

**APPLICATIONS DU MALNORMAL SPECIAL QUOTIENT  
THEOREM (D'APRÈS IAN AGOL, DANIEL GROVES AND  
JASON MANNING)**

NICOLAS BERGERON

CONTENTS

1. Introduction	1
2. Groupes relativement hyperboliques et remplissages de Dehn	1
3. Enveloppe malnormale et remplissage	3
4. Hauteur et décroissance	5
5. Démonstration du théorème 1.1	7
6. QVMH = hyperbolique et virtuellement spécial	8

1. INTRODUCTION

Dans cet exposé on donne les grandes idées de la démonstration du théorème suivant qui est la point de départ du théorème d'Agol.

**1.1. Théorème** (Théorème de séparation faible (Agol-Groves-Manning)). *Soient  $G$  un groupe hyperbolique et  $H$  un sous-groupe quasi-convexe virtuellement spécial. Pour tout élément  $g \in G - H$ , il existe un quotient  $\varphi : G \rightarrow \mathcal{G}$  tel que  $\varphi(g) \notin \varphi(H)$  et  $\varphi(H)$  est fini.*

2. GROUPES RELATIVEMENT HYPERBOLIQUES ET REMPLISSAGES DE DEHN

Soit  $G$  un groupe de type fini. Une *structure périphérique* sur  $G$  est un ensemble  $\mathcal{P}$  de sous-groupes de  $G$  tel que:

- Pour tout  $P \in \mathcal{P}$ , on a  $N_G(P) = P$ .
- Pour tout  $P \in \mathcal{P}$  et tout  $g \in G$ , le conjugué  $P^g = gPg^{-1}$  appartient à  $\mathcal{P}$ .
- L'ensemble  $\mathcal{P}$  ne contient qu'un nombre fini des classes de conjugaisons différentes.

Un élément  $P \in \mathcal{P}$  est appelé *sous-groupe parabolique maximal* en référence aux sous-groupes paraboliques des groupes kleinéens.

Fixons une structure périphérique  $\mathcal{P}$  sur  $G$ . Soit  $P_1, \dots, P_s$  un ensemble fini de représentants tels que

$$\mathcal{P} = \{P_i^g \mid i = 1, \dots, s, g \in G\}.$$

---

Membre de l'Institut Universitaire de France.

**2.1. Définition.** On dit que  $G$  est *hyperbolique relativement à  $\mathcal{P}$*  si  $G$  opère proprement discontinument par isométries sur un espace  $\delta$ -hyperbolique  $X$  tel que pour tout  $L > 0$ , il existe une famille  $G$ -invariante  $\mathcal{H}$  d'horoboules<sup>1</sup> (presque convexes<sup>2</sup>) telles que

- la famille  $\mathcal{H}$  est  $L$ -séparé: pour tous  $H, H' \in \mathcal{H}$ , on a  $d(H, H') \geq L$ ;
- l'application  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P}$  qui à  $H$  associe  $\text{Stab}_G(H)$  est une bijection;
- le groupe  $G$  opère cocompactement sur  $X - (\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H)$ .

On dira aussi que l'action de  $(G, \mathcal{P})$  sur  $X$  est *géométriquement finie*, ce que l'on notera

$$(G, \mathcal{P}) \curvearrowright_{\text{GF}} X.$$

On peut maintenant laisser le cas où  $X = \mathbf{H}^3$ ,  $G$  est un groupe Kleinéen et  $\mathcal{P}$  l'ensemble de ses sous-groupes paraboliques, guider notre intuition. On est ainsi naturellement amené à la notion de remplissage de Dehn.

**2.2. Définition.** On appelle *remplissage de Dehn*, associé à un choix  $\{N_i \triangleleft P_i\}_{i=1, \dots, s}$ , le quotient

$$\phi : G \rightarrow G(N_1, \dots, N_s) := G / \ll N_1, \dots, N_s \gg.$$

Si de plus  $N_i \triangleleft P_i$  ( $\forall i$ ), on parle de remplissage de Dehn *périphériquement fini*.

