f ***en*** l'infini".

1.10. La structure

▸ Un sujet d'examen est découpé en exercices et problèmes eux-mêmes découpés en questions et sous-questions. Ce découpage donne lieu à un système de numérotation qui doit être homogène et constant tout au long du sujet. Si dans l'exercice 1 on adopte une numérotation des questions de la forme "1), 2), a), b)", il ne faut pas se mettre à numéroter "1°), a.," les questions de l'exercice 2.

▸ Les systèmes de numérotation suivent la mode. Dans les années 70, la numérotation "légale" était très populaire : Par exemple, "1., 1.1., 1.2., 2., etc.” Elle l’est moins maintenant, et une numérotation de la forme “1), a), b), 2), ...” semble la plus répandue. En perte de vitesse les “I., I.1., II., ...” et les “A –, B –, ...”.

▸ On notera que les problèmes de numérotation non homogène se posent surtout quand un sujet est constitué à partir d’exercices apportés par plusieurs auteurs. En outre, une informatisation méthodique supprime le problème : une fois qu’un style de numérotation a été défini au début du document, l’ordinateur se charge de numéroter correctement les différentes questions.

▸ Proposition de normalisation pour le baccalauréat : Exercices numérotés dans le style légal : “1., 1.1., ...2.,...”, sans découpage en parties, avec une numérotation limitée à deux niveaux (“1.1.”, mais pas “1.1.1.”). Problème découpé en parties numérotées A., B., ..., puis avec une numérotation de style légal à deux niveaux. Lorsqu’on fait référence à une question, le dernier point est omis : “On pourra utiliser le résultat de la question A.1.2, et remarquer...”. Pour la typographie, numérotation en marge et en gras, texte de chaque question indenté avec une indentation correspondant au niveau de la question. Exemple :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x \ln x + 1$.

1.1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de f.

1.2. Calculer $\int_1^2 f$.

▸ Les **sujets de concours**, ou les sujets d’examens universitaires longs posent certains problèmes spécifiques. Compte tenu du grand nombre de copies que chaque correcteur doit lire, il faut absolument réduire les risques d’erreur d’affectation : le correcteur croit corriger la question 3.a., alors que le candidat pensait en fait répondre à la question 2.a. On pourrait penser que ce type d’erreur est improbable. Ce n’est pas le cas lorsque le sujet comporte l’étude d’une même question mathématique sous différents types d’hypothèses : dans la partie *A*, on a un certain type d’hypothèses, que l’on change dans les parties *B* et *C*, et l’on pose plusieurs fois les mêmes questions, le changement d’hypothèses pouvant changer la conclusion. C’est mathématiquement très beau, mais pour un sujet d’examen, cela peut engendrer des erreurs. Pour éviter ce risque, il est commode de repérer les différentes questions par une numérotation unique, sans sous-questions. Cela n’empêche d’ailleurs pas de faire différentes parties. Si la partie *A* se termine avec la question 5, la première question de la partie B peut être numérotée 6.

1.11. Les figures

Le personnel chargé de la préparation matérielle des sujets d'examen n'est ni équipé ni qualifié pour refaire les figures. Dans un sujet d'examen officiel, il est indécent de mettre une figure dessinée à la main. Aussi faut-il que les auteurs de sujets fournissent à la fois :

- un tirage de toute figure devant être imprimée dans le sujet,
- un fichier source permettant éventuellement à la commission des sujets d'apporter des modifications au dessin sans avoir à le refaire complètement.

Le tirage devra être effectué à l'échelle 1 (important lorsqu'on précise des unités graphiques), imprimé en noir sur un fond blanc, avec une résolution supérieure à 300 points par pouce. Voici pourquoi : les dessins sont d'abord scannés, puis retraités et imprimés. Chaque étape s'accompagne d'une perte de résolution, et un dessin imprimé à 160 ou 200 points par pouces arrive pratiquement illisible sur le sujet. A éviter également, les tirages sur papier millimétré : le scanner fonctionne en noir et blanc, et les sujets sont également imprimés en noir et blanc. On ne peut pratiquement pas traiter de façon satisfaisante un dessin fait sur papier millimétré.

Le fichier source du dessin peut être un fichier graphique, ou encore mieux un fichier mathématique conduisant au dessin grâce à un logiciel mathématique courant ; on peut ainsi fournir un fichier en MAPLE, ou bien un classeur MATHEMATICA.

