QUELQUES APPLICATIONS DES COMPLEXES CUBIQUES SPÉCIAUX

FRÉDÉRIC HAGLUND

Table des matières

Voici ce que j'ai raconté ou aurait voulu, ou aurait dû raconter à l'exposé du 5 Octobre.

1. Kit de construction des complexes cubiques (virtuellement) spéciaux.

1.1. Sous-complexes du cube définis par un graphe. Soit $\mathcal{G}$ un graphe d'ensemble de sommets V. Dans $\mathbb{R}^V$ on considère le cube $Q = [-1,1]^{(V)}$. Pour chaque sommet $v \in V$ il y a un vecteur unitaire de base e_v. Les arêtes du cube Q qui sont parallèles à e_v reçoivent la couleur v. On dit alors qu'une face F du cube Q est $\mathcal{G}$-admissible si l'ensemble V_F des couleurs des arêtes de F engendre un sous-graphe complet de $\mathcal{G}$ - bref si les sommets correspondant aux arêtes de F sont deux à deux liés dans $\mathcal{G}$.

Soit $X_\mathcal{G}$ le sous-complexe du cube Q formé par toutes les faces $\mathcal{G}$-admissibles. On vérifie facilement :

Lemme 1.1. (1) *$X_\mathcal{G}$ contient le 1-squelette de Q, donc est connexe.*

(2) *$X_\mathcal{G}$ est invariant par les réflexions s_v le long des vecteurs e_v (=changement de la coordonnée x_v en son opposée), donc tous les links de sommets de $X_\mathcal{G}$ sont identiques*

(3) *En tout sommet $v \in X_\mathcal{G}$ le link est isomorphe au complexe simplicial de drapeau engendré par $\mathcal{G}$ (l'unique complexe dont le 1-squelette est $\mathcal{G}$ et qui est de drapeau), et donc $X_\mathcal{G}$ est à courbure ≤ 0*

(4) *En fait le groupe des automorphismes du revêtement universel $\widetilde{X_\mathcal{G}}$ qui relèvent un produit (fini...) de réflexions s_v est naturellement isomorphe au groupe de Coxeter à angles droits dont la présentation est donné par $\mathcal{G}$ (un générateur d'ordre 2 par sommet de $\mathcal{G}$, une relation de commutation par arête de $\mathcal{G}$)*

(5) *Enfin $X_\mathcal{G}$ ne présente aucune des pathologies d'hyperplans : auto-intersection, auto-tangence, inter-tangence. Et les hyperplans de $X_\mathcal{G}$ sont transversalement orientables.*

Date: 30 octobre 2012.

Comme les pathologies d'hyperplans se poussent en avant par isométrie locale, on peut utiliser le dernier point du Lemme pour prouver la partie réciproque de l'équivalence ci-dessous (dont Anne a prouvé la partie directe) :

Proposition 1.2. *Soit X un complexe cubique compact à courbure négative ou nulle. Sont équivalentes :*

(1) *X ne présente aucune des pathologies d'hyperplans : auto-intersection, auto-tangence, inter-tangence.*
(2) *Le revêtement universel de X est un sous-complexe convexe du complexe de Davis d'un groupe de Coxeter à angles droits W, de sorte que tout élément de $\pi_1 X$ agissant sur $\widetilde{X}$ est la restrictions d'un élément de W.*

Pour finir on pourra travailler avec la caractérisation suivante : *un complexe cubique X est virtuellement spécial s'il admet un revêtement fini X' qui s'immerge par isométrie locale dans un complexe $X_{\mathcal{G}}$ (pour $\mathcal{G}$ convenable).*