**2.3.** Nous allons maintenant chercher à appliquer le théorème de petite simplification géométrique  $(A, \epsilon)$  (cf. exposés de Vincent Guirardel) pour contrôler le groupe

$$G(N_1, \dots, N_s).$$

Rappelons la définition de la constante du ‘fellow traveler’:

$$\Delta(\mathcal{H}) = \sup\{\text{diam}(H^{+20\delta} \cap (H')^{+20\delta}) \mid H \neq H' \in \mathcal{H}\}.$$

Il découle de la définition que si  $L > 40\delta$  alors  $\Delta(\mathcal{H}) = 0$ ; dans la suite nous supposons que c'est toujours le cas. Pour appliquer le théorème de petite simplification géométrique  $(A, \epsilon)$  on a par ailleurs besoin que, pour tout  $i$ , le *rayon d'injectivité*

$$\text{inj}(N_i) = \inf\{d(x, gx) \mid x \in H_i, g \in N_i - \{1\}\}$$

soit ‘grand’ ( $\geq A\delta$ ). Ce n'est pas possible dans notre cas: les  $H_i$  sont des horoboules!

Il nous faut donc légèrement modifier la construction: On remplace  $\text{inj}(N_i)$  par le rayon d'injectivité sur le bord de  $H_i$ :

**2.4. Théorème.** *Si  $\Delta(\mathcal{H}) = 0$  et si, pour tout  $i = 1, \dots, s$ ,*

$$\forall g \in N_i - \{1\}, \forall x \in H_i, d(x, gx) > A,$$

*alors le théorème de petite simplification géométrique  $(A, \epsilon)$  reste valable.*

<sup>1</sup>Rappelons que cela signifie que l'espace  $G \backslash X$  est quasi-isométrique à l'espace métrique formé de  $s$  rayons géodésiques  $\gamma_i$  paramétrés par la longueur d'arc. On peut relever les  $\gamma_i$  en  $\tilde{\gamma}_i$  dans  $X$  et leur associer les fonctions  $h_i : X \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \limsup_{t \rightarrow +\infty} (d(x, \tilde{\gamma}_i(t)) - t)$ . Les horoboules associées sont les sous-espaces  $h_i^{-1}(]-\infty, -R])$ .

<sup>2</sup>Rappelons qu'un sous-espace  $Q \subset X$  est *presque convexe* si pour tous  $x, y \in Q$ , il existe  $x', y' \in Q$  tels que

$$d(x, x') \leq 8\delta, \quad d(y, y') \leq 8\delta \quad \text{et} \quad [x', y'] \subset Q.$$

Noter que si  $Q \subset X$  est  $K$ -quasiconvexe, alors pour tout  $r \geq K$  le voisinage  $Q^{+r}$  est presque convexe.

*Explication.* Le cone-off  $\dot{X}$  (pour  $\rho \gg 1$ ) est toujours  $\delta_{\text{Univ}}$ -hyperbolique (d'après Gromov-Delzant). Le problème est que les points proches des sommets des cônes peuvent être peu bougés. On remplace alors  $\dot{X}$  par le sous-espace  $X' \subset \dot{X}$  où l'on ne garde que la partie des cônes constituée du cône sur le bord des horoboules  $H \in \mathcal{H}$ . La démonstration est alors essentiellement identique.  $\square$

On en déduit:

**2.5. Théorème (Osin).** *Soit  $F \subset G$  un sous-ensemble fini. Alors, il existe un sous-ensemble fini  $B \subset G$  tel que pour tout remplissage de Dehn*

$$\phi : G \rightarrow \bar{G} = G(N_1, \dots, N_s)$$

pour lequel  $B \cap N_i = \emptyset$  ( $\forall i$ ), on a:

- (1)  $\phi(P_i) = P_i/N_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ ;
- (2) le couple image  $(\bar{G}, \bar{\mathcal{P}})$  est relativement hyperbolique;
- (3)  $\phi|_F$  est injective.

*Remarque.* Si le remplissage est *périphériquement fini*, de sorte que chaque groupe  $P_i/N_i$  est fini, alors ces quotients sont hyperboliques.<sup>3</sup> Le théorème d'Osin est ainsi une généralisation du théorème de chirurgie de Dehn hyperbolique de Thurston.

