

Niveaux de Landau des variétés symplectiques compacts

Laurent Charles.

- ① Hamiltonien de Landau
- ① Surfaces à courbure constante
- ② Variétés symplectiques
 - premier niveau
 - niveaux supérieurs

Hamiltonien de Landau (1930)

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} (\nabla_x^2 + \nabla_y^2) \quad \text{sur } L^2(\mathbb{R}^2)$$

$$\text{avec } \nabla_x = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2} B y, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{i}{2} B x.$$

B constante > 0

Fait : • Spectre $(\hat{H}) = B(\frac{1}{2} + \mathbb{N})$

• Espaces propres $\mathcal{H}_m = \text{Ker}(\hat{H} - B(\frac{1}{2} + m))$, $m \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{H}_0 = \text{Ker } \nabla_{\bar{z}} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_m = \nabla_z^m \mathcal{H}_0$$

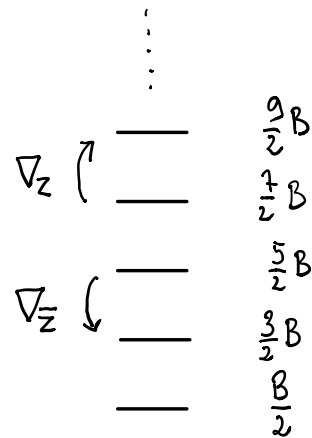
$$\text{Ici, } \nabla_z = \frac{1}{\sqrt{2}} (\nabla_x - i \nabla_y) \quad \text{et} \quad \nabla_{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\nabla_x + i \nabla_y)$$

sont les opérateurs d'échelle.

Preuve :

$$\hat{H} = -\nabla_z \nabla_{\bar{z}} + \frac{B}{2}$$

$$[\nabla_z, \nabla_{\bar{z}}] = B$$



M surface orientable compacte avec métrique g

$L \rightarrow M$ fibré en droite hermitien avec connexion ∇

$$i \operatorname{curv}(\nabla) = B \operatorname{vol}_g \quad \text{avec } B \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \nabla^* \nabla : C^\infty(L) \rightarrow C^\infty(L)$$

$$\begin{array}{ccc} & \nabla & \\ C^\infty(L) & \xrightarrow{\quad} & \Omega^1(L) \\ & \nabla^* & \end{array}$$

$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ les valeurs propres.

Hypothèse : B et courbure de Gauss S constantes

$B \geq 0$ quitte à modifier l'orientation.

Théorème : Si $B + (m+1)S > 0$, alors

$$\lambda_m = B \left(\frac{1}{2} + m \right) + S \frac{m(m+1)}{2}$$

$$\operatorname{mult}(\lambda_m) = B \frac{\operatorname{vol}_g(M)}{2\pi} + \left(\frac{1}{2} + m \right) \chi(M)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\operatorname{deg}(L)}$

\uparrow
caractéristique d'Euler

Preuve: introduire structure complexe sur M compatible avec g
 et structure holomorphe sur L telle que $\bar{\partial}_L = \nabla^{0,1}$

Identité de Weitzenböck: $\Delta = \bar{\partial}_L^* \bar{\partial}_L + \frac{B}{2}$

Commutation: $\bar{\partial}_L \bar{\partial}_L^* = \bar{\partial}_{L \otimes K^{-1}}^* \bar{\partial}_{L \otimes K^{-1}} + (B+S)$

où $K =$ fibré canonique,

$$\bar{\partial}_L: C^\infty(L) \rightarrow C^\infty(L \otimes \bar{K}) = C^\infty(L \otimes K^{-1})$$