2. Propriétés générales des groupes (virtuellement) spéciaux.

Théorème 2.1. *Soit G un groupe virtuellement spécial . Alors :*

(1) *G est* résiduellement fini*, c'est à dire que l'intersection de ses sous-groupes d'indice fini est triviale.*
(2) *En fait $G \subset O(p, q, r, \mathbb{Z}) \subset GL(n, \mathbb{Z})$*
(3) *G vérifie un autre renforcement de la résiduelle finitude : tout sous-groupe "quasi-convexe" est* séparable *(c'est à dire égal à l'intersection des sous-groupes d'indice finis de G qui le contiennent).*

Démonstration. La deuxième et la troisième propriété impliquent la première. Toutes ces propriétés sont héritées par passage à un surgroupe d'indice fini, mais aussi par passage à un sous-groupe quelconque. Donc il suffit de les établir lorsque G est un groupe de Coxeter à angles droits. L'inclusion dans $O(p, q, r)$ est le théorème de Tits qui affirme que la représentation de Witt est fidèle. Pour la séparabilité on peut par exemple utiliser le théorème de Scott pour les groupes de Coxeter à angles droits généraux. Mais ci-dessous on va donne une propriété beaucoup plus forte que la séparabilité. □

Il est temps de rappeler la définition de quasi-convexité ici utilisée.

Définition 2.2 (sous-groupe quasi-convexe, sous-groupe convexe cocompact)**.** Soit G un groupe agissant géométriquement sur X, un complexe cubique $CAT(0)$, et soit $H < G$ un sous-groupe.

Nous dirons que H est *quasi-convexe dans G* (sous-entendu : dans l'action de G sur X) si pour un sommet $v \in X$ l'orbite Hv est une partie quasi-convexe de $X^{(0)}$, autrement dit toute géodésique combinatoire de $X^{(1)}$ entre deux points de Hv reste dans un certain R-voisinage $(Hv)^{+R}$ de l'orbite Hv (R uniforme, i.e. indépendant des deux points choisis).

Nous dirons que H est *convexe-cocompact* (sous-entendu : dans l'action de G sur X) s'il existe un sous-complexe convexe $Y \subset X$ qui est H-invariant et H-cocompact.

Rappelons qu'un sous-complexe $Y < X$ est convexe s'il est connexe et localement plein dans X (propriété de l'inclusion des links de sommets). On montre qu'un sous-complexe convexe est effectivement géodésiquement convexe. Donc "convexe cocompact" implique "quasi-convexe dans G".

Lorsque G est Gromov-hyperbolique la quasi-convexité de H est une notion intrinsèque (ne dépend pas du modèle géométrique X choisi), et on montre qu'en fait H est convexe-cocompact dans l'action de G sur X.

Notons que par définition même "G est spécial" peut se reformuler en : G est convexe-cocompact dans le complexe de Davis d'un groupe de Coxeter à angles droits.

Définition 2.3 (topologie profinie)**.** Soit G un groupe. Un ouvert de la topologie profinie est une union de classes gG' (pour $g \in G, G' \dot{<} G$ un sous-groupe d'indice fini). Une partie de G est dite séparable si elle est fermée dans la topologie profinie.

On aurait pu prendre comme base d'ouvert les classes gG' avec $g \in G, G' \dot{<} G$ distingué : en effet tout sous-groupe d'indice fini est une union finie de classes modulo un sous-groupe distingué d'indice fini. Ainsi la topologie profinie est la plus grossière des topologies de groupe sur G qui rende continus tous les morphismes $G \to F$ vers un groupe fini.

En passant au complémentaire on voit facilement que la définition ci-dessus d'un sous-groupe H séparable correspond bien à la plus "classique" : $H = \cap_{H<G<\dot{<}G} G'$. Et au cours de l'argument on voit qu'il est préférable d'utiliser la base d'ouverts donnée par les sous-groupes distingués : pour fabriquer un sous-groupe distingué $G' \dot{<} G$ contenant H une méthode souvent utilisée est de partir d'un sous-groupe normal d'indice fini N, puis de poser $G' = NH$.

D'autre part la propriété G résiduellement finie correspond précisément à $\{1\}$ fermé, c'est à dire au fait que la topologie profinie est séparée.