On va maintenant mettre en place la démonstration du théorème 1.1. Mais remarquons immédiatement que si  $H$  est presque malnormal, Bowditch montre que  $(G, \{H^g \mid g \in G\})$  est relativement hyperbolique. Le théorème 2.5 implique alors le théorème 1.1 (noter que les  $P_i$  sont virtuellement spéciaux et donc résiduellement finis; on peut donc choisir les  $N_i$  de sorte que le théorème 2.5 s'applique). On ne s'étonnera donc pas que la démonstration procède par récurrence sur la hauteur de  $H$  dans  $G$ .

### 3. ENVELOPPE MALNORMALE ET REMPLISSAGE

Il correspond à tout sous-groupe quasiconvexe  $H$  de  $G$  une structure périphérique naturelle. Commençons par rappeler:

**3.1. Définition.** Des éléments  $g_1, \dots, g_n \in G$  sont dits *essentiellement distincts* si  $g_i H \neq g_j H$  pour  $i \neq j$ . On dit alors que les conjugués  $H^{g_1}, \dots, H^{g_n}$  sont *essentiellement distincts*. La *hauteur* de  $H$  dans  $G$ , noté  $\text{hauteur}(H < G)$  est le plus grand entier naturel  $n$  tel qu'il existe  $n$  conjugués essentiellement distincts  $H^{g_1}, \dots, H^{g_n}$  tel que l'intersection  $H^{g_1} \cap \dots \cap H^{g_n}$  soit infinie.

Un sous-groupe  $H$  est donc de hauteur 0 (resp. 1) dans  $G$  si et seulement si  $H$  est fini (resp. presque malnormal).

Gitik, Mitra, Rips et Osin montrent que si  $H$  est un sous-groupe quasi-convexe d'un groupe hyperbolique  $G$  alors

$$\text{hauteur}(H < G) < +\infty.$$

Dans la suite on fixe un sous-groupe quasiconvexe  $H < G$  et on note

$$n = \text{hauteur}(H < G).$$

---

<sup>3</sup>En effet un groupe hyperbolique relativement à des groupes hyperboliques (par exemple finis) est hyperbolique.

**3.2. Lemme.** *Le nombre de classes de conjugaison dans  $H$  de sous-groupes minimaux infinis de la forme  $H \cap H^{g_2} \cap \dots \cap H^{g_j}$  (avec  $j \leq n$  et  $g_1 = e, g_2, \dots, g_n$  essentiellement distincts) est fini.*

*Proof.* Par récurrence sur la hauteur, il suffit de montrer que

$$\# \{ \text{classe de } H\text{-conjugaison de sg } H \cap H^g \text{ tq } |H \cap H^g| = \infty \} < \infty.$$

Mais si  $Hg_1H = Hg_2H$  alors les groupes  $H \cap H^{g_1}$  et  $H \cap H^{g_2}$  sont conjugués dans  $H$ . Le lemme découle donc du fait que, puisque  $H$  est quasiconvexe, il existe une constante  $M < \infty$  telle que dans toute double classe  $HgH$  telle que  $H \cap H^g$  est infini, il existe un élément de longueur  $\leq M$ .  $\square$

*Remarques.* 1. Si  $H$  est un sous-groupe quasiconvexe dans un groupe hyperbolique  $G$ , alors les groupes  $H \cap H^{g_2} \cap \dots \cap H^{g_j}$  du lemme 3.2 sont quasiconvexes.

2. Si  $H$  est un sous-groupe quasiconvexe et infini dans un groupe hyperbolique  $G$ , alors  $H$  est d'indice fini dans

$$\text{Comm}_G(H) = \{g \in G \mid H \cap H^g \text{ est d'indice fini dans } H\}.$$

Le corollaire suivant découle du lemme 3.2 et des remarques ci-dessus.