1.12. Les fautes de vocabulaire et d'orthographe les plus fréquentes

- **c'est-à-dire** prend deux traits d'union.
- **tout à fait** ne prend pas de trait d'union.

● **événement** prend deux accents aigus.

● **La variation** V (f) d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ est définie par

$$V(f) = \overline{\lim}[\, \Sigma\, |f(x_{i+1} - f(x_i)|\,] ,$$

où la somme est prise sur les partages $[a=x_0, x_1, ..., x_n=b]$ de $[a, b]$. C'est une notion dont on se sert en intégration. Dans un sujet de baccalauréat, ce n'est certainement pas ce que l'on demande de calculer ! Demander plutôt "d'étudier **les** variation**s** de f".

● Dans l'expression "quel que soit", **quel que** s'écrit en deux mots et s'accorde en genre et en nombre. Exemple : "Montrer que, quels que soient les réels x et y, on a la relation..."

● **Polynôme** perd son accent circonflexe dans **polynomial**, et **binôme** fait de même dans **binomial**.

S'écrivent avec un accent circonflexe	S'écrivent sans accent circonflexe
polynôme	polynomial
binôme	binomial
cône	conique
	zone

● Pour les **calculs de limites,** on peut demander de "calculer la limite de f en 0", ou bien de "calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0". On ne peut pas demander de "calculer la limite de f lorsque x tend vers 0" (qu'est-ce que x ?), ni de "calculer la limite de $f(x)$ en 0" (c'est x qui tend vers 0, et ce point appartient à l'espace de départ de f, tandis que $f(x)$ est dans l'espace d'arrivée). Au-delà du baccalauréat, on ne doit d'ailleurs pas poser ce genre de question : on demande aux étudiants de démontrer l'existence de la limite et d'en donner la valeur.

● Employé transitivement, **satisfaire** a une connotation sexuelle, et si un homme peut sans doute satisfaire une femme, une fonction ne peut que **satisfaire à** une équation.

● **Espérance** ne prend pas d'accent aigu sur le premier e.

● On écrit ***n*-ième**, et non $n^{\text{ème}}$ ou n^{e}.

- Il n'y a pas unicité des équations ; on demandera donc de donner **une équation** d'une droite, et non d'en donner **l'**équation.

- **Standard** est invariable (pas de **s** au pluriel).

- **Barème** s'écrit avec un accent grave.

- Les quatre quarts de plan délimités par deux droites sécantes sont des **quadrants**, et non des *cadrans*. Dans un espace de dimension 3, on parle d'**octants**, et plus généralement dans un espace de dimension finie, d'**orthants**. Par exemple, l'octant positif de $\mathbb{R}^3$ est $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

- Le verbe **résoudre** se termine par un t à la troisième personne du présent de l'indicatif : il résou**t.** Le participe passé du verbe résoudre est **résolu**. Voici un extrait de la table de conjugaison de ce verbe.

INDICATIF PRÉSENT	SUBJONCTIF PRÉSENT
je résous	que je résolve
tu résous	que tu résolves
il résout	qu'il résolve
nous résolvons	que nous résolvions
vous résolvez	que vous résolviez
ils résolvent	qu'ils résolvent

- **Inclus** devient **incluse** au féminin, et se termine donc par un **s**, tandis que **exclu** dont le féminin est **exclue** n'en prend pas.

- Ne pas confondre **l'air** que l'on respire avec **l'aire** d'un triangle.

- Sur un compact, une fonction continue n'attein*d* pas ses bornes ; elle les **atteint**.

- On peut définir entre certains objets du plan une relation "*être asymptote **à***" (réflexive mais en général non symétrique). La préposition utilisée est "*à*". Lorsque le mot *asymptote* est utilisé comme substantif, les règles habituelles s'appliquent, et la préposition *de* doit être utilisée. En notant C le graphe de la fonction $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$, on dira par exemple : « Les asymptotes **de** C sont les axes de coordonnées. », ou « Les axes de coordonnées sont asymptotes **à** C. » À éviter : « Les axes de coordonnées sont les asymptotes **à** C. »

● La même règle s'applique aux tangentes. Si l'on omet le mot *droite* pour employer *tangente* comme substantif, la préposition *de* doit être utilisée. On dira ainsi « La droite D est tangente **à** C en M. », ou « La tangente **de** C en M est la droite D. », ou « La droite tangente **à** C en M est D. ». A éviter : « La tangente **à** C en M est la droite D. »

● Autrefois, les titres étaient souvent écrits en majuscules, non accentuées. Avec les outils de composition informatiques, on dispose maintenant de nombreuses polices de toutes tailles. On n'écrit donc plus les titres en capitales, mais simplement dans un corps plus important que le reste du texte. Il n'y a également plus de raison de ne pas accentuer les lettres majuscules, en pratique le **à** placé en début de phrase comme dans : « À quelle condition... ». Toujours en raison de la disponibilité de polices variées, éviter le soulignement.