Lemme 2.4. *Si $H < G$ est un rétract virtuel du groupe résiduellement fini G alors H est séparable.*

La propriété signifie qu'il existe un sous-groupe $G' \dot{<} G$ contenant H et un morphisme $r : G' \to H$ qui vaut l'identité sur H.

Démonstration. Premier argument : Il suffit de traiter le cas où $G' = G$. Or dans un espace topologique séparé G, tout rétract H est fermé ! [prendre $g \notin H$, poser $h = r(g)$, alors $g \neq h$ donc on peut les séparer par deux ouverts O_g, O_h, et $O_g \cap r^{-1}(O_h)$ donne un ouvert disjoint de H, contenant g]

Deuxième argument : à la main ! □

Nous avons alors

Théorème 2.5 (quasi-convexe est rétract virtuel)**.** *Soit G agissant spécialement sur X, et soit $H < G$ un sous-groupe convexe cocompact. Alors H est un rétract virtuel de G.*

La prochaine fois nous donnerons un argument où la rétraction algébrique est en fait induite par une rétraction cubique.

Pour conclure ces préliminaires rappelons l'interprêtation topologique de la séparabilité.

Définition 2.6 (géométriquement incompressible)**.** Une application continue $Y \to X$ entre espaces connexes est dite *géométriquement incompressible* si l'application induite aux revêtements universels $\widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ est un plongement.

Exemple : si $Y \to X$ est une isométrie locale entre espace à $K \leq 0$ alors elle estgéométriquement incompressible par Cartan-Hadamard. Noter qu'alors les voisinages $Y^{+R} \to X$ sont encore des isométries locales, donc géométriquement incompressibles...

Lemme 2.7. *Soit $Y \to X$ une application continue entre espaces compacts. Choisissons des points bases. Soit $\bar{X} \to X$ le revêtement de X correspondant à $\pi_1 Y$. Si $\pi_1 Y < \pi_1 X$ est séparable alors pour tout compact $K \subset \bar{X}$ il existe un revêtement fini $X' \to X$ par lequel $\bar{X}$ factorise [i.e. : $\pi_1 X'$ est un sous-groupe d'indice fin qui contient $\pi_1 Y$], et tel que $\bar{X} \to X'$ injecte K.*

Lemme 2.8. *Soit $Y \to X$ une application géométriquement incompressible. Choisissons des points bases. Si $\pi_1 Y < \pi_1 X$ est séparable alors il existe un revêtement fini $X' \to X$ tel que $Y \to X$ se relève à $Y \to X'$ en une injection.*

Théorème 2.9. *Soit G un groupe virtuellement spécial , Gromov-hyperbolique et non élémentaire (infini, non virtuellement cyclique). Alors $\pi_1 X$ est large [c'est à dire possède un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte sur un groupe libre non élémentaire]. Et donc $b_1^{virt}(G) = \infty$.*

Démonstration. 1) Si G hyperbolique n'est pas élémentaire alors il contient un sous-groupe quasi-convexe H qui est libre non élémentaire.

2) Et si G est hyperbolique cubique spécial alors nous avons vu que tout sous-groupe quasi-convexe $H < G$ est un rétract d'un sous-groupe $G' < G$ d'indice fini, et contenant H. En particulier H est un quotient virtuel de G. □

Remarque : ce qui précède s'applique bien sûr dès que G possède un sous-groupe libre non élémentaire combinatoirement quasi-convexe. D'où la question : Dans un groupe d'Artin à angles droits non abélien existe t-il toujours un sous-groupe libre convexe cocompact dans l'action sur le complexe de Davis ?

On passe maintenant aux applications plus spécifiques aux variétés.