**3.3. Corollaire.** *L'ensemble*

$\mathcal{D} = \{ \text{Comm}_H(K)^h \mid K = H \cap H^{g_2} \cap \dots \cap H^{g_j} \text{ comme dans le lemme 3.2, } h \in H \}$   
*forme une structure périphérique sur  $H$ .*

*Proof.* Si  $h \in H$ , on a:  $\text{Comm}_H(K)^h = \text{Comm}_H(K^{h^{-1}})$ . En particulier, si  $\text{Comm}_H(K)^h = \text{Comm}_H(K)$  alors  $K^{h^{-1}}$  et  $K$  sont tous deux d'indice fini dans  $\text{Comm}_H(K)$  et  $h^{-1} \in \text{Comm}_H(K)$ .  $\square$

Par minimalité des groupes  $H \cap H^{g_2} \cap \dots \cap H^{g_j}$  du lemme 3.2, on déduit que les éléments de  $\mathcal{D}$  forment une *collection presque malnormale* dans  $H$ , c'est-à-dire que

$$(|D_1^h \cap D_2| = \infty \quad D_1, D_2 \in \mathcal{D}, h \in H) \Rightarrow (D_1 = D_2 \text{ et } h \in D_1).$$

L'ensemble  $\mathcal{D}$  est appelé *enveloppe malnormale* de  $H$  dans  $G$ .

**3.4.** De la même manière on associe à  $H$  la structure périphérique sur  $G$ :

$$\mathcal{P} = \{ \text{Comm}_G(D)^g \mid D \in \mathcal{D}, g \in G \}.$$

*Remarques.* 1. La structure périphérique  $\mathcal{P}$  ne dépend que de la classe de commensurabilité de  $H$ .

2. Tout sous-groupe  $D$  dans  $\mathcal{D}$ , resp.  $P$  dans  $\mathcal{P}$ , contient un (conjugué d'un) groupe  $H \cap H^{g_2} \cap \dots \cap H^{g_j}$  du lemme 3.2 d'indice fini.

Par minimalité des groupes  $H \cap H^{g_2} \cap \dots \cap H^{g_j}$  du lemme 3.2, on déduit que  $\mathcal{D}$  (et de même  $\mathcal{P}$ ) forme une *collection presque malnormale* dans  $H$  (dans  $G$ ), c'est-à-dire que

$$(|D_1^h \cap D_2| = \infty \quad D_1, D_2 \in \mathcal{D}, h \in H) \Rightarrow (D_1 = D_2 \text{ et } h \in D_1).$$

L'ensemble  $\mathcal{D}$  est appelé *enveloppe malnormale* de  $H$  dans  $G$ .

Un résultat de Bowditch implique alors que les groupes  $(G, \mathcal{P})$  et  $(H, \mathcal{D})$  sont relativement hyperboliques. On dispose de plus d'une notion de quasiconvexité *relative*<sup>4</sup> et il découle par exemple des travaux récents de Martínez-Pedroza que *le*

<sup>4</sup>Notion qui renvoie à la notion de sous-groupe géométriquement fini dans le monde Kleinéen.

sous-groupe  $H < G$  est quasi-convexe relativement aux structures périphériques  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$ . On peut alors appliquer le théorème de remplissage à ces groupes:

**3.5. Définition.** Un remplissage  $\phi : G \rightarrow G(N_1, \dots, N_m)$  avec  $N_i \triangleleft P_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , est un  $H$ -remplissage si  $N_i^{g_i} \subset P_i^{g_i} \cap H$  dès que  $H \cap P_i^{g_i}$  est infini.

Un  $H$ -remplissage induit un remplissage de  $H$ : En effet, pour tout  $D_i \in \mathcal{D}$ , il existe  $g_i \in G$  et  $P_{j_i} \in \mathcal{P}$  tels que  $D_i \subset P_{j_i}^{g_i}$ . On pose alors  $K_i = N_{j_i}^{g_i} \cap D_i$  et on associe à ces groupes le remplissage

$$H \rightarrow H(K_1, \dots, K_n).$$

L'inclusion  $H \hookrightarrow G$  induit un morphisme

$$H(K_1, \dots, K_n) \rightarrow G(N_1, \dots, N_m).$$

Outre le MSQT, le résultat technique principal de la démonstration du théorème 1.1 est le théorème suivant.