● Le **t** euphonique que l'on rencontre dans la tournure "verbe + pronom sujet" doit être placé entre deux traits d'union, et ne pas être suivi d'une apostrophe. L'apostrophe convient lorsque ce **t** représente la forme élidée du pronom *toi* ; normalement, cette dernière forme ne peut apparaître dans un sujet de mathématiques. Par exemple : « T'as-t-il démontré correctement le résultat ? »

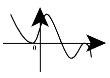
● *Pour* certains étudiants, **pour** est devenu ces dernières années une sorte de joker pouvant à la fois prendre le sens de **si** de **seulement si** ou bien celui de **si et seulement si**. Dans un énoncé, il convient d'éviter l'usage de **pour** à la place de ces conjonctions. L'usage de **pour** est indispensable dans des constructions comme **pour lequel**, **pour tout**. Exemple : « Pour quelles valeurs de α la matrice M_α est-elle diagonalisable ? » Une telle question réclame une réponse en "si et seulement si". Il reste beaucoup trop d'étudiants **pour lesquels** ce n'est pas clair.

● **Les mots latins** doivent être composés en italique, s'ils ne sont pas francisés. Voici un tableau regroupant les formes latines et les formes francisées des mots latins d'usage courant en mathématiques.

Forme latine		Forme française	
Singulier	Pluriel	Singulier	Pluriel
extremum	*extrema*	extrémum	extrémums
maximum	*maxima*	maximum	maximums
minimum	*minima*	minimum	minimums
a fortiori		à fortiori	
a posteriori		à postériori	
a priori		à priori	

● L'Académie des sciences a fixé dans une note du 23 février 1959 la règle suivante : les mots **maximum**, **minimum**, **optimum** et **extrémum** sont à employer comme noms masculins. Ils ne seront pas utilisés comme adjectifs ; on emploiera dans ce cas **maximal**, **minimal**, **optimal** et **extrémal**.

● Les extrémums sont sources d'erreurs. Rappelons les définitions mathématiques portant sur ce thème. Soient Γ un ensemble, f une application $\Gamma \to \mathbb{R}$, et $x \in \Gamma$. On dit que x est un **maximum** de f sur Γ si, pour tout $y \in \Gamma$, on a $f(y) \leq f(x)$. On dit que x est un **maximum strict** de f sur Γ si, pour tout $y \in \Gamma \setminus \{x\}$, on a $f(y) < f(x)$. On définit de même les **minimums** et les **minimums stricts**. On dit que x est un **extrémum** de f sur Γ si x est un minimum ou un maximum de f sur Γ. On appelle **borne supérieure** (resp. **borne inférieure**) de f sur Γ l'élément λ de $\overline{\mathbb{R}}$ défini par $\lambda = \sup\{f(x) : x \in \Gamma\}$ (resp. $\lambda = \inf\{f(x) : x \in \Gamma\}$). Si f admet un maximum (resp. un minimum) $x \in \Gamma$, la borne supérieure (resp. la borne inférieure) est atteinte ; on parle alors aussi de **valeur maximale** (resp. de **valeur minimale**) de f sur Γ. On notera qu'un maximum de f appartient à l'ensemble de définition de f, tandis que la valeur maximale de f appartient à l'image de f. Si les bornes de f sur Γ appartiennent à $\mathbb{R}$, on dit que f est **bornée** sur Γ. La borne supérieure de f sur Γ est unique, mais il n'y a en général pas existence ni unicité du maximum. Soient U une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$, f une application $U \to \mathbb{R}$ et $x \in U$. On dit que x est un **maximum local** de f sur U s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $y \in B(x, \varepsilon)$, on ait $f(y) \leq f(x)$. On dit que x est un **maximum local strict** de f sur U s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $y \in B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$, on ait $f(y) < f(x)$.