3. Fibrations virtuelles en dimension 3.

Théorème 3.1 (Agol). *Soit M^3 une 3-variété hyperbolique compacte sans bord. Si $\pi_1 M^3$ est virtuellement spécial alors M^3 est virtuellement fibrée : il existe un revêtement fini $N^3 \to M^3$ tel que N^3 est homéomorphe à la suspension d'un homéomorphisme d'une surface.*

Démonstration. 1) RFRS :

Un groupe G est résiduellement fini $\mathbb{Q}$-résoluble (RFRS) s'il existe une suite de sous-groupes $G = G_0 > G_1 > G_2 > \cdots$ d'indices finis (dans G), d'intersection triviale, et de plus tels que G_{i+1}, non seulement est contenu dans G_i, mais de plus contient $D_{\mathrm{rad}}(G_i)$.

Ici $D(H)$ désigne le sous-groupe dérivé : $D(H) =< [h, h], h \in H >$, et $D_{\mathrm{rad}}(H)$ est le radical du groupe dérivé : $D_{\mathrm{rad}}(H) = \{g/g^k \in D(H)$ pour un certain entier $k\}$.

Exercice 1 : $D_{\mathrm{rad}}(H)$ est invariant par conjugaison, contient $D(H)$ et est bien un sous-groupe (distingué) de H.

Si H est de type fini l'abélianisé $H/D(H)$ a une partie libre L isomorphe à $\mathbb{Z}^r$ et une partie de torsion T, et $D_{\mathrm{rad}}(H)$ est précisément la préimage dans H du groupe fini T. Donc $D_{\mathrm{rad}}(H)$ est une extension de $D(H)$ par le groupe abélien fini T. Et un sous-groupe d'indice fini H' de H contient $D_{\mathrm{rad}}(H)$ s'il correspond à la préimage d'un sous-groupe $L' \oplus T < L \oplus T = H_{\text{abélianisé}}$, où L' est un réseau de L.

Exercice 2 : Si $K < G$ est un sous-groupe et si G est RFRS alors K l'est aussi.

2) Tout groupe virtuellement spécial est virtuellement RFRS.

Remarque : Agol donne un argument un peu rapide pour montrer que tout groupe de Coxeter à angles droits est virtuellement RFRS - il conclut par stabilité de RFRS par sous-groupes.

Dani Wise aime bien l'argument massue suivant : tout groupe d'Artin à angles droits est résiduellement nilpotent libre (Thèse de Carl Droms).

On peut aussi procéder à la main, ce que je propose ci-dessous.

Soit X un complexe cubique spécial avec un nombre fini N d'hyperplan. On suppose que chaque hyperplan est transversalement orienté. Pour tout chemin combinatoire γ et tout hyperplan H de X soit $i_{geom}(\gamma, H)$ le nombre d'intersection *géométrique* de γ avec H. Ainsi $\mathrm{long}(\gamma) = \sum_H i(\gamma, H)$. Il y a aussi un nombre algébrique d'intersection (tenant compte de l'orientation cette fois !), notons-le $i_{alg}(\gamma, H)$.

En notant $G = \pi_1(X, v)$ tout hyperplan H donne lieu à un morphisme $i_H : G \to \mathbb{Z}$ défini sur les lacets basés en v par $\gamma \mapsto i_{alg}(\gamma, H)$. En composant avec $\mathbb{Z} \to \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ on obtient un morphisme i^2_H. Ce morphisme est trivial si et seulement si H est globalement séparant dans X.

Soit ΔG le noyau du morphisme produit $\Pi_H i^2_H$, c'est donc un sous-groupe de G d'indice au plus 2^N. De plus $\Delta G \supset D_{\mathrm{rad}}(G)$. On recommence avec $G_1 = \Delta G$, donc on pose $G_2 = \Delta G_1$, etc...

Pour établir RFRS il suffit de démontrer que $\cap G_i = \{1\}$.

Pour cela on part d'un lacet combinatoire γ basé en v, homotopiquement non trivial. Dans la classe d'homotopie (combinatoire) on prend un représentant de longueur minimale (nécessairement > 0).