**3.6. Théorème** (Agol-Groves-Manning). *Supposons  $\text{hauteur}(H < G) \geq 1$ . Soit  $g \in G - H$ . Alors, il existe un sous-ensemble fini  $B \subset G$  tel que pour tout remplissage de Dehn périphériquement fini*

$$\phi : G \rightarrow \bar{G} = G(N_1, \dots, N_s)$$

pour lequel  $B \cap N_i = \emptyset$  ( $\forall i$ ), on a:

- (1)  $\bar{H} = \phi(H) \cong H(K_1, \dots, K_n)$  (le remplissage de  $H$  induit);
- (2) le couple  $(\bar{H}, \bar{\mathcal{D}})$  est relativement quasiconvexe dans le groupe relativement hyperbolique  $(\bar{G}, \bar{\mathcal{P}})$ ;
- (3)  $\phi(g) \notin \phi(H)$ ;
- (4)  $\text{hauteur}(\bar{H} < \bar{G}) < \text{hauteur}(H < G)$ .

La démonstration des trois premiers points est dans le même esprit que celle du théorème 2.5; je vais me concentrer sur le dernier point.

#### 4. HAUTEUR ET DÉCROISSANCE

**4.1.** Il correspond au groupe relativement hyperbolique  $(G, \mathcal{P})$  un espace  $\delta$ -hyperbolique  $X$ .<sup>5</sup> Il existe une notion naturelle de 'coeur convexe'<sup>6</sup>  $Y = Y(R)$  dans  $X$  de sorte que  $(H, \mathcal{D}) \curvearrowright_{\text{GF}} Y$ , les horoboules sont compatibles et si  $\gamma$  est une géodésique de  $X$  dont les extrémités appartiennent à l'ensemble limite de  $H$ , on a  $\gamma^{+R} \subset Y$ .

L'inclusion  $Y \hookrightarrow X$  induit:

$$\begin{array}{ccc} H \setminus Y & \hookrightarrow & H \setminus X \\ & \searrow i & \downarrow \\ & & G \setminus X. \end{array}$$

**4.2. Définition** (Géométrisation de la hauteur). On appelle *multiplicité* de  $H \setminus Y \rightarrow G \setminus X$  le plus grand entier  $n$  tel que le sous-espace

$$S_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in (H \setminus Y)^n : i(z_1) = \dots = i(z_n) \text{ \& } z_i \neq z_j \text{ if } i \neq j\}$$

<sup>5</sup>Sans perte de généralité, on peut maintenant supposer que  $X$  est un graphe connexe et que  $G$  opère librement sur  $X$ .

<sup>6</sup>Un sous-graphe  $H$ -invariant.

contient une composante connexe  $C$  telle que, pour tout  $i = 1, \dots, n$ , le groupe image

$$A_i = \text{im}(\pi_1(C) \xrightarrow{(\text{pr}_i)^*} \pi_1(H \setminus Y) \rightarrow H)$$

est infini.

*Remarques.* 1. Il faut faire attention aux points bases. Pour cela il suffit de fixer un arbre maximal  $T$  dans  $H \setminus Y$ ,  $p = (p_1, \dots, p_n)$  une point base dans  $C$  et des chemins  $\sigma_i$  dans l'arbre  $T$  reliant le point base dans  $H \setminus Y$  au point  $p_i$ .

2. Les sous-groupes  $A_i < H$  sont conjugués dans  $G$ : si  $g_{ij}$  désigne la classe du lacet obtenu en juxtaposant les chemins  $i(\sigma_i)$  et  $i(\sigma_i^{-1})$ , alors  $g_{ij}A_jg_{ij}^{-1} = A_i$ .

**4.3. Proposition.** *Pour  $R$  suffisamment grand (fonction de la constante d'hyperbolicité), la multiplicité de  $H \setminus Y \rightarrow G \setminus X$  est égale à hauteur( $H < G$ ).*

*Remarque.* On retrouve en particulier qu'un groupe quasiconvexe est de hauteur finie.

*Proof.* On commence par montrer que la multiplicité est supérieure à la hauteur: Supposons hauteur( $H < G$ ) =  $n$  et considérons  $g_1 = e, g_2, \dots, g_n$  essentiellement distincts tels que le groupe

$$J = H \cap H^{g_2} \cap \dots \cap H^{g_n}$$

soit infini. Puisque  $(G, \mathcal{P}) \curvearrowright_{\text{GF}} X$ , la classification des isométries implique que soit  $J$  contient un élément hyperbolique  $a$ , soit  $J$  est parabolique (contenu dans un groupe  $P \in \mathcal{P}$ ). Dans le premier cas, pour  $R$  suffisamment grand l'axe  $\gamma$  (quasi-géodésique) de  $a$  est contenu dans

$$Y \cap g_2Y \cap \dots \cap g_nY.$$

Le cas parabolique se traite de la même manière. Dans tous les cas, on en déduit que la multiplicité est supérieure à  $n$ .