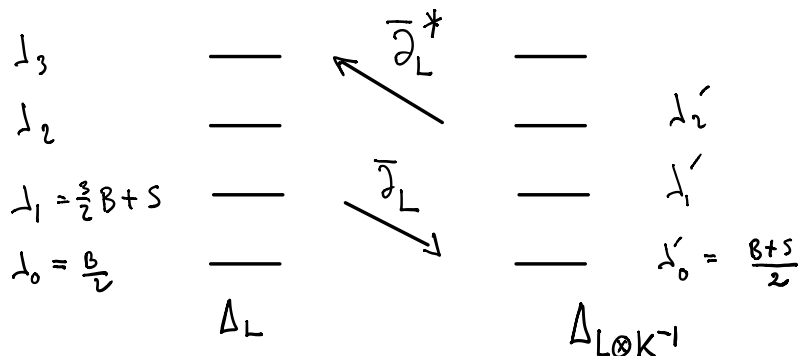
Riemann-Roch: $h^0(L) = \deg L + \frac{1}{2} \chi(M)$ si $\deg L$ grand

Conséquence pour B grand :

$$\lambda_0 = \frac{B}{2} \text{ avec multiplicité } h^0(L)$$

$$\lambda_{m+1} = \lambda'_m + B + \frac{1}{2} S \quad \text{si } m \geq 0$$

avec $0 \leq \lambda'_0 < \lambda'_1 < \dots$ valeurs propres de $\Delta_{L \otimes K^{-1}}$



Théorème : Si $B + (m+1)S > 0$, alors

$$\lambda_m = B\left(\frac{1}{2} + m\right) + S \frac{m(m+1)}{2}$$

$$\text{mult}(\lambda_m) = B \frac{\text{vol}_g(M)}{2\pi} + \left(\frac{1}{2} + m\right) \chi(M)$$

ces valeurs propres ne dépendent ni de g ni de ∇
Les autres ?

Exemple (a) pour $B = 0$, $\lambda_0 = 0 \Leftrightarrow (L, \nabla)$ trivial

(b) en genre ≥ 2 , pour $L = K^{\otimes r}$ et $S = -1$,

$$\lambda_{r+m} = \lambda_r + \frac{1}{2} \mu_m$$

avec $\{\mu_m, m \in \mathbb{N}\} = \text{Spectre du Laplacien de } M$

Référence : Iengo - Li (94)

Tejero Prieto (06)

Champ magnétique constant.

- (M, g) variété riemannienne compacte
- $L \rightarrow M$ fibré en droite hermitien
avec une connexion ∇

Laplacien : $\Delta = \frac{1}{2} \nabla^* \nabla : C^\infty(M, L) \rightarrow C^\infty(M, L)$

en $p \in M$, $\text{icourb}_p(\nabla) = g_p(j_B \cdot, \cdot)$
avec $j_B : T_p M \rightarrow T_p M$.

Spectre de j_B : $\pm i B_j$ avec $0 \leq B_0 \leq B_2 \leq \dots$

Champ constant si tous les B_j sont égaux à B
et indépendants de p .

Lorsque $B = 1$, j_B est une structure complexe

Hypothèse : $\dim M = 2m$ et

$$\omega = i \operatorname{comb}(\nabla) = g(j \cdot, \cdot) \quad \text{à } j^2 = -1.$$

Laplacien avec champ magnétique $k\omega$, $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta_k = \frac{1}{2} (\nabla^{L^k})^* \nabla^{L^k} : C^\infty(M, L^{\otimes k}) \rightarrow C^\infty(M, L^{\otimes k})$$

Idée : $\operatorname{Spec}(\Delta_k) \rightarrow k(\frac{m}{2} + \mathbb{N})$ quand $k \rightarrow \infty$

$$I_0 = [0, \frac{m}{2} + \frac{1}{2}[, \quad I_m = \frac{m}{2} + m + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\quad \text{pour } m = 1, 2, \dots$$



$$\Sigma_{m,k} := \operatorname{Sp}(k^{-1} \Delta_k) \cap I_m$$

$$\mathcal{H}_{m,k} := \bigoplus_{\lambda \in \Sigma_{m,k}} \operatorname{Ker}(k^{-1} \Delta_k - \lambda)$$