On définit de même les **minimums locaux** et les **minimums locaux stricts**. Si x est un maximum local ou un minimum local de f sur U, on dit que x est un **extrémum local** de f sur U. Un maximum de f sur U est également un maximum local de f sur U, mais l'inverse est faux. Dans le langage courant, on confond souvent *maximum* et *valeur maximale*. Cette confusion s'accompagne parfois d'une confusion entre le nom *maximum* et l'adjectif *maximal* ("le risque est maximum"). Une telle confusion peut conduire à des incohérences. Par exemple, si l'on considérait le maximum comme étant la valeur dans l'image, on pourrait dire que pour la fonction f dont le graphe est , 0 est un minimum local strict et un maximum local strict !

● Les noms propres sont souvent mal orthographiés. On écrit **Leibniz**, et non Leibnitz, **Bernoulli**, et non Bernouilli. Le mathématicien français contemporain, inventeur de la théorie des distributions est **Laurent Schwartz** (avec un "t" dans Schwartz). En revanche, pour le théorème de **Schwarz** sur les dérivées partielles, pour l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**, **Schwarz** s'écrit sans "t".

● La translittération du cyrillique est délicate. L'AFNOR, le CNRS et l'AMS ont publié des normes, presque identiques. Voici quelques exemples de translittération normalisée de noms de mathématiciens. Pour une liste complète, on pourra consulter le *World Directory of Mathematicians*.

Ecriture normalisée	**Ecriture traditionnelle (source *Bourbaki*)**
Čebičev	Tchébitcheff
Aleksandrov	Alexandroff
Suslin	Souslin
Tihonov	Tychonoff

1.13. Les indications légales

Bien que ces indications soient portées en tête des sujets, elles y sont généralement placées à la fin de la rédaction, lorsque le sujet proprement dit est établi.

▸ Cinq indications doivent obligatoirement figurer sur un sujet d'examen :

- la nature de l'épreuve ;
- la date de l'épreuve ;
- la durée de l'épreuve ;
- le nombre de pages que comporte le sujet ;
- le fait que les calculatrices ou les documents soient autorisés ou interdits.

- Dans la nature de l'épreuve, on doit préciser le cas échéant :
  - l'établissement (Université, école...),
  - l'intitulé précis de l'épreuve, avec l'indication du diplôme ou du concours dans le cadre duquel le sujet est posé, (baccalauréat, licence, concours d'entrée à...),
  - le domaine sur lequel porte l'épreuve (mathématiques très souvent, mais parfois un domaine plus précis, par exemple, algèbre, mathématiques générales, théorie des nombres etc.)

- Pour la date de l'épreuve, on peut indiquer la session (cas du baccalauréat et des concours d'entrée aux grandes écoles), ou bien l'année universitaire et le numéro de l'épreuve (exemple : "Année universitaire 2005-2006 – Premier partiel").

- Le nombre de pages que comporte le sujet est généralement indiqué par une numérotation de la forme "p. i/n", où i est le numéro de la page, et où n est le nombre total de pages que comporte le sujet. Il arrive que dans une photocopieuse deux pages passent en même temps. Dans une impression recto-verso, il peut alors n'y avoir qu'un recto ou qu'un verso. En imprimerie on comptait traditionnellement de 5 à 10 % d'ouvrages défectueux. Avec les progrès techniques, ce taux a été ramené à environ 1 ou 2 % pour des tirages en noir et blanc. Toujours prévoir quelques exemplaires supplémentaires dans chaque enveloppe de sujets.

● Les calculatrices sont maintenant autorisées dans les épreuves écrites ; c'est “l'option par défaut”, applicable si un sujet ne précise pas le contraire. Donc, si l'on désire que les étudiants n'utilisent pas de calculatrice ou de notes durant une épreuve, cela doit être mentionné explicitement en tête du sujet. Pour certaines épreuves, il peut être ridicule d'autoriser les calculatrices et d'interdire les documents. Les mémoires des calculatrices sont telles qu'elles peuvent contenir l'essentiel du cours. Pour le baccalauréat, le ministère de l'Education en a tiré les conséquences : depuis la session 1993, les candidats peuvent utiliser leur calculatrice, ainsi qu'un formulaire qui leur est fourni. Voici l'en-tête utilisée dans les sujets de baccalauréat :

☞

> L'emploi des instruments de calcul est autorisé pour cette épreuve. En particulier, toutes les calculatrices de poche (de format maximal 21cm × 15cm), y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, sont autorisées à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimantes. L'échange des calculatrices entre les candidats pendant les épreuves est interdit.