Pour montrer que la hauteur est supérieure à la multiplicité, on considère les groupe  $A_1, \dots, A_n$  de la définition de la multiplicité. D'après la remarque avant la proposition, on a:  $A_j^{g_{ij}} = A_i$ . Posons  $g_i = g_{1i}$ . On a alors:

$$A_1 \subset H \cap H^{g_2} \cap \dots \cap H^{g_n}.$$

Enfin, il découle essentiellement de la construction que les éléments  $e, g_2, \dots, g_n$  sont essentiellement distincts.  $\square$

**4.4. Démonstration du point (4) du théorème 3.6.** Supposons par l'absurde que hauteur( $H < G$ ) = hauteur( $\bar{H} < \bar{G}$ ) =  $n$ . Quitte à prendre  $R$  suffisamment grand et un remplissage de Dehn suffisamment long (en changeant  $B$ ), on peut supposer que l'on a un diagramme:

$$\begin{array}{ccc} H \setminus Y & \xrightarrow{i} & G \setminus X \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \bar{H} \setminus \bar{Y} & \xrightarrow{\bar{i}} & \bar{G} \setminus \bar{X}, \end{array}$$

où  $\bar{X} = (\text{Ker}\phi) \setminus X$  et  $\bar{Y} = (\text{Ker}\phi \cap H) \setminus Y$ . On a alors  $S_n \cong \bar{S}_n$ . Notons  $\bar{C}$  la composante connexe de  $\bar{S}_n$  correspondant à  $C$  et  $\bar{A}_i, i = 1, \dots, n$ , les groupes infinis

correspondants. Puisque  $\bar{G}$  est hyperbolique, le groupe  $\bar{A}_1$  contient un élément  $\bar{a}$  d'ordre infini; soit  $\gamma_{\bar{a}}$  un lacet correspondant à  $\bar{a}$  et soit  $\gamma_a$  le lacet associé dans  $C$ .

L'image  $\bar{a}$  de  $\gamma_a$  dans  $\bar{H}$  factorise par un élément  $a \in H$  qui est donc d'ordre infini et appartient à  $H \cap H^{g_2} \cap \dots \cap H^{g_n}$  avec  $e, g_2, \dots, g_n$  essentiellement distincts. Donc  $a$  appartient à un groupe  $D \in \mathcal{D}$ . Mais  $\phi : G \rightarrow G(N_1, \dots, N_m)$  est un remplissage par  $N_i \triangleleft P_i$  donc  $\bar{a} = \phi(a)$  est d'ordre fini, ce qui est la contradiction recherchée.

## 5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1

On procède par récurrence sur hauteur( $H < G$ ). Si la hauteur est nulle le sous-groupe  $H$  est fini et le théorème est immédiat. Sinon on va appliquer le théorème 3.6. C'est possible car  $H$ , étant virtuellement spécial, est résiduellement fini et donc chaque sous-groupe  $P \in \mathcal{P}$  — étant une extension finie d'un sous-groupe de  $H$  — est encore résiduellement fini. On obtient ainsi  $\bar{H}$  et  $\bar{G}$  tels que

$$\text{hauteur}(\bar{H} < \bar{G}) < \text{hauteur}(H < G).$$

Le problème est que pour perpétuer la récurrence, on a besoin que  $\bar{H}$  soit résiduellement fini. C'est là qu'intervient le MSQT.

**5.1.** Nous donnons maintenant les détails: Soient  $\{D_j\}_{j=1, \dots, n}$  et  $\{P_j\}_{j=1, \dots, m}$  des représentants des classes de conjugaison dans  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$ , resp. Il découle du MSQT qu'il existe des sous-groupes  $\dot{D}_j \triangleleft D_j$  tels que pour tout sous-groupe  $D'_j \triangleleft \dot{D}_j$ , le quotient

$$H(D'_1, \dots, D'_n) = H / \ll D'_1, \dots, D'_n \gg$$

est virtuellement spécial.