Premier niveau de Landau de

$$\Delta_k = \frac{1}{2} (\nabla^{L^k})^* \nabla^{L^k} : C^\infty(M, L^{\otimes k}) \rightarrow C^\infty(M, L^{\otimes k})$$

$$\Sigma_{0,k} = \text{Sp}(k^{-1} \Delta_k) \cap [0, \frac{n}{2} + \frac{1}{2}]$$

$$\mathcal{H}_{0,k} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma_{0,k}} \text{Ker}(k^{-1} \Delta_k - \lambda)$$

Résultats dans le cas Kählérien (j intégrable)

- $\Sigma_{0,k} = \{ \frac{n}{2} \}$

par identités de Kodaira

$$\Delta_k = \bar{\partial}_L^* \bar{\partial}_L + k \frac{n}{2}$$

- $\mathcal{H}_{0,k} = H^0(M, L^k)$

- $\dim \mathcal{H}_{0,k} = \int_M \exp\left(\frac{k\omega}{2\pi}\right) \text{Todd}(M, j)$

si k est assez grand par le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch et le théorème d'annulation de Kodaira.

Premier niveau de Landau de

$$\Delta_h = \frac{1}{2} (\nabla^{L^k})^* \nabla^{L^k} : C^\infty(M, L^{\otimes k}) \rightarrow$$

$$\Sigma_{0,h} = \text{Sp}(h^{-1}\Delta_h) \cap [0, \frac{n}{2} + \frac{1}{2}]$$

$$\mathcal{H}_{0,h} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma_{0,h}} \text{Ker}(h^{-1}\Delta_h - \lambda)$$

Résultats dans le cas général :

Guillemin-Urbie (88): $\Sigma_{0,h} \subset \frac{n}{2} + C h^{-1}[-1, 1]$

Borthwick-Urbie (96) : si h est assez grand,

$$\dim \mathcal{H}_{0,h} = \int_M \exp\left(\frac{h\omega}{2\pi}\right) \text{Todd}(M, j)$$

Niveaux de Landau supérieurs de

$$\Delta_h = \frac{1}{2} (\nabla^{L^k})^* \nabla^{L^k} : C^\infty(M, L^{\otimes k}) \rightarrow$$

$$\Sigma_{m,k} = \text{Sp}(h^{-1} \Delta_h) \cap \frac{m}{2} + m + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

$$\mathcal{H}_{m,k} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma_{m,k}} \text{Ker}(h^{-1} \Delta_h - \lambda)$$

Faure - Tsujii (15) :

$$\Sigma_{m,k} \subset \frac{m}{2} + m + C_m h^{-\frac{1}{4}} [-1, 1]$$

Théorème (C) :

h^{-1} au lieu de $h^{-\frac{1}{4}}$ et pour h assez grand

$$\dim \mathcal{H}_{m,k} = \int_M \exp\left(\frac{h\omega}{2\pi}\right) \text{ch}(F_m) \text{Todd}(M)$$

$$\text{avec } F_m = \text{Sym}^m(T^{1,0}M)$$

Projecteur spectral $\Pi_{m,k} : C^\infty(M, L^k) \rightarrow \mathcal{H}_{m,k}$

Asymptotique du noyau $\Pi_{0,k}(x,y)$ lorsque $k \rightarrow \infty$

• dans le cas Kählerien se déduit de
Boutet de Monvel - Sjöstrand (75)

\rightsquigarrow analyse $\frac{1}{2}$ classique en géométrie complexe

• généralisation dans le cas symplectique par
Borthwick-Urbie (07), opérateurs de Hermite
Ma-Marinescu (08),
Kordyukov (18).