☜

▸ Outre les mentions obligatoires, on peut rajouter différentes indications :

- recommandations concernant la rédaction et la présentation ;
- indication du caractère obligatoire ou facultatif des différents exercices ;
- précautions à prendre pour préserver l'anonymat éventuel des copies ;
- indications prévenant du contrôle de l'identité des candidats durant l'épreuve ;
- indications de barème.

● Voici l'avertissement utilisé dans certains sujets de bac :

☞

> Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

☜

● Lorsque les candidats sont sensés répondre à toutes les questions du sujet, il est généralement inutile de le préciser.

● Jusqu'à la loi de 1997 imposant l'anonymat dans les examens universitaires, il était d'usage de signer sa copie à la fin. Indépendamment de cette nouvelle loi, on constate que les étudiants remplissent de moins en moins les en-têtes (nom, prénom, date de naissance, numéro de place...), et cela pose fréquemment des problèmes en licence où, du fait du très grand nombre d'étudiants, les homonymies sont fréquentes. Voici un type d'avertissement qui était utilisé :

☞ Le candidat doit remplir soigneusement les en-têtes de sa copie et de chaque intercalaire utilisé, et signer lisiblement à la fin de son devoir. Les copies dont les en-têtes ne seraient pas remplies ne seront pas corrigées. ☜

Au contraire, au baccalauréat et dans les concours, l'anonymat est de rigueur. On voit donc des mentions comme celle-ci :

☞ Il est strictement interdit aux candidats de signer leur copie, ou d'y faire figurer quelque signe de reconnaissance que ce soit. ☜

● Une des tâches les plus désagréables que doivent accomplir les enseignants est le contrôle de l'identité des candidats au cours des examens. Ces contrôles sont souvent mal perçus, et donnent parfois lieu à des incidents. On peut réduire ceux-ci en prévenant à l'avance les candidats. Cela peut se faire sur les convocations, mais on peut aussi demander sur le sujet lui-même aux candidats de préparer une pièce d'identité à laisser sur le bord de la table pour que l'appariteur ou le surveillant puisse plus facilement faire son travail.

● L'actualité récente nous a démontré que le risque de communication avec l'extérieur des candidats durant une épreuve n'est pas seulement théorique. De plus en plus de sujets comportent des mentions rappelant l'interdiction de posséder durant l'épreuve des outils électroniques de communication (téléphones, mais aussi calculatrices équipées de liaisons infrarouges etc.). Pour lutter contre ce type de fraude, les indications portées sur le sujet ne sont pas d'une grande utilité (voir le rapport sur les différents types de fraude et les contre-mesures).

● Il est toujours risqué d'indiquer à l'avance un barème précis pour une épreuve. On est en effet alors tenu de le respecter. Mieux vaut ne rien indiquer, ou bien se limiter à quelques indications générales, comme cela se fait dans les sujets de baccalauréat : on y indique seulement le nombre total de points de chaque exercice et du problème.

1.14. La maquette

Cet aspect est très souvent négligé. Pourtant, des services spécialisés ou des grandes universités doivent produire chaque année des milliers de sujets d'examen. Il est surprenant qu'ils n'aient pas tous pensé à faire travailler des maquettistes professionnels sur un schéma standard de sujet. Voici simplement quelques idées et indications.

▸ Les marges des sujets doivent être assez importantes pour ne pas risquer d'avoir des documents coupés au tirage. Les marges standard sont de $2,54$ cm tout autour du texte. Laisser également un blanc suffisant sous le titre courant des pages 2 et suivantes, pour qu'il ne puisse être confondu avec le texte du sujet proprement dit (au moins 2 cm).

▸ Les traits dans les tableaux statistiques. Il n'y a pas de règle générale ; on doit seulement veiller à ce que le tableau soit facilement lisible, et clairement détaché du reste du texte.

> — Un tableau occupant une page séparée n'a généralement pas besoin d'un cadre ; toutefois, si l'on a tracé des lignes horizontales pour séparer les lignes, et des lignes verticales pour séparer les colonnes, il est préférable de terminer le tableau par un cadre formé soit d'une double ligne, soit d'une ligne épaisse.
>
> — Un tableau inséré au milieu du texte doit être isolé par un cadre.
>
> — Si les colonnes se subdivisent, il est indispensable de marquer la séparation des différentes colonnes, et leur regroupement logique. Sinon, on peut éviter les lignes verticales lorsque le contenu de chaque colonne est suffisamment séparé de celui des colonnes voisines (compter la largeur de trois “M” majuscules).
>
> — Si le nombre de colonnes est faible, il est inutile de séparer les lignes. Sinon, on peut soit utiliser un trait horizontal, soit tramer alternativement les lignes.