Rappelons maintenant que chaque  $D_j$  est un sous-groupe d'indice fini d'un groupe parabolique  $P_{i_j}^g$ .

**5.2. Fait.** Pour tout  $i = 1, \dots, m$ , l'ensemble (non vide)

$$S_i = \{\dot{D}_j^g : j = 1, \dots, n, g \in G, D_j^g \triangleleft P_i\}$$

est fini.

En effet si  $D_j^g$  et  $D_j^{g'}$  sont tous deux des sous-groupes d'indice fini dans  $P_i$ , alors  $g^{-1}g' \in \text{Comm}_G(D) = P_i$ . Donc  $D_j^g$  et  $D_j^{g'}$  sont conjugués dans  $P_i$ . La finitude s'en suit.

**5.3.** On applique maintenant le théorème 3.6: Puisque tout sous-groupe parabolique  $P \in \mathcal{P}$  est résiduellement fini, il existe des  $N_i \triangleleft P_i$  tels que  $N_i \cap B = \emptyset$ , pour tout  $i = 1, \dots, m$ . En posant

$$N'_i = N_i \cap \bigcap_{D \in S_i} D,$$

on obtient alors un  $H$ -remplissage  $G \rightarrow G(N'_1, \dots, N'_m)$  qui vérifie les hypothèses du théorème 3.6 et tel que le remplissage induit  $H \rightarrow \bar{H}$  soit virtuellement spécial (d'après le MSQT). Finalement le théorème 3.6 implique que hauteur( $\bar{H} < \bar{G}$ ) < hauteur( $H < G$ ) et on conclut la démonstration du théorème 1.1 par récurrence.

## 6. QVMH = HYPERBOLIQUE ET VIRTUELLEMENT SPÉCIAL

On conclut cet exposé en expliquant comment déduire des méthodes ci-dessus (et toujours du MSQT) une démonstration un peu plus directe du théorème suivant.

**6.1. Théorème (Wise).** *Un groupe  $G$  appartient à la classe QVMH si et seulement si  $G$  est hyperbolique et virtuellement spécial.*

Pour simplifier on ne considère que le cas d'un produit amalgamé  $G = A *_C B$ . Il s'agit donc de montrer que si  $C$  est quasiconvexe dans  $G$  et  $A$  et  $B$  virtuellement spéciaux, alors  $G$  est encore virtuellement spécial. On a déjà fait remarquer dans un précédent exposé qu'il suffit de montrer que  $C$  est séparable dans  $G$ . C'est ce que nous démontrons maintenant en utilisant des remplissages de Dehn.

**6.2.** Soit  $g \in G - C$ . Puisque  $C$  est résiduellement fini, le théorème 3.6 et la démonstration du théorème 1.1 impliquent qu'il existe un morphisme  $\phi : G \rightarrow \bar{G}$  tel que

- le groupe  $\bar{G}$  est hyperbolique,
- le groupe  $\phi(C)$  est fini et ne contient pas  $\phi(g)$ ,
- les morphismes restreints

$$\phi|_A : A \rightarrow \bar{A} \text{ et } \phi|_B : B \rightarrow \bar{B}$$

sont des remplissages.

De plus quitte à remplacer  $\phi$  par un remplissage 'plus long' (en changeant  $B$ ), on peut supposer que les groupes  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont virtuellement spéciaux. Le produit amalgamé  $\bar{A} *_C \bar{B}$  est alors un quotient de  $G$ . Mais maintenant  $\bar{C}$  est fini et donc presque malnormal. Le théorème d'Haglund et Wise s'applique donc pour conclure que  $\bar{G}$  est virtuellement spécial et donc résiduellement fini. On peut ainsi séparer  $\phi(g)$  du groupe fini  $\bar{C}$  dans un quotient fini. Le groupe  $C$  est donc séparable dans  $G$ .

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, UNITÉ MIXTE DE RECHERCHE 7586 DU CNRS,  
UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE, 4, PLACE JUSSIEU 75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE,  
*E-mail address:* [bergeron@math.jussieu.fr](mailto:bergeron@math.jussieu.fr)  
*URL:* <http://people.math.jussieu.fr/~bergeron>