On note $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ les relevés de γ aux revêtements finis correspondant à $G_1, G_2, \ldots$. On va montrer que l'un des relevés γ_i n'est plus fermé - donc $\gamma \notin G_i$.

Pour tout chemin combinatoire γ (de longueur combinatoire minimale dans sa classe d'homotopie à extrémités fixées) soit $\mathcal{H}(\gamma, X)$ l'ensemble des hyperplans H de X tels que $i_H(\gamma) > 0$. On pose $h(\gamma) = |\mathcal{H}(\gamma, X)|$. Ainsi $h(\gamma) \leq \mathrm{long}(\gamma)$ avec égalité si tout hyperplan de X qui rencontre γ ne le rencontre qu'une seule fois.

Ou bien $h(\gamma) = \mathrm{long}(\gamma)$ et alors pour tout $H \in \mathcal{H}(\gamma, X)$ on a $i^2_H(\gamma) = 1$, et donc $\gamma \notin G_1$: fini.

Ou bien $h(\gamma) < \mathrm{long}(\gamma)$ donc il existe au moins un hyperplan H tel que $i_H(\gamma) > 1$. Pour tout tel hyperplan H on observe que les arêtes de γ duales à H ne sont pas consécutives (pas d'autotangence !). Quand on retire ces arêtes, on obtient alors des sous-chemins (combinatoires) σ qui sont disjoints de H, de longueur > 0, puis on prend un plus court tel σ (pour tous les H possibles coupant multiplement γ).

La première arête a' de σ est duale à un hyperplan H' qui n'intersecte pas H (pas d'intertangence !) et qui ne coupe pas non plus σ - par minimalité dans le choix de σ. Soit τ un chemin de mêmes extrémités que σ et voyageant au bord du voisinage cubique de H. Alors $\sigma\tau^{-1}$ est un lacet qui n'intersecte H' qu'une fois. Donc dans le revêtement double correspondant à H' l'hyperplan H se dédouble et donc $h(\gamma') > h(\gamma)$.

3) La partie purement 3-variétés de l'argument d'Agol est le résultat suivant :

Théorème 3.2 (Agol)**.** *Soit M^3 une 3-variété hyperbolique compacte sans bord. Si $\pi_1 M^3$ est RFRS alors M^3 est virtuellement fibrée.*

□

4. (Co)homologie virtuelle.

Théorème 4.1 (Bergeron-H-Wise)**.** *Soit M^n une n-variété compacte sans bord à courbure constante $\kappa = -1$, arithmétique de type simple. Supposons que $C^k \to M^n$ est une immersion totalement géodésique d'une k-variété compacte connexe à $\kappa = -1$.*

Alors il existe un revêtement fini $N^n \to M^n$ pointé, tel que $C^k \to M^n$ se relève en un plongement isométrique $C^k \to N^n$, et l'image de la classe fondamentale $[C^k]$ est non triviale dans $H_k(N^n)$ (en fait l'application induite $H_*(C^k) \to H_*(N^n)$ est injective).

En effet

1) Le groupe fondamental de toute variété compacte sans bord à courbure constante $\kappa = -1$, arithmétique de type simple, est virtuellement spécial.

Puis on utilise à nouveau :

2) Les sous-groupes quasi-convexes sont des rétracts virtuels.

5. Biordonnabilité virtuelle, diviseurs de 0.

Théorème 5.1. *Soit G un groupe virtuellement spécial . Alors G a un sous-groupe d'indice fini qui est biordonnable.*

En effet G a un sous-groupe d'indice fini qui est dans un groupe d'Artin à angles droits, or ces groupes sont résiduellement nilpotents sans torsion.

En fait un groupe d'Artin à angles droits se plonge dans un corps (non commutatif), et c'est ce plongement qui permet d'une part de voir " résiduellement nilpotents sans torsion", mais aussi cela donne pas de diviseurs de 0 dans l'algèbre du groupe.