▸ **Les tableaux de variations.** Autrefois, la composition typographique des tableaux de variations était compliquée et onéreuse. On avait donc pris l'habitude de simplifier ces tableaux au maximum. Les logiciels de composition modernes permettent d'encadrer facilement les tableaux de variations. Il n'y a donc plus de raison de ne pas le faire.

Plus curieuse est la pratique consistant à écrire en montant ou en descendant à l'intérieur d'un tableau de variations, en mettant de grandes flèches. Le tableau des variations d'une fonction permet une représentation symbolique des ses propriétés de monotonie ; ce tableau n'est pas la représentation graphique. Une petite flèche suffit largement à marquer la croissance ou la décroissance d'une fonction, et rien ne justifie d'écrire en montant ou en descendant. Imaginons ce que donnerait une telle pratique dans un texte :

Sur [0;1[, la fonction $x \mapsto 1/(1-x)$ est croiss ante, convexe, et possède une asymptote verticale en x

▸ Pour la maquette, voici les tendances de la mode 2005 : les titres se portent en bandeau, avec des traits épais pour l'en-tête générale, des traits fins pour les titres courants et les titres des exercices. Les remarques et avertissements s'habillent d'un encadrement fin sur un fond tramé. Les énoncés sont bien dégagés autour des numéros de questions, grâce à un texte indenté à gauche.

1.15. En guise de conclusion

En respectant à la lettre toutes les règles précédentes, on arrive à des sujets parfaits... mais pas forcément clairs, ni agréables à lire. Il y a donc une dernière règle, qui consiste à transgresser toutes les autres règles chaque fois que cela permet d’améliorer la clarté du texte, ou de rendre ce dernier plus plaisant. Pour cela, il n’y a pas de modèle.

2. La correction des sujets

Outre le contrôle des erreurs de rédaction mentionnées dans la section précédente, le correcteur de sujet doit procéder à un certain nombre de contrôles complémentaires. Nous allons ci-dessous en dresser la liste. Une liste regroupant l'ensemble des vérifications est placée en annexe.

2.1. La couverture du programme

Un bon sujet doit couvrir un maximum de chapitres du programme. Un sujet d'examen ne portant que sur une partie marginale du programme n'est pas honnête. C'est une des premières vérifications à faire, dans la mesure où une simple re-rédaction ne peut arranger un sujet qui ne satisferait pas à ce critère.

2.2. Le sujet porteur d'idées fausses

Cela peut paraître curieux, mais un sujet mathématiquement correct peut porter les candidats qui aborderont ce sujet à croire des choses fausses. Voici un exemple, donné au baccalauréat :

> Voici les résultats d'une enquête réalisée sur 10 000 personnes : parmi elles, 40 % sont des fumeurs, 4 % sont atteintes du cancer du poumon ; en outre, 75 % des personnes atteintes du cancer du poumon sont des fumeurs.

1) Reproduire et compléter le tableau de répartition de ces 10 000 personnes

	Personnes atteintes du cancer du poumon	Personnes non atteintes du cancer du poumon	Totaux
Fumeurs			
Non fumeurs			
Totaux			10 000

2) On choisit au hasard une de ces 10 000 personnes. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

“La personne est à la fois un fumeur et atteinte du cancer du poumon”.

“La personne n’est pas atteinte du cancer du poumon”.