Données linéaires en $x \in M$

$$\omega_x = \text{icomb}(\nabla)_x \in \Lambda^2 T_x^* M$$

g_x produit scalaire euclidien de $T_x M$

Laplacien de $C^\infty(T_x M)$: $\Delta_x = \frac{1}{2} \nabla^* \nabla$

avec $\nabla = d + \frac{i}{2} \alpha$, $\alpha_\xi(\eta) = \frac{1}{2} \omega_x(\xi, \eta)$

Spectre de Δ_x : $\frac{1}{2} + \mathbb{N}$

Projecteur $\Pi_{x,m}$ sur $\text{Ker}(\Delta_x - (\frac{1}{2} + m))$

a pour noyau :

$$\Pi_{x,m}(\eta + \xi, \eta) = (2\pi)^{-m} e^{-\frac{i}{2} \omega_x(\eta, \xi) - \frac{1}{4} |\xi|^2} q_m^{(m-1)}(|\xi|^2)$$

$$\text{où } q_m^{(p)}(x) = \frac{x^{-p}}{m!} \left(\frac{d}{dx} - 1 \right)^m x^{m+p}$$

Données linéaires en $x \in M$

$$\omega_x = \text{icomb}(\nabla)_x \in \Lambda^2 T_x^* M$$

g_x produit scalaire euclidien de $T_x M$

Laplacien de $C^\infty(T_x M)$: $\Delta_{x,h} = \frac{1}{2} \nabla^* \nabla$

avec $\nabla = d + \frac{h}{i} \alpha$, $\alpha_\xi(\eta) = \frac{1}{2} \omega_x(\xi, \eta)$.

Spectre de $h^{-1} \Delta_{x,h}$: $\frac{1}{2} + \mathbb{N}$

Projecteur $\Pi_{x,m,h}$ sur $\text{Ker}(h^{-1} \Delta_{x,h} - (\frac{1}{2} + m))$

a pour noyau :

$$\Pi_{x,m,h}(\eta + \xi, \eta) = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^m e^{-\frac{i}{2} h \omega_x(\eta, \xi) - \frac{h}{4} |\xi|^2} q_m^{(m-1)}(h |\xi|^2)$$

$$\text{où } q_m^{(p)}(x) = \frac{x^{-p}}{m!} \left(\frac{d}{dx} - 1\right)^m x^{m+p}$$

Théorème (C, Kordyukov) :

① $x \neq y$, $\Pi_{m,h}(x,y) = O(h^{-\infty})$

② pour tout choix de coordonnées centrées en x , $\xi \in T_x M$

$$\Pi_{m,h}(x+\xi, x) = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^m F(x, \xi) e^{-\frac{h}{4}|\xi|^2} q_m^{(n-1)}(h|\xi|^2) + O(h^{m-1})$$

avec $F(x, \xi) = v \otimes \bar{u}$ où $u \in L_x$ de norme 1

$v \in L_{x+\xi}$ transport parallèle de u le long de $[x, x+\xi]$

③ on a le développement asymptotique

$$\Pi_{m,h}(x+\xi, x) = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^m F(x, \xi) e^{-\frac{h}{4}|\xi|^2} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} h^{-\frac{\ell}{2}} a_\ell(x, \sqrt{h}\xi) + O(h^{-\infty})$$

avec $a_\ell(x, \xi)$ polynomiales en ξ

Remarque : $e^{-\frac{h}{4}|\xi|^2} h^{-\frac{\ell}{2}} a_\ell(x, \sqrt{h}\xi) = O(h^{-\frac{\ell}{2}})$

Quelques idées sur les preuves :

- ① Noyau du projecteur spectral $\Pi_{m,k}$
- ② $\dim \mathcal{H}_{m,k}$.

Outil principal : une algèbre \mathcal{L} et son calcul symbolique.

① en trois étapes

a - Il existe $(P_{m,k})$ avec le DAS attendu et

$$\text{tel que } \cdot P_{m,k}^2 = P_{m,k} + O(k^{-\infty})$$

$$\cdot [P_{m,k}, \Delta_k] = O(k^{-\infty})$$

b - Faure-Tsujii, résolvante approchée

$$R_k(\lambda) = \sum \varphi_i (\lambda - k^{-1} \Delta_{x_i, k})^{-1} \psi_i$$

$$\text{Alors } \Pi_{m,k} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_m} R_k(\lambda) d\lambda + O(k^{-1/4}) = P_{m,k} + O(k^{-1/4})$$

$$\text{c - a et b } \Rightarrow \Pi_{m,k} = P_{m,k} + O(k^{-\infty}).$$

② $\dim \mathcal{H}_{m, \hbar} =$ nombre de Riemann-Roch de $L^{\hbar} \otimes F$
avec $F = \text{Sym}^m(T^*M)$

rappel: si $M =$ une surface à courbure constante,

$$\mathcal{H}_{m, \hbar} \cong H^0(M, L^{\hbar} \otimes K^{-m}) \quad \text{et} \quad K^{-m} \cong F$$