Ainsi posé, cet exercice est correct : toute l’action est concentrée sur un ensemble bien défini de personnes, et le terme “enquête” laisse supposer que toutes les personnes de l’ensemble considéré ont été interrogées. Malheureusement, l’énoncé risque fort de ne pas être lu ainsi : ce que fournit l’enquête, ce ne sont pas les fréquences relatives fournies par l’énoncé, mais les effectifs. Or ce sont justement ces effectifs que l’on demande de reconstituer. L’énoncé procède donc à l’envers de la réalité pratique. De plus, les pourcentages donnés sont certainement arrondis. Les effectifs que l’on reconstitue ne sont sans doute pas les effectifs initiaux. Ce point n’est pas expliqué, et des étudiants qui le croiraient pourraient aussi croire que la loi des grands nombres exprime la convergence des effectifs et non seulement la convergence des fréquences. Comme la loi des grands nombres n’est pas au programme de terminale, cela laisse libre cours à cette idée fausse, et cela compliquera la tâche pour enseigner la loi des grands nombres à ceux qui continueront leurs études. En outre, les fréquences observées sont interprétées dans la deuxième question comme des probabilités. Si un étudiant interprète l’exercice comme un sondage effectué auprès de 10 000 personnes prises dans une population plus large, il va confondre probabilités et statistiques. Pour poursuivre des études de statistiques, il importe de bien distinguer ces deux points de vue. Sinon, pourquoi faire une théorie des sondages, et pourquoi parler d’estimateurs ?

2.3. L'orientation malheureuse

‣ L'enchaînement des questions peut pousser les étudiants dans des directions malheureuses. Voici un exemple :

> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = e^x + \ln x$.
> **1.** Calculer la dérivée de f.
> **2.** Etudier les variations de f.

Dans un tel énoncé, on pousse le candidat à invoquer la dérivée de f pour étudier les variations de cette fonction – ce que la plupart des étudiants feront de toute façon –, alors qu'il suffit de remarquer que f est croissante, comme somme de deux fonctions croissantes.

Autre exemple :

> Calculer $\lim\limits_{0} f$.

Devant une telle question, nombreux sont les étudiants qui commencent une énumération de "lim =..." ; ils manipulent un objet, la limite, sans savoir s'il existe. Tout le raisonnement est alors faux. Si au contraire, on leur demande de montrer l'existence de la limite, et d'en donner la valeur, le taux d'erreurs diminue fortement. Même chose pour les intégrales impropres.

‣ Plus grave encore, l'enchaînement des questions peut pousser les étudiants à donner un résultat faux. Voici un exemple, extrait d'un exercice donné au baccalauréat (session de juin 1994) :

> ...
> Dans cette question, on donnera les résultats à 10^{-2} près par défaut.
> a) Déterminer les valeurs possibles de la variable aléatoire X.
> b) Déterminer la loi de probabilité de X.
> c) En déduire l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

Devant des questions ainsi posées, les étudiants vont effectuer le calcul du c) en utilisant les résultats obtenus en a) et b), tronqués à 10^{-2} près. Malheureusement, dans l'exercice, X peut prendre la valeur 100, et le calcul ainsi posé donne un résultat faux. Pour arriver au bon résultat, il faut partir de la loi de probabilité de X à 10^{-5} près. Deux questions :

— Combien d'étudiants ont-ils été piégés par cet enchaînement de questions ?

— Combien de correcteurs ont-ils été piégés et ont-ils sanctionnné le résultat correct ?

‣ La manière dont une question est rédigée peut aussi conduire les étudiants à commettre des fautes. Voici deux exemples :

— Dans une étude graphique, si l'on demande "Que peut-on dire de f en 2 ?", en espérant une réponse sur la croissance de la fonction, on va immanquablement obtenir comme réponse "f est croissante en 2", ce qui est fautif, car la propriété de croissance n'est pas ponctuelle. Demander plutôt : "La fonction f est-elle monotone au voisinage de 2 ?".

— Dans l'étude de la convergence d'une série entière, si l'on demande "Que peut-on dire de la convergence de la série entière en x tel que $|x| < k < R$?", on invite les étudiants à répondre "La série entière converge normalement en x tel que $|x| < k < R$." ; c'est encore une réponse fautive, car la notion de convergence normale n'est pas ponctuelle. Poser plutôt deux questions : "Comment converge la série entière en x tel que $|x| < R$? Comment se fait la convergence de la série sur $R_k = \{x : |x| \leq k < R\}$?" La première question appelle une convergence absolue, et la seconde une convergence normale.

2.4. Le barème

Dans les sujets où un barème est indiqué, vérifier si la somme des points indiqués tombe sur la note maximale (en général 20, mais dans une épreuve de coefficient égal à n, on a intérêt à faire un barème sur $n \times 20$).