• Introduire $\mathcal{H}_{F, \hbar}$, quantification de M tordue par F .

par exemple, $\mathcal{H}_{F, \hbar} = 1^{\text{er}} \text{ niveau de Landau de } \Delta_{F, \hbar} = C^{\infty}(L^{\hbar} \otimes F) \ni$

• Construire un isomorphisme $U_{\hbar}: \mathcal{H}_{m, \hbar} \rightarrow \mathcal{H}_{F, \hbar}$

comme opérateur de $\mathcal{L}(C, F)$ avec symbole principal en x

$$C^{\infty}(T_x M) \xrightarrow{\sigma(x)} C^{\infty}(T_x M) \otimes F_x$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Ker}(\Delta_x^{-\frac{m}{2}-m}) \xrightarrow{\cong} \text{Ker}(\Delta_x^{-\frac{n}{2}}) \otimes F_x \\ \text{nul sur l'orthogonal de Ker}(\Delta_x^{-\frac{m}{2}-m}) \end{array} \right.$$

Données linéaires : $F_x = \text{Sym}^m(T_x^{1,0}M)$

Base hermitienne (z_i) de $T_x^{1,0}M$, $i\omega(z_j, \bar{z}_k) = \delta_{jk}$

Opérateur d'annihilation, création $a_i = \nabla_{\bar{z}_i}$, $a_i^+ = -\nabla_{z_i}$

$$[a_i, a_j] = [a_i^+, a_j^+] = 0, \quad [a_i, a_j^+] = \delta_{ij}$$

$$L^2(T_x M) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^m} \mathcal{H}_\alpha \quad \text{avec } \mathcal{H}_0 = \bigcap \text{Ker}(a_i)$$

et des isomorphismes $\mathcal{H}_0 \xrightleftharpoons[a^\alpha]{(a^+)^{\alpha}} \mathcal{H}_\alpha$

$$\Delta_x = \sum_i a_i^+ a_i + \frac{m}{2} \quad \text{a pour spectre } \frac{m}{2} + \mathbb{N}$$

$$\text{Ker}(\Delta_x - \frac{m}{2} - m) = \bigoplus_{|\alpha|=m} \mathcal{H}_\alpha$$

$$\downarrow \quad \sigma(x) = \bigoplus_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} a^\alpha \otimes z^\alpha \quad \leftarrow \text{ne dépend pas du choix de } (z_i)$$

$$\text{Ker}(\Delta_x - \frac{m}{2}) \otimes F_x = \mathcal{H}_0 \otimes \bigoplus_{|\alpha|=m} \mathbb{C} z^\alpha$$

Questions :

(1) la résolvante $R_h(\lambda) = (\lambda - h^{-1}\Delta_h)^{-1}$

• $hR_h(\lambda) = P_h^{-1}$ où $P_h = h^{-2}\Delta_h - \lambda h^{-1}$ est

un opérateur semi-classique ($h = h^{-1}$) d'ordre 0

avec pour symbole $\xi \in T^*M \rightarrow \frac{1}{2}|\xi|^2$

• description microlocale au voisinage de $\{\xi=0\}$?

en particulier pour le hamiltonien de Landau

version semi-classique du sans-laplacien de Kohn.

(2) $\dim \mathcal{H}_{m,h} =$ nombre de RR de $L^h \otimes \text{Sym}^m(T^*M)$

• Preuve directe ?

• Getzler rescaling par l'algèbre \mathcal{L}