2.5. L’enchaînement des questions

Cela dépend de l’examen ou du concours, mais il y a des cas où l’on ne tient pas à bloquer les étudiants qui ne sauraient pas faire la première question. On doit donc contrôler la dépendance des questions. L’indépendance des questions est souvent perçue comme une condition nécessaire, car pour le baccalauréat elle est exigée. En général, il n’en est rien : par exemple, dans un certificat de calcul différentiel, à l’université, si l’on pense que le théorème des fonctions implicites doit absolument être assimilé par les étudiants pour qu’on leur délivre le certificat, on peut concevoir un sujet dont la première question demande l’application de ce théorème, et dont les questions suivantes dépendent de la première. Un bon contrôle de la dépendance des questions les unes par rapport aux autres permet d’ajuster un sujet au propos que l’on a pour l’examen.

Fiche de vérification des notations

Symb.	Signification	Symb.	Signification	Symb.	Signification
a		E		ϵ	
b		F		ζ	
c		G		η	
d		H		θ	
f		I		κ	
g		J		λ	
h		K		μ	
j		L		ξ	
k		M		ρ	
m		N		σ	
n		O		τ	
p		P		υ	
q		Q		φ	
r		R		χ	
s		S		ψ, Ψ	
t		T		ω	
u		U		Γ	
v, ν		V		Δ	
w		W		Θ	
x		X		Λ	
y		Y		Ξ	
z		Z		Φ	
A		α		Ω	
B		β		$\aleph$	
C		γ		$\beth$	
D		δ			

Liste des contrôles à effectuer pour un sujet d'examen de mathématiques		
Vérification	**Conforme**	**Non conforme**
Couverture des différents thèmes du programme		
Sujet mathématiquement correct		
Problème plausible (dans le cas d'un problème appliqué)		
Risque de conduire à des idées fausses		
Ne suggère pas de démonstration stupide		
Enchaînement des questions (du point de vue de leur dépendance relative)		
Clarté et précision des questions		
Facilité de correction des réponses (les questions n'admettent-elles qu'une seule réponse correcte ?)		
Hypothèses explicitées *in extenso*		
Symboles tous définis avant d'être utilisés		
Unicité de l'usage des symboles		
Notations conformes aux normes		
Grammaire mathématique, insertion correcte des formules dans le texte		
Ponctuation (enlever les deux points excédentaires, vérifier les virgules et la ponctuation de fin de phrase ; contrôler les passages à la ligne)		
Style (pléonasmes, répétitions inutiles..)		
Typographie mathématique (italiques)		
Vérification des O et des 0		
Formules : homogénéité, ne se suivent pas sans mots de séparation		
Numérotation homogène des questions		
Figures (placement au bon endroit, qualité du tirage et du dessin, conformité des légendes avec les notations...)		
Orthographe, français		
Indications légales (nature et durée de l'épreuve, utilisation des calculatrices...)		
Indications facultatives (recommandations pour la rédaction, indications sur la dépendance des questions,...)		
Barème (en cas d'indication ; la somme est-elle égale à 20 ?)		
Maquette (taille des polices, largeur des marges suffisantes pour éviter qu'une partie du sujet soit coupée à l'impression...)		

Références

[1] J. P. COLIN : *Dictionnaire des difficultés du français*. Coll. Les usuels du Robert, Le Robert éd., Paris, 1978.

Contient un dictionnaire typographique remarquable.

[2] J. L. DOOB *ET AL* : *A manual for authors of mathematical papers.* Americal Mathematical Society pub., Providence (USA), 1984.

[3] N. J. HIGHAM : *Handbook of writing for the mathematical sciences.* SIAM Pub., Philadelphia (USA), 1993.

Une référence très récente, très complète, avec une importante bibliographie complémentaire.

[4] IMPRIMERIE NATIONALE (COLLECTIF) : *Lexique des règles typographiques en usage à l'imprimerie nationale.* Imprimerie nationale éd., Paris, 1990.

Attention : les règles typographiques pour la composition des textes mathématiques indiquées dans cet ouvrage ne sont plus celles en usage actuellement. En particulier pour l'usage des italiques, et pour les espaces (voir *Mathematics into Type* pour les règles contemporaines). Ce livre donne beaucoup d'informations utiles (voir par exemple la section sur la ponctuation).

[5] N. E. STEENROD, P. R. HALMOS, M. M. SCHIFFER & J. A. DIEUDONNÉ : *How to write mathematics*. Americal Mathematical Society pub., Providence (USA), 1973.

[6] E. SWANSON : *Mathematics into Type*. Americal Mathematical Society pub., Providence (USA), 1971, 1979, 1986.

Le texte de référence pour la typographie mathématique. Fixe les règles en usage de nos jours.